Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Золотарёв, Модельные представления систем самосопряженных операторов, удовлетворяющих коммутационным соотношениям, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 10, 59–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7571>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:16:42

УДК 517.983.248

В. А. Золотарёв

**Модельные представления
систем самосопряженных операторов,
удовлетворяющих коммутационным соотношениям**

Для системы $\{B_k\}_1^n$ линейных ограниченных самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H , таких, что

$$[B_k, B_s] = \frac{i}{2} \varphi^* R_{k,s}^- \varphi, \quad \sigma_k \varphi B_s - \sigma_s \varphi B_k = R_{k,s}^+ \varphi, \\ \sigma_k \varphi \varphi^* \sigma_s - \sigma_s \varphi \varphi^* \sigma_k = 2i R_{k,s}^-, \quad 1 \leq k, s \leq n,$$

где φ – линейный оператор, действующий из H в гильбертово пространство E , а $\{\sigma_k, R_{k,s}^\pm\}_1^n$ – самосопряженные операторы в E , построены модельные представления. Найдена реализация этих моделей в пространствах функций на римановой поверхности и описан полный набор инвариантов для системы $\{B_k\}_1^n$.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: системы самосопряженных операторов, коммутационные соотношения, модельные представления.

Введение

Изучение класса несамосопряженных операторов и построение соответствующих модельных представлений для них (треугольных и функциональных) базируется на аналитических свойствах характеристических функций (см. [1], [2]). Хорошо известно, что характеристическая функция является дробно-линейным преобразованием от неванлинновской функции, которая, в свою очередь, представляет собой сужение на подпространство неэрмитовости резольвенты реальной части основного оператора (см. [2]). Для коммутативных систем линейных ограниченных несамосопряженных операторов, которые содержат диссипативный оператор, также построены как функциональные, так и треугольные модели (см. [3], [4]). В основе этого метода построения лежит анализ основных свойств характеристической функции. При этом важно отметить, что модельная реализация осуществляется в классе мероморфных функций на римановой поверхности. В работе изучается система самосопряженных ограниченных операторов, которую образуют реальные части коммутативной системы линейных несамосопряженных ограниченных операторов.

Пусть $\{A_k\}_1^n$ является коммутативной системой линейных ограниченных несамосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H .

Реальные части $2(A_k)_R = A_k + A_k^*$, $1 \leq k \leq n$, этих операторов удовлетворяют определенным коммутационным соотношениям, а именно,

$$\begin{aligned} (A_k)_R, (A_s)_R &= \frac{i}{2} \varphi^* R_{k,s}^- \varphi, & \sigma_k \varphi (A_s)_R - \sigma_s \varphi (A_k)_R &= R_{k,s}^+ \varphi, \\ \sigma_k \varphi \varphi^* \sigma_s - \sigma_s \varphi \varphi^* \sigma_k &= 2i R_{k,s}^-, & 1 \leq k, s \leq n, \end{aligned} \quad (0.1)$$

где φ – линейный оператор, действующий из H в гильбертово пространство E , а $\{\sigma_k, R_{k,s}^\pm\}_1^n$ – самосопряженные операторы в E , причем $R_{k,s}^\pm = -R_{s,k}^\pm$, $1 \leq k, s \leq n$. Анализ основных свойств неванлинновской функции

$$V_1(\lambda) = \varphi((A_1)_R - \lambda I)^{-1} \varphi^*,$$

вытекающих из приведенных выше коммутационных соотношений для $(A_k)_R$, $1 \leq k \leq n$, позволяет построить модельную реализацию системы самосопряженных операторов $\{(A_k)_R\}_1^n$ в терминах $\{\sigma_k, R_{k,s}^\pm\}_1^n$. При этом оказывается, что $(A_1)_R$ представляется оператором умножения на независимую переменную, а остальные $(A_k)_R$, $2 \leq k \leq n$, являются суммой оператора умножения на линейный пучок операторов и интегрального оператора типа преобразования Гильберта. Данные модели имеют разумную реализацию в пространствах мероморфных функций на римановых поверхностях. Таким образом, выделен класс систем самосопряженных линейных ограниченных операторов, удовлетворяющих определенным коммутационным соотношениям, для которых существуют модельные представления, и описан полный набор инвариантов для этих систем операторов.

Построенные модельные представления системы самосопряженных операторов $\{B_1, B_2\}$, для которых имеют место соотношения

$$\begin{aligned} [B_1, B_2] &= \frac{i}{2} \varphi^* R^- \varphi, & \sigma_1 \varphi B_2 - \sigma_2 \varphi B_1 &= R^+ \varphi, \\ \sigma_1 \varphi \varphi^* \sigma_2 - \sigma_2 \varphi \varphi^* \sigma_1 &= 2i R^- \end{aligned} \quad (0.2)$$

(здесь $n = 2$ и $R^\pm = R_{1,2}^\pm(1)$), имеют самостоятельный интерес и аналогичны известному результату Неймана–Стоуна, касающегося описания неприводимых представлений коммутационного соотношения Гейзенберга для операторов координаты и импульса в квантовой механике. Отметим, что решение первого из равенств в (0.2) неоднозначно: если $[B_1, B_2] = \frac{i}{2} \varphi^* R^- \varphi$, то и система операторов $\{B_1, B_2 + C\}$ также удовлетворяет этому соотношению, где C – произвольный самосопряженный оператор, коммутирующий с B_1 . Справедливость двух других равенств в (0.2) позволяет устранить эту неопределенность, что и составляет содержание теоремы 12. Изложенные выше аргументы являются разумным обоснованием отдельного изучения самосопряженных операторов, удовлетворяющих условиям (0.1) (или (0.2)), тем более, что первые из равенств в (0.1) (или в (0.2)) встречаются в квантовой механике и теории поля.

Что же касается применения полученных модельных реализаций самосопряженных операторов, удовлетворяющих условиям (0.1) (или (0.2)), то они могут быть использованы как в теории спектральных представлений многопараметрических полугрупп, порождаемых данной системой операторов, так и в задаче нахождения когерентных состояний квантовомеханических систем (см. [5]).

Вторым направлением использования построенных моделей является теория рассеяния. Пусть система самосопряженных операторов $\{B_1, B_2\}$ такова, что имеют место соотношения (0.2). Аналогично тому, как это делается в квантовой механике, построим по $\{B_1, B_2\}$ операторы рождения $a^+ = B_2 - iB_1$ и уничтожения $a = B_2 + iB_1$. Тогда самосопряженный оператор $L = a^+a$ является возмущением самосопряженного оператора $L_0 = B_1^2 + B_2^2$, так как

$$L = L_0 + \frac{1}{2}\varphi^* R^- \varphi.$$

Если оператор R^- ядерный, то для пары самосопряженных операторов L_0, L мы можем, следуя схеме рассеяния Като–Бирмана, явно вычислить матрицу рассеяния S и доказать формулу следов М.Г. Крейна. Заслуживает особого внимания изучение этого круга вопросов при использовании построенных модельных реализаций на римановых поверхностях. Однако данная область исследований выходит за рамки настоящей статьи и соответствующие вопросы будут рассмотрены в следующих работах.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Рассмотрим коммутативную систему линейных ограниченных несамосопряженных операторов $\{A_k\}_1^n$, $[A_k, A_s] = 0$, $1 \leq k, s \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, которые действуют в гильбертовом пространстве H . Пусть задан линейный оператор φ , отображающий H в гильбертово пространство E , причем в E определены линейные ограниченные операторы $\{\sigma_k\}_1^n$, $\{\gamma_{k,s}^\pm\}_1^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [3], [4]). Совокупность

$$\Delta = (\{A_k\}_1^n; H; \varphi; E; \{\sigma_k\}_1^n; \{\gamma_{k,s}^-\}_1^n; \{\gamma_{k,s}^+\}_1^n) \quad (1.1)$$

называется *коммутативным узлом*, если для любых k и s , $1 \leq k, s \leq n$, выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 1) & [A_k, A_s] = 0, \\ 2) & A_k - A_k^* = i\varphi^* \sigma_k \varphi, \quad \sigma_k = \sigma_k^*, \\ 3) & \sigma_k \varphi A_s^* - \sigma_s \varphi A_k^* = \gamma_{k,s}^- \varphi, \quad \gamma_{k,s}^- = -\gamma_{s,k}^- = (\gamma_{k,s}^-)^*, \\ 4) & \gamma_{k,s}^+ = \gamma_{k,s}^- + i(\sigma_k \varphi \varphi^* \sigma_s - \sigma_s \varphi \varphi^* \sigma_k). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Нетрудно показать, что для произвольной коммутативной системы $\{A_k\}_1^n$ линейных ограниченных несамосопряженных операторов в H всегда существуют гильбертово пространство E , оператор $\varphi: H \rightarrow E$, а также совокупность $\{\sigma_k, \gamma_{k,s}^\pm\}_1^n$ в E такие, что имеют место (1.2) (см. [3], [4]). С данным узлом Δ из (1.1) принято ассоциировать открытую систему $F_\Delta = \{R_\Delta, S_\Delta\}$, которая задается уравнениями

$$R_\Delta : \begin{cases} i\partial_k h(t) + A_k h(t) = \varphi^* \sigma_k u(t), \\ 1 \leq k \leq n, \quad h(0) = h_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$S_\Delta : v(t) = u(t) - i\varphi h(t), \quad (1.4)$$

где $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $\partial_k = \partial/\partial t_k$, $1 \leq k \leq n$, $h(t)$ и $u(t)$, $v(t)$ – вектор-функции из H и E соответственно; $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}$, $h_0 \in H$ (см. [1], [3], [4]). Данная открытая система играет важную роль при построении дилатации многопараметрической полугруппы $Z_t = \exp\{i \sum_{k=0}^n t_k A_k\}$, $t \in \mathbb{R}^n$, а также при построении функциональных и треугольных моделей для коммутативных систем линейных несамосопряженных ограниченных операторов $\{A_k\}_1^n$ (см. [3], [4]).

ТЕОРЕМА 1 (см. [3], [4]). *Система уравнений (1.3) будет совместной, если только функция $u(x)$ является решением следующей системы уравнений:*

$$\{\sigma_k i \partial_s - \sigma_s i \partial_k + \gamma_{k,s}^-\} u(t) = 0, \quad 1 \leq k, s \leq n. \quad (1.5)$$

Доказательство теоремы следует из равенства смешанных производных

$$\partial_k \partial_s h(t) = \partial_s \partial_k h(t), \quad 1 \leq k, s \leq n.$$

ТЕОРЕМА 2 (см. [3], [4]). *Если $h(t)$ – решение (1.3), а $u(t)$ такова, что имеет место (1.5), то вектор-функция $v(t)$ из (1.4) удовлетворяет следующей системе уравнений:*

$$\{\sigma_k i \partial_s - \sigma_s i \partial_k + \gamma_{k,s}^+\} v(t) = 0, \quad 1 \leq k, s \leq n. \quad (1.6)$$

Если σ_1 обратим, то соотношения, исключаяющие неопределенность системы уравнений (1.5) (при $n > 2$), имеют такой вид:

$$\begin{aligned} 1) & [\sigma_1^{-1} \sigma_k, \sigma_1^{-1} \sigma_s] = 0, \\ 2) & [\sigma_1^{-1} \sigma_k, \sigma_1^{-1} \gamma_{s,1}^-] = [\sigma_1^{-1} \sigma_s, \sigma_1^{-1} \gamma_{k,1}^-], \\ 3) & [\sigma_1^{-1} \gamma_{k,1}^-, \sigma_1^{-1} \gamma_{s,1}^-] = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

при всех k, s , где $1 < k, s \leq n$ (см. [3]). Кроме того,

$$\gamma_{k,s}^- = \sigma_s \sigma_1^{-1} \gamma_{k,1}^- - \sigma_k \sigma_1^{-1} \gamma_{s,1}^-, \quad s > 1. \quad (1.8)$$

Нетрудно показать, что если для $\{\sigma_k, \gamma_{k,s}^-\}_1^n$ имеют место (1.7), (1.8), то и для совокупности $\{\sigma_k, \gamma_{k,s}^+\}_1^n$, где $\gamma_{k,s}^+$ определяются формулой (1.2), 4), также справедливы (1.7), (1.8). Из соотношений (1.7), (1.8) следует, что если $u(t)$ является решением системы уравнений

$$\{\sigma_k i \partial_1 - \sigma_1 i \partial_k + \gamma_{k,1}^-\} u(t) = 0, \quad 2 \leq k \leq n, \quad (1.9)$$

то $u(t)$ также удовлетворяет системе уравнений (1.5). Аналогичное утверждение имеет место и для $v(t)$ из (1.4).

После “преобразования Фурье” (см. [3], [4], [6]) система уравнений (1.9) принимает такой вид:

$$[\sigma_k \lambda_1 - \sigma_1 \lambda_k + \gamma_{k,1}^-] u(\lambda) = 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (1.10)$$

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. Если $\dim E = r < \infty$, то функция $u(\lambda)$, удовлетворяющая (1.10), будет ненулевой, когда точка λ принадлежит алгебраической кривой

$$\mathbb{Q}_n = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n : \mathbb{Q}_{1,k}(\lambda_1, \lambda_k) = 0, \ 2 \leq k \leq n\}, \quad (1.11)$$

где полиномы $\mathbb{Q}_{1,k}(\lambda_1, \lambda_k)$ имеют следующий вид:

$$\mathbb{Q}_{1,k}(\lambda_1, \lambda_k) \stackrel{\text{def}}{=} [\sigma_k \lambda_1 - \sigma_1 \lambda_k + \gamma_{1,k}^-], \quad 2 \leq k \leq n \quad (1.12)$$

(см. [3]). Обозначим через $S(\lambda_1) = I - i\varphi(A_1 - \lambda_1 I)^{-1}\varphi^* \sigma_1$ характеристическую функцию (см. [1]–[4]) оператора A_1 из узла Δ из (1.1). Если σ_1 обратим, то коммутативность (см. (1.2), 1)) оператора A_1 с A_k , $k \neq 1$, эквивалентна тому, что характеристическая функция $S(\lambda_1)$ удовлетворяет условиям сплетаемости

$$S(\lambda_1)\sigma_1^{-1}(\sigma_k \lambda_1 + \gamma_{1,k}^-) = \sigma_1^{-1}(\sigma_k \lambda_1 + \gamma_{1,k}^+)S(\lambda_1), \quad 2 \leq k \leq n \quad (1.13)$$

(см. [3]). Отсюда и из голоморфности и обратимости $S_1(\lambda_1)$ при $|\lambda_1| \gg 1$ следует, что полином $\mathbb{Q}_{1,k}(\lambda_1, \lambda_2)$ из (1.12) также имеет вид

$$\mathbb{Q}_{1,k}(\lambda_1, \lambda_k) = \det[\sigma_k \lambda_1 - \sigma_1 \lambda_k + \gamma_{1,k}^+], \quad 2 \leq k \leq n. \quad (1.14)$$

Таким образом, характеристическая функция $S_1(\lambda_1)$ является морфизмом E -расслоений над алгебраической кривой $\mathbb{Q}_n$ из (1.11).

Пусть $n = 2$ и предположим, что кривая $\mathbb{Q}_2$ – неособая (см. [7]). Тогда нетрудно показать, что $\dim \text{Ker}[\sigma_2 \lambda_1 - \sigma_1 \lambda_2 + \gamma_{1,2}^\pm] = 1$ (см. [3]). Обозначим через $h^\pm(P)$ векторы

$$h^\pm(P) \in \text{Ker}\{\sigma_2 \lambda_1 - \sigma_1 \lambda_2 + \gamma_{1,2}^\pm\},$$

нормированные так, что r -я компонента у $h^\pm(P)$ равна единице, где $P = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Q}_2$ из (1.11). Из условия сплетаемости (1.13) следует, что

$$S(\lambda_1(P))h^-(P) = \theta(P)h^+(P), \quad (1.15)$$

где $\theta(P)$ – скалярная мероморфная на $\mathbb{Q}_2$ функция. Функция $\theta(P)$ играет роль характеристической функции при реализации модельных представлений $\{A_1, A_2\}$ на римановой поверхности $\mathbb{Q}_2$ (см. [3]).

1.2. Как известно, при изучении несамосопряженных операторов A важную роль играет диагональ открытой системы (см. [1], [2]). Преобразование Фурье диагонали открытой системы приводит, во-первых, к неванлинновскому классу функций, который образуют сужения резольвенты действительной части A_R оператора A на подпространство неэрмитовости, а во-вторых, этот класс неванлинновских функций связан с классом характеристических функций при помощи дробно-линейного преобразования.

Осуществим аналогичные построения для открытой системы $\{R_\Delta, S_\Delta\}$ из (1.3), (1.4). Подставив $u(t) = v(t) + i\varphi h(t)$ из (1.4) в (1.3) и учтя (1.2), 2), мы получим, что

$$\begin{cases} i\partial_k h(t) + A_k^* h(t) = \varphi^* \sigma_k v(t), \\ 1 \leq k \leq n, \quad h(0) = h_0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Пусть

$$2u_d(t) = u(t) + v(t), \quad 2v_d(t) = u(t) - v(t). \quad (1.17)$$

Тогда из (1.3), (1.4) и (1.16) следует, что

$$R_d : \begin{cases} i\partial_k h(t) + (A_k)_R h(t) = \varphi^* \sigma_k u_d(t), \\ 1 \leq k \leq n, \quad h(0) = h_0, \end{cases} \quad (1.18)$$

$$S_d : v_d(t) = \frac{i}{2} \varphi h(t), \quad (1.19)$$

где $2(A_k)_R = A_k + A_k^*$, $1 \leq k \leq n$. Пару отображений R_d, S_d назовем *диагональю открытой системы* $\{R_\Delta, S_\Delta\}$ (см. (1.2), (1.3)). Отображения S_Δ из (1.4) и S_d из (1.19) связаны друг с другом посредством дробно-линейного преобразования, а именно,

$$S_d(I + S_\Delta) = I - S_\Delta. \quad (1.20)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть Δ – коммутативный узел, определенный (1.1), (1.2). Тогда система самосопряженных операторов $\{(A_k)_R\}_1^n$, $2(A_k)_R = A_k + A_k^*$, удовлетворяет следующим соотношениям:

$$[(A_k)_R, (A_s)_R] = \frac{i}{2} \varphi^* R_{k,s}^- \varphi, \quad 1 \leq k, s \leq n, \quad (1.21)$$

причем

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sigma_k \varphi (A_s)_R - \sigma_s \varphi (A_k)_R = R_{k,s}^+ \varphi, \quad 1 \leq k, s \leq n, \\ 2) \quad & \sigma_k \varphi \varphi^* \sigma_s - \sigma_s \varphi \varphi^* \sigma_k = 2i R_{k,s}^-, \quad 1 \leq k, s \leq n, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где операторы $\{R_{k,s}^\pm\}_1^n$ самосопряжены и

$$2R_{k,s}^\mp = \gamma_{k,s}^- \mp \gamma_{k,s}^+, \quad 1 \leq k, s \leq n. \quad (1.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения (1.22) вытекают из условий 3), 4) в (1.2) узла Δ из (1.1). Кроме того,

$$\begin{aligned} 4[(A_k)_R, (A_s)_R] &= A_k^* A_s - A_s^* A_k + A_k A_s^* - A_s A_k^* = i\varphi^* \gamma_{k,s}^- \varphi - i\varphi^* \gamma_{k,s}^+ \varphi \\ &= \frac{i}{2} \varphi^* R_{k,s}^- \varphi, \end{aligned}$$

что и доказывает (1.21).

§ 2. Модельные представления действительных частей коммутативных систем несамосопряженных операторов

2.1. Предположим, что вектор-функции $u_d(x)$, $v_d(x)$, $h(x)$ из диагонали открытой системы $\{R_d, S_d\}$ из (1.18), (1.19) коммутативного узла Δ из (1.1) зависят от x следующим образом:

$$u_d(x) = e^{i\langle \lambda, x \rangle} u_d, \quad v_d(x) = e^{i\langle \lambda, x \rangle} v_d, \quad h(x) = e^{i\langle \lambda, x \rangle} h,$$

где u_d , v_d и h ($= h_0$) – постоянные векторы из E и H соответственно, при этом $\langle \lambda, x \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. Из (1.18), (1.19) вытекает, что

$$\begin{cases} h = ((A_k)_R - \lambda_k I)^{-1} \varphi^* \sigma_k u_d, & 1 \leq k \leq n, \\ v_d = \frac{i}{2} \varphi h. \end{cases} \quad (2.1)$$

Пусть h и v_d в (2.1) равны

$$\begin{cases} h = ((A_1)_R - \lambda_1 I)^{-1} \varphi^* \sigma_1 u_d, \\ v_d = \frac{i}{2} \varphi h. \end{cases} \quad (2.2)$$

Выясним, при каких условиях вектор h из (2.2) также представим в виде

$$h = ((A_k)_R - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma_k u_d, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2.3)$$

Из равенства

$$((A_k)_R - \lambda_k I)^{-1} \varphi^* \sigma_k u_d = ((A_1)_R - \lambda_1 I)^{-1} \varphi^* \sigma_1 u_d$$

следует, что

$$((A_1)_R - \lambda_1 I) \varphi^* \sigma_k u_d = ((A_1)_R - \lambda_1 I) ((A_k)_R - \lambda_k I) ((A_1)_R - \lambda_1 I)^{-1} \varphi^* \sigma_1 u_d,$$

поэтому, учитывая (1.21), мы получим, что

$$\begin{aligned} & \{ (A_1)_R \varphi^* \sigma_k u_d - (A_k)_R \varphi^* \sigma_1 \} u_d + \varphi^* (\sigma_1 \lambda_k - \sigma_k \lambda_1) u_d \\ & + \frac{i}{2} \varphi^* R_{k,1}^- \varphi ((A_1)_R - \lambda_1 I)^{-1} \varphi^* \sigma_1 u_d = 0. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (1.22), (2.2), мы приходим к равенствам

$$\varphi^* [\{ \sigma_1 \lambda_k - \sigma_k \lambda_1 + R_{k,1}^+ \} u_d + R_{k,1}^- v_d] = 0.$$

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что h и v_d имеют вид (2.2). Тогда для того чтобы вектор h удовлетворял равенствам (2.3), достаточно, чтобы u_d и v_d были решениями системы уравнений*

$$\{ \sigma_1 \lambda_k - \sigma_k \lambda_1 + R_{k,1}^+ \} u_d + R_{k,1}^- v_d = 0, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2.4)$$

Определим неванлинновские (см. [1], [2]) оператор-функции

$$V_k(\lambda_k) = \varphi((A_k)_R - \lambda_k I)^{-1} \varphi^*, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2.5)$$

ТЕОРЕМА 5. *Если векторы u_d и $v_d = \frac{i}{2} V_1(\lambda_1) \sigma_1 u_d$ таковы, что при некотором $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ имеют место (2.4), то*

$$V_1(\lambda_1) \sigma_1 u_d = V_k(\lambda_k) \sigma_k u_d, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Утверждение теоремы следует из (2.1) и теоремы 4.

ТЕОРЕМА 6. *Предположим, что u_d и v_d из (2.2) при некотором $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ удовлетворяют соотношениям (2.4). Тогда*

$$\{ \sigma_1 \lambda_k - \sigma_k \lambda_1 + R_{k,1}^+ \} v_d + R_{k,1}^- u_d = 0, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} & \{\sigma_1 \lambda_k - \sigma_k \lambda_1 + R_{k,1}^+\} v_d + R_{k,1}^- u_d = \frac{i}{2} \{\sigma_1 \lambda_k - \sigma_k \lambda_1 + R_{k,1}^+\} \varphi h + R_{k,1}^- u_d \\ & = \frac{i}{2} \lambda_k \sigma_1 \varphi ((A_k)_R - \lambda_k I)^{-1} \varphi^* \sigma_k u_d - \frac{i}{2} \lambda_1 \sigma_k \varphi ((A_1)_R - \lambda_1 I)^{-1} \varphi^* \sigma_1 u_d \\ & \quad + \frac{i}{2} \{\sigma_k \varphi (A_1)_R - \sigma_1 \varphi (A_k)_R\} h + R_{k,1}^- u_d \end{aligned}$$

в силу (1.22), 1) и равенств (2.3). Используя (1.22), 2) и (2.3), мы получим, что

$$\{\sigma_1 \lambda_k - \sigma_k \lambda_1 + R_{k,1}^+\} v_d + R_{k,1}^- u_d = \frac{i}{2} (\sigma_k \varphi^* \varphi \sigma_1 - \sigma_1 \varphi \varphi^* \sigma_k) u_d + R_{k,1}^- u_d = 0,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Изучим согласованность систем уравнений (2.4) и (2.6). Предположим, что σ_1 обратим. Тогда из (2.4), (2.6) следует, что верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \lambda_k u_d &= \sigma_1^{-1} (\sigma_k \lambda_1 - R_{k,1}^+) u_d - \sigma_1^{-1} R_{k,1}^- v_d, \\ \lambda_k v_d &= \sigma_1^{-1} (\sigma_k \lambda_1 - R_{k,1}^+) v_d - \sigma_1^{-1} R_{k,1}^- u_d, \\ 1 &\leq k \leq n. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Так как

$$\begin{aligned} \lambda_s \lambda_k u_d &= \sigma_1^{-1} (\sigma_k \lambda_1 - R_{k,1}^+) \{ \sigma_1^{-1} (\sigma_s \lambda_1 - R_{s,1}^+) u_d - \sigma_1^{-1} R_{s,1}^- v_d \} \\ &\quad - \sigma_1^{-1} R_{k,1}^- \{ \sigma_1^{-1} (\sigma_s \lambda_1 - R_{s,1}^+) v_d - \sigma_1^{-1} R_{s,1}^- u_d \}, \\ \lambda_k \lambda_s u_d &= \sigma_1^{-1} (\sigma_s \lambda_1 - R_{s,1}^+) \{ \sigma_1^{-1} (\sigma_k \lambda_1 - R_{k,1}^+) u_d - \sigma_1^{-1} R_{k,1}^- v_d \} \\ &\quad - \sigma_1^{-1} R_{s,1}^- \{ \sigma_1^{-1} (\sigma_k \lambda_1 - R_{k,1}^+) v_d - \sigma_1^{-1} R_{k,1}^- u_d \}, \\ 1 &\leq k, s \leq n, \end{aligned}$$

то легко видеть, что

$$\begin{aligned} 1) & [\sigma_1^{-1} \sigma_k, \sigma_1^{-1} \sigma_s] = 0, \\ 2) & [\sigma_1^{-1} \sigma_k, \sigma_1^{-1} R_{s,1}^\pm] = [\sigma_1^{-1} \sigma_s, \sigma_1^{-1} R_{k,1}^\pm], \\ 3) & [\sigma_1^{-1} R_{k,1}^+, \sigma_1^{-1} R_{s,1}^+] = [\sigma_1^{-1} R_{s,1}^-, \sigma_1^{-1} R_{k,1}^-], \\ 4) & [\sigma_1^{-1} R_{k,1}^+, \sigma_1^{-1} R_{s,1}^-] = [\sigma_1^{-1} R_{s,1}^+, \sigma_1^{-1} R_{k,1}^-], \\ 1 &\leq k, s \leq n. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Из (2.8), 1) и из (1.22) вытекает, что

$$R_{k,s}^\pm = \sigma_s \sigma_1^{-1} R_{k,1}^\pm - \sigma_k \sigma_1^{-1} R_{s,1}^\pm, \quad 2 \leq s \leq n. \tag{2.9}$$

Самосопряженность $R_{k,s}^\pm$ из (2.9) обеспечивают соотношения 2) в (2.8). Отметим, что (2.8), (2.9) эквивалентны соотношениям (1.7), (1.8), если учесть (1.23).

ТЕОРЕМА 7. *Предположим, что u_d и v_d являются решениями систем уравнений (2.4), (2.6), оператор σ_1 обратим, имеют место (2.8), (2.9). Тогда u_d и v_d удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\begin{aligned} \{\sigma_s \lambda_k - \sigma_k \lambda_s + R_{k,s}^+\} u_d + R_{k,s}^- v_d = 0, \quad \{\sigma_s \lambda_k - \sigma_k \lambda_s + R_{k,s}^+\} v_d + R_{k,s}^- u_d = 0, \\ 1 \leq k, s \leq n. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Доказательство теоремы следует из (2.7).

Определим в гильбертовом пространстве $E \oplus E$ самосопряженные операторы

$$\hat{\sigma}_k = \begin{bmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{bmatrix}, \quad \hat{R}_{k,s} = \begin{bmatrix} R_{k,s}^+ & R_{k,s}^- \\ R_{k,s}^- & R_{k,s}^+ \end{bmatrix}, \quad 1 \leq k, s \leq n. \quad (2.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Самосопряженные операторы $\hat{\sigma}_k, \hat{R}_{k,s}, 1 \leq k, s \leq n$, из (2.11) коммутируют с инволюцией J , т.е.

$$\hat{\sigma}_k J = J \hat{\sigma}_k, \quad \hat{R}_{k,s} J = J \hat{R}_{k,s}, \quad 1 \leq k, s \leq n, \quad (2.12)$$

где J определяется так:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Верно и обратное утверждение. Если самосопряженные операторы $\{\hat{\sigma}_k, \hat{R}_{k,s}\}_1^n$ коммутируют с инволюцией J из (2.13), где $\hat{\sigma}_k$ диагональны, то операторы $\hat{\sigma}_k, \hat{R}_{k,s}, 1 \leq k, s \leq n$, имеют вид (2.11), причем σ_k и $R_{k,s}^\pm, 1 \leq k, s \leq n$, самосопряжены.

Равенства (2.10) в терминах $\{\hat{\sigma}_k, \hat{R}_{k,s}\}_1^n$ из (2.11) можно переписать в следующей форме:

$$\{\hat{\sigma}_s \lambda_k - \hat{\sigma}_k \lambda_s + \hat{R}_{k,s}\} \begin{bmatrix} u_d \\ v_d \end{bmatrix} = 0, \quad 1 \leq k, s \leq n. \quad (2.14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если σ_1 обратим, то

$$\lambda_k \begin{bmatrix} u_d \\ v_d \end{bmatrix} = \hat{\sigma}_1^{-1} (\hat{\sigma}_k \lambda_1 - \hat{R}_{k,1}) \begin{bmatrix} u_d \\ v_d \end{bmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

и, следовательно, линейные пучки $\{\hat{\sigma}_1^{-1} (\hat{\sigma}_k \lambda_1 - \hat{R}_{k,1})\}_1^n$ перестановочны. Поэтому

$$\begin{aligned} 1) [\hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}_k, \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}_s] &= 0, \\ 2) [\hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}_k, \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{R}_{s,1}] &= [\hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}_s, \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{R}_{k,1}], \\ 3) [\hat{\sigma}_1^{-1} \hat{R}_{k,1}, \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{R}_{s,1}] &= 0, \\ 1 \leq k \leq n, \end{aligned} \quad (2.15)$$

причем

$$\hat{R}_{k,s} = \hat{\sigma}_s \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{R}_{k,1} - \hat{\sigma}_k \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{R}_{s,1}, \quad 2 \leq s \leq n. \quad (2.16)$$

Легко видеть, что (2.15), (2.16) эквивалентны равенствам (2.8), (2.9).

2.2. Для системы линейных ограниченных самосопряженных операторов $\{(A_k)_R\}_1^n$, удовлетворяющих (1.21), (1.22), определим подпространство H_1 в H ,

$$H_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}\{P((A_1)_R, \dots, (A_n)_R)\varphi^*E : P(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{P}(\{\lambda_k\}_1^n)\}, \quad (2.17)$$

где $\mathbb{P}(\{\lambda_k\}_1^n)$ – кольцо полиномов от n некоммутирующих переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ над полем $\mathbb{C}$. Очевидно, что H_1 инвариантно относительно каждого из операторов $(A_k)_R$, $1 \leq k \leq n$. Следовательно, H_1 из (2.17) приводит систему $\{(A_k)_R\}_1^n$. Кроме того, сужение $\{(A_k)_R\}_1^n$ на $H_0 = H \ominus H_1$ является коммутативной системой операторов, для которой условия (1.21) и (1.22), 1) выполняются автоматически, так как $H_0 \subset \text{Ker } \varphi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Систему линейных ограниченных самосопряженных операторов $\{(A_k)_R\}_1^n$, для которой имеют место (1.21), (1.22), назовем *простой системой операторов*, если $H = H_1$ (см. (2.17)). Когда $H \neq H_1$, то сужение $\{(A_k)_R\}_1^n$ на приводящее подпространство H_1 будем называть *простой частью системы* $\{(A_k)_R\}_1^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Предположим, что заданы две системы линейных ограниченных самосопряженных операторов $\{(A_k)_R\}_1^n$ в H и $\{(A'_k)_R\}_1^n$ в H' соответственно. Пусть заданы гильбертовы пространства E и E' , а также линейные ограниченные операторы $\varphi: H \rightarrow E$ и $\varphi': H' \rightarrow E'$ такие, что имеют место (1.21), (1.22) для некоторых самосопряженных операторов $\{\sigma_k, R_{k,s}^\pm\}_1^n$ в E и $\{\sigma'_k, R'_{k,s}{}^\pm\}_1^n$ в E' . Назовем системы $\{(A_k)_R\}_1^n$ и $\{(A'_k)_R\}_1^n$ *унитарно эквивалентными*, если $E = E'$, $\sigma_k = \sigma'_k$, $R_{k,s}^\pm = R'_{k,s}{}^\pm$, $1 \leq k, s \leq n$, и существует такой унитарный оператор $U: H \rightarrow H'$, что $U(A_k)_R = (A'_k)_R U$, $1 \leq k \leq n$, $\varphi'U = \varphi$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть заданы простые системы линейных ограниченных самосопряженных операторов $\{(A_k)_R\}_1^n$ в H и $\{(A'_k)_R\}_1^n$ в H' , удовлетворяющие (1.21), (1.22), причем $E = E'$ и $\sigma_k = \sigma'_k$, $R_{k,s}^\pm = R'_{k,s}{}^\pm$, $1 \leq k, s \leq n$. Тогда если σ_1 обратим и $V_1(\lambda_1) = V'_1(\lambda_1)$ (см. (2.5)), то системы $\{(A_k)_R\}_1^n$ и $\{(A'_k)_R\}_1^n$ унитарно эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $V_1(\lambda_1) = V'_1(\lambda_1)$ следует, что

$$\varphi(A_1)_R^n \varphi^* = \varphi'(A'_1)_R^n \varphi'^*, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Учитывая (1.22), 1), равенство $\sigma_1^{-1} \sigma_k \varphi(A_1)_R - \sigma_1^{-1} R_{k,1}^+ \varphi = \varphi(A_k)_R$ и аналогичное ему соотношение для штрихованных операторов, мы получим, что

$$\varphi(A_k)_R (A'_1)_R^n \varphi^* = \varphi'(A'_k)_R (A'_1)_R^n \varphi'^*, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Используя коммутационное соотношение (1.21) и повторяя данную процедуру необходимое число раз, мы приходим к тому, что

$$\varphi P((A_1)_R, (A_k)_R) \varphi^* = \varphi' P((A'_1)_R, (A'_k)_R) \varphi'^*,$$

где $P(\lambda_1, \lambda_k)$ – произвольный полином от некоммутирующих переменных λ_1 и λ_k . Повторяя данные рассуждения, касающиеся остальных операторов $(A_s)_R$, мы получим, что

$$\varphi P((A_1)_R, \dots, (A_n)_R) \varphi^* = \varphi' P((A'_1)_R, \dots, (A'_n)_R) \varphi'^*$$

для произвольного полинома $P(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{P}(\{\lambda_k\}_1^n)$. Зададим изометрический оператор U из H в H' так:

$$UP((A_1)_R, \dots, (A_n)_R)\varphi^*g = P((A'_1)_R, \dots, (A'_n)_R)\varphi'^*,$$

где $g \in E$ и $P(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{P}(\{\lambda_k\}_1^n)$. Из простоты систем $\{(A_k)_R\}_1^n$ и $\{(A'_k)_R\}_1^n$ следует унитарность U . Условия $U(A_k)_R = (A'_k)_R U$, $1 \leq k \leq n$, и $\varphi'U = \varphi$ вытекают из определения оператора U .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из доказательства теоремы следует, что в случае обратимости σ_1 подпространство H_1 (см. (2.17)) порождает оператор $(A_1)_R$,

$$H_1 = \text{span}\{(A_1)_R^n \varphi^* E : n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Совокупность

$$\{V_1(\lambda_1); \{\sigma_k\}_1^n; \{R_{k,s}^\pm\}_1^n\} \quad (2.18)$$

является полным набором инвариантов системы операторов $\{(A_k)\}_1^n$, где σ_1 обратим, а $V_1(\lambda_1)$ – неванлиновская функция (см. (2.5)).

2.3. Перейдем к изучению свойств набора инвариантов (2.18). Считая, что σ_1 обратим, подставим $v_d = \frac{i}{2}V_1(\lambda_1)\sigma_1 u_d$ из (2.2) в (2.7). Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_k u_d &= \sigma_1^{-1}(\sigma_k \lambda_1 - R_{k,1}^+)u_d - \frac{i}{2}\sigma_1^{-1}R_{k,1}^- V_1(\lambda_1)\sigma_1 u_d, \\ \frac{i}{2}\lambda_k V_1(\lambda_1)\sigma_1 u_d &= \sigma_1^{-1}(\sigma_k \lambda_1 - R_{k,1}^+)\frac{i}{2}V_1(\lambda_1)\sigma_1 u_1 - \sigma_1^{-1}R_{k,1}^- u_d, \\ 1 &\leq k \leq n. \end{aligned}$$

Применяя к первому из этих равенств $\frac{i}{2}V_1(\lambda_1)\sigma_1$ и вычитая из него второе равенство, мы получим, что

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}V_1(\lambda_1)\sigma_1^{-1}(\sigma_k \lambda_1 - R_{k,1}^+)u_d - \frac{i}{2}\sigma_1^{-1}(\sigma_k \lambda_1 - R_{k,1}^+)V_1(\lambda_1)\sigma_1 u_d + \sigma_1^{-1}R_{k,1}^- u_d \\ + \frac{1}{4}V_1(\lambda_1)R_{k,1}^- V_1(\lambda_1)\sigma_1 u_d = 0, \quad 2 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 9. Если σ_1 обратим, то функция $V_1(\lambda_1) = \varphi((A_1)_R - \lambda_1 I)^{-1}\varphi^*$ из (2.5) удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} V_1(\lambda_1)(\sigma_k \lambda_1 - R_{k,1}^+)\sigma_1^{-1} - \sigma_1^{-1}(\sigma_k \lambda_1 - R_{k,1}^+)V_1(\lambda_1) \\ = 2i\sigma_1^{-1}R_{k,1}^-\sigma_1^{-1} + \frac{i}{2}V_1(\lambda_1)R_{k,1}^- V_1(\lambda_1), \quad 2 \leq k \leq n. \end{aligned} \quad (2.19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Равенства (2.19) можно записать в таком виде:

$$\begin{aligned} \sigma_1 V_1(\lambda_1)(\sigma_k \lambda_1 - R_{k,1}^+) - (\sigma_k \lambda_1 - R_{k,1}^+)V_1(\lambda_1)\sigma_1 \\ = 2iR_{k,1}^- + \frac{i}{2}\sigma_1 V_1(\lambda_1)R_{k,1}^- V_1(\lambda_1)\sigma_1, \quad 2 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Доказательство этих соотношений нетрудно провести непосредственными выкладками, используя условия (1.21), (1.22), при этом обратимость σ_1 не является обязательной. Равенства (2.19) следует рассматривать как дополнительные соотношения на неванлинновскую функцию, которые вытекают из (1.21), (1.22).

Функция $V_1(\lambda) = \varphi((A_1)_R - \lambda I)^{-1} \varphi^*$ из (2.5) имеет следующее интегральное представление:

$$V_1(\lambda) = \int_a^b \frac{dF_t}{t - \lambda}, \quad \lambda \notin [a, b], \quad (2.20)$$

где $F_t = \varphi E_t \varphi^*$, а E_t – разложение единицы самосопряженного оператора $(A_1)_R$, спектр которого $\sigma((A_1)_R)$ принадлежит конечному отрезку $[a, b]$ (см. [2]). Подставим (2.20) в (2.19). Тогда получим, что

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{dF_t}{t - \lambda} (\sigma_k \lambda - R_{k,1}^+) \sigma_1^{-1} - \sigma_1^{-1} (\sigma_k \lambda - R_{k,1}^+) \int_a^b \frac{dF_t}{t - \lambda} \\ &= 2i \sigma_1^{-1} R_{k,1}^- \sigma_1^{-1} + \frac{i}{2} \int_a^b \frac{dF_t}{t - \lambda} R_{k,1}^- \int_a^b \frac{dF_s}{s - \lambda}, \quad 2 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Учитывая очевидное тождество

$$\frac{1}{(t - \lambda)(s - \lambda)} = \frac{1}{s - t} \left(\frac{1}{t - \lambda} - \frac{1}{s - \lambda} \right),$$

мы приходим к тому, что

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{dF_t}{t - \lambda} (\sigma_k t - R_{k,1}^+) \sigma_1^{-1} - \int_a^b \sigma_1^{-1} (\sigma_k t - R_{k,1}^+) \frac{dF_t}{t - \lambda} + \sigma_1^{-1} \sigma_k \Delta F - \Delta F \sigma_k \sigma_1^{-1} \\ &= 2i \sigma_1^{-1} R_{k,1}^- \sigma_1^{-1} + \frac{i}{2} \int_a^b \frac{dF_t}{t - \lambda} R_{k,1}^- \int_a^b \frac{dF_s}{s - t} - \frac{i}{2} \int_a^b \frac{dF_t}{s - t} R_{k,1}^- \int_a^b \frac{dF_s}{s - \lambda}, \\ & \quad 2 \leq k \leq n, \end{aligned}$$

где $\Delta F = F_b - F_a = \varphi \varphi^*$. Из (1.22), 2) следует, что

$$\sigma_1^{-1} \sigma_k \Delta F - \Delta F \sigma_k \sigma_1^{-1} = 2i \sigma_1^{-1} R_{k,1}^- \sigma_1^{-1}.$$

Корректность двух последних выражений правой части состоит в условиях на F_t , которые бы обеспечивали существование преобразования Гильберта меры dF_t ,

$$H(F)(x) \stackrel{\text{def}}{=} v.p. \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{dF_t}{t - x}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Как известно, если F_x почти всюду дифференцируема (в смысле Радона–Никодима), то ее преобразование Гильберта $H(F)(x)$ существует при почти всех $x \in [a, b]$ (см. [8], [9]).

В результате мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 10. *Предположим, что оператор σ_1 обратим, а F_t из интегрального представления $V_1(\lambda)$ (см. (2.20)) дифференцируема почти всюду. Тогда если $V_1(\lambda)$ удовлетворяет равенствам (2.19), то*

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{dF_t}{t-\lambda} \left\{ (\sigma_k t - R_{k,1}^+) \sigma_1^{-1} - \frac{i}{2} R_{k,1}^- \int_a^b \frac{dF_s}{s-t} \right\} \\ &= \int_a^b \left\{ \sigma_1^{-1} (\sigma_k t - R_{k,1}^+) + \frac{i}{2} \int_a^b \frac{dF_s}{s-t} R_{k,1}^- \right\} \frac{dF_t}{t-\lambda}, \quad 2 \leq k \leq n, \end{aligned} \quad (2.21)$$

при всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [a, b]$.

Рассмотрим линейное многообразие $C_{(a,b)}(E)$, образованное E -значными непрерывными функциями $f(x)$, $x \in [a, b]$. Гильбертово пространство

$$L_{(a,b)}^2(E, F_x) = \left\{ f(x) : \int_a^b \langle dF_x f(x), f(x) \rangle_E < \infty \right\} \quad (2.22)$$

представляет собой замыкание линейной оболочки $C_{(a,b)}(E)$ в метрике (2.22) с последующей факторизацией по ядру метрики. Из (2.21) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_a^b dF_t \left\{ (\sigma_k t - R_{k,1}^+) \sigma_1^{-1} - \frac{i}{2} R_{k,1}^- \int_a^b \frac{dF_s}{s-t} \right\} f(t) \\ &= \int_a^b \left\{ \sigma_1^{-1} (\sigma_k t - R_{k,1}^+) + \frac{i}{2} \int_a^b \frac{dF_s}{s-t} R_{k,1}^- \right\} dF_t f(t), \quad 2 \leq k \leq n, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $f(x) \in L_{(a,b)}^2(E, F_x)$. Зададим в $L_{(a,b)}^2(E, F_x)$ систему линейных операторов

$$\begin{aligned} & ((\tilde{A}_1)Rf)(x) = xf(x), \\ & ((\tilde{A}_k)Rf)(x) = (\sigma_k x - R_{k,1}^+) \sigma_1^{-1} f(x) + \frac{i}{2} R_{k,1}^- \int_a^b dF_t \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$2 \leq k \leq n$, $f(x) \in L_{(a,b)}^2(E, F_x)$. Оператор $(\tilde{A}_1)_R$ самосопряжен и ограничен в $L_{(a,b)}^2(E, F_x)$ в силу конечности носителя меры dF_t . Остальные операторы $(\tilde{A}_k)_R$, $2 \leq k \leq n$, мы пока зададим на плотном множестве $\mathfrak{D}$ в $L_{(a,b)}^2(E, F_x)$. В качестве $\mathfrak{D}$ можно, например, взять линейное многообразие полиномов. Определим линейный ограниченный оператор $\tilde{\varphi}: L_{(a,b)}^2(E, F_x) \rightarrow E$ так:

$$\tilde{\varphi}f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b dF_x f(x), \quad (2.25)$$

$f(x) \in L_{(a,b)}^2(E, F_x)$. Очевидно, что $\tilde{\varphi}^*g = g(x)$, где $g(x)$ – постоянная на $[a, b]$ функция, значение которой равно $g \in E$.

ТЕОРЕМА 11. *Предположим, что оператор-функция $V_1(\lambda)$ из (2.20) такова, что*

- 1) оператор-функция F_t дифференцируема почти всюду,
- 2) для неубывающей ограниченной неотрицательной функции F_t справедлива оценка $m\|g\|^2 \leq \langle \Delta F g, g \rangle \leq M\|g\|^2$, $g \in E$, $(\Delta F = F_b - F_a, m > 0, M > 0)$,

3) $V_1(\lambda)$ из (2.20) удовлетворяет соотношениям (2.19), при этом для совокупности самосопряженных операторов $\{\sigma_k, R_{k,s}^\pm\}_1^n$ имеют место (2.8), (2.9), а σ_1 обратим.

Тогда $\{(\tilde{A}_k)_R\}_1^n$ из (2.24) является системой ограниченных самосопряженных операторов в $L_{(a,b)}^2(E, F_x)$ (см. (2.22)), для которой выполняются условия (1.21), (1.22), где $\tilde{\varphi}$ имеет вид (2.25). Кроме того, функция $\tilde{V}_1(\lambda) = \tilde{\varphi}((\tilde{A}_1)_R - \lambda I)^{-1} \tilde{\varphi}^*$ совпадает с $V_1(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$((\tilde{A}_1)_R - \lambda I)^{-1} \tilde{\varphi}^* g = \frac{1}{x - \lambda} g(x),$$

где $g(x)$ – постоянная функция на $[a, b]$, значение которой равно $g \in E$, то, учитывая (2.25), мы получим, что

$$\tilde{V}_1(\lambda)g = \int_a^b \frac{dF_x}{x - \lambda} g, \quad g \in E,$$

что и доказывает последнее утверждение теоремы.

Выберем компакт K в $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ такой, что $|x\lambda^{-1}| < 1$, $x \in [a, b]$, $\lambda \in K$. Рассмотрим плотное линейное многообразие в $L_{(a,b)}^2(E, F_x)$, которое образуют вектор-функции

$$g(x, \lambda) = \frac{1}{x - \lambda} g, \quad g \in E, \quad x \in [a, b], \quad \lambda \in K. \quad (2.26)$$

Очевидно, что этому многообразию принадлежат все E -значные полиномы, что и гарантирует его плотность в $L_{(a,b)}^2(E, F_k)$. Обозначим через d_+ (d_-) наибольшее (соответственно наименьшее) значение выражения $|x - \lambda|$, когда точки x и λ пробегает соответственно компакты $[a, b]$ и K в $\mathbb{C}$. Тогда для выражения

$$\|g(x, \lambda)\|^2 = \int_a^b \frac{1}{|x - \lambda|^2} \langle dF_x g, g \rangle$$

в силу предположения 2) теоремы мы получим следующую двустороннюю оценку:

$$\frac{m}{d_+^2} \|g\|^2 \leq \|g(x, \lambda)\|^2 \leq \frac{M}{d_-^2} \|g\|^2. \quad (2.27)$$

Чтобы доказать ограниченность каждого из операторов $(\tilde{A}_k)_R$, $2 \leq k \leq n$, из (2.24), достаточно установить ограниченность каждого из слагаемых в (2.24). Так как

$$\|(\sigma_k x - R_{k,1}^+) \sigma_1^{-1} g(x, \lambda)\|^2 \leq \int_a^b \frac{1}{|x - \lambda|^2} \langle L_k^*(x) dF_x L_k(x) g, g \rangle,$$

где $L_k(x) = (\sigma_k x - R_{k,1}^+) \sigma_1^{-1}$, то, учитывая соотношение

$$L_k^*(x) dF_x L_k(x) = d\{L_k(x) F_x L_k(x)\} - \sigma_1^{-1} \sigma_k F_x L_k(x) dx - L_k^*(x) F_x \sigma_k \sigma_1^{-1} dx,$$

мы получим, что

$$\begin{aligned} \|(\sigma_k x - h_{k,1}^+) \sigma_1^{-1} g(x, \lambda)\|^2 &\leq \frac{1}{d_-^2} \langle L_k^*(x) F_x L_k(x) g, g \rangle \Big|_a^b \\ &+ \frac{1}{d_-^2} \int_a^b |\langle \sigma_1^{-1} \sigma_k F_x L_k(x) g, g \rangle| dx + \frac{1}{d_-^2} \int_a^b |\langle L_k^*(x) F_x \sigma_k \sigma_1^{-1} g, g \rangle| dx. \end{aligned}$$

Используя равномерную ограниченность $L_k(x)$ и F_x при $x \in [a, b]$, мы в силу (2.27) приходим к тому, что

$$\|(\sigma_k x - R_{k,1}^+) \sigma_1^{-1} g(x, \lambda)\|^2 \leq \frac{C_k}{d_-^2} \|g\|^2 \leq \frac{C_k d_+^2}{m d_-^2} \|g(x, \lambda)\|^2,$$

где C_k не зависит от $g(x, \lambda)$. Докажем ограниченность второго слагаемого в формуле для $(\tilde{A}_k)_R$ из (2.24). Так как

$$\int_a^b dF_t \frac{g(t, \lambda) - g(x, \lambda)}{t - x} = -\frac{1}{x - \lambda} \int_a^b dF_t \frac{1}{t - \lambda} g = -\frac{1}{x - \lambda} V_1(\lambda) g,$$

то

$$\begin{aligned} \left\| R_{k,1}^- \int_a^b dF_t \frac{g(t, x) - g(x, \lambda)}{t - x} \right\|^2 &= \int_a^b \frac{1}{|x - \lambda|^2} \langle dF_x R_{k,1}^- V_1(\lambda) g, R_{k,1}^- V_1(\lambda) g \rangle \\ &\leq \frac{M}{d_-^2} \|R_{k,1}^- V_1(\lambda) g\|^2. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\|V_1(\lambda) g\|^2 = \int_a^b \int_a^b \frac{1}{(t - \lambda)(s - \bar{\lambda})} \langle dF_t g, dF_s g \rangle \leq \frac{1}{d_-^2} \|g\|^2$$

в силу ограниченности ΔF , мы, используя (2.27), получим оценки

$$\left\| R_{k,1}^- \int_a^b dF_t \frac{g(t, \lambda) - g(x, \lambda)}{t - x} \right\|^2 \leq \frac{D_k d_+^2}{m d_-^4} \|g(x, \lambda)\|^2.$$

Эти оценки и обеспечивают ограниченность каждого из операторов $(\tilde{A}_k)_R$, $2 \leq k \leq n$, из (2.24) на всюду плотном множестве $g(x, \lambda)$ (см. (2.26)), а значит, и в $L_{(a,b)}^2(E, F_x)$.

Докажем самосопряженность $(\tilde{A}_k)_R$, $2 \leq k \leq n$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \langle (\tilde{A}_k)_R f, g \rangle &= \int_a^b \langle dF_x ((\tilde{A}_k)_R f)(x), g(x) \rangle_E \\ &= \int_a^b \left\langle dF_x \left\{ (\sigma_k x - R_{k,1}^+) \sigma_1^{-1} f(x) + \frac{i}{2} R_{k,1}^- \int_a^b dF_t \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right\}, g(x) \right\rangle_E \\ &= \int_a^b \left\langle dF_x \left\{ (\sigma_k x - R_{k,1}^+) \sigma_1^{-1} - \frac{i}{2} R_{k,1}^- \int_a^b \frac{dF_t}{t - x} \right\} f(x), g(x) \right\rangle_E \\ &\quad + \frac{i}{2} \int_a^b \left\langle dF_x R_{k,1}^- \int_a^b \frac{dF_t f(t)}{t - x}, g(x) \right\rangle_E. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования во втором слагаемом и учитывая (2.23), мы получим, что

$$\begin{aligned} \langle (\tilde{A}_k)_R f, g \rangle &= \int_a^b \left\langle \left\{ \sigma_1^{-1}(\sigma_k x - R_{k,1}^+) + \frac{i}{2} \int_a^b \frac{dF_t}{t-x} R_{k,1}^- \right\} dF_x f(x), g(x) \right\rangle_E \\ &\quad - \frac{i}{2} \int_a^b \left\langle dF_x f(x), R_{k,1}^- \int_a^b \frac{dF_t g(t)}{t-x} \right\rangle_E = \langle f, (\tilde{A}_k)_R g \rangle, \\ 2 &\leq k \leq n. \end{aligned}$$

Для доказательства (2.22), 1) достаточно в силу (2.8), (2.9) установить, что имеют место следующие соотношения:

$$\sigma_k \tilde{\varphi}(\tilde{A}_1)_R - \sigma_1 \tilde{\varphi}(\tilde{A}_k)_R = R_{k,1}^+ \tilde{\varphi}, \quad 2 \leq k \leq n.$$

Воспользовавшись (2.23), найдем, что

$$\begin{aligned} \{ \sigma_k \tilde{\varphi}(\tilde{A}_1)_R - \sigma_1 \tilde{\varphi}(\tilde{A}_k)_R - R_{k,1}^+ \tilde{\varphi} \} f(x) &= \sigma_k \int_a^b dF_x x f(x) - R_{k,1}^- \int_a^b dF_x f(x) \\ &\quad - \sigma_1 \int_a^b dF_x \left\{ (\sigma_k x - R_{k,1}^+) \sigma_1^{-1} + \frac{i}{2} R_{k,1}^- \int_a^b dF_t \frac{f(t) - f(x)}{t-x} \right\} \\ &= \int_a^b (\sigma_k x + R_{k,1}^-) dF_x f(x) - \frac{i}{2} \sigma_1 \int_a^b dF_x R_{k,1}^- \int_a^b dF_t \frac{f(t)}{t-x} \\ &\quad - \sigma_1 \int_a^b dF_x \left\{ (\sigma_k x - R_{k,1}^+) \sigma_1^{-1} - \frac{i}{2} R_{k,1}^- \int_a^b \frac{dF_t}{t-x} \right\} f(x) = 0. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$[(\tilde{A}_k)_R, (\tilde{A}_1)_R] = \frac{i}{2} \tilde{\varphi} R_{k,1}^- \tilde{\varphi}^*, \quad 2 \leq k \leq n. \quad (2.28)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} [(\tilde{A}_k)_R, (\tilde{A}_1)_R] f(x) &= (\sigma_k x - R_{k,1}^+) \sigma_1^{-1} x f(x) + \frac{i}{2} R_{k,1}^- \int_a^b dF_t \frac{t f(t) - x f(x)}{t-x} \\ &\quad - x (\sigma_k x - R_{k,1}^+) \sigma_1^{-1} f(x) - x \frac{i}{2} R_{k,1}^- \int_a^b dF_t \frac{f(t) - f(x)}{t-x} = \frac{i}{2} R_{k,1}^- \int_a^b dF_t f(t), \end{aligned}$$

что и доказывает (2.28) в силу (2.25). Докажем и остальные соотношения в (1.21). Для этого рассмотрим следующее выражение:

$$\begin{aligned} [(\tilde{A}_k)_R, (\tilde{A}_s)_R] f(x) &= (\sigma_k x - R_{k,1}^+) \left\{ (\sigma_s x - R_{s,1}^+) \sigma_1^{-1} f(x) + \frac{i}{2} R_{s,1}^- \int_a^b dF_t \frac{f(t) - f(x)}{t-x} \right\} \\ &\quad + \frac{i}{2} R_{k,1}^- \int_a^b \frac{dF_t}{t-x} \left\{ (\sigma_s t - R_{s,1}^+) \sigma_1^{-1} + \frac{i}{2} R_{s,1}^- \int_a^b dF_s \frac{f(s) - f(t)}{s-t} \right. \\ &\quad \left. - (\sigma_s x - R_{k,1}^-) \sigma_1^{-1} f(x) - \frac{i}{2} R_{s,1}^- \int_a^b dF_s \frac{f(s) - f(x)}{s-x} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(\sigma_s x - R_{s,1}^+) \sigma_1^{-1} \left\{ (\sigma_k x - R_{k,1}^-) \sigma_1^{-1} f(x) + \frac{i}{2} R_{k,1}^- \int_a^b dF_t \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right\} \\
 & - \frac{i}{2} R_{s,1}^- \int_a^b \frac{dF_t}{t - x} \left\{ (\sigma_k t - R_{k,1}^+) \sigma_1^{-1} + \frac{i}{2} R_{k,1}^- \int_a^b dF_s \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right. \\
 & \quad \left. - (\sigma_k x - R_{k,1}^+) \sigma_1^{-1} f(x) - \frac{i}{2} R_{k,1}^- \int_a^b dF_s \frac{f(s) - f(x)}{s - x} \right\}.
 \end{aligned}$$

Используя (2.8), (2.9) и (2.21), получаем, что

$$\begin{aligned}
 [(\tilde{A}_k)_R, (\tilde{A}_s)_R] f(x) &= [R_{k,1}^+ \sigma_1^{-1}, R_{s,1}^+ \sigma_1^{-1}] f(x) \\
 &+ \frac{i}{2} (-x R_{k,s}^- + R_{s,1}^+ \sigma_1^{-1} R_{k,1}^- - R_{k,1}^+ \sigma_1^{-1} R_{s,1}^-) \int_a^b dF_t \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \\
 &+ \frac{i}{2} \int_a^b (t R_{k,s}^- - R_{k,1}^- \sigma_1^{-1} R_{s,1}^+ + R_{s,1}^- \sigma_1^{-1} R_{k,1}^+) dF_t \frac{f(t)}{t - x} \\
 &+ \left(\frac{i}{2} \right)^2 R_{k,1}^- \int_a^b \frac{dF_s}{s - t} R_{s,1}^- \int_a^b \frac{dF_t}{t - x} f(t) + \left(\frac{i}{2} \right)^2 R_{k,1}^- \int_a^b \frac{dF_t}{t - x} R_{s,1}^- \int_a^b \frac{dF_s}{s - t} f(s) \\
 &- \left(\frac{i}{2} \right)^2 R_{k,1}^- \int_a^b \frac{dF_t}{t - x} R_{s,1}^- \int_a^b \frac{dF_s}{s - x} f(s) - \left(\frac{i}{2} \right)^2 R_{s,1}^- \int_a^b \frac{dF_s}{s - t} R_{k,1}^- \int_a^b \frac{dF_t}{t - x} f(t) \\
 &- \left(\frac{i}{2} \right)^2 R_{s,1}^- \int_a^b \frac{dF_t}{t - x} R_{k,1}^- \int_a^b \frac{dF_s}{s - t} f(s) + \left(\frac{i}{2} \right)^2 R_{s,1}^- \int_a^b \frac{dF_t}{t - x} R_{k,1}^- \int_a^b \frac{dF_s}{s - x} f(s) \\
 &- \frac{i}{2} R_{k,1}^- \int_a^b \frac{dF_t}{t - x} \left\{ (\sigma_s x - R_{s,1}^+) \sigma_1^{-1} - \frac{i}{2} R_{s,1}^- \int_a^b \frac{dF_s}{s - x} \right\} f(x) \\
 &+ \frac{i}{2} R_{s,1}^- \int_a^b \frac{dF_t}{t - x} \left\{ (\sigma_k x - R_{k,1}^-) \sigma_1^{-1} - \frac{i}{2} R_{k,1}^- \int_a^b \frac{dF_s}{s - x} \right\} f(x).
 \end{aligned}$$

Учитывая тождество

$$\frac{1}{(t-s)(t-x)} + \frac{1}{(s-t)(s-x)} + \frac{1}{(x-t)(x-s)} = 0,$$

справедливое для любых попарно различных x, t, s , а также (2.8), (2.21), приходим к тому, что

$$\begin{aligned}
 [(\tilde{A}_k)_R, (\tilde{A}_s)_R] f(x) &= [R_{k,1}^+ \sigma_1^{-1}, R_{s,1}^+ \sigma_1^{-1}] f(x) + \frac{i}{2} R_{k,s}^- \int_a^b dF_t f(t) \\
 &+ \frac{i}{2} (x R_{k,s}^- - R_{s,1}^+ \sigma_1^{-1} R_{k,1}^- + R_{k,1}^+ \sigma_1^{-1} R_{s,1}^-) \int_a^b \frac{dF_t}{t - x} f(x) \\
 &- \frac{i}{2} R_{k,1}^- \left\{ \sigma_1^{-1} (\sigma_s x - R_{s,1}^+) \int_a^b \frac{dF_t}{t - x} + 2i \sigma_1^{-1} R_{s,1}^- \sigma_1^{-1} \right\} f(x) \\
 &+ \frac{i}{2} R_{s,1}^- \left\{ \sigma_1^{-1} (\sigma_k x - R_{k,1}^-) \int_a^b \frac{dF_t}{t - x} + 2i \sigma_1^{-1} R_{k,1}^- \sigma_1^{-1} \right\} f(x) \\
 &= \frac{i}{2} R_{k,s}^- \int_a^b dF_t f(t)
 \end{aligned}$$

в силу (2.8), (2.9). Теорема доказана.

Из теорем 8, 11 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 12. Пусть в гильбертовом пространстве H задана простая система ограниченных самосопряженных операторов $\{(A_k)_R\}_1^n$, удовлетворяющих соотношениям (1.21), (1.22), причем σ_1 обратим, а для совокупности $\{\sigma_k, R_{k,s}^\pm\}_1^n$ имеют место (2.8), (2.9). Предположим также, что оператор-функция F_t из интегрального представления (2.20) неванлинновской функции $V_1(\lambda_1)$ из (2.5) такова, что выполняются требования 1)–3) теоремы 11.

Тогда $\{(A_k)_R\}_1^n$ унитарно эквивалентна простой части системы $\{(\tilde{A}_k)_R\}_1^n$ из (2.24) в $L_{(a,b)}^2(E, F_x)$ из (2.22).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Как следует из этой теоремы, вместо набора (2.18) следует ограничиться совокупностью инвариантов

$$\{V_1(\lambda_1); \{\sigma_k\}_1^n; \{R_{k,1}^\pm\}_1^n\}, \quad (2.29)$$

где σ_1 обратим, для $\{\sigma_k, R_{k,1}^\pm\}_1^n$ имеют место (2.8), операторы $R_{k,s}^\pm$, $1 \leq k \leq n$, $2 \leq s \leq n$, задаются формулами (2.9), а неванлинновская функция $V_1(\lambda)$ удовлетворяет условиям (2.19).

2.4. Зададим в гильбертовом пространстве $L_{(a,b)}^2(E, F_x)$, определенном в (2.22), систему линейных ограниченных операторов $\{\tilde{A}_k\}_1^n$:

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_1 f)(x) &= x f(x) + \frac{i}{2} \sigma_1 \int_a^b dF_t f(t), \\ (\tilde{A}_k f)(x) &= (\sigma_k x - R_{k,1}^+) \sigma_1^{-1} f(x) + \frac{i}{2} R_{k,1}^- \int_a^b dF_t \frac{f(t) - f(x)}{t - x} + \frac{i}{2} \sigma_k \int_a^b dF_t f(t), \end{aligned} \quad (2.30)$$

$2 \leq k \leq n$, $f(x) \in L_{(a,b)}^2(E, F_x)$. Будем при этом считать, что $\{\sigma_k, R_{k,1}^\pm\}_1^n$ удовлетворяет соотношениям (2.8), оператор σ_1 обратим, операторы $R_{k,s}^\pm$ заданы формулами (2.9), а неубывающая функция F_t такова, что выполняются предположения 1)–3) теоремы 11.

Проверим коммутативность системы операторов $\{\tilde{A}_k\}_1^n$ из (2.30). Действительно, так как

$$\tilde{A}_k = (\tilde{A}_k)_R + \frac{i}{2} \tilde{\varphi}^* \sigma_k \tilde{\varphi}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (2.31)$$

где $(\tilde{A}_k)_R$ имеют вид (2.24), а $\tilde{\varphi}$, – вид (2.25), то

$$\begin{aligned} [\tilde{A}_k, \tilde{A}_s] &= (\tilde{A}_k)_R \left[(\tilde{A}_s)_R + \frac{i}{2} \tilde{\varphi}^* \sigma_s \tilde{\varphi} \right] + \frac{i}{2} \tilde{\varphi}^* \sigma_k \tilde{\varphi} \left[(\tilde{A}_s)_R + \frac{i}{2} \tilde{\varphi}^* \sigma_s \tilde{\varphi} \right] \\ &\quad - (\tilde{A}_s)_R \left[(\tilde{A}_k)_R + \frac{i}{2} \tilde{\varphi}^* \sigma_k \tilde{\varphi} \right] - \frac{i}{2} \tilde{\varphi}^* \sigma_s \tilde{\varphi} \left[(\tilde{A}_k)_R + \frac{i}{2} \tilde{\varphi}^* \sigma_k \tilde{\varphi} \right] \\ &= \frac{i}{2} \tilde{\varphi}^* R_{k,s}^- \tilde{\varphi} - \frac{i}{2} \tilde{\varphi}^* R_{k,s}^+ \tilde{\varphi} + \frac{i}{2} \tilde{\varphi}^* R_{k,s}^+ \tilde{\varphi} + \left(\frac{i}{2} \right)^2 2i \tilde{\varphi}^* R_{k,s}^- \tilde{\varphi} = 0, \\ &\quad 1 \leq k, s \leq n, \end{aligned}$$

в силу (1.21), (1.22). Вычислим

$$\begin{aligned}\sigma_k \tilde{\varphi} \tilde{A}_s - \sigma_s \tilde{\varphi} \tilde{A}_k &= \sigma_k \tilde{\varphi} \left((\tilde{A}_s)_R + \frac{i}{2} \tilde{\varphi}^* \sigma_s \tilde{\varphi} \right) - \sigma_s \tilde{\varphi} \left((\tilde{A}_k)_R + \frac{i}{2} \tilde{\varphi}^* \sigma_k \varphi \right) \\ &= R_{k,s}^+ \tilde{\varphi} - R_{k,s}^- \tilde{\varphi} = \gamma_{k,s}^+ \tilde{\varphi}, \quad 1 \leq k, s \leq n.\end{aligned}$$

Таким образом, если система самосопряженных ограниченных операторов $\{(\tilde{A}_k)_R\}_1^n$ удовлетворяет соотношениям (1.21), (1.22), то система операторов $\{\tilde{A}_k\}_1^n$ из (2.30) коммутативна и для нее справедливы узловые соотношения (1.2), где $\gamma_{k,s}^\pm$ определяются по $R_{k,s}^\pm$ формулами (1.23), $1 \leq k, s \leq n$.

Построим коммутативный узел

$$\Delta_m = (\{\tilde{A}_k\}_1^n; L_{(a,b)}^2(E, F_x); \tilde{\varphi}; E; \{\sigma_k\}_1^n; \{\gamma_{k,s}^-\}_1^n; \{\gamma_{k,s}^+\}_1^n), \quad (2.32)$$

где $\tilde{A}_k$, $1 \leq k \leq n$, в $L_{(a,b)}^2(E, F_x)$ имеют вид (2.30), а $\tilde{\varphi}$ – вид (2.25).

ТЕОРЕМА 13. Пусть задан простой коммутативный узел Δ (см. (1.1)) такой, что для совокупности $\{\sigma_k, R_{k,s}^\pm\}_1^n$ ($2R_{k,s}^\pm = \gamma_{k,s}^- \pm \gamma_{k,s}^+$) имеют место (2.8), (2.9) и σ_1 обратим, неванлинновская функция $V_1(\lambda_1)$ (см. (2.5)) удовлетворяет предположениям 1)–3) теоремы 11. Тогда узел Δ унитарно эквивалентен простой части узла Δ_m из (2.32).

Систему операторов $\{\tilde{A}_k\}_1^n$, определенную в (2.32), следует рассматривать как модельную реализацию систем несамосопряженных операторов, отличную от треугольных и функциональных моделей (см. [3], [4]).

2.5. Рассмотрим задачу непосредственного построения по системе линейных ограниченных самосопряженных операторов $\{B_1, B_2\}$, заданных в H , гильбертова пространства E , оператора $\varphi: H \rightarrow E$ и самосопряженных операторов $\sigma_1, \sigma_2, R^\pm (= R_{2,1}^\pm)$ в E , для которых выполняются условия (1.21), (1.22). Пусть $E \stackrel{\text{def}}{=} \overline{[B_2, B_1]H}$, а $\varphi = P_E$ – ортопроектор на E . Тогда

$$[B_2, B_1] = \frac{i}{2} \varphi^* R^- \varphi, \quad (2.33)$$

где $R^- \stackrel{\text{def}}{=} 2i[B_1, B_2]|_E$ – самосопряженный оператор в E . Чтобы было справедливо (1.22), 2), нам достаточно показать, что

$$2iR^- = [\sigma_2, \sigma_1], \quad (2.34)$$

где σ_1, σ_2 – самосопряженные операторы в E , так как $\varphi \varphi^* = P_E$. Используя блочное представление операторов $B_k = [B_{i,j}^k]_1^2$, $k = 1, 2$, соответствующее разложению $H = E^\perp \oplus E$, мы из (2.33) получаем, что

$$\frac{i}{2} R^- = (B_{1,2}^2)^* B_{1,2}^1 + B_{2,2}^2 B_{2,2}^1 - (B_{1,2}^1)^* B_{1,2}^1 B_{2,2}^2.$$

Поэтому

$$T - T^* = 2iR^-, \quad (2.35)$$

где $T \stackrel{\text{def}}{=} 4\{(B_{1,2}^2)^* B_{1,2}^1 + B_{2,2}^2 B_{2,2}^1\}$ – линейный ограниченный оператор в E . Для доказательства (2.34) необходимо показать, что оператор T можно представить в виде произведения двух самосопряженных операторов,

$$T = \sigma_2 \sigma_1, \quad (2.36)$$

$\sigma_k = \sigma_k^*$, $k = 1, 2$. Отсюда вытекает, что

$$\sigma_1 T = T^* \sigma_1. \quad (2.37)$$

Пусть $T = C + iR^-$, где $C = C^* = T_R$. Тогда, учитывая (2.37), мы получаем, что

$$\sigma_1 C - C \sigma_1 = -i(\sigma_1 R^- + R^- \sigma_1).$$

Легко видеть, что

$$\frac{d}{dt} Z_t^* C Z_t = -Z_t^* (\sigma_1 R^- + R^- \sigma_1) Z_t,$$

где $Z_t = \exp\{it\sigma_1\}$ – унитарная полугруппа, $t \in \mathbb{R}$. Интегрируя, получаем, что

$$C - Z_t^* C Z_t = \int_0^t Z_s^* (\sigma_1 R^- + R^- \sigma_1) Z_s ds, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Если $\sigma_1 R^- + R^- \sigma_1 \geq 0$, то правая часть данного равенства является неубывающей оператор-функцией, а левая часть ограничена (так как Z_t унитарен при всех $t \in \mathbb{R}$, а C ограничен). Поэтому существует предел при $t \rightarrow \infty$,

$$C - C_\infty = \int_0^\infty Z_s^* (\sigma_1 R^- + R^- \sigma_1) Z_s ds,$$

где

$$C_\infty \stackrel{\text{def}}{=} s - \lim_{t \rightarrow \infty} Z_t^* C Z_t.$$

Так как $Z_t^* C_\infty Z_t = C_\infty$, то $\sigma_1 C_\infty = C_\infty \sigma_1$. В результате получаем, что

$$T = \int_0^\infty Z_s^* (\sigma_1 R^- + R^- \sigma_1) Z_s ds + N + iR^-, \quad (2.38)$$

где N – самосопряженный ограниченный оператор, коммутирующий с σ_1 .

ТЕОРЕМА 14. Пусть ограниченный самосопряженный оператор R^- представим в виде (2.35), где T – линейный ограниченный оператор. Пусть существует самосопряженный обратимый оператор σ_1 такой, что $\sigma_1 R^- + R^- \sigma_1 \geq 0$. Тогда оператор T равен произведению, $T = \sigma_2 \sigma_1$ (см. (2.36)), где σ_2 самосопряжен, а T имеет вид (2.38), при этом $Z_t = \exp\{it\sigma_1\}$, а N – самосопряженный ограниченный оператор, коммутирующий с σ_1 , $[\sigma_1, N] = 0$.

Самосопряженность $\sigma_2 = T\sigma_1^{-1}$ следует из (2.37).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Запишем R^- в таком виде:

$$R^- = C_+ - C_-,$$

где $C_{\pm} = \pm \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \lambda dE_{\lambda}$ (E_{λ} – разложение единицы R^-). Пусть

$$\sigma_1 = D_+ + D_-,$$

где $D_{\pm}$ – самосопряженные операторы, действующие в подпространствах $E_{\pm} = E_{\mathbb{R}_{\pm}} E$. Из условия $\sigma_1 R^- + R^- \sigma_1 \geq 0$ следует, что

$$D_+ C_+ + C_+ D_+ = K_+ \geq 0, \quad -D_- C_- - C_- D_- = -K_- \geq 0,$$

при этом $K_{\pm}$ – самосопряженные операторы в $E_{\pm}$. Предположим, что $\lambda = 0$ является точкой регулярности оператора R^- , т.е. $C_{\pm} > 0$. Тогда решения $D_{\pm}$ данных уравнений существуют и единственны,

$$D_{\pm} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_{\lambda}^{\pm}} \int_{\Gamma_{\mu}^{\pm}} \frac{(C_{\pm} - \lambda I)^{-1} K_{\pm} (C_{\pm} - \mu I)^{-1}}{\lambda + \mu} d\lambda d\mu,$$

где $\Gamma_{\lambda}^{\pm}$ и $\Gamma_{\mu}^{\pm}$ – замкнутые контуры в $\mathbb{C}$, содержащие спектр $C_{\pm}$. Отсюда легко следует, что

$$D_{\pm} = \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \frac{dE_t K_{\pm} dE_s}{s + t}$$

и, следовательно, $D_{\pm}^* = D_{\pm}$. Покажем, что если $K_+ > 0$, то D_+ обратим. Пусть $h \in \text{Ker } D_+$. Тогда из равенства $D_+ C_+ + C_+ D_+ = K_+$ вытекает, что $\langle K_+ h, h \rangle = \langle D_+ C_+ h, h \rangle = \langle C_+ h, D_+ h \rangle = 0$, что невозможно, так как $K_+ > 0$. Итак, $\text{Ker } D_+ = 0$. Если точка $\lambda = 0$ принадлежит спектру D_+ , то существует последовательность векторов h_n , $\|h_n\| = 1$, такая, что

$$w - \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0, \quad s - \lim_{n \rightarrow \infty} D_+ h_n = 0.$$

Учитывая, что $\langle C_+ h_n, D_+ h_n \rangle + \langle D_+ h_n, C_+ h_n \rangle = \langle K_+ h_n, h_n \rangle$, мы получаем, что $\langle K_+ h_n, h_n \rangle \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что противоречит условию $K_+ > 0$. Таким образом, D_+ ограниченно обратим. Для D_- рассуждения носят аналогичный характер при условии, что $K_- < 0$.

В результате мы приходим к тому, что если $\lambda = 0$ – точка регулярности оператора R^- , то всегда существует обратимый ограниченный самосопряженный оператор σ_1 такой, что $\sigma_1 R^- + R^- \sigma_1 \geq 0$.

Отметим, что в качестве σ_1 можно взять $\sigma_1 = f(|R^-|) \cdot \text{sign } R^-$, где $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}_+$.

Соотношение (1.22), 1) в данном случае имеет такой вид:

$$\sigma_2 P_E B_1 - \sigma_1 P_E B_2 = R^+ P_E.$$

Из самосопряженности R^+ следует, что

$$B_1 P_E T \sigma_1^{-1} + \sigma_1 P_E B_2 = \sigma_1^{-1} T^* P_E B_1 + B_2 P_E \sigma_1,$$

так как $\sigma_2 = T \sigma_1^{-1} = \sigma_1^{-1} T^*$ (см. (2.36)) и, значит, оператор $B_1 P_E T \sigma_1^{-1} + \sigma_1 P_E B_2$ самосопряжен.

ТЕОРЕМА 15. Пусть в гильбертовом пространстве H задана система линейных ограниченных самосопряженных операторов $\{B_1, B_2\}$ и

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \overline{[B_2, B_1]H}, \quad R^- \stackrel{\text{def}}{=} 2i[B_1, B_2]|_E,$$

причем $\lambda = 0$ не принадлежит спектру $\sigma(R^-)$ оператора R^- . Предположим, что существует пара линейных ограниченных операторов T, σ_1 , удовлетворяющая (2.35), (2.37), где σ_1 самосопряжен и обратим, причем оператор $B_1 P_E T \sigma_1^{-1} + \sigma_1 P_E B_2$ самосопряжен (P_E – ортопроектор на E). Тогда простые части систем операторов $\{B_1, B_2\}$ и $\{(\tilde{A}_k)_R\}_1^2$ из (2.24) унитарно эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из замечания 8 и теоремы 14 следует, что существуют два самосопряженных оператора σ_1, σ_2 в E , причем σ_1 обратим, такие, что выполняются (1.21) и (1.22), 2). Так как $B_1 P_E T \sigma_1^{-1} + \sigma_1 P_E B_2$ самосопряжен, то, положив $R^+ P_E = \sigma_2 P_E B_1 - \sigma_1 P_E B_2$ и воспользовавшись теоремами 8 и 12, мы и придем к утверждению теоремы.

§ 3. Модельная реализация в пространствах мероморфных функций на римановых поверхностях

3.1. Пусть $n = 2$ и $\dim E = r < \infty$. Из (2.14) следует, что

$$\{\hat{\sigma}_1 \lambda_2 - \hat{\sigma}_2 \lambda_1 + \hat{R}\} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad (3.1)$$

где $\hat{\sigma}_k$ и $\hat{R} = \hat{R}_{2,1}$ имеют вид (2.11). Вектор $\text{col}[u, v]$ в (3.1) нетривиален, если только точка $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ такова, что

$$\hat{\mathbb{Q}}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad \hat{\mathbb{Q}}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2) \stackrel{\text{def}}{=} \det\{\hat{\sigma}_1 \lambda_2 - \hat{\sigma}_2 \lambda_1 + \hat{R}\}. \quad (3.2)$$

Легко видеть, что

$$U^* \{\hat{\sigma}_1 \lambda_2 - \hat{\sigma}_2 \lambda_1 + \hat{R}\} U = \begin{bmatrix} \sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + \gamma_{2,1}^- & 0 \\ 0 & \sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + \gamma_{2,1}^+ \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

где $\gamma_{2,1}^\pm = R^+ \mp R^-$ (см. (1.23)), а

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

– унитарный оператор в $E \oplus E$. Поэтому полином $\hat{\mathbb{Q}}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2)$ из (3.2) равен

$$\hat{\mathbb{Q}}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2) = \det[\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + \gamma_{2,1}^-] \cdot \det[\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + \gamma_{2,1}^+].$$

Многочлен $\det[\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + \gamma_{2,1}^-]$ с точностью до знака совпадает с $\mathbb{Q}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2)$ из (1.12). Если σ_1 обратим, то из условия сплетаемости (1.13) следует, что $\det[\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + \gamma_{2,1}^-] = \det[\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + \gamma_{2,1}^+]$, поэтому

$$\hat{\mathbb{Q}}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2) = \mathbb{Q}_{1,2}^2(\lambda_1, \lambda_2). \quad (3.5)$$

В результате мы приходим к римановой поверхности $\mathbb{Q}_2$ (см. (1.11)):

$$\mathbb{Q}_2 = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 : \mathbb{Q}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2) = 0\}, \quad (3.6)$$

где полином $\mathbb{Q}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2)$ имеет вид (1.12). Из (3.5) следует, что кривую

$$\widehat{\mathbb{Q}}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$$

(см. (3.2)) параметризуют двукратным образом точки поверхности $\mathbb{Q}_2$.

Равенство (3.1) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + R^+)u + R^-v = 0, \\ (\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + R^+)v + R^-u = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

$$R^\pm = R_{2,1}^\pm.$$

ТЕОРЕМА 16. *Если u и v являются решением системы (3.7) и $R^-u = 0$ (или $R^-v = 0$), то $R^-v = 0$ (соответственно $R^-u = 0$). В этом случае $u, v \in \text{Ker}(\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + R^+)$, где (λ_1, λ_2) такова, что $\det[\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + R^+] = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R^-u = 0$. Тогда $(\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + R^+)v = 0$ и, значит,

$$(\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + R^-)(u - \mu v) + R^-v = 0,$$

где μ – произвольное число из $\mathbb{C}$. Предположим, что $R^-v \neq 0$. Тогда из последнего равенства следует, что R^-v принадлежит образу оператора $\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + R^+$. Поэтому

$$u - \mu v + (\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + R)^{-1} R^-v = 0.$$

Применяя R^- и учитывая равенство $R^-u = 0$, получаем, что

$$\{R^-(\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + R^+)^{-1} - \mu\} R^-v = 0.$$

Таким образом, R^-v – собственный вектор оператора $R^-(\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + R^+)^{-1}$, отвечающий собственному значению μ , что невозможно ввиду произвольности $\mu \in \mathbb{C}$.

Из существования нетривиального решения (3.1) и условия $R^-u \neq 0$ вытекает, что

$$v = -(\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + R^+)^{-1} R^-u \quad (3.8)$$

и, следовательно,

$$\{\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + R^+ - R^-(\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + R^+)^{-1} R^-\}u = 0 \quad (3.9)$$

при $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Q}_2$ (см. (3.6)). А так как из условия $R^-u \neq 0$ следует, что и $R^-v \neq 0$ в силу теоремы 16, то и вектор v также удовлетворяет соотношению (3.9).

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Если u есть решение (3.9), то, задавая v формулой (3.8), мы получим, что u, v удовлетворяют системе уравнений (3.7). Поэтому отыскание решения (3.7) сводится к нахождению u , для которого имеет место (3.9) при $\lambda \in \mathbb{Q}_2$.

Из теорем 4, 6 следует, что если u удовлетворяет равенству (3.9), то $v = {}^i_2 V_1(\lambda_1) \sigma_1 u$ также является решением (3.9), где $\lambda \in \mathbb{Q}_2$.

3.2. Пусть кривая $\mathbb{Q}_2$ из (3.6) неособая (см. [7], [10]). В этом случае полином $\mathbb{Q}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2)$ неприводим, а корни $\{\lambda_2^k(\lambda_1)\}_1^r$ многочлена $\mathbb{Q}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ различны (исключая точки ветвления) и, как нетрудно показать, $\lambda_2^k(\lambda_1)$ – суть ветви r -значной ($r = \text{rank } \sigma_1$) алгебраической функции $\lambda_2(\lambda_1)$. Кривая $\mathbb{Q}_2$ из (3.6) является римановой поверхностью как для r -значной функции $\lambda_2(\lambda_1)$, так и для l -значной функции $\lambda_1(\lambda_2)$, где $l = \text{rank } \sigma_2$, $1 \leq l \leq r$.

Рассмотрим одномерные E -расслоения на $\mathbb{Q}_2$ (в силу неприводимости полинома $\mathbb{Q}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2)$), порождаемые вектор-функциями

$$h^\pm(P) \in \text{Ker}[\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + \gamma_{2,1}^\pm], \quad (3.10)$$

где $P = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Q}_2$. Очевидно, что $h^\pm(P)$ – рациональные функции на $\mathbb{Q}_2$, количество полюсов у которых (с учетом кратности) равно $N = g + r - 1$, где g – род $\mathbb{Q}_2$ (см. [3]). Так как корни $\lambda_2^k(\lambda_1)$ уравнения $\mathbb{Q}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ различны, то векторы $\{h^-(P_k)\}_1^r$ и $\{h^+(P_k)\}_1^r$ образуют базисы в E , $P = (\lambda_1, \lambda_2^k(\lambda_1))$, $1 \leq k \leq r$.

Как известно (см. (1.20) и [2]), неванлинновская функция $V_1(\lambda_1)$ из (2.5) и характеристическая функция $S_1(\lambda_1) = I - i\varphi(A_1 - \lambda_1 I)^{-1}\varphi^* \sigma_1$ (см. [2; § 1]) связаны друг с другом соотношением

$$\frac{i}{2} V_1(\lambda_1) \sigma_1 (I + S_1(\lambda_1)) = I - S_1(\lambda_1).$$

Поэтому u, v (решение системы (3.7)) имеют следующий вид:

$$u = u(P) = h^-(P) + S_1(\lambda_1) h^-(P), \quad v = v(P) = h^-(P) - S_1(\lambda_1) h^-(P), \quad (3.11)$$

где $P = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Q}_2$ из (3.6) и $S_1(\lambda_1) \hat{h}^-(P) = \theta(P) \hat{h}^+(P)$ (см. (1.15)), причем $\hat{h}^\pm(P)$ отличаются от $h^\pm(P)$ лишь нормировкой на единицу последней компоненты $\hat{h}_r^\pm(P) = 1$. Так как оператор $I + S_1(\lambda_1)$ обратим при $|\lambda_1| \gg 1$, то совокупность $u(P_k) = (I + S_1(\lambda_1)) h^-(P_k)$ является базисом в E ($P_k = (\lambda_1, \lambda_2^k(\lambda_1)) \in \mathbb{Q}_2$, $1 \leq k \leq r$). Тогда, во-первых, $u(P_k), v(P_k)$ есть решение (3.7) в точке $P_k \in \mathbb{Q}_2$, во-вторых, $\{v(P_k)\}_1^r$ также является базисом в E . В силу (3.5) каждая точка $P_k = (\lambda_1, \lambda_2^k(\lambda_1)) \in \mathbb{Q}_2$ есть двукратный нуль полинома $\hat{\mathbb{Q}}(\lambda_1, \lambda_2)$ из (3.2), которому отвечает двумерное подпространство решений $\text{col}[u(P_k), v(P_k)], \text{col}[v(P_k), u(P_k)]$ уравнения (3.1), что следует из (2.12), (2.13), конечно, когда $u(P_k), v(P_k)$ удовлетворяют системе (3.7). Нетрудно видеть, что $u(P_k), v(P_k)$ – суть ветви многозначных функций $u(P), v(P)$ (см. (3.11)). Из обратимости σ_1 вытекает, что векторы $\{\sigma_1 u(P_k)\}_1^r$ образуют базис в E . Зададим в E многозначную функцию

$$\hat{u}(P) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_1 u(P), \quad (3.12)$$

нормированную так, что “ r -я” компонента $\hat{u}(P)$ равна единице, $\hat{u}_r(P) = 1$, где $P = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Q}_2$.

Определим семейство линейных операторов по следующей формуле:

$$N_x \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma_2 x - R^+) \sigma_1^{-1} - \frac{i}{2} R^- \int_a^b \frac{dF_t}{t - x}, \quad x \in [a, b]. \quad (3.13)$$

ТЕОРЕМА 17. Пусть F_t в представлении (2.20) функции $V_1(\lambda)$ из (2.5) абсолютно непрерывна, $dF_t = a_t dt$, оператор σ_1 обратим, а $V_1(\lambda)$ удовлетворяет равенству (2.19) ($k = 2$). Если кривая $\mathbb{Q}_2$ из (3.6) неособая, то для N_x из (3.13) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a_x N_x &= N_x^* a_x, & x &\in [a, b], \\ N_x \hat{u}(P_k) &= \lambda_2^k(x) \hat{u}(P_k), & x &\in [a, b], \quad 1 \leq k \leq r, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $\hat{u}(P_k)$ имеют вид (3.12) и $P_k = (x, \lambda_2^k(x)) \in \mathbb{Q}_2$. Функции $\lambda_2^k(x)$, $1 \leq k \leq r$, вещественны при $x \in [a, b]$ и

$$\langle a_x \hat{u}(P_k), \hat{u}(P_s) \rangle = 0, \quad k \neq s. \quad (3.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся равенством (2.23), которое следует из теоремы 10. Выбирая в (2.23) $f(t) = \chi_{[a,x]}(t)f$ (f – произвольный вектор из E , а $\chi_{[a,x]}(t)$ – характеристическая функция отрезка $[a, x]$) и дифференцируя по x , получаем

$$a_x \left\{ (\sigma_2 x - R^+) \sigma_1^{-1} - \frac{i}{2} R^- \int_a^b \frac{dF_t}{t-x} \right\} = \left\{ \sigma_1^{-1} (\sigma_2 x - R^+) + \frac{i}{2} \int_a^b \frac{dF_t}{t-x} R^- \right\} a_x,$$

что и доказывает первое соотношение в (3.14). Обратимся к первому из уравнений в (3.7), где $P = (x, \lambda_2(x)) \in \mathbb{Q}_2$,

$$0 = (\sigma_2 x - R^+) \hat{u}(P) - R^- v(P) - \lambda_2(x) \hat{u}(P) = N_x \hat{u}(P) - \lambda_2(x) \hat{u}(P),$$

так как $v(P) = \frac{i}{2} V_1(x) \sigma_1 u(P)$. Следовательно, имеет место и второе из равенств в (3.14). Из соотношения $a_x N_x = N_x^* a_x$ следует, что

$$\begin{aligned} \lambda_2^k(x) \langle a_x \hat{u}(P_k), \hat{u}(P_k) \rangle &= \langle a_x N_x \hat{u}(P_k), \hat{u}(P_k) \rangle = \langle a_x \hat{u}(P_k), N_x \hat{u}(P_k) \rangle \\ &= \overline{\lambda_2^k(x)} \langle a_x \hat{u}(P_k), \hat{u}(P_k) \rangle, \quad 1 \leq k \leq r, \end{aligned}$$

что и обеспечивает вещественность $\lambda_2^k(x)$ при $x \in [a, b]$. Наконец, из равенств

$$\begin{aligned} \langle a_x N_x \hat{u}(P_k), \hat{u}(P_s) \rangle &= \lambda_2^k(x) \langle a_x \hat{u}(P_k), \hat{u}(P_s) \rangle, \\ \langle a_x \hat{u}(P_k), N_x \hat{u}(P_s) \rangle &= \lambda_2^s(x) \langle a_x \hat{u}(P_k), \hat{u}(P_s) \rangle \end{aligned}$$

получаем соотношение

$$(\lambda_2^k(x) - \lambda_2^s(x)) \langle a_x \hat{u}(P_k), \hat{u}(P_s) \rangle = 0,$$

что и доказывает (3.15) в силу неприводимости $\mathbb{Q}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2)$, так как $\{\lambda_2^k(x)\}_1^r$ попарно различны.

Выделим на римановой поверхности $\mathbb{Q}_2$ из (3.6) аналоги полуплоскостей $\mathbb{C}_\pm$ и вещественной оси $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{Q}_2^\pm = \{P \in \mathbb{Q}_2 : \pm \operatorname{Im} \lambda_1(P) > 0\}, \quad \mathbb{Q}_2^0 = \partial \mathbb{Q}_2^\pm. \quad (3.16)$$

Обозначим через $\mathbb{Q}_a^b$ подмножество из $\mathbb{Q}_2^0$, образованное точками $(x, \lambda_2(x)) \in \mathbb{Q}_2$, когда $x \in [a, b]$.

Каждую из вектор-функций $f(x) \in L^2_{(a,b)}(E, F_x)$ из (2.22) разложим по ортогональному (в метрике $\langle a_x \cdot, \cdot \rangle$, в силу (3.15)) базису $\hat{u}(P_k)$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^r g(P_k) m(P_k) \hat{u}(P_k), \quad (3.17)$$

где $P_k = (x, \lambda_2^k(x)) \in \mathbb{Q}_2$, а $g(P_k)$ и $m(P_k)$ – скалярные функции,

$$g(P_k) = \langle a_x f(x), \hat{u}(P_k) \rangle, \quad m(P_k) = \langle a_x \hat{u}(P_k), \hat{u}(P_k) \rangle^{-1}, \quad 1 \leq k \leq r.$$

Очевидно, что $g(P_k)$ и $m(P_k)$ являются ветвями мероморфных функций,

$$g(P) \stackrel{\text{def}}{=} \langle a_{\lambda_1(P)} \hat{u}(P) \rangle, \quad m(P) \stackrel{\text{def}}{=} \langle a_{\lambda_1(P)} \hat{u}(P), \hat{u}(P) \rangle^{-1}, \quad (3.18)$$

где $P = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Q}_2^0$. Так как базис $\hat{u}(P_k)$ из (3.12) в E фиксирован, а функция $m(P)$ из (3.18) от $f(x)$ не зависит, то из (3.17) следует, что вектор-функцию $f(x)$ определяет скалярная функция $g(P)$ из (3.18), которая может иметь особенности лишь в полюсах $\hat{u}(P)$. Таким образом, пространство $L^2_{(a,b)}(E, F_x)$ (см. (2.22)) изоморфно гильбертову пространству

$$L^2_{\mathbb{Q}_a^b}(md\lambda_1) = \left\{ g(P) : \int_{\mathbb{Q}_a^b} |g(P)|^2 m(P) d\lambda_1(P) < \infty \right\}, \quad (3.19)$$

где $m(P)$ имеет вид (3.18). Из (2.24) вытекает, что оператор $(\tilde{A}_1)_R$ при этом изоморфизме переходит в оператор умножения,

$$((\tilde{A}_1)_R g)(P) = \lambda_1(P) g(P). \quad (3.20)$$

Запишем формулу (2.24) для $(\tilde{A}_2)_R$ в следующем виде:

$$((\tilde{A}_2)_R f)(x) = \left\{ (\sigma_2 x - R^+) \sigma_1^{-1} - \frac{i}{2} R^- \int_a^b \frac{dF_t}{t-x} \right\} f(x) + \frac{i}{2} R^- \int_a^b \frac{dF_t f(t)}{t-x}. \quad (3.21)$$

Учитывая разложение (3.17), представим первое слагаемое в (3.21) в следующей форме:

$$\begin{aligned} & \left\{ (\sigma_2 x - R^+) \sigma_1^{-1} - \frac{i}{2} R^- \int_a^b \frac{dF_t}{t-x} \right\} \sum_{k=1}^r g(P_k) m(P_k) \hat{u}(P_k) \\ &= \sum_{k=1}^r g(P_k) m(P_k) N_x \hat{u}(P_k) = \sum_{k=1}^r g(P_k) m(P_k) \lambda_2(P_k) \hat{u}(P_k) \end{aligned}$$

в силу (3.14). Таким образом, при изоморфизме пространств $L^2_{(a,b)}(E, F_x)$ и $L^2_{\mathbb{Q}_a^b}(md\lambda_1)$ первое слагаемое в (3.21) переходит в оператор умножения $\lambda_2(P) \cdot g(P)$. Используя вновь (3.17), запишем второе слагаемое в таком виде:

$$\frac{i}{2} R^- \int_a^b \frac{dF_t f(t)}{t-x} = \frac{i}{2} \int_a^b \sum_{s=1}^r g(\tilde{P}_s) m(\tilde{P}_s) R^- a_t \hat{u}(\tilde{P}_s) \frac{dt}{t-x},$$

где $\tilde{P}_s(t, \lambda_2^s(t)) \in \mathbb{Q}_a^b$, $1 \leq s \leq r$. Разложим вектор $R^- a_t \hat{u}(\tilde{P}_s)$ по базису $\hat{u}(P_k)$ из (3.12). Тогда

$$R^- a_t \hat{u}(\tilde{P}_s) = \sum_{k=1}^r R(P_k, \tilde{P}_s) m(P_k) \hat{u}(P_k),$$

где $P_k = (x, \lambda_2^k(x)) \in \mathbb{Q}_a^b$, $1 \leq k \leq r$, а $R(P_k, \tilde{P}_s)$ являются ветвями многозначной функции

$$R(P, \tilde{P}) = \langle R^- a_{\lambda_1(\tilde{P})} \hat{u}(\tilde{P}), a_{\lambda_1(P)} \hat{u}(P) \rangle, \quad (3.22)$$

причем точки P и $\tilde{P}$ принадлежат $\mathbb{Q}_a^b$. Отметим, что ядро $R(P, \tilde{P})$ эрмитово, т.е.

$$\overline{R(P, \tilde{P})} = R(\tilde{P}, P). \quad (3.23)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Из (1.22), 2) следует, что $\text{tr } R_- = 0$, поэтому

$$\sum_{k=1}^r \langle a_t R_- \hat{u}(P_k), \hat{u}(P_k) \rangle m(P_k) = 0,$$

так как набор $\{\sqrt{m(P_k)} \hat{u}(P_k)\}_1^r$ является ортонормированным базисом в метрике $\langle a_t \cdot, \cdot \rangle$, где $P_k = (t, \lambda_2^k(t))$, $1 \leq k \leq r$. Учитывая, что

$$\hat{u}(P_k) = \sum_{s=1}^r \langle \hat{u}(P_k), \hat{u}(P_s) \rangle m(P_s) a_t \hat{u}(P_s),$$

мы получаем, что

$$\sum_{k,s=1}^r P(P_s, P_k) \langle \hat{u}(P_k), \hat{u}(P_s) \rangle m(P_k) m(P_s) = 0, \quad (3.24)$$

при этом $P_k = (t, \lambda_2^k(t))$, $1 \leq k \leq r$.

Таким образом, оператор $(\tilde{A}_2)_R$ из (3.21) в пространстве $L_{\mathbb{Q}_a^b}^2(md\lambda_1)$ имеет следующий вид:

$$((\tilde{A}_2)_R g)(P) = \lambda_2(P) g(P) + \frac{i}{2} \int_{\mathbb{Q}_a^b} R(P, \tilde{P}) g(\tilde{P}) \frac{m(\tilde{P}) d\lambda_1(\tilde{P})}{\lambda_1(\tilde{P}) - \lambda_1(P)}. \quad (3.25)$$

ТЕОРЕМА 18. Пусть $(A_1)_R, (A_2)_R$ – простая система ограниченных самосопряженных операторов в H , удовлетворяющая соотношениям (1.21), (1.22), где σ_1 обратим. Предположим, что функция F_t в интегральном представлении (2.20) функции $V_1(\lambda)$ из (2.5) абсолютно непрерывна, $dF_t = a_t dt$ и имеет место соотношение (2.19) для $V_1(\lambda)$. Тогда если $\dim E = r < \infty$ и кривая $\mathbb{Q}_2$ из (3.6) неособая, то система $(A_1)_R, (A_2)_R$ унитарно эквивалентна простой части системы операторов $(\tilde{A}_1)_R, (\tilde{A}_2)_R$ (см. (3.25)), которая действует в гильбертовом пространстве $L_{\mathbb{Q}_a^b}^2(md\lambda_1)$ (см. (3.19)), где $P = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Q}_2$ (см. (3.6)), скалярные функции $m(P)$ и $R(P, \tilde{P})$ имеют вид (3.18) и (3.22), причем ядро $R(P, \tilde{P})$ эрмитово и обладает свойством (3.24), вектор $\hat{u}(P)$ имеет вид (3.12), а совокупность $u(P), v(P)$ является решением системы (3.7).

Рассмотрим $\hat{u}(P)$ из (3.12), обозначим через $\hat{v}(P)$ вектор, полученный из $v(P)$ нормировкой на единицу “ r -й” компоненты ($\hat{v}_r(P) = 1$), где $u(P)$, $v(P)$ – решение (3.7). Из равенства $v(P) = \frac{i}{2}V_1(\lambda_1(P))\sigma_1 u(P)$ следует, что существует такая скалярная функция $\omega(P)$, что

$$V_1(\lambda_1(P))\hat{u}(P) = \omega(P)\hat{v}(P), \quad (3.26)$$

которая, очевидно, равна

$$\omega(P) \stackrel{\text{def}}{=} \langle V_1(\lambda_1(P))\hat{u}(P), \hat{v}(P) \rangle \cdot \|\hat{v}(P)\|^{-2}. \quad (3.27)$$

Учитывая неванлинновость функции $V_1(\lambda)$ из (2.5) и равенство

$$\frac{1}{2i} \langle [V_1(\lambda_1) - V_1^*(\lambda_1)]\hat{u}(P), \hat{u}(P) \rangle = \text{Im}\{\omega(P)\langle \hat{v}(P), \hat{u}(P) \rangle\},$$

мы приходим к следующим соотношениям:

$$\text{Im}\{\omega(P)\langle \hat{v}(P), \hat{u}(P) \rangle\} = \begin{cases} \geq 0, & P \in \mathbb{Q}_2^+, \\ = 0, & P \in \mathbb{Q}_2^0, \\ \leq 0, & P \in \mathbb{Q}_2^-. \end{cases} \quad (3.28)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Из равенства $V_1(\lambda_1)\sigma_1(S_1(\lambda_1) + I) = 2i(S_1(\lambda_1) - I)$ следует, что

$$V_1(\lambda_1)\sigma_1(\theta(P)\hat{h}^+(P) + \hat{h}^-(P)) = 2i(\theta(P)\hat{h}^+(P) - \hat{h}^-(P)), \quad (3.29)$$

где $S_1(\lambda_1)\hat{h}^-(P) = \theta(P)\hat{h}^+(P)$ (см. (1.15)), а $\hat{h}^\pm(P)$ имеют соответствующую нормировку на единицу последней компоненты. Учитывая самосопряженность σ_1 , мы можем считать, что в E так выбран базис, что оператор σ_1 диагонален, поэтому $\sigma_1(\theta(P)\hat{h}^+(P) + \hat{h}^-(P)) = \alpha(\theta(P) + 1)\hat{u}(P)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\alpha \neq 0$ в силу обратимости σ_1 . Приравнявая последние координаты векторов в (3.29) и используя (3.26), мы получаем, что

$$\omega(P) = 2i\alpha^{-1} \frac{\theta(P) - 1}{\theta(P) + 1}. \quad (3.30)$$

Униформизируя алгебраическую кривую $\mathbb{Q}_2$ из (3.6), мы получим $\lambda_k = \lambda_k(u)$, $k = 1, 2$, где $\lambda_k = \lambda_k(u)$ – мероморфные в круге K функции, $u \in K$, а K является универсальной накрывающей для $\mathbb{Q}_2$ (см. [7], [10]). Функции $\lambda_k(u)$, $k = 1, 2$, автоморфны относительно группы дробно-линейных преобразований K на себя, которая изоморфна фундаментальной группе $\mathcal{F}$ римановой поверхности $\mathbb{Q}_2$. Таким образом, можно считать, что $\lambda_k(u)$, $k = 1, 2$, заданы в фундаментальной области Γ (Γ – многоугольник Пуанкаре поверхности $\mathbb{Q}_2$) с надлежащей “склейкой сторон” посредством группы $\mathcal{F}$. Через $\Gamma_\pm$, Γ_0 , Γ_a^b обозначим прообразы $\mathbb{Q}_2^\pm$, $\mathbb{Q}_2^0$ из (3.16) и $\mathbb{Q}_a^b$ при униформизации $\lambda_k(u)$, $k = 1, 2$, $u \in \Gamma$. Формулировка теоремы 18 после униформизации выглядит следующим образом.

ТЕОРЕМА 19. Пусть $(A_1)_R, (A_2)_R$ – простая система ограниченных самосопряженных операторов, для которой имеют место предположения теоремы 18. Тогда данная система операторов унитарно эквивалентна простой части системы операторов

$$\begin{aligned} ((\mathring{A}_1)_R g)(u) &= \lambda_1(u)g(u), \\ ((\mathring{A}_2)_R g)(u) &= \lambda_2(u)g(u) + \frac{i}{2} \int_{\Gamma_a^b} R(u, v)g(v) \frac{m(v)d\lambda_1(v)}{\lambda_1(v) - \lambda_1(u)}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

действующих в гильбертовом пространстве функций, автоморфных относительно фундаментальной группы $\mathcal{F}$,

$$L_{\Gamma_a^b}^2(md\lambda_1) = \left\{ g(u) : \int_{\Gamma_a^b} |g(u)|^2 m(u) d\lambda_1(u) < \infty \right\}, \quad (3.32)$$

где скалярные функции $m(u)$, $R(u, v)$ имеют вид (3.18), (3.22), а векторы $\hat{u}(P)$ из (3.12) и $u(P)$, $v(P)$ (решения (3.7)) взяты в точке $P = (\lambda_1(u), \lambda_2(u)) \in \mathbb{Q}_2$ из (3.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Конструкции этого пункта естественным образом переносятся на случай системы $n > 2$ самосопряженных операторов $\{(A_k)_R\}_1^n$, для которых имеют место (2.11), (2.12).

3.3. Приведем ряд иллюстративных примеров.

ПРИМЕР 1. Пусть $\dim E = 2$ и

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & ia \\ -ia & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_{2,1}^- = \begin{bmatrix} n & p \\ p & m \end{bmatrix}, \quad \gamma_{2,1}^+ = \begin{bmatrix} m & p \\ p & n \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

где a, n, m, p – ненулевые числа из $\mathbb{R}$, $a > 0$. Из (1.23) следует, что

$$R^- = \frac{n-m}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad R^+ = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} n+m & 2p \\ 2p & n+m \end{bmatrix}.$$

Кривую $\mathbb{Q}_2$ из (3.6) задает полином $\mathbb{Q}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2) = \det[\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + \gamma_{2,1}^\pm] = 0$, который в данном случае имеет следующий вид

$$\left(\lambda_2 + \frac{n+m}{2} \right)^2 - a^2 \lambda_1^2 = p^2 + \left(\frac{n-m}{2} \right)^2. \quad (3.34)$$

Точками ветвления для (3.34) являются точки

$$\lambda_2^\pm = -\frac{n+m}{2} \pm \sqrt{p^2 + \left(\frac{n-m}{2} \right)^2}.$$

Кривая (3.34) есть двулистная риманова поверхность рода $g = 0$, которая получается из двух λ_2 листов $\mathbb{C}$, крест-накрест склеенных вдоль разрезов $(-\infty, \lambda_2^-] \cup [\lambda_2^+, \infty)$. Выражение

$$a \operatorname{Im} \lambda_1 = \operatorname{Im} \sqrt{\left(\lambda_2 + \frac{n+m}{2} \right)^2 - \left(p^2 + \left(\frac{n-m}{2} \right)^2 \right)}$$

меняет знак на разрезах, поэтому $\mathbb{Q}_2^+$ и $\mathbb{Q}_2^-$ из (3.16) – первый и второй из листов $\mathbb{Q}_2$, а $\mathbb{Q}_2^0$ – упомянутые выше разрезы. Униформизируем (3.34) при помощи функций

$$\lambda_1(u) = \frac{r}{a} \operatorname{sh} u, \quad \lambda_2(u) = r \operatorname{ch} u - \frac{n+m}{2}, \quad r = \sqrt{p^2 + \left(\frac{n-m}{2}\right)^2}, \quad (3.35)$$

где u принадлежит фундаментальной области $\Gamma = \{u \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} u \in [-\pi, \pi]\}$. Группу $\mathcal{F}$ порождают сдвиги $u \rightarrow u + 2\pi i$. Так как $\operatorname{Im} \lambda_1(u) = \frac{r}{a} \sin(\operatorname{Im} u) \cdot \operatorname{ch}(\operatorname{Re} u)$, то $\Gamma_{\pm} = \{u \in \Gamma : \pm \operatorname{Im} u > 0\}$, $\Gamma_0 = \{u \in \Gamma : \operatorname{Im} u = 0\}$. Векторы $h^{\pm} \in \operatorname{Ker}[\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + \gamma_{2,1}^{\pm}]$ имеют следующий вид:

$$h^- = \xi_- \begin{bmatrix} ia\lambda_1 - p \\ \lambda_2 + n \end{bmatrix}, \quad h^+ = \xi_+ \begin{bmatrix} ia\lambda_1 - p \\ \lambda_2 + m \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

где $\xi_{\pm} \in \mathbb{C}$. В силу (3.3), (3.4) решение u, v системы (3.7) равно

$$u = \xi_- \begin{bmatrix} (ia\lambda_1 - p)(1 + \xi) \\ \lambda_2 + n + \xi(\lambda_2 + m) \end{bmatrix}, \quad v = \xi_- \begin{bmatrix} (ia\lambda_1 - p)(1 - \xi) \\ \lambda_2 + n - \xi(\lambda_2 + m) \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

при этом $\xi = \xi_+ \xi_-^{-1}$. Так как $v = \frac{i}{2} V_1(\lambda_1) \sigma_1 u_1$, то

$$V_1(\lambda_1) = 2i \begin{bmatrix} \frac{\xi - 1}{\xi + 1} & 0 \\ 0 & \frac{\xi\mu - 1}{\xi\mu + 1} \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

где $\mu \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_2 + m)(\lambda_2 + n)^{-1}$. Учитывая связь между $V_1(\lambda_1)$ и $S(\lambda_1)$, нетрудно показать, что

$$S_1(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi\mu \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Из равенства $S_1(\lambda_1) \hat{h}^-(P) = \theta(P) \hat{h}^+(P)$ (см. (1.15)), где $\hat{h}^{\pm}(P)$ – соответствующие нормированные векторы $h^{\pm}$ из (3.36), вытекает, что $\theta(P) = \xi\mu$. Поэтому

$$\xi(P) = \theta(P) \mu^{-1}(P). \quad (3.40)$$

Используя (3.37) и (3.40), мы получим, что

$$V_1(\lambda_1(P)) = 2i \begin{bmatrix} \frac{\theta(P) - \mu(P)}{\theta(P) + \mu(P)} & 0 \\ 0 & \frac{\theta(P) - 1}{\theta(P) + 1} \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Учитывая вид u, v (см. (3.37)) и (3.41), находим, что функция $\omega(P)$ из (3.30) равна

$$\omega(P) = 2i \frac{\theta(P) - 1}{\theta(P) + 1}. \quad (3.42)$$

Интегральное представление (2.20) для V_1 из (3.41) задает мера $dF_t = a_t dt$, где a_t диагональна,

$$a_t = \begin{bmatrix} \alpha_t & 0 \\ 0 & \beta_t \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

$\alpha_t \geq 0$ и $\beta_t \geq 0$ соответствуют “неванлинновским” функциям $2i\frac{\theta-\mu}{\theta+\mu}$ и $2i\frac{\theta-1}{\theta+1}$. Естественно, что между α_t и β_t существует связь, обусловленная тем, что эти функции задает функция $\theta(P)$, а $\mu(P)$ имеет конкретный вид. В данном случае функция $m(P)$ из (3.18) равна

$$m(P) = \frac{\mu(P)|1 + \theta(P)|^2}{\alpha_t|\mu(P) + \theta(P)|^2 + \mu(P)|1 + \theta(P)|^2}, \quad (3.44)$$

где $P = (t, \lambda_2(t))$. Ядро $R(P, \tilde{P})$ (см. (3.22)) после униформизации (3.35) имеет следующий вид:

$$R(u, v) = \frac{m-n}{2} \left\{ \alpha_u \alpha_v \operatorname{th} \frac{v+\varphi}{2} \overline{\operatorname{th} \frac{u+\varphi}{2}} \left(\frac{\mu(v) + \theta(v)}{1 + \theta(v)} \right) \overline{\left(\frac{\mu(u) + \theta(u)}{1 + \theta(u)} \right)} - \beta_u \beta_v \right\}, \quad (3.45)$$

при этом $\operatorname{th} \varphi = 2\pi i(m-n)^{-1}$. Таким образом, модельная реализация (3.31), (3.32) задается в гильбертовом пространстве функций, определенных на оси $\mathbb{R}$ по мере $m(u)r \operatorname{ch} u du$, а операторы $\{(\hat{A}_k)_R\}_1^2$ из (3.31) имеют конкретный вид, где $\lambda_1(u)$, $\lambda_2(u)$ равны (3.35), а $m(u)$, $R(u, v)$ – (3.44), (3.45).

ПРИМЕР 2. Предположим, что $\dim E = 3$ и

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \gamma_{2,1}^- &= \begin{bmatrix} p & iq & r \\ -iq & 0 & -iq \\ r & iq & p \end{bmatrix}, & \gamma_{2,1}^+ &= \begin{bmatrix} p & -iq & r \\ iq & 0 & iq \\ r & -iq & p \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

где $p, q, r \in \mathbb{R}$, отличны от нуля и $p > r$. Операторы $R^\pm$ в силу (1.23) равны

$$R^- = \begin{bmatrix} 0 & iq & 0 \\ -iq & 0 & -iq \\ 0 & iq & 0 \end{bmatrix}, \quad R^+ = \begin{bmatrix} p & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & p \end{bmatrix}.$$

Кривую $\mathbb{Q}_2$ из (3.6) задает полином третьей степени $\mathbb{Q}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2) = \det[\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1 + \gamma_{2,1}^\pm] = 0$,

$$4(p-r)\lambda_1^2 = 4\lambda_2^3 - \lambda_2 g_2 - g_3, \quad (3.47)$$

где $g_2 = 4(p^2 - r^2)$, $g_3 = 8(r-p)q^2$, при этом мы считаем, что p, q, r таковы, что дискриминант $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 > 0$. Это означает, что корни $\{e_k\}_1^3$ уравнения $4\lambda^3 - \lambda g_2 - g_3 = 0$ различны и вещественны, $e_3 < e_2 < e_1$ (см. [11]). Двухлистная риманова поверхность рода $g = 1$, отвечающая (3.47), образуется склейкой двух λ_2 экземпляров $\mathbb{C}$ вдоль разрезов $[e_3, e_2] \cup [e_1, \infty)$. Очевидно, что $\mathbb{Q}_2^\pm$ (см. (3.16))

соответствуют листы (3.47), а $\mathbb{Q}_2^0$ – выбранные разрезы. На (3.47) существует один ($g = 1$) абелев дифференциал первого рода (см. [7], [10], [11]),

$$\omega = \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - zg_2 - g_3}}, \quad (3.48)$$

который задает при помощи эллиптического интеграла

$$u = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - zg_2 - g_3}} \quad (3.49)$$

конформное отображение кривой (3.47) на прямоугольник

$$\Gamma = \{u \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} u \in [0, 2\omega_1]; i \operatorname{Im} u \in [0, 2\omega_3]\},$$

где $2\omega_1, 2\omega_3$ – примитивные периоды дифференциала (3.48), $\frac{\omega_3}{i} > 0$. Обращение интеграла (3.49) приводит к униформизации (3.47),

$$\lambda_2(u) = \wp(u), \quad \lambda_1(u) = \frac{1}{2\sqrt{p-2}}\wp'(u), \quad (3.50)$$

где $\wp(u)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса (см. [11]). Группу $\mathcal{F}$ порождают сдвиги $u \rightarrow u + 2\omega_1$, $u \rightarrow u + 2\omega_3$. Векторы $h^{\pm} \in \operatorname{Ker}[\sigma_1\lambda_2 - \sigma_2\lambda_1 + \gamma_{2,1}^{\pm}]$ равны

$$h^- = \xi_- \operatorname{col}[1 - m\lambda_2, \lambda_1 + iq, 1 + m\lambda_2], \quad h^+ = \xi_+ \operatorname{col}[1 + m\lambda_2, \lambda_1 - iq, 1 - m\lambda_2], \quad (3.51)$$

где $m(p - r) = 1$. Учитывая (3.3), (3.4), находим решение u, v системы (3.7),

$$\begin{aligned} u &= \xi_- \operatorname{col}[1 - m\lambda_2 + \xi(1 + m\lambda_2), \lambda_1 + iq + \xi(\lambda_1 - iq), 1 + m\lambda_2 + \xi(1 - m\lambda_2)], \\ v &= \xi_+ \operatorname{col}[1 - m\lambda_2 - \xi(1 + m\lambda_2), \lambda_1 + iq - \xi(\lambda_1 - iq), 1 + m\lambda_2 - \xi(1 - m\lambda_2)], \end{aligned} \quad (3.52)$$

при этом $\xi = \xi_+\xi_-^{-1}$. Так как $v = \frac{i}{2}V_1(\lambda_1)\sigma_1u$, то, используя (3.52), находим, что

$$V_1(\lambda_1) = 2i \begin{bmatrix} \frac{\xi - \mu}{\xi + \mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi\nu - 1}{\xi\nu + 1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \xi\mu}{1 + \xi\mu} \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

где $\mu = (1 - m\lambda_2)(1 + m\lambda_2)^{-1}$, а $\nu = (\lambda_1 - iq)(\lambda_1 + iq)^{-1}$. Следовательно, характеристическая функция $S_1(\lambda_1)$ имеет такой вид:

$$S_1(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \xi\mu^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \xi\mu^{-1}\nu & 0 \\ 0 & 0 & \xi\mu \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

А так как $S_1(\lambda_1)\hat{h}^-(P) = \theta(P)\hat{h}^+(P)$ (см. (1.15)), то из (3.51) и (3.54) получаем, что $\theta = \xi\mu$. Таким образом, как и в примере 1 (см. (3.40)), мы приходим к тому, что

$$\xi(P) = \theta(P)\mu^{-1}(P). \quad (3.55)$$

Итак, $V_1(\lambda_1)$ из (3.53) равна

$$V_1(\lambda_1(P)) = 2i \begin{bmatrix} \frac{\theta(P) - \mu^2(P)}{\theta(P) + \mu^2(P)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\theta(P)\nu(P) - \mu(P)}{\theta(P)\nu(P) + \mu(P)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \theta(P)}{1 + \theta(P)} \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Так же как и в примере 1, нетрудно установить, что функция $\omega(P)$ из (3.30) имеет такой вид:

$$\omega(P) = 2i \frac{\theta(P) - 1}{\theta(P) + 1}. \quad (3.57)$$

Каждой из неванлинновских функций

$$2i \frac{\theta(P) - \mu^2(P)}{\theta(P) + \mu^2(P)}, \quad 2i \frac{\theta(P)\nu(P) - \mu(P)}{\theta(P)\nu(P) + \mu(P)}, \quad 2i \frac{1 - \theta(P)}{1 + \theta(P)}$$

в интегральном представлении (2.20) отвечает соответствующая мера $\alpha_t dt$, $\beta_t dt$, $\gamma_t dt$. Между функциями α_t , β_t и γ_t существует зависимость потому, что $\theta(P)$ – общая для этих неванлинновских функций, а $\mu(P)$ и $\nu(P)$ имеют явный вид для данной кривой (3.47). Функция $m(P)$ из (3.18) определяется из следующей формулы:

$$\frac{1}{m(P)} = \frac{\alpha_t}{\mu^2(P)} \left| \frac{\mu^2(P) + \theta(P)}{1 + \theta(P)} \right|^2 + \frac{\beta_t(t^2 + p^2)}{(1 + m\lambda_2(t))^2} \left| \frac{\mu(P) + \theta(P)\nu(P)}{1 + \theta(P)} \right|^2 - \gamma_t, \quad (3.58)$$

где $P = (t, \lambda_2(t))$. Как и в примере 1, нетрудно выписать формулу для ядра $R(P, \tilde{P})$ из (3.22). Модельная реализация (3.31), (3.32) после униформизации (3.50) задается в пространстве эллиптических функций.

Список литературы

- [1] М. С. Лившиц, А. А. Янцевич, *Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах*, Изд-во Харьк. ун-та, Харьков, 1971; англ. пер.: M. S. Livshits, A. A. Yantsevich, *Operator colligations in Hilbert spaces*, Winston & Sons, Washington, DC; A Halsted Press Book, Wiley, New York–Toronto, ON–London, 1979.
- [2] В. А. Золотарёв, *Аналитические методы спектральных представлений несамопряженных и неунитарных операторов*, ХНУ, Харьков, 2003.
- [3] В. А. Золотарёв, “Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности”, *Матем. сб.*, **181**:7 (1990), 965–994; англ. пер.: V. A. Zolotarev, “Time cones and a functional model on a Riemann surface”, *Math. USSR-Sb.*, **70**:2 (1991), 399–429.
- [4] M. S. Livšić, N. Kravitsky, A. S. Markus, V. Vinnikov, *Theory of commuting non-selfadjoint operators*, Math. Appl., **332**, Kluwer, Dordrecht–London, 1995.
- [5] А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применение*, Наука, М., 1987; англ. пер.: A. Perelomov, *Generalized coherent states and their applications*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1986.

- [6] M. S. Livšic, L. L. Waksman, “Commuting nonselfadjoint operators in Hilbert space. Two independent studies”, *Lect. Notes in Math.*, **1272**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [7] Б. А. Дубровин, “Тэта-функции и нелинейные уравнения”, *УМН*, **36:2** (1981), 11–80; англ. пер.: B. A. Dubrovin, “Theta functions and non-linear equations”, *Russian Math. Surveys*, **36:2** (1981), 11–92.
- [8] Е. М. Дынькин, “Методы теории сингулярных интегралов (преобразование Гильберта и теория Кальдерона–Зигмунда)”, *Коммутативный гармонический анализ* – 1, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **15**, ВИНТИ, М., 1986, 197–292; англ. пер.: E. M. Dyn’kin, “Methods of the theory of singular integrals: Hilbert transform and Calderón–Zygmund theory”, *Commutative harmonic analysis I. General survey. Classical aspects*, *Encyclopaedia Math. Sci.*, **15**, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 167–259.
- [9] Н. И. Ахиезер, *Лекции об интегральных преобразованиях*, Высшая школа, Харьков, 1984.
- [10] Дж. Спрингер, *Введение в теорию римановых поверхностей*, ИЛ, М., 1960; пер. с англ.: G. Springer, *Introduction to Riemann surfaces*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1957.
- [11] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970; англ. пер.: N. I. Akhiezer, *Elements of the theory of elliptic functions*, Transl. Math. Monogr., **79**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

В. А. Золотарёв (V. A. Zolotarev)

Физико-технический институт низких температур
им. Б. И. Веркина НАН Украины, г. Харьков; Харьковский
национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина
E-mail: vazolotarev@gmail.com;
Vladimir.A.Zolotarev@univer.kharkov.ua

Поступила в редакцию
29.04.2009 и 19.04.2010