Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. В. Бедоя, Д. Л. Гонсалвес, Проблема разложимости разветвленных накрытий, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 12, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7572>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 18:11:16

УДК 515.162.2

Н. А. В. Бедоя, Д. Л. Гонсалвес

Проблема разложимости разветвленных накрытий

Как известно, заданное разветвленное накрытие степени d между замкнутыми поверхностями определяет набор разбиений числа d , называемый данными ветвления. В работе показано, что любые данные ветвления реализуемы неразложимым примитивным разветвленным накрытием над связной замкнутой поверхностью N такой, что ее эйлерова характеристика $\chi(N) \leq 0$. Отсюда следует, что разложимые и неразложимые реализации могут сосуществовать. Охарактеризованы также данные ветвления разложимых примитивных разветвленных накрытий.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: разветвленные накрытия, группы перестановок.

Введение

Начнем с описания некоторых исторических фактов и результатов, связанных с проблемой, изучаемой в этой работе. В 1957 г. К. Борсук и Р. Молски поставили вопрос о существовании непрерывного отображения конечного порядка¹, не являющегося композицией *простых отображений*, т.е. отображений порядка, не превосходящего двух (см. [1]). В 1959 г. К. Секлужки показал, что каждое такое отображение, определенное на компактном конечномерном метрическом пространстве, является композицией простых отображений, и построил пример на бесконечномерном компактном пространстве, не являющийся композицией (см. [2]). В 1973 г. Дж. Бэйлдон показал, что если открытое сюръективное отображение конечного порядка между замкнутыми поверхностями является композицией k простых открытых сюръективных отображений, то его порядок равен 2^k (см. [3]). В 2002 г. Е. Кжембек в [4] построил для любого n накрывающее отображение на локально линейно связном континууме, которое не разложимо в композицию накрывающих отображений порядка, не превосходящего $n - 1$. В 2002 г. С. Богатая, С. Богатый и Х. Цишанг обобщили теорему Бэйлдона для композиций произвольных открытых отображений и показали, что порядок произведения (композиции) равен произведению порядков (см. [5]). Они также построили пример четырехлистного накрытия поверхности рода два поверхностью рода пять, которое не может быть разложено в композицию двух нетривиальных открытых отображений.

¹Непрерывное отображение φ , определенное на пространстве X , называется *отображением порядка, не превосходящего $k \in \mathbb{Z}^+$* , если для любого $y \in \varphi(X)$ множество $\varphi^{-1}(y)$ содержит не более k точек.

В [6] Г. Уайбэрн показал, что открытые отображения конечного порядка на замкнутых поверхностях суть разветвленные накрытия. Цель настоящей работы – ответить на вопрос, является ли примитивное (сюрьеक्टивное на π_1) разветвленное накрытие степени $d \in \mathbb{Z}^+$ между замкнутыми связными поверхностями *разложимым*, т.е. являющимся композицией нетривиальных накрытий степени меньше d . Мы налагаем условие сюрьеक्टивности на фундаментальной группе, так как непримитивное разветвленное накрытие всегда разложимо (см. [7]).

Разветвленное накрытие $\varphi: M \rightarrow N$ степени d между замкнутыми связными поверхностями определяет конечный набор $\mathcal{D}$ разбиений числа d , т.е. данные ветвления. Обратно, если даны $\mathcal{D}$ и N , Д. Хьюзмоллер в [8] и К. Эзелл в [9] дали необходимое и достаточное условие (условие Гурвица для $\mathcal{D}$, см. п. 1.2) для существования разветвленного накрытия $\varphi: M \rightarrow N$ между связными замкнутыми поверхностями, имеющего данные ветвления $\mathcal{D}$, при условии $\chi(N) \leq 0$. В этом случае будем говорить, что $\mathcal{D}$ *реализуем на N отображением φ* . Более того, С. Богатый, Д. Гонсалвес, Е. Кудрявцева и Х. Цишанг в [10] и [11] показали при том же условии, что разветвленное накрытие может быть выбрано примитивным.

Набор разбиений числа d , удовлетворяющий условию Гурвица, будем называть *допустимым*. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема (теорема 3.3):

ТЕОРЕМА. *Любые нетривиальные допустимые данные реализуемы неразложимым примитивным разветвленным накрытием над любой замкнутой связной поверхностью N такой, что $\chi(N) \leq 0$.*

В работе также охарактеризованы допустимые данные, реализуемые разложимым примитивным разветвленным накрытием над N , т.е. *разложимые данные на N* , с помощью определения специального разложения данных, а именно, доказано следующее предложение (предложение 2.6).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *При $\chi(N) \leq 0$ допустимые данные $\mathcal{D}$ разложимы на N тогда и только тогда, когда имеется такое разложение данных $\mathcal{D}$, в котором первый множитель является нетривиальными допустимыми данными.*

Задача, которую мы здесь решаем, является важной для понимания и возможной классификации разветвленных накрытий. После результатов работ [8] и [12] существенные результаты были получены в работах [7], [10], [11], [13], в которых проблема реализации была решена в классе примитивных (т.е. индуцирующих сюрьекуцию фундаментальных групп) накрытий. Мы продолжаем исследование проблемы реализации этого типа, изучая разложимость на (возможно, неразложимые) разветвленные накрытия. Рассматриваемая нами проблема также связана с обратной проблемой Галуа (см., например, [14] и [15]) и с построением примитивных и непримитивных групп монодромии, имеющимся в [16]. Кроме фактов, упомянутых выше, эта проблема кажется интересной и сама по себе.

Статья состоит из введения и четырех параграфов. В § 1 приведены основные определения и некоторые известные результаты, связанные с разветвленными накрытиями. В § 2 дана характеристика данных ветвления разложимого примитивного разветвленного накрытия. В § 3 сформулировано утверждение о том, что если N является тором или бутылкой Клейна, то допустимое разбиение реализуемо на N неразложимым примитивным разветвленным накрытием. Затем этот результат обобщен на любые допустимые данные и любую поверхность N такую, что $\chi(N) \leq 0$. В § 4 доказаны утверждения из § 3.

Результаты, тесно связанные с этой работой, содержатся в диссертации (PhD) первого автора, написанной под руководством профессора Д. Л. Гонсалвеса и выполненной при поддержке FAPESP (грант № 03/12309-4).

§ 1. Предварительные результаты, терминология и обозначения

1.1. О группах перестановок. Обозначим через Σ_d симметрическую группу на множестве Ω из d элементов, а через 1_d – ее единичный элемент. Если $\alpha \in \Sigma_d$ и $x \in \Omega$, то через x^α обозначим образ x при действии α . Конкретная перестановка α будет записываться или как произведение независимых циклов, или следующим образом:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2k+1 \\ 1^\alpha & 2^\alpha & \dots & (2k+1)^\alpha \end{pmatrix},$$

в зависимости от того, как нам будет удобнее. Множество длин циклов в разложении на независимые циклы перестановки α , включая тривиальные, определяет разбиение числа d , называемое *циклической структурой* перестановки α . Обозначим это разбиение через $D_\alpha = [d_{\alpha_1}, \dots, d_{\alpha_t}]$ и определим $\nu(\alpha) := \sum_{i=1}^t (d_{\alpha_i} - 1)$. Тогда α называется *четной перестановкой*, если $\nu(\alpha) \equiv 0 \pmod{2}$. Если дано разбиение D числа d и циклическая структура перестановки α есть D , то будем писать $\alpha \in D$ и полагать $\nu(D) := \nu(\alpha)$.

При $1 < r \leq d$ перестановка $\alpha \in \Sigma_d$ называется *r -циклом*, если в ее разложении на независимые циклы нетривиальный цикл единственный и имеет длину r . Перестановки $\alpha, \beta \in \Sigma_d$ называются *сопряженными*, если существует $\lambda \in \Sigma_d$ такая, что $\alpha^\lambda := \lambda\alpha\lambda^{-1} = \beta$. Известно, что сопряженные перестановки имеют одну и ту же циклическую структуру.

Если G – группа перестановок на множестве Ω и $x \in \Omega$, то определяются *подгруппа изотропии элемента x* , $G_x := \{g \in G : x^g = x\}$, и *орбита элемента x* при действии G , $x^G := \{x^g : g \in G\}$.

Для $H \subset G$ введем подмножества

$$\begin{aligned} \text{Supp}(H) &:= \{x \in \Omega : x^h \neq x \text{ для некоторого } h \in H\}, \\ \text{Fix}(H) &:= \{x \in \Omega : x^h = x \text{ для всех } h \in H\}. \end{aligned}$$

Для $\Lambda \subset \Omega$ и $g \in G$ положим $\Lambda^g := \{y^g : y \in \Lambda\}$.

Говорят, что G *транзитивна*, если для любой пары $x, y \in \Omega$ существует $g \in G$ такой, что $x^g = y$. Непустое подмножество $\Lambda \subset \Omega$ называется *блоком*

транзитивной группы G , если для каждого $g \in G$ либо $\Lambda^g = \Lambda$, либо $\Lambda^g \cap \Lambda = \emptyset$. Блок Λ называется *тривиальным*, если либо $\Lambda = \Omega$, либо $\Lambda = \{x\}$ для некоторого $x \in \Omega$. Если Λ – блок группы G , то множество $\Gamma := \{\Lambda^\alpha : \alpha \in G\}$ определяет разбиение множества Ω на блоки. Это множество называется *системой блоков, содержащей Λ* , и количество элементов Λ делит количество элементов Ω . Группа G естественно действует на Γ . Транзитивная группа перестановок называется *примитивной*, если она обладает только тривиальными блоками. В противном случае она называется *непримитивной*.

ПРИМЕР 1.1. Транзитивная группа перестановок $G < \Sigma_d$, которая содержит $(d-1)$ -цикл, примитивна. Действительно, без ограничения общности предположим, что $g = (1 \dots d-1)(d) \in G$. Тогда любое собственное подмножество Λ множества $\{1, \dots, d\}$, содержащее d и по меньшей мере еще один элемент, удовлетворяет условиям $\Lambda^g \neq \Lambda$ и $\Lambda^g \cap \Lambda \neq \emptyset$. Поэтому блоки группы G тривиальны и G примитивна.

ПРИМЕР 1.2. Если $\text{НОД}(\ell, d) = 1$ и ℓ превосходит любой нетривиальный делитель числа d (это выполнено, например, при $d = 2\ell \pm 1$), то любая транзитивная группа перестановок $G < \Sigma_d$, содержащая ℓ -цикл, примитивна. Действительно, пусть для определенности G содержит цикл $(1, \dots, \ell)$. Если G имеет блок, содержащий два элемента i и j такие, что $i \leq \ell$ и $j > \ell$, то этот блок содержит также $1, \dots, \ell$, откуда следует, что количество элементов блока больше или равно $\ell + 1$ и, значит, оно равно d и блок тривиален. В противном случае количество элементов любого блока делит ℓ и $d - \ell$, поэтому оно равно единице, откуда следует, что все блоки G тривиальны. Следовательно, G – примитивная группа перестановок.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 (см. [17; следствие 1.5 A]). Пусть G – транзитивная группа перестановок на множестве Ω , состоящем из не менее двух точек. Тогда G примитивна тогда и только тогда, когда каждая подгруппа изотропии G_x , $x \in \Omega$, является максимальной подгруппой в G .

1.2. О разветвленных накрытиях между замкнутыми поверхностями. Сюръективное непрерывное открытое отображение $\varphi: M \rightarrow N$ между замкнутыми поверхностями такое, что:

- 1) при $x \in N$ множество $\varphi^{-1}(x)$ является дискретным;
- 2) существует непустое дискретное множество $B_\varphi \subset N$ такое, что ограничение $\widehat{\varphi} := \varphi|_{M - \varphi^{-1}(B_\varphi)}$ является обычным (неразветвленным) накрытием степени d ,

называется *разветвленным накрытием степени d над N* и обозначается через $(M, \varphi, N, B_\varphi, d)$. Здесь N – базовая поверхность, M – накрывающая поверхность и B_φ – множество точек ветвления. Его ассоциированное неразветвленное накрытие обозначается через $(\widehat{M}, \widehat{\varphi}, \widehat{N}, d)$, где $\widehat{N} := N \setminus B_\varphi$ и $\widehat{M} := M \setminus \varphi^{-1}(B_\varphi)$. Множество B_φ – это просто образ тех точек из M , в которых φ не является локальным гомеоморфизмом, поэтому каждая точка $x \in B_\varphi$ определяет нетривиальное разбиение D_x числа d , состоящее из локальных степеней отображения φ на каждой компоненте прообраза маленького круга U_x

вокруг x такого, что $U_x \cap B_\varphi = \{x\}$. Набор $\mathcal{D} := \{D_x\}_{x \in B_\varphi}$ называется *данными ветвления*, а его *тотальный дефект* – это натуральное число, определяемое формулой $\nu(\mathcal{D}) := \sum_{x \in B_\varphi} \nu(D_x)$. Тотальный дефект удовлетворяет формуле Римана–Гурвица (см. [12]):

$$\nu(\mathcal{D}) = d\chi(N) - \chi(M). \quad (1.1)$$

С разветвленным накрытием $(M, \varphi, N, B_\varphi, d)$ связывается группа перестановок, называемая *группой монодромии* отображения φ , – это образ *представления Гурвица*

$$\rho_\varphi: \pi_1(N \setminus B_\varphi, z) \rightarrow \Sigma_d, \quad (1.2)$$

которое переводит любой класс $\alpha \in \pi_1(N \setminus B_\varphi, z)$ в перестановку множества $\varphi^{-1}(z) = \{z_1, \dots, z_d\}$, показывающую зависимость конечной точки поднятия петли из α от выбора начальной точки, где $z \in N \setminus B_\varphi$. В частности, для любой точки $x \in B_\varphi$ рассмотрим путь c_x от точки z до маленькой окружности a_x вокруг x и определим класс петель $\mathbf{u}_x := [c_x a_x c_x^{-1}]$. Тогда циклическая структура перестановки $\alpha_x := \rho_\varphi(\mathbf{u}_x)$ совпадает с D_x и $\nu(\prod_{x \in B_\varphi} \alpha_x) \equiv \nu(\mathcal{D}) \pmod{2}$.

Всюду далее N будет обозначать связную замкнутую поверхность такую, что $\chi(N) \leq 0$. Тогда N – это либо связная сумма $g \geq 1$ торов, $N = T_g$, либо связная сумма $g \geq 2$ проективных плоскостей, $N = P_g$. Если $B_\varphi = \{x_1, \dots, x_t\}$, то мы используем следующие представления для соответствующих фундаментальных групп:

$$\begin{aligned} \pi_1(N \setminus B_\varphi, z) = & \begin{cases} \langle \mathbf{u}_{x_1}, \dots, \mathbf{u}_{x_t}, a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \mathbf{u}_{x_1} \cdots \mathbf{u}_{x_t} [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle, & N = T_g, \\ \langle \mathbf{u}_{x_1}, \dots, \mathbf{u}_{x_t}, a_1, \dots, a_g \mid \mathbf{u}_{x_1} \cdots \mathbf{u}_{x_t} a_1^2 \cdots a_g^2 = 1 \rangle, & N = P_g. \end{cases} \end{aligned}$$

В частном случае, когда $N = P_2$ и $B_\varphi = \{x\}$, мы также работаем с представлением $\langle \mathbf{u}_x, a_1, a_2 \mid \mathbf{u}_x a_1 a_2 a_1 a_2^{-1} = 1 \rangle$, что будет ясно из контекста. Отметим, что перестановка $\rho_\varphi(\prod_{i=1}^t \mathbf{u}_{x_i})$ всегда четная. Это необходимое условие известно как условие Гурвица и эквивалентно тому, что

$$\nu(\mathcal{D}) \equiv 0 \pmod{2}. \quad (1.3)$$

ТЕОРЕМА 1.4 (см. [18]). Пусть даны N и конечный набор $\mathcal{D}$ разбиений числа d . Предположим, что можно определить представление $\pi_1(N \setminus F, z) \rightarrow \Sigma_d$, аналогичное представлению ρ_φ , образ которого является транзитивной группой перестановок, где $F \subset N$ – конечное множество с тем же количеством элементов, что и $\mathcal{D}$. Тогда набор $\mathcal{D}$ реализуем на N .

ТЕОРЕМА 1.5 (см. в [8] – ориентируемый случай; в [9] – неориентируемый случай). Если набор $\mathcal{D}$ допустим, то $\mathcal{D}$ реализуем на любой поверхности N такой, что $\chi(N) \leq 0$.

ТЕОРЕМА 1.6 (см. в [11] – геометрическая реализация; в [10] – алгебраическая реализация). Любые нетривиальные допустимые данные $\mathcal{D}$ реализуемы примитивным разветвленным накрытием над любой поверхностью N такой, что $\chi(N) \leq 0$.

Напомним, что накрытие называется *разложимым*, если его можно записать как композицию двух нетривиальных (т.е. имеющих степени больше единицы) накрытий; в противном случае накрытие называется *неразложимым*. В разложении разветвленного накрытия, не являющегося накрытием, по меньшей мере одна из компонент является разветвленным накрытием, не являющимся накрытием. Более того, поскольку степень разложимого накрытия равна произведению степеней его компонент (см. [5; теорема 2.3]), нас интересуют разветвленные накрытия составной степени.

Для упрощения обозначений в случае, когда фиксировано разветвленное накрытие $(M, \varphi, N, B_\varphi, d)$, отождествим: $\rho := \rho_\varphi$, $G := \text{Im}(\rho)$. Напомним, что для фиксированной точки $z \in \hat{N}$ группа G – это группа перестановок множества $\varphi^{-1}(z) = \{z_1, \dots, z_d\}$, а G_{z_i} – подгруппа изотропии точки z_i .

ЛЕММА 1.7. Пусть $(M, \varphi, N, B_\varphi, d)$ – разветвленное накрытие. Тогда в последовательности

$$\pi_1(\widehat{M}, z_i) \xrightarrow{\widehat{\varphi}_\#} \pi_1(\widehat{N}, z) \xrightarrow{\rho} G$$

имеем $\rho^{-1}(G_{z_i}) = \widehat{\varphi}_\#(\pi_1(\widehat{M}, z_i))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим петлю α класса $[\alpha] \in \rho^{-1}(G_{z_i})$. Тогда $z_i^{\rho([\alpha])} = z_i$ и класс поднятия $\tilde{\alpha}$ петли α с начальной точкой z_i принадлежит $\pi_1(\widehat{M}, z_i)$ и $\widehat{\varphi}_\#([\tilde{\alpha}]) = [\alpha]$. Обратно, если $[\alpha] \in \widehat{\varphi}_\#(\pi_1(\widehat{M}, z_i))$, то класс поднятия этой петли с начальной точкой z_i принадлежит $\pi_1(\widehat{M}, z_i)$. Поэтому $\rho([\alpha]) \in G_{z_i}$. Лемма доказана.

Дадим теперь аналог теоремы Ритта (см. [19]) для разветвленных накрытий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. Разветвленное накрытие разложимо тогда и только тогда, когда его группа монодромии непримитивна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(M, \varphi, N, B_\varphi, d)$ разложимо. Тогда существуют поверхность K и разветвленные накрытия ψ, η степеней w, u соответственно такие, что $\varphi = \eta\psi$ и $d = uw$ ($u, w > 1$). Определим $\widehat{K} := K - \eta^{-1}(B_\varphi)$. Пусть $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}, \widehat{\eta}$ – ограничения отображений φ и ψ на $\widehat{M}$ и отображения η на $\widehat{K}$. Для фиксированной точки $z \in \widehat{N}$ рассмотрим точки $z_1 \in \widehat{\varphi}^{-1}(z)$ и $y_1 := \widehat{\psi}(z_1)$. Имеем коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccccc} \begin{array}{ccc} M & & \\ \varphi \downarrow & \searrow \psi & \\ N & \xleftarrow{\eta} & K \end{array} & \begin{array}{ccc} (\widehat{M}, z_1) & & \\ \widehat{\varphi} \downarrow & \searrow \widehat{\psi} & \\ (\widehat{N}, z) & \xleftarrow{\widehat{\eta}} & (\widehat{K}, y_1) \end{array} & \begin{array}{ccc} \pi_1(\widehat{M}, z_1) & & \\ \widehat{\varphi}_\# \downarrow & \searrow \widehat{\psi}_\# & \\ \pi_1(\widehat{N}, z) & \xleftarrow{\widehat{\eta}_\#} & \pi_1(\widehat{K}, y_1) \end{array} \end{array}$$

которые являются эквивалентами следующей последовательности собственных подгрупп:

$$\widehat{\varphi}_\#(\pi_1(\widehat{M}, z_1)) \not\subseteq \widehat{\eta}_\#(\pi_1(\widehat{K}, y_1)) \not\subseteq \pi_1(\widehat{N}, z) \quad (1.4)$$

с индексами

$$|\widehat{\eta}_\#(\pi_1(\widehat{K}, y_1)) : \widehat{\varphi}_\#(\pi_1(\widehat{M}, z_1))| = w, \quad |\pi_1(\widehat{N}, z) : \widehat{\eta}_\#(\pi_1(\widehat{K}, y_1))| = u.$$

Применяя ρ к (1.4) и используя лемму 1.7, мы получаем собственные подгруппы $G_{z_1} \not\leq \rho(\hat{\eta}_\#(\pi_1(\hat{K}, y_1))) \not\leq G$ с такими же индексами, как и выше, поскольку $\text{Ker}(\rho) < \rho^{-1}(G_{z_1}) = \hat{\varphi}_\#(\pi_1(\hat{M}, z_1))$. Значит, подгруппа G_{z_1} не является максимальной и по предложению 1.3 группа G непримитивна.

Обратно, если $\rho: \pi_1(\hat{N}, z) \rightarrow G$ – представление Гурвица для $(M, \varphi, N, B_\varphi, d)$ и G непримитивна, то по предложению 1.3 существуют точка $z_i \in \varphi^{-1}(z)$ и собственная подгруппа $H_1 < G$ такие, что

$$\rho^{-1}(G_{z_i}) \not\leq \rho^{-1}(H_1) \not\leq \pi_1(\hat{N}, z).$$

Пусть $u > 1$ – индекс $\rho^{-1}(H_1)$ в $\pi_1(\hat{N}, z)$ и $(\hat{K}, \hat{\eta}, \hat{N}, u)$ – неразветвленное накрытие, отвечающее подгруппе $\rho^{-1}(H_1)$. Так как $\rho^{-1}(G_{z_i}) = \hat{\varphi}_\#(\pi_1(\hat{M}, z_i))$ (см. лемму 1.7), то $\hat{\varphi}$ имеет поднятие $\hat{\psi}: \hat{M} \rightarrow \hat{K}$ и мы получаем коммутативную диаграмму неразветвленных накрытий. Мы хотим продолжить ее на M, N и компактификацию K для $\hat{K}$. Это продолжение получается применением теории накрывающих пространств к ограничениям диаграммы на маленькие окружности вокруг элементов из B_φ . Предложение доказано.

Говорят, что отображение *ориентирующе правильно*, если оно переводит сохраняющие ориентацию петли в сохраняющие ориентацию, а меняющие ориентацию петли – в меняющие ориентацию петли. Разветвленное накрытие является ориентирующе правильным отображением (см. [13]).

ЗАМЕЧАНИЕ. При $g \geq 1$ подгруппа кручения абелизированной группы $\pi_1(P_g)$ является циклической группой порядка два. В представлении

$$\pi_1(P_g) = \langle a_1, \dots, a_g \mid a_1^2 \cdots a_g^2 = 1 \rangle$$

эта подгруппа группы $\pi_1(P_g)_{ab}$ порождена единственным элементом $a_1 + \dots + a_g$ порядка два.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. Пусть (K, η, N, B_η, u) – примитивное разветвленное накрытие не являющееся гомеоморфизмом и $\chi(N) \leq 0$. Тогда для любого $w \in \mathbb{N}$ существует подгруппа H в $\pi_1(K)$ индекса w такая, что $\eta_\#|_H$ – эпиморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы об изоморфизме (см. [20; гл. 1, теорема 1.8]) и того, что $\eta_\#$ – эпиморфизм, достаточно работать с абелизованными группами. Если $N = T_g$, то в силу формул (1.1), (1.3) и неравенств $\nu(D) > 0$ и $d \geq 2$ имеем $K = T_h$ для некоторого $h > g > 0$. Пусть $\bar{\eta}_\#: \pi_1(T_h)_{ab} \rightarrow \pi_1(T_g)_{ab}$ – эпиморфизм абелизованных фундаментальных групп, индуцированный $\eta_\#$. Заметим, что $\pi_1(T_h)_{ab} \cong \langle a_1, \dots, a_{2(h-g)}, b_1, \dots, b_{2g} \rangle$, где a_i – образующие $\text{Ker}(\bar{\eta}_\#)$ и $\bar{\eta}_\#(b_j)$ – образующие $\pi_1(T_g)_{ab}$. Определим подгруппу $\bar{H} = \langle wa_1, a_2, \dots, a_{2(h-g)}, b_1, \dots, b_{2g} \rangle$ индекса w . Ограничение $\bar{\eta}_\#|_{\bar{H}}$ является эпиморфизмом.

Если $N = P_g$ и $g \geq 2$, то поскольку η примитивно и ориентирующе правильно, обязательно $K = P_h$ и $h \geq 2g$ в силу (1.1) и (1.3). Так как $\pi_1(K)_{ab}$ и $\pi_1(N)_{ab}$ имеют изоморфные подгруппы кручения (обе $\mathbb{Z}_2$, см. замечание), то ограничение эпиморфизма $\bar{\eta}_\#$ на подгруппы кручения является изоморфизмом. Факторизуя $\pi_1(K)_{ab}$ и $\pi_1(N)_{ab}$ по их подгруппам кручения, получаем эпиморфизм

между свободными абелевыми группами рангов $h-1$ и $g-1$, из чего следует, что $\text{Ker}(\bar{\eta}_{\#})$ – свободная абелева группа ранга $h-g$. Поэтому можно выбрать такой набор образующих $\{a_1, \dots, a_h\}$ для $\pi_1(P_h)_{ab}$, что $\text{Ker}(\bar{\eta}_{\#}) = \langle a_1, \dots, a_{h-g} \rangle$ – свободная абелева группа ранга $h-g$. В частности, a_1 имеет бесконечный порядок. Ограничение эпиморфизма $\bar{\eta}_{\#}$ на подгруппу $\bar{H} = \langle wa_1, a_2, \dots, a_h \rangle$ индекса w является эпиморфизмом. Предложение доказано.

§ 2. Характеризация разложимых данных

В определении понятия, которое мы будем сейчас изучать, в допустимые данные будем включать тривиальные разбиения (состоящие из одних лишь единиц). Отметим, что они не меняют тотальный дефект. Пусть $u, w, s \in \mathbb{N}$, $U = [u_1, \dots, u_s]$ – разбиение числа u и $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_s\}$ – набор разбиений числа w . Определим *произведение-разбиение* $U \cdot \mathcal{W}$ как разбиение числа uw , полученное умножением на u_i каждой компоненты разбиения W_i и взятием объединения по всем $i = 1, \dots, s$.

ПРИМЕР 2.1. При $u = w = 3$ разбиение $[2, 2, 2, 1, 1, 1]$ представимо в виде произведения-разбиения числа 9 следующими способами: его можно представить либо как

$$[1[2, 1], 1[2, 1], 1[2, 1]] = U \cdot \mathcal{W}, \quad U = [1, 1, 1], \quad \mathcal{W} = \{[2, 1], [2, 1], [2, 1]\},$$

либо как

$$[2[1, 1, 1], 1[1, 1, 1]] = U \cdot \mathcal{W}, \quad U = [2, 1], \quad \mathcal{W} = \{[1, 1, 1], [1, 1, 1]\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_t\}$ – семейство разбиений числа u , где разбиение U_i содержит s_i элементов, $\mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^t \mathcal{W}_i$ – объединение наборов разбиений числа w , где $\mathcal{W}_i$ – набор из s_i разбиений. Тогда определим $\mathcal{U} \cdot \mathcal{W}$ как набор из t разбиений числа uw , где i -е разбиение является произведением $U_i \cdot \mathcal{W}_i$, $1 \leq i \leq t$. Если дан набор $\mathcal{D}$ разбиений числа d и нетривиальное разложение числа d на множители (например, $d = uw$), и если существуют $t \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_t\}$ и $\mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^t \mathcal{W}_i$ такие, что

$$\mathcal{D} = \mathcal{U} \cdot \mathcal{W} = \{U_i \cdot \mathcal{W}_i\}_{i=1}^t,$$

то будем говорить, что $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_t\}$ и $\mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^t \mathcal{W}_i$ определяют *алгебраическое разложение* (или *разложение на множители*) данных $\mathcal{D}$.

ПРИМЕР 2.3. Пусть $d \in \mathbb{N}$ – нечетное составное число. Тогда любое нетривиальное разложение числа d на два натуральных множителя, $d = uw$, определяет разложение допустимых данных $\mathcal{D} = \{[d]\}$ на допустимые нетривиальные множители $\mathcal{U} = \{[u]\}$ и $\mathcal{W} = \{[w]\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $d = uw$ и $\mathcal{D}, \mathcal{U}, \mathcal{W}$ – наборы разбиений чисел d, u, w соответственно такие, что $\mathcal{D} = \mathcal{U} \cdot \mathcal{W}$. Тогда $\nu(\mathcal{D}) = \nu(\mathcal{W}) + w\nu(\mathcal{U})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{D} = \mathcal{U} \cdot \mathcal{W}$, то существуют натуральные числа t и s_i , $i = 1, \dots, t$, такие что $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_t\}$ и $\mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^t \mathcal{W}_i$, где U_i – разбиение числа u на s_i компонент и $\mathcal{W}_i$ – набор из s_i разбиений числа w , $i = 1, \dots, t$. Тогда $\mathcal{D} = \{U_i \cdot \mathcal{W}_i\}_{i=1}^t$ и

$$\begin{aligned} \nu(\mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^t \nu(U_i \cdot \mathcal{W}_i) = \sum_{i=1}^t (uw + \nu(\mathcal{W}_i) - ws_i) = \sum_{i=1}^t \nu(\mathcal{W}_i) + \sum_{i=1}^t w(u - s_i) \\ &= \nu(\mathcal{W}) + w \sum_{i=1}^t \nu(U_i) = \nu(\mathcal{W}) + w\nu(\mathcal{U}). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Множители в разложении допустимых (т.е. имеющих четный дефект) данных на множители не обязательно являются допустимыми.

Напомним, что набор разбиений числа d называется *разложимым на N* , если он реализуем на N разложимым примитивным d -листным разветвленным накрытием.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть N – связная замкнутая поверхность такая, что $\chi(N) \leq 0$. Допустимые данные $\mathcal{D}$ разложимы на N тогда и только тогда, когда существует такое разложение данных $\mathcal{D}$, в котором первый множитель является нетривиальными допустимыми данными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $(M, \varphi, N, B_\varphi, d)$ – разложимое примитивное разветвленное накрытие, реализующее $\mathcal{D}$. Тогда существуют поверхность K и накрытия ψ, η степеней w, u соответственно такие, что $\varphi = \eta\psi$. Следовательно, $d = uw$ и, поскольку φ примитивно, существует непустое подмножество $B_\eta \subset B_\varphi$ такое, что (K, η, N, B_η, u) – примитивное разветвленное накрытие с данными ветвления $\tilde{\mathcal{U}}$. Заметим, что каждая точка $x \in B_\varphi$ определяет разбиение числа u (тривиальное в случае $x \in B_\varphi \setminus B_\eta$) и каждая точка из $\eta^{-1}(x)$ определяет разбиение числа w (тривиальное, если такая точка не является точкой ветвления для ψ). Другими словами, $x \in B_\varphi$ определяет разбиение U_x числа u и набор $\mathcal{W}_x$ разбиений числа w такие, что $U_x \cdot \mathcal{W}_x$ является разбиением числа d , определяемым точкой x для φ . Тогда $\mathcal{D} = \{U_x \cdot \mathcal{W}_x\}_{x \in B_\varphi}$ является разложением с допустимым нетривиальным первым множителем $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in B_\varphi}$, так как $\nu(\mathcal{U}) = \nu(\tilde{\mathcal{U}})$ (различия между $\mathcal{U}$ и $\tilde{\mathcal{U}}$ состоят лишь в тривиальных разбиениях) и $B_\eta \neq \emptyset$.

Предположим теперь, что $d = uw$, и пусть $\mathcal{D} = \{U_x \cdot \mathcal{W}_x\}_{x \in B}$ – такое разложение допустимых данных, в котором первый множитель $\mathcal{U}$ нетривиален и допустим, где $B \subset N$ – конечное подмножество. По теореме 1.6 существует примитивное разветвленное накрытие (K, η, N, B_η, u) , реализующее $\mathcal{U}$. В частности, $B_\eta \subset B$ и U_x – тривиальное разбиение для каждой точки $x \in B \setminus B_\eta$. По предложению 2.4 второй множитель $\mathcal{W}$ (возможно, тривиальный) допустим. Если он нетривиален, то по теореме 1.6 существует примитивное разветвленное накрытие (M, ψ, K, B_ψ, w) , реализующее его как данные ветвления. Без

ограничения общности мы можем предполагать, что $B_\psi \subset \eta^{-1}(B)$ и что для каждого $x \in \eta(B_\psi)$ выполнено $U_x = [u_{x,1}, \dots, u_{x,s_x}]$, $\eta^{-1}(x) = \{y_{x,1}, \dots, y_{x,s_x}\}$, η имеет локальную степень $u_{x,j}$ в $y_{x,j}$, где ψ и точка $y_{x,j}$ определяют разбиение $\mathscr{W}_{x,j}$ числа w , $1 \leq j \leq s_x$. Итак, $B_\psi \subset \eta^{-1}(A \cup B_\eta)$. Таким образом, $(M, \eta\psi, N, B_\eta \cup \eta(B_\psi), d = uw)$ – разложимое примитивное разветвленное накрытие с данными ветвления $\mathscr{D}$. Если $\mathscr{W}$ тривиален, то требуемый результат следует из предложения 1.9. Предложение 2.6 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. *Если данные $\mathscr{D} = \{D_1, \dots, D_t\}$ разложимы на N , то для любого $i = 1, \dots, t$ каждая компонента разбиения D_i является произведением двух натуральных чисел (при этом одно из них или они оба могут быть равны единице), не превосходящих степеней двух накрытий из разложения соответственно.*

ПРИМЕР 2.8. Примитивное разветвленное накрытие вида $(M, \varphi, T_1, \{x\}, 4)$ неразложимо: заметим, что возможные допустимые данные суть $[1, 3]$ и $[2, 2]$. Но $[1, 3]$ не реализуемо разложимым примитивным разветвленным накрытием на T_1 по следствию 2.7, а каждое разложение данных $[2, 2]$ имеет либо тривиальный, либо недопустимый первый множитель на T_1 .

§ 3. Реализация данных ветвления неразложимыми разветвленными накрытиями

Начнем этот параграф с примера допустимых данных, которые допускают разложимую и неразложимую реализации на T_1 одновременно.

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим реализуемые данные

$$\mathscr{D} = \{[3, 2, 2, 2], [3, 2, 2, 2]\} = \{[1[3], 2[1, 1, 1]], [1[3], 2[1, 1, 1]]\}$$

на T_1 с нетривиальным допустимым первым множителем $\mathscr{U} = \{[1, 2], [1, 2]\}$ и вторым множителем $\mathscr{W} = \bigcup_{i=1}^2 \{[3], [1, 1, 1]\}_i$. Согласно предложению 2.6 данные $\mathscr{D}$ разложимы на T_1 , но, с другой стороны, мы можем определить следующее представление:

$$\begin{aligned} \rho: \pi_1(T_1 \setminus \{x, y\}) &= \langle a, b, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y \mid [a, b]\mathbf{u}_x\mathbf{u}_y = 1 \rangle \rightarrow \Sigma_9, \\ a &\longmapsto (1\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 3\ 2), \\ b &\longmapsto (2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 3), \\ \mathbf{u}_x &\longmapsto (1\ 2\ 3)(4\ 5)(6\ 7)(8\ 9), \\ \mathbf{u}_y &\longmapsto (1\ 2\ 3)(4\ 5)(6\ 7)(8\ 9), \end{aligned}$$

где $G = \text{Im}(\rho)$ – транзитивная примитивная группа перестановок, так как она содержит 9- и 8-циклы (см. пример 1.1). Тогда согласно предложению 1.8 определяемое ею разветвленное накрытие неразложимо (и, следовательно, примитивно).

Цель этого параграфа – показать, что любые допустимые данные реализуемы неразложимым (и, следовательно, примитивным) разветвленным накрытием на связной замкнутой поверхности N такой, что $\chi(N) \leq 0$. В теореме 3.2

(которая будет доказана в следующем параграфе) это утверждается для случая, когда N является либо тором T_1 , либо бутылкой Клейна P_2 с ровно одной точкой ветвления. Эта теорема будет использована для доказательства в общем случае.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $d \in \mathbb{N}$ – составное число и $D = [d_1, \dots, d_t]$ – нетривиальное разбиение числа d такое, что $\nu(D) \equiv 0 \pmod{2}$. Тогда существуют неразложимые (и, следовательно, примитивные) разветвленные накрытия над тором T_1 и над бутылкой Клейна P_2 соответственно, реализующие D как данные ветвления.

ТЕОРЕМА 3.3. Любые нетривиальные допустимые данные реализуемы неразложимым (и, следовательно, примитивным) разветвленным накрытием над любой поверхностью N такой, что $\chi(N) \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_r\}$ – допустимые данные. При каждом $i = 1, \dots, r$ выберем перестановку $\gamma_i \in \Sigma_d$, циклическая структура которой равна D_i .

Если $\prod_{i=1}^t \gamma_i \neq 1_d$, то циклическая структура этого произведения является нетривиальным разбиением $D = [d_1, \dots, d_t]$ числа d таким, что $t < d$ и $\nu(D) \equiv \nu(\mathcal{D}) \equiv 0 \pmod{2}$. Таким образом, по теореме 3.2 оно реализуемо неразложимым (и, следовательно, примитивным) разветвленным накрытием над T_1 (над P_2 соответственно). По предложению 1.8 существуют перестановки $\lambda, \beta \in \Sigma_d$ (ω, θ соответственно) такие, что циклическая структура перестановки $[\lambda, \beta]$ ($\omega\theta\omega\theta^{-1}$ или $\omega^2\theta^2$ соответственно) есть D и группа перестановок $G_1 := \langle \lambda, \beta \rangle$ ($G_2 := \langle \omega, \theta \rangle$ соответственно) транзитивна и примитивна. Итак, для $N = S_g$ определим представление:

$$\rho_1: \left\langle \{a_i, b_i\}_{i=1}^g \cup \{\mathbf{u}_j\}_{j=1}^t \mid \prod_{j=1}^t \mathbf{u}_j = \prod_{j=0}^{g-1} [b_{g-j}, a_{g-j}] \right\rangle \rightarrow \Sigma_d,$$

переводящее $a_1 \mapsto \beta$, $b_1 \mapsto \lambda$, $\mathbf{u}_i \mapsto \gamma_i$ и $\{a_j, b_j\}_{j=2}^g \mapsto 1_d$ (соответственно для $N = P_g$, $g > 1$, определим представление

$$\rho_2: \left\langle \{a_i\}_{i=1}^g \cup \{\mathbf{u}_j\}_{j=1}^t \mid \prod_{j=1}^t \mathbf{u}_j = \prod_{j=0}^{g-1} a_{g-j}^2 \right\rangle \rightarrow \Sigma_d,$$

переводящее $a_1 \mapsto \theta$, $a_2 \mapsto \omega$, $\mathbf{u}_i \mapsto \gamma_i$ и $\{a_j\}_{j=3}^g \mapsto 1_d$). Так как $G_1 < \text{Im}(\rho_1)$, то группа $\text{Im}(\rho_1)$ транзитивна и примитивна. Таким образом, по предложению 1.8 определяемое ею примитивное разветвленное накрытие неразложимо (аналогично для G_2).

Если $\prod_{i=1}^t \gamma_i = 1_d$ и существует некоторая перестановка γ_i с циклом длины больше или равной трем, мы заменим γ_i на γ_i^{-1} . Если $d > 2$ и каждая γ_i есть произведение независимых циклов длин меньше или равных двум, мы заменим один символ в одном цикле длины два символом из другого цикла. Итак, мы не меняем циклическую структуру перестановок γ_i , а новое произведение $\prod_{i=1}^t \gamma_i$ отлично от 1_d , и мы приходим к предыдущему случаю. Если $d = 2$, то

данные $\mathcal{D}$, очевидно, реализуемы на любой поверхности N ; соответствующее разветвленное накрытие неразложимо, поскольку число два – простое. Теорема доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 3.2

Пусть $d \in \mathbb{N}$ – составное число и $D = [d_1, \dots, d_t]$ – нетривиальное разбиение числа d такое, что $\nu(D) = d - t \equiv 0 \pmod{2}$. Согласно предложению 1.8 достаточно доказать существование перестановок $\lambda, \beta, \omega, \theta \in \Sigma_d$ таких, что перестановки $[\lambda, \beta]$ для T_1 и либо $\omega\theta\omega\theta^{-1}$, либо $\omega^2\theta^2$ для P_2 имеют циклическую структуру D , а группы перестановок $G_1 := \langle \lambda, \beta \rangle$ и $G_2 := \langle \omega, \theta \rangle$ транзитивны и примитивны. Проведем доказательство отдельно в каждом из следующих трех случаев:

- 1) $t = 1$;
- 2) $D = [2, \dots, 2]$;
- 3) $t > 1$ и $d_i \neq 2$ для некоторого $i \in \{1, \dots, t\}$.

Перестановки, определенные в [10; доказательства теоремы 2.2 и теоремы 2.3, случай $r = 1$], работают в случае 1) (см. ниже). Для случаев 2) и 3) мы будем использовать следующую идею: для заданной перестановки $\alpha \in D$ определим перестановку $\beta \in \Sigma_d$ такую, что β и $\alpha\beta$ имеют одну и ту же циклическую структуру, а группа перестановок $H := \langle \alpha, \beta \rangle < \Sigma_d$ транзитивна и примитивна. Тогда существует $\lambda \in \Sigma_d$ такая, что $\alpha = [\lambda, \beta]$ и группа $\langle \lambda, \beta \rangle$ тоже транзитивна и примитивна (так как содержит H). Аналогично, так как $\alpha\beta$ и β^{-1} сопряжены, то существует $\omega \in \Sigma_d$ такая, что $\alpha\beta = \omega\beta^{-1}\omega^{-1}$. Определим $\theta = \omega^{-1}\beta^{-1}$. Тогда $\alpha = \omega^2\theta^2$ и группа $\langle \omega, \theta \rangle$ транзитивна и примитивна.

Случай 1). Если $t = 1$, то $D = [d]$ и $d = 2k + 1$ для некоторого $k > 0$. Для T_1 определим перестановки $\lambda = (k + 1 \ k + 2 \ \dots \ 2k \ 2k + 1)$ и

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & k+2 & \dots & 2k+1 \\ 2k+1 & \dots & k+2 & k+1 & 1 & \dots & k \end{pmatrix}.$$

Тогда $[\lambda, \beta] = (1 \ 2 \ \dots \ k \ k+1 \ k+2 \ \dots \ 2k+1)$ имеет циклическую структуру D и группа $G_1 = \langle \lambda, \beta \rangle$ транзитивна. Согласно примеру 1.2 при $d = 2k + 1$ и $\ell = k + 1$ группа перестановок G_1 примитивна. Для P_2 определим $\omega = \lambda$,

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k+1 & k+2 & \dots & 2k+1 \\ 2k+1 & k+1 & \dots & 2k & 1 & \dots & k \end{pmatrix}.$$

Тогда $\omega\theta\omega\theta^{-1} = (1 \ 2 \ \dots \ 2k+1)$ имеет циклическую структуру D и аналогично ориентируемому случаю мы заключаем, что группа перестановок $G_2 = \langle \omega, \theta \rangle$ транзитивна и примитивна.

Случай 2). Если $D = [2, \dots, 2]$, то $d = 2t$ для некоторого четного t . Пусть

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 \ 2)(3 \ 4) \cdots (t-1 \ t) \cdots (2t-1 \ 2t) \in D, \\ \beta &= (1 \ 3 \ \dots \ t-1 \ \dots \ 2t-1 \ 4)(2 \ 6 \ \dots \ t \ \dots \ 2t), \end{aligned}$$

т.е. первый цикл в β состоит из возрастающей последовательности нечетных чисел от 1 до $2t - 1$ и приписанного к ней четного числа 4, а второй цикл состоит из возрастающей последовательности всех четных чисел от 2 до $2t$, кроме числа 4. Индукцией по t можно показать, что β и $\alpha\beta$ сопряжены, поэтому существует $\lambda \in \Sigma_d$ такая, что $\alpha\beta = \lambda\beta\lambda^{-1}$. Итак, $[\lambda, \beta] = \alpha$ имеет циклическую структуру D . Рассмотрим транзитивную группу $G_1 := \langle \lambda, \beta \rangle$. Пусть $\|1\|$ означает нетривиальный блок группы G_1 , содержащий элемент 1. Если $\|1\| \subset 1^{(\beta)}$ содержится в орбите элемента 1 при действии $\langle \beta \rangle$, то его число элементов $\#\|1\|$ является общим делителем чисел $t + 1$ и $2t$, откуда следует, что $\#\|1\| = 1$. С другой стороны, если $\|1\|$ содержит элементы обоих циклов перестановки β , то $\text{НОД}(t + 1, t - 1) \neq 1$, что невозможно. Так как блоки тривиальны, то G_1 примитивна и случай поверхности T_1 разобран. Для поверхности P_2 мы используем идею, описанную в наброске доказательства в начале этого параграфа, чтобы определить $\omega, \theta \in \Sigma_d$ такие, что $\alpha = \omega^2\theta^2$. Так как $G_2 := \langle \omega, \theta \rangle = \langle \omega, \beta \rangle$ транзитивна и β обеспечивает примитивность группы G_1 , то G_2 тоже примитивна.

Случай 3). Наконец, предположим, что $t > 1$ и $d_i \neq 2$ для некоторого $i \in \{1, \dots, t\}$. Определим

$$\delta_0 := 0, \quad \delta_i := \sum_{j=1}^i d_j, \quad C_i := (\delta_{i-1} + 1 \dots \delta_i) \in \Sigma_d$$

и последовательность $\Delta_i := \{\delta_{i-1} + k\}_{k=2}^{d_i}$ при $i = 1, \dots, t$. Так как $t < d$, мы можем взять $d_1 > 1$, откуда следует, что $\Delta_1 \neq \emptyset$. Без ограничения общности положим

$$\alpha := \prod_{i=1}^t C_i = (1 \underbrace{2 \dots \delta_1}_{\Delta_1})(\delta_1 + 1 \underbrace{\delta_1 + 2 \dots \delta_2}_{\Delta_2}) \cdots (\delta_{t-1} + 1 \underbrace{\delta_{t-1} + 2 \dots \delta_t}_{\Delta_t}) \in D.$$

Так как имеется $d_i \neq 2$, то либо $\text{Fix}(\alpha) \neq \emptyset$, либо $\alpha^2 \neq 1_d$. Определим d -цикл

$$\beta := (1 \ \delta_1 + 1 \ \delta_2 + 1 \dots \delta_{t-1} + 1 \ \Delta_1 \ \Delta_2 \dots \Delta_t).$$

Обозначим через E_i, O_i возрастающие последовательности четных и нечетных элементов в $\overline{\text{Supp}(C_i)} := \{\delta_{i-1} + 1\} \cup \Delta_i$ соответственно. Заметим, что $\alpha\beta$ является d -циклом, полученным последовательным присоединением этих последовательностей друг за другом, а именно,

$$\alpha\beta = \begin{cases} (O_1 E_2 O_3 \dots E_t E_1 O_2 E_3 \dots O_t), & \text{если } t \text{ четно,} \\ (O_1 E_2 O_3 \dots O_t E_1 O_2 E_3 \dots E_t), & \text{если } t \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Здесь мы используем то, что t -я последовательность равна либо $E_t \ni d$ при четном t , либо $O_t \ni d$ при нечетном t , а потому она непуста и заканчивается элементом d . Следовательно, за ней стоит E_1 . Значит, $\alpha\beta$ и β сопряжены и существует $\lambda \in \Sigma_d$ такая, что $\alpha\beta = \lambda\beta\lambda^{-1}$ и $\alpha = [\lambda, \beta]$.

Пусть $H := \langle \alpha, \beta \rangle$. Она, очевидно, транзитивна. Мы утверждаем, что группа перестановок H примитивна (по меньшей мере, после подходящей перестановки чисел $d_1, \dots, d_t$, см. ниже). Предположим противное, т.е. пусть существует нетривиальный делитель n числа d такой, что H имеет систему из n блоков с d/n элементами в блоке. Тогда справедливы следующие утверждения I)–VIII).

I) $\|1\| = \|1^{\beta^n}\|$ и $\|i\| = \{i, i^{\beta^n}, i^{\beta^{2n}}, \dots, i^{\beta^{(d/n-1)n}}\} = \{i^{\beta^{kn}} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ для любого $i \in \{1, \dots, d\}$. Поэтому $R := \{1, 1^\beta, 1^{\beta^2}, \dots, 1^{\beta^{n-1}}\}$ является множеством представителей всех блоков и последовательные элементы в β находятся в разных блоках.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку β является d -циклом, блоки полностью определяются циклами перестановки β^n .

II) $n < t$ (по меньшей мере, в случае $d_1 = \max\{d_1, \dots, d_t\}$, $d_2 = \min\{d_1, \dots, d_t\}$ и $d_3 = \max\{d_3, \dots, d_t\}$). Поэтому $R = \{1, \delta_1 + 1, \delta_2 + 1, \dots, \delta_{n-1} + 1\}$, $1^{\beta^n} = \delta_n + 1$ и $\Gamma := \{\|1\|, \|\delta_1 + 1\|, \dots, \|\delta_{n-1} + 1\|\}$ является системой всех блоков.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n \geq t$, то существует $i \in \{1, \dots, t\}$ такое, что $1^{\beta^n} \in \Delta_i$,

$$\beta = (1 \quad \underbrace{\delta_1 + 1 \quad \dots \quad \delta_i + 1 \quad \dots \quad \delta_{t-1} + 1}_{n} \quad \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \dots \quad \Delta_i \quad \dots \quad \Delta_t).$$

Если $i > 1$, то $1^{\alpha^{-1}}$ и $1^{\beta^n \alpha^{-1}}$ оба из R , находятся в одном и том же блоке в силу первого утверждения в I), что противоречит второму утверждению в I). Если $i = 1$ (и поэтому $1^{\beta^n} = n - t + 2$) и существует $d_j > 2$, то обязательно

$$d_j \leq n - t + 2 = 1^{\beta^n} \in \Delta_1 = \{2, \dots, d_1\},$$

поскольку $d_1 = \max\{d_1, \dots, d_t\}$. Действительно, в противном случае положим $j = 1$ и, применяя перестановку α к элементам 1 и 1^{β^n} , получим элементы $1^\alpha = 2 = 1^{\beta^t}$ и $1^{\beta^n \alpha} = n - t + 3 = 1^{\beta^{n+1}}$ в Δ_1 , в одном и том же блоке, что в силу I) дает $n \mid (t - 1)$, поэтому $n < t$ или $t = 1$. Получаем противоречие. Поэтому $1^{\beta^n} = n - t + 2 = d_1$, откуда следует, что $1^\alpha = 2 = 1^{\beta^t} < d_1 = 1^{\beta^n}$ и $1^{\beta^n \alpha} = d_1^\alpha = 1$, они оба из R и являются различными элементами из одного блока. Получаем противоречие с I). Если $i = 1$ и $d_j \leq 2$ при $j = 1, \dots, t$, то Δ_j содержит не более одного элемента и $\alpha^2 = 1$. Поэтому $\text{Fix}(\alpha) \neq \emptyset$ и α является произведением четного числа транспозиций, поскольку $\nu(D) \equiv 0 \pmod{2}$. Отсюда $C_1 = (1 \ 2)$, $C_2 = (3)$ и $C_3 = (4 \ 5)$, поэтому $\beta = (1 \ 3 \ 4 \ \dots \ \delta_{t-1} + 1 \ 2 \ 5 \ \dots)$. Теперь условие $i = 1$ дает соотношение $n - t + 1 \leq |\Delta_1| = 1$, откуда следует, что $n = t$, поэтому $\|1\| = \|2\|$. Значит, $\|1^{\beta^\alpha}\| = \|2^{\beta^\alpha}\|$, т.е. мы получаем 3 и 4, последовательные в β , в одном блоке, что противоречит I).

III) $n \nmid t$ (по меньшей мере, в случае $d_1 = \max\{d_1, \dots, d_t\}$, $d_2 = \min\{d_1, \dots, d_t\}$ и $d_3 = \max\{d_3, \dots, d_t\}$). Поэтому $n \neq 2$ и $1^\alpha \notin \|1\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n \mid t$, то п. I) и определение перестановки β дают $1^\alpha \in \|1\|$ (так как $1^\alpha = 2 = 1^{\beta^t}$ при $d_1 \neq 1$). Поэтому если существует $d_i > 2$,

то положим $i = 1$ и, применяя α к 1 и $1^\alpha = 2$, получим последовательные элементы 2 и 3 в Δ_1 в одном и том же блоке, что приводит к противоречию с п. I). Если $n \mid t$ и $d_i \leq 2$ при $i = 1, \dots, t$, то из равенства $\|1\| = \|2\|$ мы получаем противоречие, как и в последней части доказательства п. II). Это доказывает, что $n \nmid t$. Если $n = 2$, то условия $n \mid d$ и $n \nmid t$ противоречат условию Гурвица $d \equiv t \pmod{2}$. Наконец, $1^\alpha = 2 = 1^{\beta^t} \notin \{1^{\beta^{kn}} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \|1\|$, так как $n \nmid t$.

IV) $\alpha = (1 \dots \delta_1)(\delta_1 + 1 \dots \delta_2) \dots (\delta_{t-1} + 1 \dots \delta_t)$ и $\beta = (1 \delta_1 + 1 \dots \delta_{t-1} + 1 \Delta_1 \dots \Delta_t)$ индуцируют перестановки $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ системы $\Gamma = \{\|1\|, \|\delta_1 + 1\|, \dots, \|\delta_{n-1} + 1\|\}$. По определению перестановки β имеем

$$\bar{\beta} = (\|1\| \|\delta_1 + 1\| \|\delta_2 + 1\| \dots \|\delta_{n-1} + 1\|).$$

Для того чтобы вычислить перестановку $\bar{\alpha}$, достаточно выяснить, в каких блоках находятся элементы подмножеств $\text{Supp}(C_i)$ при $i = 1, \dots, t$. Для C_1 заметим следующее.

V) Каждый элемент блока $\|1\|$ содержится в цикле перестановки α длины большей двух (при условии, что верны те же предположения, что и в пп. II), III)). В частности, $d_1 > 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in \|1\| \cap \text{Fix}(\alpha)$, то $1^\alpha \in \|1\|$, что противоречит п. III). Если элемент $x \in \|1\|$ содержится в некоторой транспозиции перестановки α , то любой элемент из $\|1\|$ тоже содержится в некоторой транспозиции (см. п. I)) и $d_i \leq 2$ для любого i (в противном случае $d_1 > 2$, поэтому $1 \in \|1\|$ содержится в d_1 -цикле, не являющемся транспозицией). Поэтому $d_1 = 2$ и $d_2 = 1$. Согласно п. I) и п. II) имеем $\|1^\alpha\| = \|(\delta_n + 1)^\alpha\|$, но это невозможно, так как для любого i последовательность Δ_i содержит не более одного элемента, в частности, $\Delta_1 = \{1^\alpha\}$, $\Delta_2 = \emptyset$ и $\Delta_{n+1} = \{(\delta_n + 1)^\alpha\}$ (соответственно $\Delta_{n+1} = \emptyset$), поэтому показатель степени перестановки β , переводящей 1^α в $(\delta_n + 1)^\alpha$, меньше n (соответственно равен $n - t$ и в силу п. III) не делится на n), а потому они представимы различными элементами из R (см. п. I)). Получаем противоречие.

VI) Если $\|\delta_{j-1} + 1\| \cap \text{Supp}(C_1) \neq \emptyset$ и $2 \leq j \leq t$, то $d_j > 2$ (при условиях как в пп. II), III)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $x \in \text{Supp}(C_1) \cap \|\delta_{j-1} + 1\|$ и $d_j \leq 2$. Так как $d_1 > 2$ в силу п. V), то, применяя последовательно α^2 к x (соответственно к $\delta_{j-1} + 1$), мы получим элементы из Δ_1 (соответственно сам элемент $\delta_{j-1} + 1$) в одном и том же блоке такие, что показатель степени перестановки β , переводящей эти элементы друг в друга, не превосходит двух. Получаем противоречие с пп. III), I).

VII) $d_1 < n$ и $\|1\| \cap \Delta_1 = \emptyset$ (при условиях как в пп. II), III)). Поэтому разные элементы из $\text{Supp}(C_1)$ принадлежат разным блокам и $(\|1\| \|2\| \dots \|d_1\|)$ есть d_1 -цикл перестановки $\bar{\alpha}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $d_1 > n$ (или, по меньшей мере, $\|1\| \cap \Delta_1 \neq \emptyset$), то $n \mid d_1$ и $\delta_{t-1} + 1 \in \|1\|$, откуда следует, что первый элемент в $\|1\|$, принадлежащий Δ_1 , есть $n + 1$ (так как в противном случае, применяя α к этому элементу и

к 1, мы получим в Δ_1 элементы из одного блока, которые определяют различные элементы системы Γ). Если $d_1 = n$, то похожие рассуждения показывают, что $\delta_{t-1} + 1 \in \|1\|$. Таким образом,

$$\beta = (1 \ \delta_1 + 1 \ \dots \ \delta_{n-1} + 1 \ \dots \ \delta_{t-1} + 1 \ \overbrace{2 \ \dots \ n \ \dots \ d_1}^{\Delta_1} \ \overbrace{\delta_1 + 2 \ \dots \ \delta_2}^{\Delta_2} \ \dots \ \Delta_t)$$

и в силу п. I) и определения перестановки $\bar{\beta}$ обязательно $\delta_{t-1} + 1 \in \|1\|$, $2 \in \|\delta_1 + 1\|$ (поэтому $d_2 > 2$ и $\Delta_2 \neq \emptyset$ в силу п. VI)), $\dots$, $n \in \|\delta_{n-1} + 1\|$ и

$$\bar{\alpha} = \bar{\beta} = (\|1\| \ \|\delta_1 + 1\| \ \|\delta_2 + 1\| \ \dots \ \|\delta_{n-1} + 1\|).$$

Более того, $d_1 \in \|\delta_{n-1} + 1\|$ и $\delta_1 + 2 \in \|1\|$ (так как $d_2 > 1$), но $(\delta_1 + 1)^\alpha = \delta_1 + 2$, откуда следует, что $\|\delta_1 + 1\|^{\bar{\alpha}} = \|\delta_1 + 2\| = \|1\|$ и $n = 2$. Получаем противоречие с п. III).

VIII) Цикл из п. VII) может быть представлен как $(\|1\| \ \|\delta_1 + 1\| \ \|\delta_2 + 1\| \ \dots \ \|\delta_{d_1-1} + 1\|)$ (при условиях как в пп. II), III)), откуда следует, что $d_1 = 2$, что противоречит п. V).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t = nq + r$ для некоторых $q, r \in \mathbb{Z}^+$, $r < n$ (поэтому $q \geq 1$ в силу п. II) и $r \geq 1$ в силу п. III)). Определение перестановки β и п. VII) дают $n > r + d_1 - 2$,

$$\beta = (1 \ \delta_1 + 1 \ \dots \ \delta_n + 1 \ \dots \ \delta_{nq} + 1 \ \overbrace{\dots \ \delta_{t-1} + 1}^{r+d_1-2} \ \underbrace{\overbrace{2 \ \dots \ d_1}^{\Delta_1} \ \overbrace{\delta_1 + 2 \ \dots \ \delta_2}^{\Delta_2} \ \dots \ \Delta_i \ \dots \ \Delta_t}_n)$$

и $(\delta_{nq} + 1)^{\beta^n} \in \|1\|$ согласно п. I), где либо $(\delta_{nq} + 1)^{\beta^n} = 1$ (в случае $d = nq + n$, т.е. при $t > d - n$), либо $(\delta_{nq} + 1)^{\beta^n} \in \Delta_i$ для некоторого i из $\{2, \dots, t\}$ (в случае $d > nq + n$, т.е. при $t < d - n$). Предположим, что $d > nq + n$. Отсюда следует, что $(\delta_{nq} + 1)^{\beta^n} \in \Delta_i$. Согласно п. V) Δ_i содержит более одного элемента и так как $1^{\alpha^{-1}}$ и $(\delta_{nq} + 1)^{\beta^n \alpha^{-1}}$ принадлежат одному блоку, то обязательно $(\delta_{nq} + 1)^{\beta^n} = \delta_{i-1} + 2$ (первый элемент в Δ_i). Поэтому $1^{\alpha \beta^{-1}}$ и $(\delta_{nq} + 1)^{\beta^n \alpha \beta^{-1}}$ принадлежат $\|1\|^{\bar{\alpha} \bar{\beta}^{-1}}$, но $(\delta_{nq} + 1)^{\beta^n \alpha \beta^{-1}} = \delta_{i-1} + 2$. Значит, $\|1\|^{\bar{\alpha} \bar{\beta}^{-1}} = \|1\|$, $2 \in \|\delta_1 + 1\|$ и в силу определений перестановок α и β цикл $(\|1\| \ \|\delta_1 + 1\| \ \|\delta_2 + 1\| \ \dots \ \|\delta_{d_1-1} + 1\|)$ является циклом перестановки $\bar{\alpha}$. Поэтому $2 \in \|\delta_1 + 1\|$ (откуда $d_2 > 2$ в силу п. VI)), $d_1 \in \|\delta_{d_1-1} + 1\|$ и $\delta_1 + 2 \in \|\delta_{d_1} + 1\|$. Но $\delta_1 + 2 = (\delta_1 + 1)^\alpha$, откуда получаем, что $\|\delta_2 + 1\| = \|\delta_1 + 1\|^{\bar{\alpha}} = \|\delta_{d_1} + 1\|$. Поэтому $n \mid (d_1 - 2)$ в силу п. I) и, следовательно, $d_1 = 2$ в силу п. VII). Предположим, что $d = nq + n$. Отсюда следует, что $t > d - n$ и $(\delta_{nq} + 1)^{\beta^n} = 1$. Так как $\delta_{nq} + 1 \in \|1\|$, то из п. V) следует, что $\Delta_{nq+1} \neq \emptyset$ и $(\delta_{nq} + 1)^\alpha \in \Delta_{nq+1}$. Поэтому 1^α и $(\delta_{nq} + 1)^\alpha$ являются различными элементами последовательностей Δ_1 и Δ_{nq+1} . Поэтому показатель степени перестановки β , переводящей эти элементы друг в друга, меньше чем $|\Delta_1| + \dots + |\Delta_t| = d - t < n$. Из п. I) следует, что эти два элемента принадлежат разным блокам. Получаем противоречие. Утверждение п. VIII) доказано.

Таким образом, любой блок группы H тривиален и H примитивна. Наконец, так как $H < G_1 = \langle \lambda, \beta \rangle$, то группа G_1 тоже примитивна и случай поверхности T_1 разобран. Для поверхности P_2 мы используем идею, описанную в наброске доказательства в начале этого параграфа, чтобы определить ω , θ и $G_2 = \langle \omega, \theta \rangle$. Таким образом, подгруппа G_2 примитивна, так как она содержит H . Теорема 3.2 доказана.

Второй автор выражает благодарность Е. Кудрявцевой и С. Богатому из МГУ им. М. В. Ломоносова за многочисленные полезные и плодотворные обсуждения описанных выше задач во время своего визита на кафедру Дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ в мае 2002 г. Он также благодарит коллектив этой кафедры за гостеприимство во время своего визита. Авторы также выражают благодарность рецензенту за многочисленные комментарии и предложения, которые значительно улучшили изложение и качество этой работы, в частности, за финальную часть доказательства п. VIII) доказательства теоремы 3.2, восполняющую пробел в исходном доказательстве.

Список литературы

- [1] K. Borsuk, R. Molski, “On a class of continuous mappings”, *Fund. Math.*, **45** (1957), 84–98.
- [2] K. Sieklucki, “On superpositions of simple mappings”, *Fund. Math.*, **48** (1960), 217–228.
- [3] J. D. Baidon, “Open simple maps and periodic homeomorphisms”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **39** (1973), 433–436.
- [4] J. Krzempek, “Covering maps that are not compositions of covering maps of lesser order”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **130**:6 (2002), 1867–1873.
- [5] С. И. Богатая, С. А. Богатый, Х. Цишанг, “О композициях открытых отображений”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 3–20; англ. пер.: S. I. Bogataya, S. A. Bogaty, H. Zieschang, “On compositions of open mappings”, *Sb. Math.*, **193**:3 (2002), 311–327.
- [6] G. Th. Whyburn, *Analytic topology*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963.
- [7] S. Bogaty, D. L. Gonçalves, H. Zieschang, “The minimal number of roots of surface mappings and quadratic equations in free groups”, *Math. Z.*, **236**:3 (2001), 419–452.
- [8] D. H. Husemoller, “Ramified coverings of Riemann surfaces”, *Duke Math. J.*, **29** (1962), 167–174.
- [9] C. L. Ezell, “Branch point structure of covering maps onto nonorientable surfaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **243** (1978), 123–133.
- [10] S. Bogaty, D. L. Gonçalves, E. Kudryavtseva, H. Zieschang, “Realization of primitive branched coverings over closed surfaces following the Hurwitz approach”, *Cent. Eur. J. Math.*, **1**:2 (2003), 184–197.
- [11] S. A. Bogaty, D. L. Gonçalves, E. A. Kudryavtseva, H. Zieschang, “Realization of primitive branched coverings over closed surfaces”, *Advances in topological quantum field theory* (Kananaskis Village, Canada, 2001), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **179**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004, 297–316.
- [12] A. L. Edmonds, R. S. Kulkarni, R. E. Stong, “Realizability of branched coverings of surfaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **282**:2 (1984), 773–790.
- [13] D. L. Gonçalves, E. Kudryavtseva, H. Zieschang, “Roots of mappings on nonorientable surfaces and equations in free groups”, *Manuscripta Math.*, **107**:3 (2002), 311–341.

- [14] P. Müller, “Primitive monodromy groups of polynomials”, *Recent developments in the inverse Galois problem* (Seattle, WA, USA, 1993), Contemp. Math., **186**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 385–401.
- [15] R. M. Guralnick, M. G. Neubauer, “Monodromy groups of branched coverings: The generic case”, *Recent developments in the inverse Galois problem* (Seattle, WA, USA, 1993), Contemp. Math., **186**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 325–352.
- [16] S. K. Lando, A. K. Zvonkin, “Graphs on surfaces and their applications”, *Low-dimensional topology*. v. II, Encyclopaedia Math. Sci., **141**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [17] J. D. Dixon, B. Mortimer, *Permutation groups*, Grad. Texts in Math., **163**, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [18] A. Hurwitz, “Ueber Riemann’sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten”, *Math. Ann.*, **39**:1 (1891), 1–60.
- [19] J. F. Ritt, “Prime and composite polynomials”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **23**:1 (1922), 51–66.
- [20] N. Jacobson, *Basic algebra*. I, Freeman, New York, 1985.

Н. А. В. Бедоя (N. A. V. Bedoya)
Federal University of São Carlos, Brasil
E-mail: nbedoya@dm.ufscar.br

Поступила в редакцию
27.04.2009 и 17.04.2010

Д. Л. Гонсалвес (D. L. Gonçalves)
Federal University of São Carlos, Brasil
E-mail: dlgoncal@ime.usp.br