Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Сокольский, Радикалы полугрупп и полугрупповых алгебр, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 5, 135–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7573>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 07:44:16

УДК 512.552.7

А. Г. Сокольский

Радикалы полугрупп и полугрупповых алгебр

В работе рассмотрены различные нижние радикалы полугрупп и показано, как при помощи этих радикалов можно вычислять первичный радикал групповых и полугрупповых алгебр. Найдены условия, при которых первичный радикал групповой алгебры совпадает с идеалом, порожденным некоторой конгруэнцией.

Библиография: 22 названия.

Ключевые слова: групповые алгебры, полугрупповые алгебры, радикалы полугрупп, первичный радикал.

В монографии Д. Пасмана (см. [1; гл. 7]) отмечается, что проблема полупростоты и задача описания радикалов групповых (полугрупповых) алгебр в терминах группы (полугруппы), возможно, является одной из труднейших задач теории групповых (полугрупповых) колец. Несмотря на то, что в настоящее время существует достаточно большой список работ, посвященных исследованию полугрупповых и градуированных колец (в частности, посвященных вычислению различных радикалов этих колец), задача описания классических радикалов полностью не решена даже для полугрупповых алгебр. Поэтому в настоящей статье основным объектом исследования является полугрупповая алгебра. Как правило, при описании радикала полугрупповых алгебр задача сводится к описанию радикала групповых алгебр для подгрупп данной полугруппы либо к описанию радикала прямых слагаемых (если возможно представление в виде прямой суммы подколец), либо радикал полугрупповой алгебры описывается в терминах полугруппы. Для последнего направления получено исчерпывающее описание радикала Джекобсона для полугрупповых колец коммутативных полугрупп (см., например, обзор [2]). При этом радикал полугруппового кольца описан с помощью сепаративной и p -сепаративной конгруэнций. В настоящей работе показано, что в общем случае подобное описание невозможно даже для групповых алгебр, но, тем не менее, при некоторых условиях в качестве конгруэнций могут выступать нижние радикалы полугрупп.

Все определения понятий, связанных с групповыми алгебрами, полугрупповыми алгебрами и радикалами колец, можно найти соответственно в [1], [3]–[5] или [6], [7]. Для полугруппы S , группы G и поля F через $F[G]$ обозначается групповая алгебра, а через $F[S]$ – полугрупповая алгебра. Радикал Джекобсона, радикал Бэра (первичный радикал) и обобщенный нильрадикал полугрупповой алгебры $F[S]$ обозначаются соответственно через $\mathcal{J}(F[S])$, $\mathcal{B}(F[S])$ и $\mathcal{A}(F[S])$.

В § 1 определено понятие слабо сепаративной полугруппы и показано, что полупростые в смысле (левого, правого) радикала Бэра полугруппы это в точности слабо сепаративные (слева, справа) полугруппы. Отсюда выводится, что

мультипликативные полугруппы полупервичных колец являются полупростыми в смысле радикала Бэра полугрупп.

Во § 2 утверждается, что наименьший (слабо) специальный радикал полугрупп можно построить с помощью трансфинитной индукции и его можно считать двусторонним аналогом радикала Бэра полугрупп. Здесь же введено понятие слабо p -сепаративной полугруппы и построен нижний p -радикал Λ_p , который является наименьшей слабо p -сепаративной конгруэнцией. Далее показано, что компрессивный радикал полугрупп можно построить как нижний радикал, который будет являться наименьшей сепаративной конгруэнцией.

В § 3 задача описания радикалов Бэра полугрупповых алгебр над полем нулевой характеристики сведена к вопросу: следует ли из полупростоты относительно полугруппового радикала Бэра (радикала l_0) полугруппы S полупростота мультипликативной полугруппы полугрупповой алгебры $F[S]$ относительно этого же радикала?

В § 4 показано, что первичный радикал групповой алгебры над полем простой характеристики может быть вычислен несколькими способами с помощью различных нижних радикалов группы. Найдено необходимое и достаточное условие того, что первичный радикал групповой алгебры над полем простой характеристики вычисляется как идеал, построенный с помощью некоторой конгруэнции. Также вычисляется первичный радикал полугрупповой алгебры для некоторого класса нильпотентных полугрупп.

В § 5 приведены примеры, иллюстрирующие роль (или отсутствие) наименьшей сепаративной конгруэнции при описании первичного радикала полугрупповых алгебр.

§ 1. Слабо сепаративные полугруппы

Для любого радикала колец в смысле Куроша–Амицура мультипликативные полугруппы полупростых колец составляют класс полугрупп, который определяет некоторый радикал полугрупп. Другими словами, каждому радикалу колец соответствует вполне определенный радикал полугрупп. При этом основную трудность составляет описание этого класса в полугрупповых терминах. Ниже будет показано, что для первичного радикала колец соответствующий класс полугрупп будет состоять из слабо сепаративных полугрупп, а для обобщенного нильрадикала – из сепаративных полугрупп. Прежде всего получим характеристику полупростого класса для наименьшего слабо специального радикала полугрупп. В следующем параграфе будет показано, что этот радикал является первичным радикалом полугрупп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $\mathcal{K}$ – класс полугрупп, замкнутый относительно гомоморфных образов и идеалов. *Радикалом полугруппы* из класса $\mathcal{K}$ называется функция ρ , ставящая в соответствие каждой полугруппе S из $\mathcal{K}$ некоторую ее конгруэнцию ρS такую, что выполняются следующие условия:

- (i) $[\rho S = 0, T \cong S] \implies \rho T = 0$;
- (ii) $\rho(S/\theta) = 0 \implies \rho S \subseteq \theta$;
- (iii) $\rho(S/\rho S) = 0$.

Классы всех ρ -полупростых и всех ρ -радикальных полугрупп определяются соответственно как

$$\mathcal{P}_\rho = \{S \in \mathcal{K} \mid \rho S = 0_S\}, \quad \mathcal{R}_\rho = \{S \in \mathcal{K} \mid \rho S = 1_S\}.$$

Класс полугрупп, замкнутый относительно изоморфизмов и содержащий одноэлементную полугруппу, называется *типом* (см. [5; п. 11.6]). На классе полугрупп, содержащем тип $\mathcal{B}$, можно определить радикал следующим образом:

$$\mathcal{B} - \text{rad } S = \bigcap \{\beta \mid \beta \in S(S), S/\beta \in \mathcal{B}\}.$$

Полугруппы, полупростые в смысле этого радикала, это в точности полугруппы, изоморфные подпрямому произведению полугрупп из типа $\mathcal{B}$. Таким образом, радикал полугрупп однозначным образом определяется классом полупростых полугрупп. Например, класс сепаративных полугрупп определяет компрессивный радикал полугрупп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Полугруппа S называется *слабо праворегулярной* (соответственно *леворегулярной*), если

$$\begin{aligned} \forall s \in S^1 \quad asx = asy &\implies a = 0 \vee x = y \\ (\text{соответственно } \forall s \in S^1 \quad xsa = ysa &\implies a = 0 \vee x = y). \end{aligned}$$

Если полугруппа является слабо праворегулярной и слабо леворегулярной, то назовем ее *первичной*. Конгруэнция π на полугруппе S называется *первичной*, если S/π – первичная полугруппа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Полугруппа S называется *слабо сепаративной слева* (соответственно *справа*), если

$$\begin{aligned} \forall s \in S \quad asa = asb, bsb = bsa &\implies a = b \\ (\text{соответственно } \forall s \in S \quad asa = bsa, bsb = asb &\implies a = b) \end{aligned}$$

Полугруппа называется *слабо сепаративной*, если она слабо сепаративна слева и справа.

Известно, что в полугруппах, как правило, левосторонний аналог радикала не совпадает с правосторонним аналогом. Например, правосторонний аналог радикала Бэра полугруппы определяется как пересечение всех слабо праворегулярных конгруэнций, а левосторонний аналог соответственно равен пересечению всех слабо леворегулярных конгруэнций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Полугруппа S называется *редуктивной слева* (соответственно *справа*), если

$$\begin{aligned} \forall s \in S \quad sa = sb &\implies a = b \\ (\text{соответственно } \forall s \in S \quad as = bs &\implies a = b). \end{aligned}$$

Полугруппа называется наследственно редуктивной слева (справа), если любой ее идеал является редуктивным слева (справа).

Класс наследственно редуктивных слева (справа) полугрупп $\mathcal{Q}_l(\mathcal{Q}_r)$ определяет левосторонний (правосторонний) аналог радикала Бэра, а сами полугруппы являются полупростыми относительно соответствующих радикалов Бэра. Класс $\mathcal{Q}_l \cap \mathcal{Q}_r$ определяет радикал полугрупп, который впервые был рассмотрен А. В. Тищенко. Этот радикал l_0 , как показано в [8], является одновременно наименьшим специальным радикалом и слабо специальным радикалом.

Полупростые в смысле радикала l_0 полугруппы описываются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1.5. *Следующие условия эквивалентны:*

- (i) S – слабо сепаративная полугруппа;
- (ii) S – наследственно редуктивная полугруппа;
- (iii) S – подпрямое произведение первичных полугрупп;
- (iv) S – полугруппа, полупростая в смысле радикала l_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность пунктов (ii), (iii), (iv) доказана в [9; предложение 8] и [8; предложение 2].

(i) $\implies$ (iv). Предположим, что S не полупростая в смысле радикала l_0 . Тогда S не содержится в $\mathcal{Q}_l \cap \mathcal{Q}_r$. Если S не принадлежит классу $\mathcal{Q}_r$, то $V_r \neq 0_S$, и поэтому существует пара различных элементов $a, b \in S$, для которых найдется такое наименьшее натуральное число n , что для любых $s_1, s_2, \dots, s_n$ из S выполняются равенства

$$as_1a \cdots as_na = as_1a \cdots as_nb, \quad bs_1b \cdots bs_nb = bs_1b \cdots bs_na.$$

Легко видеть, что для элементов

$$a_1 = as_1a \cdots as_{n-1}a \neq b_1 = as_1a \cdots as_{n-1}b$$

имеют место равенства $a_1sa_1 = a_1sb_1$, $b_1sb_1 = b_1sa_1$ для любого $s \in S$. Но в силу слабой сепаративности отсюда следует, что $a = b$. Аналогично рассматривается случай, когда S не содержится в $\mathcal{Q}_l$.

(iii) $\implies$ (i). Пусть S – подпрямое произведение праворегулярных полугрупп S_α , $\alpha \in Y$, с нулем, возможно присоединенным. Предположим, что для $x, y \in S$ имеет место для любого $s \in S$ $xsx = xsy$, $ysy = ysx$. Тогда для любого $\alpha \in Y$ $x_\alpha s_\alpha x_\alpha = x_\alpha s_\alpha y_\alpha$, $y_\alpha s_\alpha y_\alpha = y_\alpha s_\alpha x_\alpha$ для всех $s_\alpha \in S_\alpha$. Если S_α не имеет нуля, то $x_\alpha = y_\alpha$ в силу слабой праворегулярности. Если же S_α обладает нулем 0, то x_α и y_α могут равняться нулю только одновременно или одновременно не равняться нулю, в этом случае $x_\alpha = y_\alpha$ в силу правой регулярности S_α . Таким образом, $x = y$, т.е. S – слабо сепаративная слева полугруппа. Аналогично можно показать, что S – слабо сепаративная справа полугруппа.

СЛЕДСТВИЕ 1.6. *Класс слабо сепаративных полугрупп замкнут относительно взятия идеалов.*

Это следует из того, что класс наследственно редуктивных полугрупп замкнут относительно взятия идеалов (см. [8; следствие 6]).

СЛЕДСТВИЕ 1.7. *Радикал l_0 является наименьшей слабо сепаративной конгруэнцией.*

Это утверждение следует из п. (ii) определения 1.1 радикала полугрупп и теоремы 1.5. Очевидно, что справедливы левосторонний и правосторонний аналоги теоремы 1.5 для соответствующих односторонних радикалов Бэра полугрупп.

Следующие две теоремы устанавливают связь между полупростотой кольца и полупростотой мультипликативной полугруппы этого кольца относительно первичного радикала и обобщенного нильрадикала (компрессивного радикала) соответственно.

ТЕОРЕМА 1.8. Пусть R^* – мультипликативная полугруппа кольца R . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) кольцо R полупервично;
- (ii) полугруппа R^* слабо сепаративна;
- (iii) полугруппа R^* полупроста в смысле радикала l_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\implies$ (ii). Пусть R – полупервичное кольцо. Предположим, что для любого $s \in R$ и $a, b \in R$ выполняются равенства $asa = asb$, $bsb = bsa$. Тогда

$$\begin{aligned} asa = asb &\implies as(a - b) = 0, \\ bsb = bsa &\implies bs(a - b) = 0, \end{aligned}$$

откуда следует $(a - b)s(a - b) = 0$ для любого $s \in R$, т.е. $(a - b)R(a - b) = 0$; теперь из полупервичности R по лемме 8 из [4] получаем $a = b$. Аналогично доказывается слабая сепаративность слева полугруппы R^* .

(ii) $\implies$ (i). Пусть теперь R^* – слабо сепаративная слева полугруппа. Предположим, что $aRa = 0$ для $a \in R$; тогда $asa = 0$ для любого $s \in S$, поэтому

$$0 = asa = as0, \quad 0s0 = 0sa \implies a = 0,$$

что влечет полупервичность кольца R .

(iii) $\iff$ (ii) доказано в теореме 1.5.

Аналогичным образом можно убедиться в справедливости следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1.9. Пусть R^* – мультипликативная полугруппа кольца R . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) кольцо R полупростое в смысле обобщенно нильпотентного радикала;
- (ii) полугруппа R^* сепаративна;
- (iii) полугруппа R^* полупроста в смысле компрессивного радикала.

СЛЕДСТВИЕ 1.10. Если мультипликативная полугруппа полугрупповой алгебры $F[S]$ сепаративна, то полугруппа S также сепаративна.

Из теоремы 1.8 и следствия 3.8 можно получить аналогичное утверждение для слабо сепаративных полугрупп.

§ 2. Нижние радикалы полугрупп

В [9] Х-Ю. Хёнке перенес конструкцию нижнего радикала Бэра на полугруппы и получил односторонний аналог первичного радикала. Е. Н. Ройз в [10] использовал правые первичные полигоны для описания этого радикала. В этом параграфе будет показано, что радикал l_0 можно построить с помощью трансфинитной индукции как нижний радикал, что дает основание считать его двусторонним аналогом радикала Бэра полугрупп. Также будет построен радикал, являющийся наименьшей слабо p -сепаративной конгруэнцией. Доказательства результатов этого параграфа являются небольшой модификацией соответствующих результатов из [9].

Множество всех конгруэнций на полугруппе S обозначим через $\mathcal{C}(S)$. Для конгруэнций $\alpha \subseteq \beta$ можно определить конгруэнцию β/α на S/α (см., например, [6; гл. IV, § 2]) как ядро эпиморфизма $\pi: S/\alpha \rightarrow S/\beta$ так, что

$$S/\beta \cong (S/\alpha)/(\beta/\alpha).$$

Для произвольного отношения эквивалентности W на полугруппе S и любой конгруэнции $\alpha \in \mathcal{C}(S)$ положим

$$(a, b) \in W(\alpha) \iff ([a]_\alpha, [b]_\alpha) \in W|(S/\alpha),$$

где $[x]_\alpha$ является α -классом, содержащим элемент $x \in S$, а $W|(S/\alpha)$ означает, что отношение эквивалентности W рассматривается на полугруппе S/α .

ЛЕММА 2.1. Пусть W – отношение эквивалентности на S , $\alpha, \delta \in \mathcal{C}(S)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (а) $W(\alpha)$ является отношением эквивалентности;
- (б) $W|(S/\alpha) = 0 \iff W(\alpha) = \alpha$;
- (в) если $\alpha \subseteq \delta$, то $W(\alpha) \subseteq W(\delta)$.

Все утверждения леммы 2.1 следуют непосредственно из определения $W(\alpha)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Для любого отношения эквивалентности V на полугруппе S конгруэнция $\alpha \in \mathcal{C}(S)$ называется V -радикалом, если $V|(S/\alpha) = 0$.

Применяя свойства (в) и (б) из леммы 2.1, получим $V \subseteq V(0) \subseteq V(\alpha) = \alpha$, т.е. V содержится в каждом α -радикале. Среди всех V -радикалов представляет интерес наименьший V -радикал, т.е. наименьший радикал полугрупп, содержащий отношение эквивалентности V .

Наименьший V -радикал можно построить с помощью трансфинитной индукции. С этой целью построим цепь конгруэнций на полугруппе S

$$\varepsilon_V^0 \subseteq \varepsilon_V^1 \subseteq \dots \subseteq \varepsilon_V^i \subseteq \varepsilon_V^{i+1} \subseteq \dots$$

Положим $\varepsilon_V^0 = 0$ и $V_0 = V$. В качестве ε_V^1 возьмем стабильное замыкание отношения V :

$$\varepsilon_V^1 = \{(xay, xby) \mid \forall x, y \in S^1 (a, b) \in V\}.$$

Очевидно, ε_V^1 является конгруэнцией на S . Определим отношение V_1 на S следующим образом:

$$V_1 = \{(a, b) \in S \times S \mid ([a]_{\varepsilon_V^1}, [b]_{\varepsilon_V^1}) \in V\}.$$

Легко заметить, что V_1 является отношением эквивалентности на S . Тогда его стабильное замыкание

$$\varepsilon_V^2 = \{(xay, xby) \mid \forall x, y \in S^1 \ (a, b) \in V_1\}$$

будет конгруэнцией на S . Теперь по индукции определим конгруэнцию:

$$\varepsilon_V^k = \{(xay, xby) \mid \forall x, y \in S^1 \ (a, b) \in V_{k-1}\},$$

и отношение эквивалентности:

$$V_k = \{(a, b) \in S \times S \mid ([a]_{\varepsilon_V^k}, [b]_{\varepsilon_V^k}) \in V\},$$

или, в наших обозначениях, $V_k = V(\varepsilon_V^k)$. Для предельного числа m полагаем $V_m = \bigcup V_i$ для всех $i < m$. Таким образом, получена требуемая цепь конгруэнций. Тогда существует порядковое число n такое, что $\varepsilon_V^{n+1} = \varepsilon_V^n$. Положим $\Lambda = \varepsilon_V^n$.

ТЕОРЕМА 2.3. *Справедливы следующие утверждения:*

- (i) Λ является наименьшим V -радикалом;
- (ii) $\Lambda = \bigcap \alpha$, где $V|(S/\alpha) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $V|(S/\Lambda) = 0$. По условию $\varepsilon_V^{n+1} = \varepsilon_V^n$. Если для некоторых $a, b \in S$ имеет место $([a]_{\varepsilon_V^n}, [b]_{\varepsilon_V^n}) \in V$, то по определению V_n

$$(a, b) \in V_n \subseteq \varepsilon_V^{n+1} = \varepsilon_V^n,$$

т.е. $(a, b) \in \varepsilon_V^n$, или, другими словами, $[a]_{\varepsilon_V^n} = [b]_{\varepsilon_V^n}$. Следовательно, $V|(S/\Lambda) = 0$ и Λ является V -радикалом. Пусть δ – какой-нибудь V -радикал, тогда $V \subseteq \delta$ и $V(\delta) = \delta$. Предположим, что для всех $k < j$ выполняется $V_k \subseteq \delta$, что влечет $\varepsilon_V^{k+1} \subseteq \delta$. Если j – предельное число, то предположим, что $V_j \subseteq \delta$. Пусть теперь $j = k + 1$ и $V_j = V(\varepsilon_V^{k+1})$. Воспользовавшись свойствами (в) и (б) из леммы 2.1, получим

$$V_j = V(\varepsilon_V^{k+1}) \subseteq V(\delta) = \delta.$$

Следовательно, $\varepsilon_V^{k+2} \subseteq \delta$. Отсюда следует, что $\Lambda \subseteq \delta$ и Λ – наименьший V -радикал. Ясно, что $\Lambda \subseteq \bigcap \alpha$, где $V|(S/\alpha) = 0$, а так как L является V -радикалом, то $\Lambda = \bigcap \alpha$. Теорема доказана.

Радикал Λ называется *нижним V -радикалом*.

2.1. Первичный радикал полугрупп. В качестве отношения эквивалентности V возьмем конгруэнцию $\zeta = \zeta_l \vee \zeta_r$, где $(a, b) \in \zeta_l$ (соответственно $(a, b) \in \zeta_r$), если существует натуральное число k такое, что для любых $s_1, s_2, \dots, s_k \in S$

$$as_1a \cdots as_ka = bs_1a \cdots as_ka \quad (\text{соответственно } as_1a \cdots as_ka = as_1a \cdots as_kb),$$

$$bs_1b \cdots bs_kb = as_1b \cdots bs_kb \quad (\text{соответственно } bs_1b \cdots bs_kb = bs_1b \cdots bs_ka).$$

Как обычно, под $\zeta = \zeta_l \vee \zeta_r$ подразумевается наименьшая конгруэнция, содержащая конгруэнции ζ_l и ζ_r . Поскольку ζ является конгруэнцией, то отпадает необходимость рассматривать стабильные замыкания при построении цепочки конгруэнций $\varepsilon_\zeta^0 \subseteq \varepsilon_\zeta^1 \subseteq \dots$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.4. *Для конгруэнции $\zeta = \zeta_l \vee \zeta_r$ справедливы утверждения:*

- (i) $\beta = \bigcup \varepsilon_\zeta^i$ является наименьшим ζ -радикалом;
- (ii) $\beta = \bigcap \alpha$, где $\zeta|(S/\alpha) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Радикал β , полученный в теореме 2.4, назовем *радикалом Бэра* или *первичным радикалом полугрупп*.

Теперь покажем, что полученный радикал совпадает со (слабо) специальным радикалом l_0 , который равен пересечению всех первичных конгруэнций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Множество $\mu \in S \times S$ называется *m-системой*, если для любых трех пар $(x, x') \in \mu$, $(y, y') \in \mu$, $(z, z') \in \mu$ существуют элементы $y'' \in \{y, y'\}$, $z'' \in \{z, z'\}$ и $s, t \in S^1$ такие, что $y''s(x, x')tz'' \in \mu$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Последовательность пар

$$\{(x_0, x'_0), (x_1, x'_1), \dots, (x_i, x'_i), \dots\}$$

называется *m-последовательностью*, если $(x_i, x'_i) = x''_i s_i(x_i, x'_i) t_i x'''_i$ для всех $i \geq 0$, где $x''_i, x'''_i \in \{x_i, x'_i\}$, $s_i, t_i \in S^1$.

Известно, что любая *m-последовательность* является *m-системой*.

ЛЕММА 2.8 (ср. [9; предложение 6]). Пусть α и β , $\alpha \subset \delta$, – конгруэнции на S . Если $\zeta|(S/\alpha) = 0$, то существует первичная конгруэнция π такая, что $\alpha \subseteq \pi$, $\delta \not\subseteq \pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего построим *m-систему* F такую, что $F \subseteq \delta$ и $F \cap \alpha = 0$. По лемме 2.1, (б) $\zeta(\alpha) = \alpha$. Рассмотрим пару элементов $(a, b) \in \delta$ таких, что $(a, b) \notin \alpha$, а потому и $(a, b) \notin \zeta(\alpha)$. Последнее означает, что для любого натурального r и любого $s \in S$ выполняются соотношения

$$(as)^r(a, b) \notin \alpha, \quad (bs)^r(a, b) \notin \alpha, \quad (a, b)(sa)^r \notin \alpha, \quad (a, b)(sb)^r \notin \alpha.$$

Для $r = 1$ существуют элементы $x \in \{a, b\}$ и $s_1 \in S$ такие, что $xs_1(a, b) \notin \alpha$. Введем обозначения $u = xs_1a$, $v = xs_1b$; тогда $(u, v) \notin \alpha$. Поэтому существуют $y \in \{u, v\}$, $t \in S$ такие, что $(u, v)ty \notin \alpha$. Следовательно, $xs_1(a, b)ty \notin \alpha$, т.е. $xs_1(a, b)txs_1z \notin \alpha$, где $z \in \{a, b\}$. Положим $t_1 = txs_1$; тогда $xs_1(a, b)t_1z$, где $x, z \in \{a, b\}$. Пусть теперь $a_1 = xs_1at_1z$, $b_1 = xs_1bt_1z$; тогда $(a_1, b_1) \notin \alpha$, $(a_1, b_1) \in \delta$. Продолжая этот процесс, получим *m-последовательность* (а потому и *m-систему*) $F = \{(a, b), (a_1, b_1), \dots\}$. Ясно, что $F \subseteq \delta$, $F \cap \alpha = 0$. Теперь по лемме 6 из [8] существует первичная конгруэнция π , максимальная во множестве $\{\gamma \in \mathcal{C}(S) \mid \gamma \cap F = 0, \alpha \subseteq \gamma\}$. Если $\delta \subseteq \pi$, то $F \subseteq \delta \subseteq \pi$, что противоречит $\pi \cap F = 0$. Окончательно получаем, что π – первичная конгруэнция, причем $\alpha \subseteq \pi$, $\delta \not\subseteq \pi$.

ТЕОРЕМА 2.9. *Радикал β совпадает с наименьшим (слабо) специальным радикалом, т.е. $\beta = l_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 4 в [9] и двойственного к нему следует, что $\beta \subseteq \bigcap \pi = \delta$, где π – первичные конгруэнции. Если $\delta \neq \beta$, то по лемме 2.8 существует первичная конгруэнция π такая, что $\delta \not\subseteq \pi$, что противоречит равенству $\delta = \bigcap \pi$. Из теоремы 5 в [8] следует, что $l_0 = \bigcap \pi$; следовательно, $l_0 = \beta$.

Таким образом, первичный радикал (радикал Бэра) полугрупп является нижним ζ -радикалом, и его класс полупростых полугрупп согласно теореме 1.5 и теореме 2.9 состоит из слабо сепаративных полугрупп.

2.2. Нижний радикал Λ_p . Теперь в качестве отношения эквивалентности V в теореме 2.3 возьмем конгруэнцию ζ_p , где p – простое число, полагая

$$(a, b) \in \zeta_p \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall s_1, s_2, \dots, s_{p^n-1} \in S \\ as_1a \cdots as_{p^n-1}a = bs_1b \cdots bs_{p^n-1}b.$$

Получим ζ_p -радикал, который обозначим через Λ_p .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Полугруппу S назовем *слабо p -сепаративной*, если

$$\forall s_1, s_2, \dots, s_{p-1} \in S \quad as_1a \cdots as_{p-1}a = bs_1b \cdots bs_{p-1}b \implies a = b.$$

ТЕОРЕМА 2.11. *Полупростые относительно радикала Λ_p полугруппы – это в точности слабо p -сепаративные полугруппы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В лемме 2.3 из [11] установлено, что слабая p -сепаративность полугруппы S эквивалентна тому, что $\zeta_p = 0$. Если учесть, что по построению радикала Λ_p равенство $\zeta_p = 0$ эквивалентно $\Lambda_p = 0$, то получаем, что класс всех полупростых относительно радикала Λ_p полугрупп состоит из слабо p -сепаративных полугрупп.

Таким образом, радикал Λ_p является наименьшей слабо p -сепаративной конгруэнцией.

2.3. Компрессивный радикал полугрупп как нижний радикал.

Компрессивный радикал полугрупп является аналогом обобщенного нильрадикала колец (алгебр). В работе [12] дается описание правостороннего (левостороннего) аналога компрессивного радикала полугрупп как пересечения всех компрессивных конгруэнций. Известно (см. [7]), что двусторонний аналог компрессивного радикала определяется своим полупростым классом, состоящим из всех сепаративных полугрупп. Ниже показано, что компрессивный радикал полугрупп может быть построен с помощью конструкции как верхнего, так и нижнего радикала. Это вполне согласуется с определением обобщенного нильрадикала колец (алгебр); см., например, [4]. Интерес к компрессивному радикалу полугрупп оправдан, в частности, тем, что он является наименьшей сепаративной конгруэнцией. При переходе от коммутативных полугрупп к некоммутативным возникла некоторая путаница в определении сепаративной конгруэнции. В работе [13] сделана попытка навести порядок в терминологии.

Под *сепаративной конгруэнцией* будем понимать конгруэнцию ρ на полугруппе S такую, что для любых элементов $a, b \in S$

$$\begin{aligned} a^2 \rho ab, \quad b^2 \rho ba &\implies a \rho b, \\ a^2 \rho ba, \quad b^2 \rho ab &\implies a \rho b. \end{aligned}$$

Если выполняется условие

$$a^2 \rho ab \rho b^2 \implies a \rho b,$$

то ρ называется *квазисепаративной конгруэнцией*.

Последним продвижением в описании квазисепаративной конгруэнции являются работы [14], [15], в которых приведены условия, когда она совпадает с радикалом Джекобсона полугрупп. Полученное ниже описание наименьшей сепаративной конгруэнции в какой-то мере можно считать явным описанием.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12. Полугруппа S называется *сепаративной слева* (соответственно *справа*), если для любых $a, b \in S$

$$\begin{aligned} a^2 = ab, \quad b^2 = ba &\implies a = b \\ (\text{соответственно } a^2 = ba, \quad b^2 = ab &\implies a = b). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13 (см. [17; п. II.6]). Полугруппа S называется *сепаративной*, если она является сепаративной слева и справа. Другими словами, класс сепаративных полугрупп является пересечением класса полугрупп, сепаративных слева, и класса полугрупп, сепаративных справа. Конгруэнция α на полугруппе S называется *сепаративной* (слева, справа), если полугруппа S/α является сепаративной (слева, справа).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.14. Полугруппа S называется *квазисократимой слева*, если для любых $a, b, y \in S$

$$ya = yb \implies (y = 0 \vee a = b).$$

Квазисократимая справа полугруппа определяется двойственным образом. Полугруппа S называется *квазисократимой*, если она одновременно является квазисократимой слева и справа. Конгруэнция ρ называется *компрессивной*, если полугруппа S/ρ является квазисократимой.

Рассмотрим тип полугрупп, состоящий из квазисократимых полугрупп. Этот тип определяет радикал

$$C = \bigcap \tau, \quad \text{где } \tau \text{ пробегает все компрессивные конгруэнции,}$$

для которого полупростые полугруппы изоморфны подпрямому пересечению сократимых полугрупп (возможно, с присоединенным нулем). В силу теоремы 1.4.3 из [7] класс полупростых полугрупп для этого радикала составляют сепаративные полугруппы. Радикал C назовем *компрессивным радикалом*.

На полугруппе S рассмотрим отношения W_l, W_r :

$$\begin{aligned} (a, b) \in W_l &\iff \exists n \in \mathbb{N} \quad a^{n+1} = a^n b, \quad b^{n+1} = b^n a; \\ (a, b) \in W_r &\iff \exists n \in \mathbb{N} \quad a^{n+1} = b a^n, \quad b^{n+1} = a b^n. \end{aligned}$$

Эти отношения являются отношениями эквивалентности на S (см. [14; лемма 2.2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.15. Отношение V на полугруппе S называется *сепаративным*, если для любых $a, b \in S$ имеет место

$$\begin{aligned} (a^2, ab) \in V, \quad (b^2, ba) \in V &\implies (a, b) \in V, \\ (a^2, ba) \in V, \quad (b^2, ab) \in V &\implies (a, b) \in V. \end{aligned}$$

Согласно теореме 2.4 из [14] отношение эквивалентности W_l является сепаративным слева, а W_r – сепаративным справа.

ЛЕММА 2.16 (см. [14; лемма 3.4]). *Для любой сепаративной слева (соответственно справа) конгруэнции μ имеет место импликация*

$$\begin{aligned} a^{n+1} \mu a^n b, \quad b^{n+1} \mu b^n a &\implies a \mu b \\ \text{(соответственно } a^{n+1} \mu b a^n, \quad b^{n+1} \mu a b^n &\implies a \mu b), \end{aligned}$$

т.е.

$$([a]_\mu, [b]_\mu) \in W_l(W_r) \implies [a]_\mu = [b]_\mu.$$

Следствие 3.5 из [14] утверждает, что W_l содержится в любой сепаративной слева конгруэнции, а W_r – в любой сепаративной справа конгруэнции. Обозначим через W объединение отношений эквивалентности W_l, W_r , т.е. $W = W_l \vee W_r$. Очевидно, отношение эквивалентности W является сепаративным и содержится в любой сепаративной конгруэнции.

ТЕОРЕМА 2.17. *Следующие условия эквивалентны:*

- (а) μ является сепаративной конгруэнцией на полугруппе S ;
- (б) μ является W -радикалом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\implies$ (б). Согласно лемме 2.16 для любой сепаративной конгруэнции μ из условий

$$([a]_\mu, [b]_\mu) \in W_l, \quad ([a]_\mu, [b]_\mu) \in W_r$$

следует $[a]_\mu = [b]_\mu$. Поэтому $([a]_\mu, [b]_\mu) \in W$ влечет $[a]_\mu = [b]_\mu$. Это означает, что

$$W(\mu) = \{(a, b) \in S \times S \mid ([a]_\mu, [b]_\mu) \in W\} = \mu.$$

Тогда по лемме 2.1, (б) $W|(S/\mu) = 0$, т.е. μ является W -радикалом.

(б) $\implies$ (а). По определению W -радикала μ имеет место $W|(S/\mu) = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} [x]_\mu^2 &= [x]_\mu [y]_\mu, \quad [y]_\mu^2 = [y]_\mu [x]_\mu &\implies ([x]_\mu, [y]_\mu) \in W_l, \\ [x]_\mu^2 &= [y]_\mu [x]_\mu, \quad [y]_\mu^2 = [x]_\mu [y]_\mu &\implies ([x]_\mu, [y]_\mu) \in W_r. \end{aligned}$$

Следовательно, $([x]_\mu, [y]_\mu) \in W$ и $[x]_\mu = [y]_\mu$. Это означает, что полугруппа S/μ является сепаративной и конгруэнция μ также является сепаративной. Теорема доказана.

Используя отношение эквивалентности W , построим нижний радикал $\xi = \bigcup \varepsilon_W^i$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.18. *Нижний W -радикал ξ является наименьшей сепаративной конгруэнцией.*

Класс полупростых полугрупп относительно компрессивного радикала состоит из сепаративных полугрупп, а согласно условию (ii) радикала полугрупп компрессивный радикал является наименьшей сепаративной конгруэнцией. Таким образом, построенная конгруэнция ξ совпадает с компрессивным радикалом полугрупп S .

Для построения нижнего радикала, являющегося наименьшей квазисепаративной конгруэнцией, необходимо положить $W = W_l \cap W_r$. Строение полупростых полугрупп в смысле этого радикала, т.е. квазисепаративных полугрупп, получено Ю. И. Красильниковой и Б. В. Новиковым (см. [16]).

2.4. Нижний p -компрессивный радикал C_p . Пусть p – произвольное простое число. Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на полугруппе S :

$$(a, b) \in \xi_p \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad a^{p^n} = b^{p^n}.$$

Нижний V -радикал для $V = \xi_p$ назовем p -компрессивным радикалом полугруппы S и обозначим через C_p .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.19. Полугруппа S называется p -сепаративной, если для всех $a, b \in S$

$$a^p = b^p \implies a = b.$$

Из конструкции нижнего V -радикала и определения p -сепаративной полугруппы легко следует

ТЕОРЕМА 2.20. *Класс полупростых относительно p -компрессивного радикала полугрупп состоит в точности из p -сепаративных полугрупп.*

§ 3. Связь идеала $I(S, \rho, F)$ с радикалом полугрупповой алгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Идеал P кольца R называется *вполне первичным*, если для любых $a, b \in R$ из $ab \in P$ следует $a \in P$ или $b \in P$. Для полугруппы такой идеал называется *вполне простым*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. *Обобщенным нильрадикалом (компрессивным радикалом) кольца R называется идеал $\mathcal{A}(R)$ кольца R , равный пересечению всех вполне первичных идеалов кольца R .*

Для произвольного идеала T полугрупповой алгебры $F[S]$ над полем F через $\sim_T$ обозначим конгруэнцию на полугруппе S такую, что для любых $s, t \in S$ $s \sim_T t$ тогда и только тогда, когда $s - t \in T$.

ТЕОРЕМА 3.3. Если P – вполне первичный идеал полугрупповой алгебры $F[S]$, то полугруппа $S/\sim_P$ является квазисократимой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\bar{a}$ класс конгруэнции $\sim_P$, содержащий элемент $a \in S$, а через θ обозначим нуль полугруппы S . Предположим, что $\bar{x}\bar{a} = \bar{x}\bar{b}$, где $x, a, b \in S$. Если $\bar{x}\bar{a} = \bar{x}\bar{b} = \theta$, то из вполне первичности идеала P следует, что $\bar{x} = \theta$ либо $\bar{a} = \bar{b} = \theta$. В противном случае $\bar{x}\bar{a} = \bar{x}\bar{b}$, т.е. $x(a-b) \in P$. Отсюда в силу вполне первичности идеала P получим $x \in P$ или $a-b \in P$. Если $x \in P$, то $\bar{x}$ равен нулю, и все доказано. Поэтому предположим, что $x \notin P$; тогда $a-b \in P$, что влечет $\bar{a} = \bar{b}$. Аналогично доказывается квазисократимость справа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Идеал P кольца R называется *первичным*, если для любых идеалов $A, B \subseteq R$ из $AB \subseteq P$ следует $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$. Для полугруппы такой идеал называется *простым*. Пересечение всех первичных идеалов кольца R совпадает с радикалом Бэра $\mathcal{B}(R)$.

Для первичного идеала полугрупповой алгебры справедлив следующий аналог теоремы 3.3.

ТЕОРЕМА 3.5. Если P – первичный идеал полугрупповой алгебры $F[S]$, то полугруппа $S/\sim_P$ является первичной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{a}$ – класс конгруэнции $\sim_P$, содержащий элемент $a \in S$, а θ – нуль полугруппы S . Предположим, что $\bar{x}\bar{s}\bar{a} = \bar{x}\bar{s}\bar{b}$ для всех $s \in S$, где $x, a, b \in S$. В случае $\bar{x}\bar{s}\bar{a} = \bar{x}\bar{s}\bar{b} = \theta$ первичность идеала P влечет $\bar{x} = \theta$ либо $\bar{a} = \bar{b} = \theta$. Иначе $\bar{x}\bar{s}\bar{a} = \bar{x}\bar{s}\bar{b}$ для всех $s \in S$, т.е. $xS(a-b) \subseteq P$. Теперь из первичности идеала P следует $x \in P$ или $a-b \in P$. При $x \in P$ $\bar{x}$ равен нулю, и все доказано. В этом случае предположим, что $x \notin P$; тогда $a-b \in P$, следовательно, $\bar{a} = \bar{b}$. Аналогично доказывается слабая леворегулярность. Теорема доказана.

Известно, что для произвольной конгруэнции ρ на полугруппе S и поля F множество

$$I(S, \rho, F) = \left\{ \sum_i \alpha_i (s_i - t_i) \mid \alpha_i \in F, (s_i, t_i) \in \rho \right\}$$

является идеалом полугрупповой алгебры $F[S]$.

ТЕОРЕМА 3.6. Для любых полугруппы S , поля F , компрессивного радикала C и радикала β справедливы включения

$$I(S, C, F) \subseteq \mathcal{A}(F[S]), \quad I(S, \beta, F) \subseteq \mathcal{B}(F[S]).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\{P_i\}_{i \in J}$ – некоторое семейство идеалов полугрупповой алгебры $F[S]$. Предположим, что $\{\sim_{P_i}\}_{i \in J}$ содержится в некотором семействе конгруэнций $\{\pi_i\}_{i \in N}$. Тогда имеет место

$$I\left(S, \bigcap_{j \in N} \pi_j\right) = \bigcap_{j \in N} I(S, \pi_j, F) \subseteq \bigcap_{i \in J} I(S, \sim_{P_i}, F) \subseteq \bigcap_{i \in J} P_i.$$

Если $\{P_i\}_{i \in I}$ – множество всех вполне первичных идеалов полугрупповой алгебры $F[S]$, а $\{\pi_i\}_{i \in N}$ – множество всех компрессивных конгруэнций на S , то $\bigcap_{j \in N} \pi_j = C$ и $\bigcap_{i \in J} P_i = \mathcal{A}(F[S])$. Согласно теореме 3.3 каждая конгруэнция $\sim_{P_i}$ является квазисократимой. Поэтому $I(S, C, F) \subseteq \mathcal{A}(F[S])$.

Если же $\{P_i\}_{i \in I}$ – множество всех первичных идеалов полугрупповой алгебры $F[S]$, а $\{\pi_i\}_{i \in N}$ – множество всех первичных конгруэнций на S , то

$$\bigcap_{j \in N} \pi_j = \beta, \quad \bigcap_{i \in J} P_i = \mathcal{B}(F[S]).$$

Теперь в силу теоремы 3.5 получаем $I(S, \beta, F) \subseteq \mathcal{B}(F[S])$.

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Если $F[S]$ – полупростая в смысле обобщенного радикала полугрупповая алгебра, то S – сепаративная полугруппа.

СЛЕДСТВИЕ 3.8. Если $F[S]$ – полупростая в смысле радикала Бэра полугрупповая алгебра, то S – слабо сепаративная полугруппа.

Утверждение, подобное теореме 3.6, можно получить и для других полугрупповых и кольцевых радикалов, применяя более общие рассуждения. Рассмотрим нижний α -радикал полугруппы S , порожденный конгруэнцией α . Как и ранее, полагаем $\alpha_{i+1}/\alpha_i = \alpha|(S/\alpha_i)$ для порядкового числа i и $\alpha_k = \bigcup_{i < k} \alpha_i$ для предельного числа k . Через $\pi(R)$ обозначим произвольный радикал кольца R в смысле Амицура–Куроша.

ТЕОРЕМА 3.9. Для нижнего α -радикала Λ , порожденного конгруэнцией α на полугруппе S , любого радикала колец π и поля F справедлива следующая импликация:

$$I(S, \alpha, F) \subseteq \pi(F[S]) \implies I(S, \Lambda, F) \subseteq \pi(F[S]).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $I(S, \alpha, F) \subseteq \pi(F[S])$. Для порядкового числа i предположим, что $I(S, \alpha_i, F) \subseteq \pi(F[S])$. По определению

$$S/\alpha_{i+1} \cong (S/\alpha_i)/(\alpha_{i+1}/\alpha_i).$$

Тогда

$$F[S]/I(S, \alpha_{i+1}, F) \cong (F[S]/I(S, \alpha_i, F))/I(S/\alpha_i, \alpha_{i+1}/\alpha_i, F).$$

Учитывая, что

$$F[S]/I(S, \alpha_{i+1}, F) \cong (F[S]/I(S, \alpha_i, F))/(I(S, \alpha_{i+1}, F)/I(S, \alpha_i, F)),$$

получаем

$$I(S/\alpha_i, \alpha_{i+1}/\alpha_i, F) \cong I(S, \alpha_{i+1}, F)/I(S, \alpha_i, F).$$

По построению цепочки конгруэнций нижнего α -радикала имеем

$$\alpha_{i+1}/\alpha_i = \alpha|(S/\alpha_i).$$

Отсюда следует, что

$$I(S/\alpha_i, \alpha, F) \cong I(S, \alpha_{i+1}, F)/I(S, \alpha_i, F).$$

Таким образом, кольцо $I(S, \alpha_{i+1}, F)$ является расширением π -радикального кольца $I(S, \alpha_i, F)$ с помощью π -радикального кольца $I(S/\alpha_i, \alpha, F)$, т.е. само является π -радикальным. Для предельного числа k имеет место $I(S, \alpha_k, F) = \sum_{i < k} I(S, \alpha_i, F)$, поэтому $I(S, \alpha_k, F) \subseteq \pi(F[S])$. Это завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 3.10. Для любой полугруппы S и поля F простой характеристики p имеет место $\Lambda_p \subseteq \sim_{B(F[S])}$, т.е. $I(S, \Lambda_p, F) \subseteq B(F[S])$. Для произвольного поля F имеет место $I(S, \beta, F) \subseteq B(F[S])$.

Включения $I(S, \zeta_p, F) \subseteq B(F[S])$ и $I(S, \zeta_l \vee \zeta_r, F) \subseteq B(F[S])$ доказаны соответственно в [11] и [18].

СЛЕДСТВИЕ 3.11. Пусть S – произвольная полугруппа, F – поле простой характеристики p . Тогда $I(S, \Lambda_p(\beta), F) \subseteq B(F[S])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\beta \subseteq \Lambda_p(L)$, то можно считать, что $\beta = 0_S$. Поэтому $(a, b) \in \Lambda_p(\beta)$ означает $(a, b) \in \Lambda_p$, и по следствию 3.10 имеем $a - b \in B(F[S])$.

ТЕОРЕМА 3.12. Если выполняется любое из условий:

- (а) F – поле, S – полугруппа, радикальная в смысле компрессивного радикала C , и π – обобщенный нильрадикал кольца;
- (б) F – поле, S – полугруппа, радикальная в смысле радикала β , и π – первичный радикал кольца;
- (в) F – поле простой характеристики p , S – полугруппа, радикальная в смысле радикала Λ_p или $\Lambda_p(\beta)$, и π – первичный радикал кольца;

то имеет место

$$\pi(F[S]) = I(S, 1_S, F),$$

где 1_S – универсальная конгруэнция на S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если S – полугруппа, радикальная в смысле радикала ρ , то $\rho = 1_S$ и $F \cong F[S/\rho] \cong F[S]/I(S, \rho, F)$. Тогда $\pi(F[S/\rho]) = 0$, т.е. $\pi(F[S]) \subseteq I(S, 1_S, F)$. Теперь теорема 3.6 и следствия 3.8 и 3.11 гарантируют требуемое равенство $\pi(F[S]) = I(S, 1_S, F)$.

§ 4. Первичный радикал некоторых полугрупповых алгебр

Специфика полугрупповой алгебры обычно предполагает описание ее радикалов в терминах полугруппы, а точнее – с помощью некоторой конгруэнции на этой полугруппе. Для полугрупповых алгебр коммутативной полугруппы эта задача полностью решена (см. [19]) для радикалов Джекобсона и Бэра. А именно, в случае коммутативной полугруппы S радикал Джекобсона и первичный радикал полугрупповой алгебры над полем F совпадают и равны идеалу $I(S, \rho, F)$, т.е.

$$\mathcal{J}(F[S]) = \mathcal{B}(F[S]) = I(S, \rho, F).$$

Если F – поле нулевой характеристики, то ρ является наименьшей сепаративной конгруэнцией, т.е. компрессивным радикалом. Если же поле имеет

простую характеристику p , то ρ является наименьшей p -сепаративной конгруэнцией. Заметим, что для коммутативных полугрупп компрессивный радикал, радикал Джекобсона и радикал Бэра совпадают. Можно было бы надеяться на то, что в случае некоммукативной полугруппы также найдется подходящая конгруэнция для описания первичного радикала с помощью идеала $I(S, \rho, F)$. Однако, как будет показано в теореме 4.5, даже для групп это не всегда возможно.

Сначала применим результаты § 3 для вычисления первичного радикала групповой алгебры $F[G]$, в частности для нильпотентной группы G . Если поле F имеет нулевую характеристику, то, как хорошо известно, для любой группы групповая алгебра полупервична. Поэтому рассмотрим случай, когда характеристика поля является простым числом p .

Для любой конгруэнции ρ на группе G можно определить ядро конгруэнции следующим образом:

$$\text{Ker } \rho = \{g \in G \mid (e, g) \in \rho\},$$

где e – единица группы G . Очевидно, $\text{Ker } \rho$ – нормальная подгруппа в G . Группы G/ρ и $G/\text{Ker } \rho$ совпадают. Действительно,

$$(a, b) \in \rho \iff (b^{-1}a, e) \in \rho \iff b^{-1}a \in \text{Ker } \rho \iff b \text{Ker } \rho = a \text{Ker } \rho.$$

Согласно следствию 2.2 из [11]

$$\text{Ker } \zeta_p = \{g \in G \mid (g, e) \in \zeta_p\} = G_p \cap C(G)$$

для любой максимальной p -подгруппы G_p группы G (здесь $C(G)$ – центр группы G).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть F – поле простой характеристики p , а G – группа. Тогда:

- (i) $I(G, \Lambda_p, F) \subseteq \mathcal{B}(F[G]);$
- (ii) $\mathcal{B}(F[G])/I(G, \Lambda_p, F) \cong \mathcal{B}(F[G/\text{Ker } \Lambda_p]);$
- (iii) если G – нильпотентная группа, то $\mathcal{B}(F[G]) = I(G, \Lambda_p, F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $I(G, \Lambda_p, F) \subseteq \mathcal{B}(F[G])$ выполняется в силу следствия 3.10. Далее, из этого включения и известного соотношения

$$\mathcal{B}(F[G]/I(G, \Lambda_p, F)) \cong \mathcal{B}(F[G/\Lambda_p]),$$

воспользовавшись леммой 8.4.1 из [1], получаем

$$\mathcal{B}(F[G])/I(G, \Lambda_p, F) \cong \mathcal{B}(F[G/\Lambda_p]).$$

Пусть теперь группа G будет нильпотентной. Тогда согласно следствию 2.3 из [11] группа G/ζ_p не содержит p -элементов. Это в свою очередь влечет полупервичность групповой алгебры $F[G/\Lambda_p]$. Таким образом, получаем

$$\mathcal{B}(F[G])/I(G, \Lambda_p, F) \cong \mathcal{B}(F[G/\Lambda_p]) = 0.$$

Следовательно,

$$\mathcal{B}(F[G]) \subseteq I(G, \Lambda_p, F),$$

что завершает доказательство.

Более детальное описание первичного радикала групповой алгебры нильпотентной группы было получено Э. Джесперсом и Я. Окнинским. А именно справедлива

ТЕОРЕМА 4.2 (см. [20; теорема 3.6]). *Если S – подполугруппа нильпотентной группы G , то:*

- (i) $\mathcal{J}(F[S]) = \mathcal{B}(F[S]) = \mathcal{J}(F[G]) \cap F[S]$;
- (ii) *если $\text{char}(F) = p > 0$, то*

$$\mathcal{J}(F[G]) = \mathcal{B}(F[G]) = I(G, \xi_p, F),$$

если $\text{char}(F) = 0$, то $\mathcal{J}(F[G]) = 0$.

Сравнивая теорему 4.2 с теоремой 4.1, заключаем, что для нильпотентной группы G имеет место равенство $\Lambda_p = \xi_p$. Вспоминая, что p -компрессивный радикал C_p порождается отношением эквивалентности ξ_p , приходим к выводу, что для нильпотентных групп $\Lambda_p = \xi_p = C_p$. Утверждения (i) и (ii) теоремы 4.1 являются некоторой версией известной теоремы Дымента–Залесского (см. [21] или [1; теорема 8.4.16]), в которой вместо подгруппы $\text{Ker } \Lambda_p$ используется локально конечная нормальная p -подгруппа P_0 , минимальная относительно свойства

$$O_p(\Delta(G/P_0)) = \langle 1 \rangle.$$

Локально конечную нормальную подгруппу P_0 можно построить как ядро некоторого нижнего радикала полугрупп. Действительно, если перевести условия теоремы Дымента–Залесского на язык конгруэнций, то получим еще один нижний радикал групп. Обозначим через φ_p конгруэнцию на группе G с ядром $O_p(\Delta(G))$, а через Φ_p – конгруэнцию на группе G с ядром P_0 ; тогда условие $O_p(\Delta(G/P_0)) = \langle 1 \rangle$ можно переписать как $\varphi_p|(G/\Phi_p) = 0$. Последнее означает, что Φ_p является φ_p -радикалом, а условие минимальности P_0 свидетельствует о том, что Φ_p – нижний φ_p -радикал. Построим этот нижний радикал. Под $O_p(\Delta(G))$ будем понимать максимальную нормальную p -подгруппу группы G , содержащуюся в $\Delta(G)$. Рассмотрим цепочку подгрупп группы G

$$\langle 1 \rangle \subseteq G_1 = O_p(\Delta(G)) \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_i \subseteq G_{i+1} \subseteq \cdots$$

Если i – порядковое число, то полагаем $G_{i+1}/G_i = O_p(\Delta(G/G_i))$. Для предельного числа m считаем $G_m = \bigcup_{j < m} G_j$. Все подгруппы цепочки являются локально конечными нормальными подгруппами группы G , поэтому на некотором шаге последовательность стабилизируется, т.е. найдется число k такое, что $G_k = G_{k+1}$. Обозначим G_k через P_0 . Тогда получим $O_p(\Delta(G/P_0)) = \langle 1 \rangle$, т.е. цепочка подгрупп заканчивается подгруппой P_0 :

$$\langle 1 \rangle \subseteq G_1 = O_p(\Delta(G)) \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_i \subseteq G_{i+1} \subseteq \cdots \subseteq G_k = P_0. \quad (1)$$

Теперь рассмотрим конгруэнцию φ_p на группе G , определенную по правилу $(a, b) \in \varphi_p \iff ab^{-1} \in O_p(\Delta(G))$. Другими словами, $O_p(\Delta(G)) = \text{Ker } \varphi_p$. Через Φ_p обозначим нижний φ_p -радикал на группе G , построенный с помощью цепочки

$$0 \subseteq \varphi_p = \varphi_1 \subseteq \varphi_2 \subseteq \cdots \subseteq \varphi_i \subseteq \varphi_{i+1} \subseteq \cdots \subseteq \varphi_m = \Phi_p. \quad (2)$$

ЛЕММА 4.3. Для группы G и простого числа p каждый член ряда (1) является ядром соответствующей конгруэнции из ряда (2), т.е. $G_i = \text{Ker } \varphi_i$ для $i < k$, $P_0 = \text{Ker } \Phi_p$ и подгруппа P_0 является минимальной относительно свойства $O_p(\Delta(G/P_0)) = \langle 1 \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $O_p(\Delta(G)) = \text{Ker } \varphi_p$. Предположим, что для некоторого i имеет место $G_i = \text{Ker } \varphi_i$. Если i – порядковое число, то $O_p(\Delta(G/\text{Ker } \varphi_i)) = G_{i+1}/\text{Ker } \varphi_i$. Учтем теперь, что $\varphi_{i+1}/\varphi_i = \varphi_p|(G/\varphi_i)$. Отсюда следует, что

$$\text{Ker}(\varphi_{i+1}/\varphi_i) = \text{Ker}(\varphi_p)_{G/\varphi_i} = \Delta_p(G/\varphi_i) = \Delta_p(G/\text{Ker } \varphi_i).$$

Из определения ядра конгруэнции и определения конгруэнции φ_{i+1}/φ_i немедленно следует равенство $\text{Ker}(\varphi_{i+1}/\varphi_i) = \text{Ker } \varphi_{i+1}/\text{Ker } \varphi_i$. Поэтому

$$\Delta_p(G/\text{Ker } \varphi_i) = \text{Ker } \varphi_{i+1}/\text{Ker } \varphi_i.$$

Отсюда заключаем, что $G_{i+1} = \text{Ker } \varphi_{i+1}$. Если же k – предельное число, то $G_k = \bigcup_{j < k} \text{Ker } \varphi_j = \text{Ker } \varphi_k$. Условие

$$\text{Ker } \varphi_{i+1} = \text{Ker } \varphi_i \iff \varphi_{i+1} = \varphi_i$$

гарантирует, что $m = k$, т.е. длины цепочек (1) и (2) равны. Следовательно, $P_0 = \text{Ker } \Phi_p$. Пусть H – такая нормальная подгруппа группы G , что $O_p(\Delta(G/H)) = \langle 1 \rangle$. Это равносильно тому, что $\varphi_p|(G/H) = 0_{G/H}$. Обозначим через ρ конгруэнцию на G с ядром, равным H ; тогда $\varphi_p|(G/\rho) = 0_{G/\rho}$. Поскольку Φ_p является нижним радикалом, то $\Phi_p \subseteq \rho$, $P_0 = \text{Ker } \Phi_p \subseteq \text{Ker } \rho = H$. Таким образом, подгруппа P_0 является наименьшей относительно свойства $O_p(\Delta(G/H)) = \langle 1 \rangle$. Лемма доказана.

В терминах конгруэнций основное утверждение теоремы Дымента–Залесского принимает вид

$$\mathcal{B}(F[G])/I(G, \Phi_p, F) \cong \mathcal{B}(F[G/\Phi_p]).$$

Возникает естественный вопрос: возможно ли равенство

$$\mathcal{B}(F[G]) = I(G, \tau, F)$$

для некоторой конгруэнции τ на группе G ? Теорема 4.5 в общем случае дает отрицательный ответ на этот вопрос и определяет класс групп, для которых это возможно.

Напомним, что

$$\Delta_p(G) = \langle x \in G \mid [G : C_G(x)] < \infty, \exists m \in \mathbb{N} \mid x = p^m \rangle.$$

Обозначим через δ_p конгруэнцию на группе G , соответствующую нормальной подгруппе $\Delta_p(G)$, т.е.

$$(a, b) \in \delta_p \iff a^{-1}b \in \Delta_p(G).$$

Рассмотрим нижний δ_p -радикал Θ_p , который определяется с помощью цепочки конгруэнций

$$0 \subseteq \delta_p = \delta_1 \subseteq \delta_2 \subseteq \cdots \subseteq \delta_i \subseteq \delta_{i+1} \subseteq \cdots \subseteq \Theta_p, \quad (3)$$

и последовательность подгрупп группы G

$$\langle 1 \rangle \subseteq H_1 = \Delta_p(G) \subseteq H_2 \subseteq \cdots \subseteq H_i \subseteq H_{i+1} \subseteq \cdots \subseteq H_n. \quad (4)$$

Если i – порядковое число, то полагаем $H_{i+1}/H_i = \Delta_p(G/H_i)$. Для предельного числа m считаем, что $H_m = \bigcup_{j < m} H_j$. Поскольку все члены цепочки являются локально конечными нормальными подгруппами группы G , то на некотором шаге последовательность стабилизируется, т.е. найдется число n такое, что $H_n = H_{n+1}$. Тогда получим $\Delta_p(G/H_n) = \langle 1 \rangle$, т.е. цепочка действительно заканчивается некоторой подгруппой H_n .

Для радикала Θ_p справедлив следующий аналог леммы 4.3.

ЛЕММА 4.4. *Для группы G и простого числа p каждый член ряда (4) является ядром соответствующей конгруэнции из ряда (3), т.е. $H_i = \text{Ker } \delta_i$ для $i < k$, $H_n = \text{Ker } \Theta_p$ и H_n является минимальной относительно свойства $\Delta_p(G/H_n) = \langle 1 \rangle$.*

Теперь мы готовы перейти к главному результату этого параграфа.

ТЕОРЕМА 4.5. *Пусть G – группа, F – поле простой характеристики p , Θ_p – нижний радикал группы G , порожденный конгруэнцией δ_p . Тогда*

$$\mathcal{B}(F[G]) \subseteq I(G, \Theta_p, F)$$

и следующие условия эквивалентны:

- (i) $\mathcal{B}(F[G]) = I(G, \rho, F)$ для некоторой конгруэнции ρ ;
- (ii) $\mathcal{B}(F[G]) = I(G, \Theta_p, F)$;
- (iii) радикалы Θ_p и Φ_p совпадают на группе G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению δ_p -радикала $\delta_p|(G/\Theta_p) = 0_{G/\Theta_p}$, т.е.

$$\Delta_p(G/\text{Ker } \Theta_p) = \langle 1 \rangle.$$

Тогда по теореме 8.1.9, (iii) из [1] сумма всех нильпотентных идеалов группового кольца $F[G/\text{Ker } \Theta_p]$ равна нулю. Это эквивалентно тому, что

$$\mathcal{B}(F[G/\text{Ker } \Theta_p]) = 0,$$

т.е.

$$\mathcal{B}(F[G/\Theta_p]) = \mathcal{B}(F[G]/I(G, \Theta_p, F)) = 0,$$

что влечет $\mathcal{B}(F[G]) \subseteq I(G, \Theta_p, F)$.

(i) $\iff$ (ii). Пусть для некоторой конгруэнции ρ на группе G имеет место $\mathcal{B}(F[G]) = I(G, \rho, F)$. Тогда $\mathcal{B}(F[G/\rho]) = 0$, и по теореме 8.1.9, (iii) из [1] $\Delta_p(G/\rho) = \langle 1 \rangle$, или, что то же самое, $\delta_p|(G/\rho) = 0$, т.е. конгруэнция ρ является

δ_p -радикалом. По условию Θ_p является наименьшим δ_p -радикалом, поэтому, учитывая доказанное выше включение, получаем

$$\mathcal{B}(F[G]) \subseteq I(G, \Theta_p, F) \subseteq I(G, \rho, F) = \mathcal{B}(F[G]).$$

Отсюда следует справедливость (i) $\implies$ (ii). Обратное утверждение очевидно.

(ii) $\implies$ (iii). Из условия (ii) следует, что $I(G, \delta_p, F) \subseteq \mathcal{B}(F[G])$. Это условие можно записать, пользуясь обозначением фундаментального идеала:

$$\omega(F[\Delta_p])F[G] \subseteq \mathcal{B}(F[G]).$$

Поэтому $\omega(F[\Delta_p]) \subseteq \mathcal{B}(F[G])$. В силу локальной конечности подгруппы $\Delta_p(G)$ любая ее конечно порожденная подгруппа будет конечной и вкладывается в нормальную конечную подгруппу W группы G , содержащуюся в $\Delta_p(G)$, и $\omega(F[W]) \subseteq \mathcal{B}(F[G])$. Следовательно, имеет место $\omega(F[W]) \subseteq \mathcal{B}(F[W]) \cap F[W]$. По теореме 8.4.13 из [1] первичный радикал групповой алгебры конечной группы будет нильпотентным идеалом. Теперь, применяя теорему 3.1.5 из [1], заключаем, что конечная подгруппа W является p -подгруппой. Это верно для любого порождающего подмножества из $\Delta_p(G)$, следовательно, $\Delta_p(G)$ является p -подгруппой. По условию $I(G, \delta_i, F) \subseteq \mathcal{B}(F[G])$ для любого i . В доказательстве теоремы 3.9 было получено равенство

$$I(G/\delta_i, \delta_{i+1}/\delta_i, F) = I(G, \delta_{i+1}, F)/I(G, \delta_i, F).$$

Оба идеала из правой части равенства являются $\mathcal{B}$ -радикальными, поэтому и идеал из левой части содержится в первичном радикале $\mathcal{B}(F[G])$. Из равенства $\delta_{i+1}/\delta_i = \delta_p|(G/\delta_i)$ следует, что $I(G/\delta_i, \delta_{i+1}/\delta_i, F) = I(G/\delta_i, \delta_p, F)$ и $\text{Ker}(\delta_{i+1}/\text{Ker } \delta_i) = \Delta_p(G/\delta_i)$. Из первого равенства следует включение

$$I(G/\delta_i, \delta_p, F) \subseteq \mathcal{B}(F[G/\delta_i]).$$

Как и выше, из этого включения следует, что $\Delta_p(G/\delta_i)$ является нормальной p -подгруппой группы G/δ_i . Теперь во втором равенстве для порядкового числа i предположим, что $\text{Ker } \delta_i$ является нормальной p -подгруппой группы G . Тогда $\text{Ker } \delta_{i+1}$ также является нормальной p -подгруппой группы G как расширение p -подгруппы при помощи p -подгруппы. Таким образом, все члены цепочки (3) и все подгруппы $\Delta_p(G/\delta_i)$ являются p -подгруппами группы G . Теперь учтем, что если $\Delta_p(G)$ является p -подгруппой, то $\Delta_p(G) = O_p(\Delta(G))$. Отсюда легко следует, что нижние радикалы Θ_p и Φ_p совпадают на группе G .

(iii) $\implies$ (ii). Пусть на группе G выполняется равенство $\Theta_p = \Phi_p$; тогда $I(G, \Phi_p, F) = I(G, \Theta_p, F)$. Включение $\mathcal{B}(F[G]) \subseteq I(G, \Theta_p, F)$ было доказано выше, а $I(G, \Phi_p, F) \subseteq \mathcal{B}(F[G])$ выполняется согласно теореме 8.4.16 из [1]. Следовательно,

$$\mathcal{B}(F[G]) = I(G, \Theta_p, F).$$

Теорема 4.5 доказана.

Появление нижнего радикала ρ полугруппы в идеале $I(S, \rho, F)$ при описании первичного радикала полугрупповой алгебры не является случайным. Действительно, из теоремы 3.9 следует, что если некоторый радикал полугрупповой

алгебры совпадает с идеалом $I(S, \rho, F)$, то конгруэнция ρ является (нижним) радикалом полугруппы S , т.е. справедлива следующая

ЛЕММА 4.6. Пусть для полугрупповой алгебры $F[S]$, радикала в смысле Амицура–Куроша π и конгруэнции ρ имеет место $\pi(F[S]) = I(S, \rho, F)$. Тогда ρ является радикалом полугруппы S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Полугруппа S называется *нильпотентной степени n* в смысле Мальцева, если для любых $x, y, w_1, w_2, \dots, w_n \in S$ имеет место

$$X_n = Y_n,$$

где

$$X_0 = x, \quad Y_0 = y, \quad X_{i+1} = X_i w_i Y_i, \quad Y_{i+1} = Y_i w_i X_i, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Заметим, что радикалы β и C не должны совпадать на любой nilпотентной полугруппе. Например, каждая инверсная (nilпотентная) полугруппа β -полупроста. Nilпотентная вполне 0-простая инверсная полугруппа не является полурешеткой групп и поэтому не является полупростой относительно компрессивного радикала (см. [20]).

ТЕОРЕМА 4.8. Пусть S – nilпотентная в смысле Мальцева полугруппа такая, что на ней компрессивный радикал C совпадает с радикалом β ; F – поле. Тогда:

- (а) если $\text{char}(F) = 0$, то $\mathcal{B}(F[S]) = I(S, C, F) = I(S, \beta, F)$;
- (б) если $\text{char}(F) = p > 0$, то $\mathcal{B}(F[S]) = I(S, \Lambda_p(\beta), F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Предположим сначала, что S – сепаративная полугруппа. Тогда $S \cong \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$, где S_α – сократимые nilпотентные полугруппы. По теореме 7.3 из [3] каждая полугруппа S_α вкладывается в nilпотентную группу G_α . Согласно п. (ii) теоремы 4.2 групповые алгебры $F[G_\alpha]$, $\alpha \in Y$, полупросты. Следовательно, по п. (i) той же теоремы все полугрупповые алгебры $F[S_\alpha]$, $\alpha \in Y$, также являются полупростыми. Теперь полупростота (а значит, и полупервичность) FS следует согласно работе [22] из полупростоты полугрупповых алгебр $F[S_\alpha]$, $\alpha \in Y$.

Пусть теперь S не обязательно сепаративная полугруппа; тогда сепаративной будет полугруппа S/C . Известно, что

$$F[S/C] \cong F[S]/I(S, C, F).$$

По условию и теореме 3.6

$$I(S, C, F) = I(S, \beta, F) \subseteq \mathcal{B}(F[S]).$$

Поэтому

$$\mathcal{B}(F[S/C]) \cong \mathcal{B}(F[S]/I(S, C, F)) = 0, \quad \mathcal{B}(F[S]) \subseteq I(S, C, F).$$

Таким образом, учитывая равенство полугрупповых радикалов, получаем требуемое включение

$$\mathcal{B}(F[S]) = I(S, C, F) = I(S, \beta, F).$$

(6) Поскольку $\beta \subseteq \Lambda_p(\beta)$, то можно считать полугруппу S сепаративной. Включение $I(S, \Lambda_p, F) \subseteq \mathcal{B}(F[S])$ следует из следствия 3.10. Любая сепаративная полугруппа S может быть представлена как полурешетка Y сократимых полугрупп S_α , $\alpha \in Y$, т.е. $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$. Поскольку любая нильпотентная сократимая полугруппа S_α вкладывается в соответствующую группу частных G_α , то

$$S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha \subseteq G = \bigcup_{\alpha \in Y} G_\alpha.$$

В силу того, что $F[S/\Lambda_p] \cong F[S]/I(S, \Lambda_p, F)$, можно предположить, что $\Lambda_p = 0$. Тогда по теореме 4.2

$$\mathcal{J}(F[S_\alpha]) = \mathcal{B}(F[S_\alpha]) = 0 \quad \forall \alpha \in Y.$$

Отсюда согласно [22] получаем $\mathcal{J}(F[S]) = 0$. Следовательно, $\mathcal{B}(F[S]) = 0$. Поэтому для произвольной сепаративной полугруппы S справедливо

$$\mathcal{B}(F[S/\Lambda_p]) \cong \mathcal{B}(F[S]/I(S, \Lambda_p, F)) = 0.$$

Отсюда заключаем, что

$$\mathcal{B}(F[S]) \subseteq I(S, \Lambda_p, F).$$

Если полугруппа S не обязательно является сепаративной, то получаем

$$\mathcal{B}(F[S]) = I(S, \Lambda_p(\beta), F).$$

Теорема 4.8 доказана.

Таблица 1

Полугруппа S	Полугрупповой радикал	
	$\text{char}(F) = 0$	$\text{char}(F) = p$
Группа [1]	—	Нижний радикал Φ_p
Группа	—	Нижний радикал $\Theta_p = \Phi_p$
Группа с центром	—	Нижний радикал Λ_p
Нильпотентная группа [20]	—	$\Lambda_p = C_p$ — p -компрессивный радикал
Коммутативная полугруппа [3]	$\beta = C$ — компрессивный радикал	C'_p — p -компрессивный радикал
2-нильпотентная полугруппа [20]	C — компрессивный радикал	$C_p(C)$
Ортогруппа [18]	β — нижний радикал Бэра	—

СЛЕДСТВИЕ 4.9. Пусть S является полурешеткой нильпотентных групп, индекс нильпотентности которых ограничен в совокупности, F – поле простой характеристики p . Тогда

$$\mathcal{B}(F[S]) = I(S, \Lambda_p, F).$$

Роль нижних радикалов полугрупп в построении первичного радикала полугрупповой алгебры $F[S]$ можно проиллюстрировать с помощью табл. 1, не претендующей на полноту.

§ 5. Примеры

Несмотря на то что наименьшая сепаративная конгруэнция C играет определяющую роль при построении радикалов Джекобсона и Бэра полугрупповых колец и алгебр над полем нулевой характеристики коммутативных полугрупп и 2-нильпотентных полугрупп, а именно

$$\mathcal{J}(F[S]) = \mathcal{B}(F[S]) = I(S, C, F),$$

в общем случае для произвольной полугруппы это равенство неверно. Роль наименьшей сепаративной конгруэнции при построении радикалов полугрупповых алгебр достаточно непредсказуема. На это указывают следующие примеры.

1. Инверсные полугруппы являются полупростыми относительно радикала Бэра. Действительно, пусть S – инверсная полугруппа и для элементов $a, b \in S$ выполняются равенства для любых $s \in S$ $asa = asb$, $bsb = bsa$; тогда при $s = a^{-1}$ имеем

$$a = aa^{-1}a = aa^{-1}b \implies a^{-1}a = a^{-1}aa^{-1}a = a^{-1}aa^{-1}b = a^{-1}b.$$

Откуда следует $b \geq a$. Аналогично, из соображений симметрии $bsb = bsa$ влечет $a \geq b$, т.е. $a = b$. Итак, любая инверсная полугруппа является слабо сепаративной, т.е. полупростой в смысле радикала Бэра. Однако инверсная полугруппа будет полупростой относительно компрессивного радикала, если она является полуструктурой групп. Возьмем инверсную полугруппу S , не являющуюся полуструктурой групп, например инверсную вполне 0-простую полугруппу, т.е. полугруппу Брандта. Как известно, для поля нулевой характеристики полугрупповая алгебра $F[S]$ полупервична. Тем не менее $I(S, C, F) \neq 0$. Заметим, что это верно даже для нильпотентной полугруппы Брандта.

Из теоремы 1.8 и следствия 3.8 вытекает, что описание радикала Бэра полугрупповой алгебры над полем нулевой характеристики с помощью идеала $I(S, \beta, F)$ сводится к доказательству того, что слабая сепаративность полугруппы S влечет слабую сепаративность мультипликативной полугруппы полугрупповой алгебры $F[S]$.

Обобщенный нильрадикал полугрупповой алгебры $F[S]$ над полем нулевой характеристики в общем случае не равен идеалу $I(S, C, F)$. Более того, наименьшая сепаративная конгруэнция может вообще не участвовать в описании этого радикала.

2. Пусть F – поле нулевой характеристики, G – конечная некоммутативная группа. Тогда групповая алгебра $F[G]$ является полупростым артиновым кольцом и разлагается в прямую сумму полных матричных колец над полем F . Количество прямых слагаемых в этой сумме, изоморфных полю F , равняется индексу коммутанта группы G . Поэтому в силу некоммутативности группы G отсюда следует, что среди прямых слагаемых присутствует полное матричное кольцо, в котором обязательно содержится нильпотентная матрица. Это означает, что обобщенный радикал групповой алгебры не равен нулю. Например если $G = S_3$ – симметрическая группа третьего порядка, то

$$F[G] \cong F \oplus F \oplus F_2,$$

где F_2 – полное кольцо (2×2) -матриц над полем F . Поскольку F_2 является простым кольцом и одновременно идеалом алгебры $F[G]$, то F_2 совпадает с обобщенным нильрадикалом кольца $F \oplus F \oplus F_2$, и вместе с этим группа G является сепаративной полугруппой, т.е. полупростой относительно компрессионного радикала. Другими словами, из сепаративности группы G не следует сепаративность мультипликативной полугруппы групповой алгебры $F[G]$, т.е. $\mathcal{A}(F[G]) \neq I(G, C, F)$.

3. Приведем пример такой полугруппой алгебры $F[S]$, что $\mathcal{B}(F[S]) = I(S, \beta, F)$. Пусть R – произвольное кольцо, $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ – ортогруппа, представленная в виде полурешетки Y прямоугольных групп $S_\alpha = I_\alpha \times G_\alpha \times \Lambda_\alpha$, а $G = \bigcup_{\alpha \in Y} G_\alpha$ – полурешетка групп G_α . Тогда (см. [18; теорема 1])

$$\pi(R[S/(\zeta_l \vee \zeta_r)]) \cong \pi(R[G])$$

для любого наследственного наднильпотентного радикала π . В качестве кольца R возьмем поле F нулевой характеристики. Тогда $\mathcal{B}(F[G_\alpha]) = 0$ для любых $\alpha \in Y$. Следовательно, $\mathcal{B}(F[G]) = 0$. Согласно теореме 1 из [18] получаем

$$\mathcal{B}(F[S]) = I(S, \zeta_l \vee \zeta_r, F).$$

Воспользовавшись теоремой 3.6, получаем

$$I(S, \beta, F) \subseteq \mathcal{B}(F[S]) = I(S, \zeta_l \vee \zeta_r, F).$$

Отсюда следует $I(S, \beta, F) = I(S, \zeta_l \vee \zeta_r, F)$, что эквивалентно $\beta = \zeta_l \vee \zeta_r$. Окончательно получаем

$$\mathcal{B}(F[S]) = I(S, \beta, F).$$

4. Приведем пример, показывающий, что не следует переоценивать роль полугруппового радикала Λ_p при описании первичного радикала даже групповых алгебр конечных групп над полем простой характеристики p . Пусть $G = S_3 = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$, $\text{char}(F) = p$, где p равно 2 или 3. Эта группа не обладает центром, поэтому является слабо p -сепаративной, т.е. полупростой относительно радикала Λ_p . Отсюда следует, что $I(S, \Lambda_p, F) = 0$. Тем не менее первичный радикал групповой алгебры $F[G]$ отличен от нуля, так как содержит нильпотентный идеал $F(g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6)$, порожденный строго нильпотентным элементом.

В заключение автор приносит благодарность И.Б. Кожухову за полезные обсуждения результатов и интерес к работе.

Список литературы

- [1] D. S. Passman, *The algebraic structure of group rings*, Pure Appl. Math., Wiley, New York, 1977.
- [2] A. V. Kelarev, “Radicals of semigroup rings of commutative semigroups”, *Semigroup Forum*, **48**:1, (1994), 1-17.
- [3] J. Okniński, *Semigroup algebras*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **138**, Marcel Dekker, New York, 1991.
- [4] В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин, *Радикалы алгебр и структурная теория*, Наука, М., 1979.
- [5] А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, т. т. 1, 2, Мир, М., 1972; пер. с англ.: A. H. Clifford, G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, v. vols. 1, 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1961, 1967.
- [6] О. В. Мельников, В. Н. Ремесленников, В. А. Романьков, Л. А. Скорняков, И. П. Шестаков, *Общая алгебра*, т. т. 1, Наука, М., 1990.
- [7] E. N. Roiz, B. M. Schein, “Radicals of semigroups”, *Semigroup Forum*, **16**:1, (1978), 299–344.
- [8] А. В. Тищенко, “Слабо специальные и специальные радикалы в полугруппах”, *Матем. сб.*, **94(136)**:4(8), (1974), 551–566; англ. пер.: A. V. Tiščenko, “Weakly special and special radicals in semigroups”, *Math. USSR-Sb.*, **23**:4, (1974), 521–534.
- [9] H.-J. Hoehnke, “Über das untere und obere Radikal einer Halbgruppe”, *Math. Z.*, **89**:4, (1965), 300–311.
- [10] Е. Н. Ройз, “О радикалах Джекобсона и Бэра колец и их мультипликативных полугрупп”, *Изв. вузов. Матем.*, **10**, 71–79; англ. пер.: E. N. Roiz, “The Jacobson and Baer radicals of rings, and their multiplicative semigroups”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **19**:10, 62–69.
- [11] A. G. Sokolsky, “On radicals of semigroup algebras”, *Semigroup Forum*, **59**:1, (1999), 93–105.
- [12] Е. Н. Ройз, “О компрессивном радикале полугрупп”, *Матем. сб.*, **92(134)**:4(12), (1973), 530–540; англ. пер.: E. N. Roiz, “On the compressive radical of semigroups”, *Math. USSR-Sb.*, **21**:4, (1973), 523–534.
- [13] M. P. Drazin, “A partial order in completely regular semigroups”, *J. Algebra*, **98**:2, (1986), 362–374.
- [14] J. Brinckmann, “On the least separative congruence on a semigroup”, *Semigroup Forum*, **30**:1, (1984), 365–370.
- [15] J. Brinckmann, “Über die kleinste separative Kongruenz auf einer Halbgruppe”, *Czechoslovak Math. J.*, **35**:2, (1985), 300–311.
- [16] Yu. I. Krasilnikova, B. V. Novikov, “On quasi-separative semigroups”, *Semigroup Forum*, **70**:3, (2005), 347–355.
- [17] M. Petrich, *Introduction to semigroups*, Merill, Columbus, OH, 1973.
- [18] A. G. Sokolsky, “Radicals of semigroup rings of orthogroups”, *Semigroup Forum*, **41**:1, (1990), 253–265.
- [19] W. D. Munn, “On commutative semigroup algebras”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **93**:2, (1983), 237–246.

- [20] E. Jespers, J. Okniński, “Nilpotent semigroups and semigroup algebras”, *J. Algebra*, **169**:3, (1994), 984–1011.
- [21] З. З. Дымент, А. Е. Залесский, “О нижнем радикале группового кольца”, *Докл. АН БССР*, **19**:10, (1975), 876–879.
- [22] M. L. Teply, E. G. Turman, A. Quesada, “On semisimple semigroup rings”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **79**:2, (1980), 157–163.

А. Г. Сокольский (A. G. Sokolsky)

Белгородский государственный университет

E-mail: sokolsky@bsu.edu.ru

Поступила в редакцию

06.05.2009 и 09.12.2009