Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. О. Мантуров, Четность в теории узлов, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 5, 65–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7574>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:31:24

УДК 515.162+519.1

В. О. Мантуров

Четность в теории узлов

В работе исследуются теории узлов, обладающие свойством четности перекрестков: каждый перекресток объявляется четным или нечетным согласно некоторому наперед заданному правилу. Если это правило удовлетворяет набору простых аксиом, связанных с движениями Рейдемейстера, это приводит к возможности построения простых инвариантов, решающих проблему минимальности, а также инвариантных отображений на множестве узлов.

Самым главным примером теории узлов с четностью является теория виртуальных узлов. С использованием четности, происходящей из гауссовых диаграмм, мы показываем, что даже резкое упрощение теории виртуальных узлов – теория свободных узлов – допускает простые и глубоко нетривиальные инварианты, что является решением проблемы Тураева, предположившего, что все свободные узлы тривиальны.

В работе доказывается, что свободные узлы, вообще говоря, не обратимы, и приводятся инварианты, распознающие обратимость свободных узлов.

Переход к обычным виртуальным узлам позволяет усиливать известные инварианты (такие, как скобка Кауфмана) посредством соображений, связанных с четностью.

Обсуждаются другие примеры теорий узлов с четностью.

Библиография: 27 названий.

Ключевые слова: узел, зацепление, граф, атом, виртуальный узел, четность, скобка Кауфмана, минимальность.

§ 1. Введение

Как известно со времен К. Гаусса, узел можно кодировать хордовой диаграммой с некоторой дополнительной информацией. Рассматривая диаграмму узла как погружение окружности в плоскость и соединяя на окружности хордами те точки, которые имеют одинаковые образы, мы получаем хордовую диаграмму. *Гауссовой диаграммой* называется хордовая диаграмма, снабженная дополнительной информацией: указанием на хорде знака перекрестка (плюс для и минус для) , а также стрелкой, направленной от прообраза дуги, образующей переход, к прообразу дуги, образующей проход.

Скажем, что две хорды *зацеплены*, если концы одной из них лежат в разных компонентах связности множества, полученного удалением из окружности концов другой. Назовем хорду *четной*, если количество хорд, зацепленных с ней,

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00648) и Аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы”.

четно, и нечетной в противном случае (считается, что хорда не зацеплена сама с собой). Далее для хорд a, b будем писать $\langle a, b \rangle = 0 \in \mathbb{Z}_2$, если a, b не зацеплены, и $\langle a, b \rangle = 1 \in \mathbb{Z}_2$, если они зацеплены.

Как было замечено Гауссом, все хорды гауссовой диаграммы классического узла четные.

Движения Рейдемейстера для диаграмм классических узлов естественным образом переписываются на языке гауссовых диаграмм. При этом не всякая гауссова диаграмма реализует классический узел. В частности, к таким нереализуемым диаграммам относятся диаграммы, имеющие нечетные хорды.

Виртуальный узел (см. [1]) возникает как естественное обобщение классического узла. Это класс эквивалентности произвольных гауссовых диаграмм по формальным движениям Рейдемейстера. Оказывается, наличие нечетных хорд у виртуальных узлов позволяет доказывать важные структурные теоремы.

Впервые нечетные перекрестки (нечетные хорды) были использованы для построения инвариантов виртуальных узлов Л. Кауфманом: в [2] построен нечетный индекс самозацепления виртуальных узлов, обращающийся в нуль на классических узлах.

Классические узлы представляют собой собственное подмножество множества виртуальных узлов (см. [3]). Как оказывается, существует резкое упрощение виртуальных узлов – свободные узлы (точное определение см. далее), которые получаются “забыванием” на гауссовой диаграмме виртуального узла информации о стрелках и знаках. Свободные узлы представляют собой центральный объект исследования настоящей статьи; они тесно связаны с графзацеплениями, изучавшимися в работах [4]–[6].

Отметим, что свободные узлы и зацепления в литературе также называются *гомотопическими классами гауссовых слов и гауссовых предложений*.

Назовем четырехвалентный граф *оснащенным*, если в каждой его вершине указано разбиение четырех полуребер, инцидентных ей, на две пары. Пусть оснащенный четырехвалентный граф K задан своей гауссовой диаграммой $C(K)$. Каждая гауссова диаграмма задает некоторый абстрактный оснащенный четырехвалентный граф, ребра которого находятся в однозначном соответствии с дугами хордовой диаграммы, а вершины – в однозначном соответствии с хордами. Дуги, инцидентные одному и тому же концу хорды, соответствуют (формально) противоположным (полу)ребрам графа. Скажем, что гауссова диаграмма *нечетна*, если все ее хорды нечетны. Скажем, что гауссова диаграмма *несократима*, если для любых двух различных хорд a, b этой диаграммы найдется такая хорда c этой диаграммы, что $\langle a, c \rangle \neq \langle b, c \rangle$. Те же термины (нечетность, несократимость) мы будем применять и к оснащенному четырехвалентному графу, соответствующему гауссовой диаграмме.

Можно легко показать, что к нечетной несократимой диаграмме нельзя применить уменьшающие движения Рейдемейстера (первое и второе), а также третье движение Рейдемейстера, т.е. за “один шаг” эту диаграмму можно только усложнить.

Оказывается, имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Нечетная несократимая диаграмма K минимальна, т.е. для любой диаграммы K' , задающей тот же свободный узел, что и K , диаграмма K' имеет большее количество перекрестков, чем K .*

Эта теорема приводит к опровержению гипотезы Тураева (см. [7]), в которой предполагалось, что все свободные узлы эквивалентны тривиальному. Первое доказательство теоремы 1 и развитие теории четности появились в серии препринтов автора [8]–[10].

Параллельно и независимо (несколько позднее) примеры нетривиальных свободных узлов были получены Э. Гибсоном в работе [11].

Более того, благодаря этой теореме можно построить бесконечное число нечетных несократимых свободных узлов, минимальные диаграммы которых различны, тем самым доказав, что число классов эквивалентности свободных узлов бесконечно.

Далее мы докажем теорему 1 в гораздо более сильной формулировке.

Отметим, что свойства четности были далее использованы для изучения кобордизмов свободных зацеплений. При этом соображения четности позволили доказать существование некобордантных нулю свободных узлов как с комбинаторной точки зрения (см. [12]), так и с топологической (см. [13]). В работе [13] использовалось перенесение понятия четности с перекрестков на узлах на линии пересечений двумерных поверхностей. Обзор по теории четностей см. в [14].

Структура настоящей статьи такова. В § 2 мы определим свободные узлы и выявим естественный набор свойств четных и нечетных хорд и их поведение при движениях Рейдемейстера. Этот набор условий можно переформулировать как *аксиоматику четности*, т.е. как набор требований, которым должна удовлетворять некоторая абстрактная четность в теории узлов. Мы также приведем другие примеры четностей, удовлетворяющих этим аксиомам (отличные от четности, происходящей из гауссовых диаграмм).

В § 3 мы построим функториальное отображение f : для каждой теории узлов, обладающей четностью, мы построим корректно определенное отображение на множестве классов эквивалентности узлов, определяемое посредством “забывания” нечетных перекрестков.

В § 4 мы построим инварианты $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$, которые позволят, в частности, доказать теорему 1 (в более сильной формулировке). Это позволяет доказать необратимость свободных зацеплений.

В § 5 будут описаны скобка Голдмана (см. [15]) и коскобка Тураева (см. [16]), впервые возникшие в связи с изучением классов гомотопии наборов кривых на поверхностях и естественным образом переносящиеся на упрощение гомотопических классов кривых – свободные узлы и зацепления. С использованием результатов § 4 о необратимости свободных зацеплений и коскобки Тураева мы докажем необратимость свободных узлов.

В § 6 мы используем четность и свободные узлы для усиления скобки Кауфмана виртуальных узлов.

Я благодарен В. А. Васильеву, А. Т. Фоменко, Д. П. Ильютко, В. Г. Тураеву, Л. Х. Кауфману, Н. И. Гозе, М. Крисману, И. М. Никонову и Д. М. Афанасьеву за интерес к работе и полезные консультации.

§ 2. Свободные узлы и четная аксиоматика. Атомы

На протяжении всей статьи 4-графом мы будем называть следующее обобщение четырехвалентного графа: одномерный комплекс Γ , каждая связная компонента которого гомеоморфна либо окружности, либо четырехвалентному графу; при этом *вершиной* мы будем называть только вершины тех компонент, которые гомеоморфны четырехвалентным графам, а *ребрами* – как ребра четырехвалентного графа, так и компоненты-окружности (последние будем также называть *циклическими ребрами*).

Назовем 4-граф *оснащенным*, если в каждой его вершине указано разбиение четырех полуребер, инцидентных ей, на две пары. Полуребра из одной пары будут называться *противоположными*. Мы также будем употреблять термин *противоположные* по отношению к ребрам, которые содержат противоположные полуребра.

Далее под *изоморфизмом* оснащенных графов мы всегда будем понимать изоморфизм, сохраняющий оснащение.

Обозначим через G_0 оснащенный 4-граф, представляющий собой одну окружность.

Уникурсальной компонентой оснащенного 4-графа мы будем называть либо его связную компоненту, гомеоморфную окружности, либо класс эквивалентности ребер его компоненты, не гомеоморфной окружности, где эквивалентность порождена отношением противоположности.

Пусть дана хордовая диаграмма¹ C . Тогда соответствующий оснащенный 4-граф $G(C)$ с единственной уникурсальной компонентой строится следующим образом. Хордовой диаграмме с пустым множеством хорд соответствует оснащенный 4-граф G_0 . В противном случае ребра графа находятся в однозначном соответствии с дугами хордовой диаграммы, а вершины – в однозначном соответствии с хордами. Дуги, инцидентные одному и тому же концу хорды, соответствуют (формально) противоположным (полу)ребрам.

Обратная процедура (построение хордовой диаграммы по оснащенному графу с одной уникурсальной компонентой) очевидна. В данной ситуации каждый связный оснащенный 4-граф можно представить как фактормножество, получаемое из окружности склейкой некоторых пар точек. Соединяя точки, склеиваемые в одну, хордой, мы получаем искомую хордовую диаграмму.

Далее, для оснащенного 4-графа G с одной уникурсальной компонентой мы определим спаривание вершин v_1, v_2 (над $\mathbb{Z}_2$): $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle a(v_1), a(v_2) \rangle$, где $a(v_i)$ – хорды, соответствующие вершинам v_i .

2.1. Свободные зацепления. Простейшим примером оснащенного 4-графа является проекция узла. Она представляет собой плоский оснащенный 4-граф (оснащение берется из плоскости). Более общо: можно рассматривать виртуальную диаграмму, у которой классические перекрестки задают вершины оснащенного 4-графа, а виртуальные перекрестки рассматриваются лишь как дефекты изображения – пересечения образов ребер графа.

¹В литературе рассматривают ориентированные и неориентированные сингулярные узлы и соответствующие им ориентированные и неориентированные хордовые диаграммы. В настоящей работе мы ограничиваемся неориентированным случаем. Многие теоремы и конструкции переносятся непосредственно и на ориентированный случай.

Все классические и виртуальные узлы задаются своими гауссовыми диаграммами (см., например, [3]). Во-первых, в классических перекрестках мы не указываем структуру проход–переход, кроме того мы не обращаем внимания на знак перекрестка (или, что эквивалентно, мы “забываем” про структуру проход–переход и циклический порядок полуребер, а помним лишь об отношении противоположности полуребер).

Таким образом, оснащенный 4-граф – очень резкое упрощение понятия диаграммы узла (зацепления).

Нашей целью является рассмотрение классов эквивалентности оснащенных 4-графов по движениям, соответствующим движениям Рейдемейстера.

Каждое из этих движений состоит в преобразовании одного фрагмента оснащенного 4-графа.

При изображении исследуемых объектов мы будем указывать только правило преобразования такого фрагмента, не изображая оставшуюся часть диаграммы. В случае одной уникарсальной компоненты это соответствует преобразованию на гауссовых диаграммах, которое перестраивает гауссову диаграмму на некотором наборе дуг. При изображении преобразования гауссовой диаграммы мы не изображаем хорды, не принимающие участия в преобразовании, а оставшиеся дуги изображаем пунктиром.

При изображении оснащенных графов на плоскости мы всегда предполагаем, что структура противоположных полуребер в вершинах наследуется из плоскости.

Первое движение Рейдемейстера состоит в добавлении/удалении петли (см. рис. 1).

Рис. 1. Первое движение Рейдемейстера и его версия на языке хордовых диаграмм

Второе движение Рейдемейстера состоит в удалении/добавлении двуугольника, образованного парой ребер, которые являются соседними (не противоположными) в каждой из двух вершин (рис. 2).

Третье движение Рейдемейстера изображено на рис. 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Свободным зацеплением* назовем класс эквивалентности оснащенных 4-графов по движениям Рейдемейстера.

Очевидно, что количество компонент оснащенного 4-графа не меняется при применении движений Рейдемейстера, поэтому имеет смысл говорить о *числе компонент* оснащенного зацепления.

Свободным узлом мы называем свободное зацепление с одной уникарсальной компонентой.

Свободные узлы можно трактовать как классы эквивалентности гауссовых диаграмм по соответствующим преобразованиям.

Рис. 2. Второе движение Рейдемейстера и его версия на языке хордовых диаграмм

Рис. 3. Третье движение Рейдемейстера и его версия на языке хордовых диаграмм

Естествен вопрос: что представляют собой свободные узлы? Если рассмотреть планарный оснащенный 4-граф (происходящий из классического узла), то этот планарный граф естественным образом сводится к тривиальному оснащеному графу. Можно легко показать, что оснащенный граф с одной

универсальной компонентой, вложимый в тор (с сохранением отношения противоположности), также сводим к тривиальному графу G_0 (без вершин).

Свободные узлы тесно связаны с плоскими виртуальными узлами, т.е. с классами эквивалентности виртуальных узлов по преобразованиям, меняющим проход на переход. Последние представляют собой классы эквивалентности (самопересекающихся) кривых в ориентируемых двумерных поверхностях с точностью до гомотопии и стабилизации.

Эквивалентность свободных узлов еще более грубая, чем эквивалентность плоских виртуальных узлов: свободные узлы не предполагают наличия какой-либо поверхности. Каждый раз для применения движения Рейдемейстера мы можем вложить соответствующий 4-граф в некоторую поверхность (с сохранением оснащения), применить это движение и снова “забыть” про поверхность.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим плоский узел Кишино, изображенный на рис. 4.

Рис. 4. Плоский узел Кишино

Известно, что плоский узел Кишино не тривиален как плоский виртуальный узел: соответствующий ему представитель лежит на сфере с двумя ручками и не уменьшается посредством одного движения Рейдемейстера (он делит ее на один четырехугольник и один восьмиугольник).

Тем не менее у соответствующего оснащенного графа, рассмотренного вне поверхности, есть двуугольник, образованный соседними ребрами; тем самым, свободный узел, задаваемый плоским узлом Кишино, тривиален.

Точное утверждение, связывающее виртуальные узлы и свободные узлы, таково.

ЛЕММА 1. *Свободный узел – это класс эквивалентности виртуальных узлов по следующим преобразованиям: замена прохода на переход и виртуализациям.*

Виртуализация представляет собой преобразование, которое меняет направление стрелок (рис. 5).

Можно считать, что виртуализация – это замена способа изображения оснащенного графа на плоскости, при которой циклический порядок полуребер меняется, а соотношение противоположности остается.

Рис. 5. Виртуализация

Заметим, что в случае свободных зацеплений вопрос о нетривиальности (несводимости к оснащённому 4-графу без вершин) решается очень просто.

Действительно, рассмотрим оснащённый 4-граф G_2 с одной вершиной x и двумя ребрами a , b , каждое из которых соединяет вершину x с собой, при этом в вершине x ребро a противоположно ребру a , а ребро b противоположно ребру b .

Это свободное зацепление не эквивалентно тривиальному свободному зацеплению в силу нетривиальности следующего простого инварианта двухкомпонентных свободных зацеплений:

четность количества вершин, в которых сходятся обе компоненты зацепления, инвариантна при движениях Рейдемейстера; так как для зацепления G_2 количество таких вершин нечетно, свободное зацепление G_2 нетривиально.

2.2. Атомы. Виртуальные узлы. Атомы были первоначально введены А. Т. Фоменко (см. [17]) для классификации гамильтоновых систем малой сложности (см. также [18]–[21]). Как оказалось в дальнейшем, атомы играют важную роль в теории узлов и маломерной топологии (см. работы [22]–[24] и ссылки в них).

Атомом называется пара (M, Γ) , состоящая из двумерного замкнутого многообразия M и оснащённого четырехвалентного графа $\Gamma \subset M$ такого, что $M \setminus \Gamma$ представляет собой несвязное объединение двумерных клеток, покрашенных в два цвета (черный и белый) таким образом, что клетки, инцидентные одному ребру графа Γ , имеют разные цвета.

Граф Γ называется *остовом* атома M .

Атомы рассматриваются с точностью до естественной эквивалентности – гомеоморфизмов двумерных многообразий, переводящих остов в остов и согласованных с раскраской клеток.

Атом (M, Γ) называют *связным (ориентируемым)*, если M связно (ориентируемо) как многообразие. *Родом* атома (M, Γ) называют род поверхности M . *Вершиной (ребром)* атома называют вершину (ребро) его остова.

Остов каждого атома представляет собой оснащённый четырехвалентный граф: оснащение (соотношение противоположности полуребер) наследуется из вложения графа в двумерную поверхность.

Иначе можно сказать, что атом – это вложение оснащенного четырехвалентного графа (без циклических компонент) в поверхность такое, что связные компоненты дополнения к графу в поверхность являются клетками, допускающими шахматную раскраску.

Вопросам планарности свободных оснащенных 4-графов (т.е. является ли данный оснащенный 4-граф остовом атома рода 0) посвящена работа [23], а вопросу о том, какой род может принимать атом в зависимости от его остова, посвящена работа [24].

Виртуальная диаграмма – это погружение общего положения оснащенного 4-графа в $\mathbb{R}^2$, у которого образ каждой вершины снабжен структурой классического перекрестка, т.е. указано, какая ветвь (пара противоположных ребер) проходит выше, а какая – ниже; при изображении на плоскости точки пересечения образов различных ребер оснащенного 4-графа называются *виртуальными перекрестками* и обводятся кружочками. *Виртуальное зацепление* – это класс эквивалентности виртуальных диаграмм по обычным преобразованиям Рейдемейстера и *движению обвода*. Последнее состоит в удалении дуги, содержащей только виртуальные перекрестки, и добавлении произвольным образом погруженной дуги, соединяющей те же точки; у новой дуги на местах пересечения и самопересечения ставятся виртуальные перекрестки.

То есть фактически для задания виртуального узла нам нужно лишь знать, как расположены классические перекрестки и как они между собой соединяются, при этом не важно, как проходят пути между классическими перекрестками, пересекаются ли они и имеют ли точки самопересечения.

В отличие от свободных узлов виртуальные узлы имеют *циклический порядок* ребер в вершине: мы не только можем сказать, какие полуребра являются локально противоположными, но и указать, в каком порядке они появляются при обходе вокруг вершины против часовой стрелки.

Кроме того у виртуальных узлов имеется естественная структура проходов и переходов в вершинах.

Эти структуры накладывают естественные ограничения на движения Рейдемейстера: последние выглядят так же, как и в случае классических узлов.

Естественное отображение “забывания” структуры перекрестков переводит множество виртуальных узлов (зацеплений) на множество свободных узлов (зацеплений). Тем самым, все инварианты свободных узлов задают некоторые инварианты свободных узлов.

Пусть дана виртуальная диаграмма L ; построим по ней² атом $A(L)$. Вершины атома $A(L)$ соответствуют классическим перекресткам диаграммы L . Классические перекрестки диаграммы L соединены друг с другом ветвями диаграммы L , которые могут пересекать друг друга только в виртуальных

²Данная конструкция не проходит в случае, если виртуальная диаграмма имеет компоненту, не содержащую классических перекрестков. В этом случае можно обобщить понятие атома, разрешив его остову быть оснащенный 4-графом, не обязательно оснащенный четырехвалентным графом; тогда компонентам виртуальных зацеплений будут соответствовать компоненты атома, гомеоморфные сфере, разбитой диаметром на две клетки – черную и белую. Иначе можно ограничиться виртуальными диаграммами, каждая компонента которых имеет хотя бы один классический перекресток; такие диаграммы имеются у всех виртуальных зацеплений, и переход к таким диаграммам не меняет отношения эквивалентности на виртуальных диаграммах.

перекрестках. В каждом классическом перекрестке мы имеем четыре исходящих ребра x_1, x_2, x_3, x_4 , занумерованных по часовой стрелке таким образом, что пара (x_1, x_3) образует проход, а пара (x_2, x_4) – переход. Эти ребра соответствуют ребрам атома $A(L)$, которые соединяют соответствующие вершины. При этом 1-циклы остова, к которым приклеиваются черные и белые клетки, устроены следующим образом. Граница 2-клетки – это поворачивающая окружность на остова: окружность, которая проходит каждое ребро не более одного раза и в каждой вершине поворачивает с ребра на соседнее (не противоположное). Черные клетки приклеиваются к углам, образованным парами (x_1, x_2) и (x_3, x_4) , а белые – парами (x_2, x_3) и (x_1, x_4) .

Отметим, что обратная процедура построения виртуальной диаграммы по атому не является однозначной: диаграмма виртуального зацепления определяется с точностью до движений объезда и виртуализаций (см., например, [22]). Последнее связано с тем обстоятельством, что оснащенность остова атома еще не задает циклическую структуру исходящих полуребер; так, зная, что полуребра x_1, x_3 противоположные, мы имеем два возможных циклических порядка для вложения окрестности этой вершины в плоскость: x_1, x_2, x_3, x_4 и x_1, x_4, x_3, x_2 . Соответствующие им диаграммы виртуальных узлов отличаются друг от друга (движениями объезда и) виртуализациями.

2.3. Четная аксиоматика (аксиоматика четности). Далее под *теорией узлов* (в широком смысле) мы будем понимать класс $\mathcal{K}$ диаграмм K , эквивалентность на которых задается движениями, т.е. локальными преобразованиями из некоторого списка. В каждом конкретном случае мы будем оговаривать, какой список движений имеется в виду; как правило, такие преобразования будут отвечать изотопиям узлов в некотором трехмерном многообразии или гомотопиям кривых на некоторой двумерной поверхности.

Каждая из диаграмм представляет собой некоторый выделенный класс графов (быть может, с дополнительной структурой в вершинах), у которых некоторые четырехвалентные вершины оснащены. Эквивалентность задается движениями Рейдемейстера, описанными выше, применительно к оснащенным четырехвалентным вершинам. В некоторых случаях, например в теории виртуальных узлов, на движения накладываются дополнительные ограничения (например, связанные со структурой проход–переход в вершинах).

Примерами таких теорий являются теория классических и виртуальных узлов, а также теории кос и танглов (классических или виртуальных).

Пусть дано правило, сопоставляющее каждой вершине каждой диаграммы K из класса $\mathcal{K}$ число 0 (в этом случае вершину назовем *четной*) или 1 (в этом случае вершину назовем *нечетной*).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (аксиомы четности). Пусть K_1 и K_2 – диаграммы узлов из $\mathcal{K}$, получаемые друг из друга одним движением Рейдемейстера, причем K_2 имеет не больше перекрестков, чем K_1 . Скажем, что это правило удовлетворяет *четной аксиоматике*, если выполнены следующие условия.

1. Если K_2 получается из K_1 первым движением Рейдемейстера, то участвующий в движении Рейдемейстера перекресток диаграммы K_1 является четным.

Рис. 6. Соответствие перекрестков при третьем движении Рейдемейстера

2. Если K_2 получается из K_1 вторым движением Рейдемейстера, то оба перекрестка, участвующие в движении Рейдемейстера, имеют одинаковые четности.
3. Если K_2 получается из K_1 третьим движением Рейдемейстера, то имеется естественное соответствие между тройкой перекрестков на диаграмме K_1 и тройкой перекрестков на диаграмме K_2 , участвующих в движениях Рейдемейстера: (a, a') , (b, b') , (c, c') (рис. 6). Требуется, чтобы выполнялись следующие условия:
 - а) четности соответствующих перекрестков совпадают;
 - б) для трех перекрестков a, b, c количество нечетных перекрестков четное (т.е. нуль или два).
4. При каждом движении Рейдемейстера $K_1 \rightarrow K_2$ имеется взаимно однозначное соответствие между не принимающими участия в движении Рейдемейстера перекрестками диаграммы K_1 и перекрестками диаграммы K_2 . Требуется, чтобы соответствующие перекрестки имели одинаковую четность.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае виртуальных узлов словом “перекресток” мы будем называть лишь классические перекрестки, если не оговорено противное. Мы будем игнорировать движение объезда как не меняющее взаимного расположения (классических) перекрестков.

Таким образом, можно считать, что виртуальный узел – это класс эквивалентности диаграмм, на которых указаны классические перекрестки и правила их соединения, по классическим движениям Рейдемейстера.

В дальнейшем четность перекрестка X мы будем обозначать через $p(X)$ и писать $p(X) = 0$, если перекресток X четен, или $p(X) = 1$, если перекресток X нечетен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (ослабленная четная аксиоматика). Скажем, что некоторая теория узлов $\mathcal{K}$ удовлетворяет *ослабленной четной аксиоматике*, если в этой теории узлов при движениях Рейдемейстера выполняются аксиомы 2, 3, а), 4, а вместо аксиомы 3, б) выполняется ее ослабленная версия:

- б') для трех перекрестков a, b, c , участвующих в движении Рейдемейстера, количество нечетных перекрестков не равно единице.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как сообщил автору Э. Гибсон, ослабленная четная аксиоматика была введена в диссертации последнего, до сих пор не опубликованной. Гибсон также сообщил автору, что ему были известны некоторые соображения, связанные с отображением f , “убивающим нечетные перекрестки”.

2.4. Примеры теорий узлов с четностью.

2.4.1. *Теория виртуальных узлов.* Рассматриваются виртуальные узлы, т.е. виртуальные зацепления с одной компонентой.

Каждой виртуальной диаграмме K сопоставляется гауссова диаграмма по следующему правилу: хорды диаграммы $C(K)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классическими перекрестками диаграммы K . Далее, диаграмму K можно представить в виде образа погружения окружности в плоскость, при этом те точки на окружности, которые в качестве образа имеют один и тот же классический перекресток, соединяются хордой.

Фактически эта хордовая диаграмма соответствует свободному узлу, до которого упрощается данный виртуальный узел (“забыванием” структуры прохода–переход в классических перекрестках).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. У гауссовой диаграммы классического (или виртуального) узла хорды имеют направление (стрелку, направленную от прообраза перехода к прообразу прохода) и знак (локальное число закрученности).

Четность перекрестков виртуальных диаграмм определяется так же, как и для свободных узлов: исходя из гауссовой диаграммы хорда (перекресток) называется *четной*, если она зацеплена с четным количеством хорд, и *нечетной* в противном случае.

Иной способ определения той же самой четности состоит в следующем. Рассмотрим виртуальную диаграмму K и ее классический перекресток X . Зададим произвольную ориентацию диаграммы K . Диаграмму K в перекрестке X (для определенности будем считать, что он имеет вид) можно *развести* двумя способами: способом, согласованным с ориентацией ($\rightarrow$) , и способом, не согласованным с ориентацией ($\rightarrow$). Легко видеть (рис. 7), что первый способ приводит к зацеплению из двух компонент, а второй случай – к узлу (виртуальному зацеплению из одной компоненты).

На рис. 7 часть диаграммы узла, находящаяся вне окрестности перекрестка, изображена пунктирной линией.

Заметим, что количество компонент, получаемое после разведения диаграммы K в перекрестке X тем или иным способом, не зависит от ориентации диаграммы K .

Рассмотрим диаграмму, полученную из диаграммы K разведением, согласованным с ориентацией (т.е. дающим двухкомпонентное зацепление). Обозначим полученное зацепление через $L_1 \cup L_2$. Рассмотрим те классические перекрестки диаграммы K , в которых компонента L_1 пересекается с компонентой L_2 .

Если число таких перекрестков четно, то объявим перекресток X *четным*; в противном случае объявим перекресток X *нечетным*.

Очевидно, что такое определение четности совпадает с определением четности посредством гауссовой диаграммы, приведенным выше.

Рис. 7. Соответствие перекрестков при третьем движении Рейдемейстера

Действительно, разведение в перекрестке X , согласованное с ориентацией, можно трактовать как перестройку гауссовой диаграммы по хорде, которая выглядит так, как показано на рис. 8.

Рис. 8. Перестройка гауссовой диаграммы по хорде

После этого все перекрестки, образуемые в зацеплении $L = L_1 \cup L_2$ обеими компонентами L_1 и L_2 , соответствуют хордам на разведенной гауссовой диаграмме из двух окружностей, которые соединяют одну окружность с другой. На исходной хордовой диаграмме, соответствующей узлу K , такие хорды – это в точности хорды, зацепленные с хордой, соответствующей перекрестку X .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Описанное выше правило четности, примененное к классическим узлам, приводит к тому, что каждый перекресток классического узла является четным; это не дает никакой новой информации, необходимой для построения дальнейших инвариантов и инвариантных отображений.

Отметим также, что свойство хордовой диаграммы “все хорды являются четными” отвечает тем виртуальным диаграммам, которым соответствуют ориентируемые атомы (см. теорему 3).

В частности, как мы увидим далее, свойство атома быть ориентируемым не зависит от структуры проход–переход в классических перекрестках виртуальной диаграммы, а зависит только от остова атома – оснащенного 4-графа.

2.4.2. *Двухкомпонентные классические и виртуальные зацепления.* Здесь теорией узлов мы назовем теорию двухкомпонентных виртуальных зацеплений.

Четность определяется следующим образом. Для диаграммы зацепления $L = L_1 \cup L_2$ назовем *четным* классический перекресток, образованный одной компонентой (L_1 или L_2), а *нечетным* – перекресток, лежащий на пересечении проекций двух компонент L_1 и L_2 .

Непосредственно проверяется

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Описанная здесь четность удовлетворяет аксиомам 1, 2, 3, а), 3, б), 4.*

2.4.3. *Узлы в полнотории, кривые на двумерных поверхностях.* Рассмотрим класс $\mathcal{K}$ узлов в полнотории B , представленном в виде утолщенного кольца $S^1 \times I^1 \times I^1$, задаваемых посредством своих проекций на $S^1 \times I^1$, которые получаются “забыванием” последнего сомножителя I^1 ; при этом ограничимся лишь рассмотрением тех узлов, чей класс гомологий в $H_1(S^1 \times I^1 \times I^1, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ равен нулю.

На этом множестве $\mathcal{K}$ узлов (к которому относятся, в частности, все классические узлы, лежащие внутри некоторого шара $D^3 \subset B$) четность перекрестков определим следующим образом.

Пусть K – диаграмма, X – ее перекресток. Разведем диаграмму K в перекрестке X способом, согласованным с ориентацией (см. выше). Получим зацепление L . Очевидно, в классах гомологий $H_1(S^1 \times I^1 \times I^1, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ имеет место следующее равенство: $[K] = [L] = [L_1 \cup L_2] = [L_1 + L_2]$. Таким образом, учитывая, что $[K] = 0$, имеем $[L_1] = [L_2] \in \mathbb{Z}_2$.

Если $[L_1] = [L_2] = 1 \in \mathbb{Z}_2$, то назовем перекресток X *нечетным*, в противном случае назовем перекресток *четным*.

Непосредственно проверяется

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Описанные выше четности удовлетворяют аксиомам 1, 2, 3, а), 3, б), 4.*

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Как частный случай теории, описанной здесь, можно рассмотреть теорию замкнутых кос из четного числа нитей, рассматриваемых с точностью до изотопий кос и сопряжений.

Каждая коса естественным образом представима в виде тангла, т.е. диаграммы внутри квадрата $I^1 \times I^1$, а замкнутая коса – в виде диаграммы в кольце $S^1 \times I^1$.

Метод, использующий $\mathbb{Z}_2$ -гомологии, может быть использован и в более общей ситуации.

Известно, что виртуальные узлы представляют собой узлы в утолщенных поверхностях $S_g \times I$, рассматриваемых с точностью до изотопий и стабилизаций.

“Забудем” про стабилизацию и рассмотрим два класса объектов: кривые в S_g , рассматриваемые с точностью до гомотопии, и узлы в $S_g \times I$, рассматриваемые с точностью до изотопии.

И в том, и в другом случае объекты кодируются диаграммами общего положения, которые представляют собой оснащенные 4-графы на S_g (в случае узлов – еще и со структурой проход–переход). Отношения эквивалентности задаются посредством движений Рейдемейстера.

Фиксируем некоторый класс когомологий α из $H^1(S_g, \mathbb{Z}_2) = H^1(S_g \times I, \mathbb{Z}_2)$ и будем рассматривать только такие узлы (кривые) γ , для которых $\alpha(\gamma) = 0$.

Тогда для такого множества узлов (кривых) $\mathcal{K}$ для их диаграмм на S_g можно определить четность перекрестка посредством разведения перекрестка способом, согласованным с ориентацией, и взятия класса α на одной из половинок L_1 или L_2 , получающихся после такого разведения.

Легко проверяется, что эта четность удовлетворяет аксиомам 1, 2, 3, а), 3, б), 4.

§ 3. Функториальное отображение f

Приведенное в настоящем параграфе отображение f для четности из п. 2.4.1 было впервые предложено В. Г. Тураевым. Далее мы строим это отображение для произвольной четности, удовлетворяющей ослабленным аксиомам четности.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\mathcal{K}$ – некоторая теория узлов, обладающая четностью, удовлетворяющей ослабленной четной аксиоматике. Построим отображение f , которое диаграмме K сопоставляет диаграмму, получающуюся по следующему правилу:*

всякий четный классический перекресток диаграммы K остается перекрестком, а всякий нечетный удаляется (т.е. при изображении на его месте ставится виртуальный перекресток).

Тогда отображение f корректно определено на классах узлов, т.е. переводит эквивалентные диаграммы в эквивалентные.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В случае свободных узлов, когда в качестве диаграмм рассматриваются оснащенные 4-графы, операция f состоит в удалении четных перекрестков и последующем соединении противоположных полуребер в одно ребро. В случае, когда диаграммы узлов изображаются на плоскости или на поверхности, удаляемый перекресток помечается кружочком и рассматривается как виртуальный перекресток.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Нам необходимо проверить, что если диаграммы K_1 и K_2 получаются друг из друга применением одного движения Рейдемейстера, то диаграммы $f(K_1)$ и $f(K_2)$ либо совпадают (при изображении на плоскости отличаются движением объезда), либо отличаются применением движения Рейдемейстера (либо движением объезда).

Действительно, в случае первого движения Рейдемейстера добавление петли под действием отображения f превращается либо в добавление петли (если перекресток является четным), либо в добавление виртуальной петли (последнее преобразование является частным случаем движения объезда).

Если в случае второго движения Рейдемейстера оба перекрестка были нечетными для исходных диаграмм, то для $f(K_1)$ и $f(K_2)$ мы получаем движение

объезда, а если оба перекрестка были четными, мы получаем второе движение Рейдемейстера.

Наконец, в случае третьего движения Рейдемейстера мы можем получить третье движение Рейдемейстера для $f(K_1)$ и $f(K_2)$, если все три перекрестка были четными, или одну из версий движения объезда, если четным был один перекресток из трех либо не был ни один.

Отметим, что в силу аксиомы 4 все перекрестки, не участвующие в движении Рейдемейстера, остаются неподвижными, что обеспечивает неизменность диаграммы $f(K_1)$ при переходе к диаграмме $f(K_2)$ вне окрестности тех перекрестков, которые участвуют в движении Рейдемейстера. Теорема доказана.

Перейдем теперь к описанию функции f в случае конкретных теорий узлов с четностями.

3.1. Функция f в случае четности из п. 2.4.1. Пусть K – виртуальная диаграмма, задающая свободный узел, $G(K)$ – соответствующая гауссова диаграмма, а $V(K)$ – атом, соответствующий K . Тогда имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Атом $V(K)$ ориентируем тогда и только тогда, когда все хорды диаграммы $G(K)$ являются четными.*

В частности, свойство ориентируемости атома зависит лишь от свободного узла, соответствующего узлу K , и не зависит от структуры проход-переход в классических перекрестках диаграммы K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см. [24]), что атом ориентируем тогда и только тогда, когда на его остове можно задать структуру источник–сток, т.е. можно ориентировать все ребра его остова таким образом, чтобы в каждой вершине два противоположных ребра были исходящими, а два других противоположных ребра – входящими (рис. 9, посередине).

Рис. 9. Гауссовы диаграммы и структуры источник–сток

Вспомним, что ребра графа, который является остовом атома, соответствуют дугам хордовой (гауссовой) диаграммы. При этом соседние дуги на гауссовой диаграмме соответствуют противоположным ребрам. Следовательно,

структура источник–сток на гауссовой диаграмме задает на гауссовой диаграмме ориентацию дуг, обладающую следующими двумя свойствами:

1) дуги гауссовой диаграммы чередуются, т.е. за каждой дугой, ориентированной по часовой стрелке, следует дуга, ориентированная против часовой стрелки;

2) у каждой хорды на одном конце имеются две исходящие дуги, а на другом – две входящие.

Из этих условий следует, что для каждой хорды по одну сторону от нее имеется четное число концов других хорд, откуда и вытекает четность хорды.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим гауссову диаграмму, изображенную на рис. 9, слева. На ней задана ориентация дуг, задающая структуру источник–сток на остова соответствующего атома. Как нетрудно убедиться, один из атомов, соответствующий этой диаграмме, является сферическим (т.е. поверхность атома представляет собой сферу); следовательно, он ориентируем, т.е. ориентируемы и все остальные атомы с тем же остовом.

На хордовой диаграмме, изображенной на рис. 9, справа, задание такой структуры невозможно, ибо хорда a является нечетной (она зацеплена ровно с одной хордой). Поэтому чередующаяся ориентация стрелок вдоль окружности хордовой диаграммы приводит к четырем входящим ребрам на концах хорды a .

Таким образом, отображение f оставляет неизменными те диаграммы, которым соответствуют ориентируемые атомы (напомним, что мы рассматриваем диаграммы только виртуальных узлов, а не зацеплений). Если атом $V(K)$, соответствующий диаграмме K , не ориентируем, то диаграмма $f(K)$ имеет строго меньше классических перекрестков, чем диаграмма K .

Отметим, что, вообще говоря, $f^2(A) \neq f(A)$, ибо после удаления нечетных хорд хордовой диаграммы некоторые четные хорды могут стать нечетными. Так, например, для хордовой диаграммы с четырьмя хордами a, b, c, d , у которой имеются три зацепленные пары хорд (a, b) , (a, c) , (b, d) , после удаления нечетных хорд c, d хорды a, b становятся нечетными.

Легко видеть, что для каждой диаграммы виртуального узла K с n перекрестками найдется такое число $m < n$, что $f^m(K) = f^{m+1}(K)$, т.е. атом, соответствующий диаграмме $f^m(K)$, является ориентируемым.

Очевидно, что отображение, удаляющее нечетные перекрестки, задается и на множестве атомов: достаточно лишь удалить все нечетные перекрестки и оставить структуру черных и белых углов в оставшихся перекрестках.

Это приводит нас к следующей градуировке на множестве атомов и виртуальных узлов. Пусть A – атом, остов которого имеет одну уникальную компоненту. Тогда A является либо ориентируемым (в этом случае скажем, что атом A имеет градуировку нуль), либо неориентируемым. Во втором случае существует такое единственное натуральное число $n > 0$, что $f^n(A)$ является ориентируемым атомом, а $f^{n-1}(A)$ не является ориентируемым атомом. В этом случае скажем, что атом A имеет градуировку n .

Аналогично определяется и градуировка на множестве виртуальных узлов: скажем, что виртуальный узел V имеет градуировку нуль, если у него есть диаграмма с ориентируемым атомом; узел V имеет градуировку $n > 0$, если $f^n(V)$

имеет диаграмму с ориентируемым атомом, а узел $f^{n-1}(V)$ таковых диаграмм не имеет.

Таким образом, мы имеем естественное разбиение множества виртуальных узлов на подмножества $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{K}_n \oplus \dots$.

Не сложно построить примеры, показывающие непустоту каждого из множеств $\mathcal{K}_n$.

Такой подход позволяет получить простое доказательство следующей теоремы Виро–Мантурова (впервые доказанной в 2005 г. и впервые опубликованной в работе [4]).

ТЕОРЕМА 4. *Пусть K, K' – две эквивалентные диаграммы виртуальных узлов, имеющие ориентируемые атомы. Тогда существует цепочка преобразований Рейдемейстера $K = K_0 \rightarrow K_1 \rightarrow \dots \rightarrow K_n = K'$ такая, что все атомы, соответствующие диаграммам K_i , являются ориентируемыми.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим цепочку диаграмм $K = L_0 \rightarrow L_1 \rightarrow \dots \rightarrow L_n = K'$ таких, что L_i и L_{i+1} связаны между собой движением Рейдемейстера (классическим).

Пусть максимальное количество нечетных перекрестков по всем диаграммам L_i равно k .

Применим к цепочке преобразование f . Получим цепочку диаграмм $K = L_0 = L'_0 \rightarrow L'_1 \rightarrow \dots \rightarrow L'_n = L_n = K'$, в которой каждые две соседние диаграммы получаются друг из друга движением Рейдемейстера либо совпадают (т.е. получаются друг из друга движением объезда).

Применяя преобразование f и далее (всего k раз начиная с исходной цепочки), мы получим цепочку диаграмм $f^k(K) = K = L_0 \rightarrow f^k(L_1) \rightarrow \dots \rightarrow f^k(L_n) = L_n = K'$, в которой атомы, соответствующие всем диаграммам, являются ориентируемыми, а каждые две соседние диаграммы либо совпадают (связаны движением объезда), либо отличаются друг от друга одним из движений Рейдемейстера.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Исходное доказательство теоремы Виро–Мантурова в общем случае (для виртуальных зацеплений из произвольного числа компонент) опирается на геометрию виртуальных узлов и теорему Куперберга. В настоящее время автору известно комбинаторное доказательство этой теоремы в общем случае, основанное на понятии относительной четности для диаграмм виртуальных зацеплений.

3.2. Иерархия четностей на виртуальных узлах. Как следует из теоремы Виро–Мантурова, виртуальные узлы, которым соответствуют ориентируемые атомы, образуют естественный подкласс всех виртуальных узлов, для определения эквивалентности которых можно использовать лишь те движения Рейдемейстера, которые оставляют диаграммы внутри этого подкласса.

В частности, этот класс (обозначим его через $\mathfrak{V}^1$) включает в себя классические узлы. Мы покажем, что имеется естественная фильтрация на множестве виртуальных узлов (не связанная с градуировкой n , приведенной выше)

$$\mathfrak{V}^0 \supset \mathfrak{V}^1 \supset \mathfrak{V}^2 \supset \dots \supset \mathfrak{V}^n \supset \dots,$$

которая начинается с множества $\mathfrak{V}^0$ всех виртуальных узлов и имеет своим пределом узлы индекса ноль $\mathfrak{V}^\infty$ – множество узлов, содержащее в себе все классические узлы.

Итак, пусть K – виртуальная диаграмма, $G(D)$ – ее гауссова диаграмма. Расставим на диаграмме G знаки и стрелки обычным способом (знак плюс соответствует перекрестку $\times$, а знак минус – перекрестку $\bowtie$): стрелка направлена от прообраза дуги, образующей переход, к прообразу дуги, образующей проход.

Каждому классическому перекрестку мы сопоставим индекс, который будет представлять собой натуральное число или ноль. Пусть X – классический перекресток диаграммы K , а $c(X)$ – соответствующая ему (ориентированная) хорда диаграммы $G(D)$. Рассмотрим все хорды диаграммы $G(D)$, зацепленные с хордой $c(X)$. Подсчитаем для них сумму знаков тех хорд, которые пересекают $c(X)$ слева направо, и вычтем сумму знаков тех хорд, которые пересекают хорду $c(X)$ справа налево.

Модуль полученной величины назовем *индексом хорды* и обозначим его через $\text{ind}(X) \equiv \text{ind}(c(X))$.

Ясно, что если атом, соответствующий диаграмме D , ориентируемый, то индексы хорд диаграммы $G(D)$ четные.

Следовательно, $\mathfrak{V}^1$ состоит из тех узлов, у диаграмм которых индекс каждой из хорд является четным.

Соберем воедино несколько фактов, доказательство которых сводится к простой проверке.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. 1. В первом движении Рейдемейстера может участвовать лишь хорда индекса ноль.

2. Во втором движении Рейдемейстера участвуют две хорды одинаковых индексов.

3. Индекс хорды не меняется при третьем движении Рейдемейстера:

$$\text{ind}(a) = \text{ind}(a'), \quad \text{ind}(b) = \text{ind}(b'), \quad \text{ind}(c) = \text{ind}(c');$$

кроме того, если три хорды a, b, c участвуют в третьем движении Рейдемейстера, то $\text{ind}(a) \pm \text{ind}(b) \pm \text{ind}(c) = 0$ (см. рис. 6).

4. Индекс хорды, не участвующей в некотором движении Рейдемейстера, не меняется после применения к диаграмме этого движения Рейдемейстера.

5. У классической диаграммы все перекрестки имеют индекс ноль.

Описанные здесь свойства индекса показывают, что индекс можно использовать для определения четности.

Действительно, из утверждения 3 вытекает, что на диаграммах из $\mathfrak{V}^1$ можно ввести следующую четность: пусть K – диаграмма узла из $\mathfrak{V}^1$; объявим четными те перекрестки диаграммы K , которые имеют индекс, кратный 4, а нечетными – те, которые имеют индекс, сравнимый с 2 по модулю 4.

Из утверждения 3 вытекает, что так определенная четность удовлетворяет всем аксиомам четности.

Применяя отображение f к узлам из $\mathfrak{V}^1$ относительно этой четности, мы получим множество $\mathfrak{V}^2$ диаграмм, индексы всех перекрестков которых делятся на 4.

Рассуждая аналогичным образом и далее, мы определим множества $\mathfrak{V}^k$ диаграмм, у которых все перекрестки имеют индексы, делящиеся на 2^k , а также определим $\mathfrak{V}^\infty$ как множество диаграмм, у которых все перекрестки имеют индекс нуль.

Имеется набор отображений $f_k: \mathfrak{V}^k \rightarrow \mathfrak{V}^0$, который состоит в удалении всех хорд индекса, сравнимого с 2^k по модулю 2^{k+1} . Все эти отображения переводят эквивалентные диаграммы в эквивалентные.

Имеет место

ТЕОРЕМА 5. Пусть K, K' – две диаграммы виртуальных узлов из $\mathfrak{V}^k$ (где k – натуральное число или ∞), задающие эквивалентные виртуальные узлы. Тогда существует цепочка $K = K_0 \rightarrow K_1 \rightarrow \dots \rightarrow K_n = K'$ диаграмм из $\mathfrak{V}^1$, в которой любые соседние диаграммы отличаются одним из движений Рейдемейстера или движением оббеда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в многократном применении главного приема теоремы 4 в случае конечного k для соответствующих отображений f_j для различных $j < k$. В случае $k = \infty$ достаточно применить этот прием также конечное число раз (после чего цепочка стабилизируется и будет состоять из диаграмм из $\mathfrak{V}^k$). Это следует из того, что если максимальное количество хорд в цепочке не превосходит $n < 2^n$, то кратность индекса некоторой хорды числу 2^n будет означать равенство индекса этой хорды нулю.

Отметим, что класс $\mathfrak{V}^\infty$ довольно интересен: он представляет собой “аппроксимацию” классических узлов виртуальными узлами, и все инварианты, определенные на $\mathfrak{V}^\infty$, могут быть перенесены на все виртуальные узлы посредством отображения f .

Рис. 10. Неклассическая диаграмма из класса $\mathfrak{V}^\infty$

Пример неклассической диаграммы D из $\mathfrak{V}^\infty$ изображен на рис. 10. На гауссовой диаграмме изображена диаграмма $G(D)$ со стрелками и со знаками.

Легко видеть, что на диаграмме $G(D)$ стрелки, соответствующие перекресткам 1 и 2, сонаправлены, что гарантирует равенство нулю индексов хорд 3 и 4. Противоположными являются и стрелки, соответствующие перекресткам 3 и 4.

3.3. Отображение f в случае четности из п. 2.4.2. Пусть K – диаграмма классического или виртуального зацепления из двух компонент. Отображение f заменяет все перекрестки, образованные обеими компонентами диаграммы K , на виртуальные. Геометрический смысл операции f таков: каждому зацеплению $L = L_1 \cup L_2$ она сопоставляет распадающееся зацепление из двух компонент L_1 и L_2 .

3.4. Отображение f в случае четности из п. 2.4.3. Это отображение сопоставляет узлам в полнотории “виртуальные узлы в полнотории”, т.е. классы эквивалентности диаграмм в кольце $S^1 \times I^1$ с классическими и виртуальными перекрестками по движениям Рейдемейстера.

Получаемые в качестве образа отображения f узлы можно исследовать далее различными способами, например, рассматривая их как обычные виртуальные узлы (посредством вложения $S^1 \times I^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$) либо исследуя дополнительные четности.

Аналогичным образом можно рассматривать четность f для узлов на утолщенной поверхности, которая приводит к теории “виртуальных узлов на той же утолщенной поверхности”.

§ 4. Инварианты

Оказывается, что если некоторая теория узлов $\mathcal{K}$ обладает четностью, удовлетворяющей всем аксиомам четности 1, 2, 3, а), 3, б), 4, то это позволяет строить инварианты узлов $\mathcal{K}$ со значениями в линейных комбинациях графов. Такие линейные комбинации графов происходят из диаграмм исходного узла посредством разведений и, следовательно, несут в себе много информации об узле в целом: о количестве перекрестков на его возможных диаграммах и об их взаимном расположении.

В частности, для некоторых теорий узлов с четностью, удовлетворяющей аксиомам 1, 2, 3, а), 3, б), 4, легко доказываются теоремы о минимальности диаграмм по количеству перекрестков.

4.1. Предварительные сведения.

4.1.1. Разведения. Пусть дана диаграмма K в некоторой теории узлов $\mathcal{K}$. Нашим основным примером будет теория свободных узлов, в которой в качестве диаграмм будут выступать оснащенные 4-графы, поэтому мы будем часто пользоваться как термином “диаграмма”, так и термином “граф”.

Определим понятие разведения диаграммы (графа). В дальнейшем словом “разведение” мы будем называть как процесс разведения, так и диаграмму, получающуюся в результате разведения.

Пусть X – вершина (перекресток) диаграммы K , в которой сходятся четыре полуребра a, b, c, d , причем полуребро a противоположно полуребру c , а полуребро b противоположно полуребру d . Назовем *разведениями* диаграммы X в вершине X один из двух оснащенных 4-графов, полученных из диаграммы K

удалением вершины X и склейкой ребер в другом порядке: $a-b$, $c-d$ или $a-d$, $b-c$ (рис. 11).

Рис. 11. Два разведения вершины оснащенного графа

При этом оснащение остальных вершин (кроме X) у обоих разведений остается тем же, что и у диаграммы (графа) K .

Можно рассматривать и дальнейшие разведения диаграммы (графа) K по нескольким вершинам. Каждое разведение представляет собой результат последовательного разведения диаграммы в нескольких вершинах. Если диаграммы в теории узлов $\mathcal{H}$ содержат дополнительную информацию в перекрестках, то под разведением будет пониматься диаграмма, получаемая “забыванием” этой информации. Так, в случае разведения виртуальной диаграммы результатом разведения будет являться оснащенный 4-граф. Будем обозначать результаты разведения диаграммы K через K_s , где s – это способ разведения (или состояние) диаграммы K .

Пусть K – диаграмма, и пусть $X_1, \dots, X_n$ – все четные перекрестки диаграммы K . Назовем *четным разведением* диаграммы K ее разведение во всех четных перекрестках $X_1, \dots, X_n$. Таким образом, у диаграммы K имеется 2^n четных разведений.

Назовем четное разведение оснащенного 4-графа K (относительно любой четности) *1-четным разведением*, если в результате разведения количество уникурсальных компонент получающегося оснащенного 4-графа равно единице.

В случае теорий кос или танглов в качестве исходных объектов допускаются графы с вершинами валентности 1 (называемые *концевыми*) и свободными компонентами – отдельно стоящими окружностями, а также валентности 4 (каждая из которых является оснащенной). В этом случае результаты разведений также представляют собой графы с вершинами валентностей 1 и 4 и свободными окружностями, причем множество вершин валентности 1 каждой

разведенной диаграммы совпадает с множеством вершин валентности 1 исходной диаграммы.

4.1.2. Оснащенные 4-графы. Для каждого оснащенного 4-графа K его разведения будут представлять собой оснащенные 4-графы.

Для виртуальной диаграммы V разведениями будут являться разведения оснащенного 4-графа $K(V)$, получаемого из V “забыванием” дополнительной информации в классических перекрестках.

Далее мы будем интересоваться следующими множествами разведений свободного графа (виртуальной диаграммы): множеством всех разведений S , множеством всех четных разведений $S_{\text{чет}}$, множеством всех разведений с одной уникарсальной компонентой S_1 и множеством всех четных разведений с одной уникарсальной компонентой $S_{\text{чет},1}$. Элементы соответствующих множеств мы будем обозначать через $s, s_{\text{чет}}, s_1, s_{\text{чет},1}$ соответственно. Для упрощения обозначений при суммировании мы будем опускать множество разведений, по которым происходит суммирование (оно будет связано с той переменной, которая пробегает это множество: $s, s_{\text{чет}}, s_1, s_{\text{чет},1}$).

Оснащенные 4-графы, пробегающие одно из этих множеств разведений, будут использоваться в дальнейшем для построения инвариантов оснащенных зацеплений или других теорий узлов с четностью.

4.1.3. Свободные узлы и зацепления. Теория свободных узлов (не зацеплений) описывается гауссовыми диаграммами и движениями Рейдемейстера на них. При этом переход от узлов к свободным узлам соответствует переходу от гауссовых диаграмм с метками на ребрах и ориентациями ребер к гауссовым диаграммам без меток и ориентаций.

4.1.4. Линейное пространство $\mathfrak{G}$. Рассмотрим оснащенные 4-графы с одной уникарсальной компонентой по отношению эквивалентности, порожденному вторым движением Рейдемейстера.

Определим линейное пространство $\mathfrak{G}$ как множество $\mathbb{Z}_2$ -линейных комбинаций таких классов эквивалентности.

4.1.5. Линейное пространство $\tilde{\mathfrak{G}}$. Линейное пространство $\tilde{\mathfrak{G}}$ – это множество $\mathbb{Z}_2$ -линейных комбинаций следующих объектов. Рассматриваются все оснащенные 4-графы, профакторизованные по следующим соотношениям эквивалентности:

- 1) второе движение Рейдемейстера;
- 2) $L \sqcup \bigcirc = 0$, т.е. оснащенный 4-граф, имеющий больше одной компоненты, одна из которых тривиальна, полагается равным нулю.

Имеет место естественное отображение $g: \tilde{\mathfrak{G}} \rightarrow \mathfrak{G}$, отображающее в нуль все классы эквивалентности оснащенных графов, имеющих более одной уникарсальной компоненты. Очевидно, что отображение g является эпиморфизмом групп.

4.2. Инварианты $[\cdot], \{\cdot\}$. Приводимые ниже инварианты будут явно определены для свободных узлов и зацеплений относительно любой четности, удовлетворяющей всем аксиомам четности: 1, 2, 3, а), 3, б), 4.

Эти инварианты прямо продолжаютя на *свободные танглы* – объекты, задаваемые графами, имеющими помимо вершин валентности 4 свободные концы

валентности 1 (в частности, на свободные косы). Явных определений для случая свободных танглов мы приводить не будем, оставляя их в качестве упражнения для читателя.

Так как любое виртуальное зацепление порождает свободное зацепление посредством “забывания” структур классических перекрестков (проход–переход и локальное число закручивания), то эти инварианты будут “подниматься” до виртуальных узлов и зацеплений в любой четности, которая определяется на соответствующих свободных зацеплениях.

Перейдем к построению инвариантов $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ свободных узлов, которые будут принимать значения в $\mathfrak{G}$ и в $\tilde{\mathfrak{G}}$ соответственно.

4.2.1. *Инвариант $\{\cdot\}$.* Пусть K – оснащенный 4-граф. Инвариант $\{\cdot\}$ задается по формуле

$$\{K\} = \sum_{s_{\text{чет}}} K_{s_{\text{чет}}} \in \tilde{\mathfrak{G}}, \quad (1)$$

где сумма берется по всем четным разведениям $s_{\text{чет}}$ оснащенного 4-графа K , которые рассматриваются как элементы из $\tilde{\mathfrak{G}}$.

ТЕОРЕМА 6. *Скобка $\{\cdot\}$ является инвариантом свободных зацеплений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим инвариантность скобки $\{\cdot\}$ относительно движений Рейдмейстера. Здесь мы будем использовать те свойства четности 1, 2, 3, а), 3, б), 4, которым удовлетворяют перекрестки диаграмм, подвергающихся движениям Рейдмейстера.

Пусть диаграммы K и K' отличаются друг от друга движением Ω_1 , при этом диаграмма K' содержит на одну вершину больше, чем диаграмма K , и эта вершина обозначена через X .

Отметим, что вершина X является четной согласно аксиоме четности 1. Одно из разведений диаграммы K' в вершине X приводит к отдельно стоящей тривиальной компоненте, таким образом, любое четное разведение диаграммы K' , в которой вершина X разведена неправильным образом, приведет к отдельно стоящей тривиальной компоненте, что даст нулевой элемент из $\tilde{\mathfrak{G}}$.

Разведение диаграммы K' в вершине X правильным образом приводит к диаграмме K , что приводит ко взаимно однозначному соответствию четных разведений для K и K' , не имеющих отдельно стоящих тривиальных окружностей.

Таким образом, мы доказали инвариантность скобки $\{\cdot\}$ относительно первого движения Рейдмейстера.

Мы покажем, что при втором и третьем движениях Рейдмейстера Ω_2 и Ω_3 выполняется равенство $\{K\} + \{K'\} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_2}$, посредством разбиения на пары всех диаграмм, входящих в $\{K\} + \{K'\}$, представляющих нетривиальные элементы из $\tilde{\mathfrak{G}}$. В силу того, что $\tilde{\mathfrak{G}}$ – линейное пространство над $\mathbb{Z}_2$, это будет означать, что выполняется равенство $\{K\} = \{K'\}$.

Пусть K' получается из K вторым движением Рейдмейстера, добавляющим два перекрестка, X и Y . Если оба эти перекрестка нечетные, то имеет место очевидное взаимно однозначное соответствие между множеством четных разведений диаграммы K и множеством четных разведений диаграммы K' .

Соответствующие разведения получаются друг из друга применением “одного и того же” движения Рейдемейстера, относящегося к вершинам X и Y . Если вершины X и Y обе являются четными, то имеются четыре разведения диаграммы K' в этих вершинах: $\bowtie \rightarrow \succleftarrow$, $\bowtie \rightarrow \succrightarrow$, $\bowtie \rightarrow \succdownarrow$, $\bowtie \rightarrow \succupdownarrow$.

Отметим, что разведение $\succdownarrow$ имеет отдельно стоящую окружность, которая будет оставаться таковой при последующих разведениях в четных перекрестках. Таким образом, в скобке $\{K'\}$ такие слагаемые учитываться не будут.

Рис. 12. Соответствия разведений при движении Ω_3 с тремя четными вершинами

Далее, разведения $\succleftarrow$ и $\succrightarrow$ представляют собой один и тот же оснащенный 4-граф (при условии совпадения разведений во всех оставшихся перекрестках). Таким образом, эти разведения сокращаются в скобке $\{K'\}$.

Четные разведения типа $\succleftarrow$ диаграммы K' очевидным образом находятся во взаимно однозначном соответствии с четными разведениями диаграммы K и дают оснащенные 4-графы.

Пусть теперь диаграмма K переводится в диаграмму K' движением Ω_3 . Из трех перекрестков диаграммы K , участвующих в движении Рейдемейстера, четными могут быть либо три перекрестка, либо один.

Если три перекрестка диаграммы K четные, то мы имеем семь типов слагаемых в $\{K\}$ (и семь типов слагаемых в $\{K'\}$): в каждой из трех вершин мы имеем две возможности разведения, при этом одна из возможностей приводит к отдельно стоящей тривиальной окружности в K , а одна из возможностей приводит к отдельно стоящей тривиальной окружности в K' (что не дает вклада в $\{K\}$ или в $\{K'\}$). Рассматривая K (рис. 12), мы видим, что три из этих семи типов приводят к совпадающим наборам диаграмм (эти наборы обозначены через 1), поэтому в пространстве $\mathfrak{G}$ два набора сокращаются друг с другом, и остается один набор. Аналогично, для случая K' имеются три одинаковых типа разведения (они обозначены через 2). Таким образом, и в $\{K\}$, и в $\{K'\}$ остаются пять типов слагаемых: 1, 2, 3, 4, 5.

В этих пяти случаях имеется однозначное соответствие (см. рис. 12), которое приводит к равенству $\{K\} = \{K'\}$.

Если среди трех вершин, участвующих в движении Ω_3 , мы имеем по одной четной вершине в правой и в левой части (скажем, $a \rightarrow a'$), мы приходим к ситуации, изображенной на рис. 13.

Рис. 13. Соответствие между разведениями для Ω_3 с одной четной вершиной

Из этого рисунка мы видим, что те разведения, где вершины a и a' разведены вертикально, дают совпадающие слагаемые для $\{K\}$ и для $\{K'\}$, а те разведения, где a и a' разведены горизонтально, находятся в однозначном соответствии для диаграмм K и K' , причем соответствующие графы отличаются друг от друга двукратным применением второго движения Рейдемейстера. Это доказывает, что $\{G\} = \{G'\}$ в $\mathfrak{G}$. Теорема 6 доказана.

4.2.2. *Инвариант $[\cdot]$.* Инвариант $[\cdot]$ задается по формуле

$$[K] = \sum_{s_{1, \text{чет}}} K_{s_{1, \text{чет}}} \in \mathfrak{G}, \quad (2)$$

где сумма берется по всем четным разведениям диаграммы K , дающим одну окружность.

Очевидно, что

$$[K] = g(\{K\}) \quad (2')$$

что приводит к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 7. *Скобка $[\cdot]$ является инвариантом свободных узлов.*

Иногда нам будет удобно пользоваться скобкой $[\cdot]$ именно по формуле (2), а не по формуле (2').

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Отметим, что инварианты, приведенные выше, можно строить исходя из любой четности, удовлетворяющей аксиомам 1, 2, 3, а), 3, б), 4.

4.2.3. *Конструктивность инвариантов $\{\cdot\}$ и $[\cdot]$.* Инварианты $\{\cdot\}$ и $[\cdot]$ переводят некоторый класс эквивалентности (диаграмм по движениям Рейдемейстера) в линейную комбинацию классов эквивалентности (диаграмм по второму движению Рейдемейстера и обращению в нуль некоторых классов диаграмм). Оказывается, что множества $\mathfrak{G}$ и $\tilde{\mathfrak{G}}$ легко описываются алгоритмически: у каждого элемента любого из этих множеств имеется единственный минимальный представитель, который находится посредством последовательного упрощения. Под *упрощением* мы понимаем второе движение Рейдемейстера, уменьшающее количество перекрестков на два, а также (в случае элементов из $\tilde{\mathfrak{G}}$) преобразование, обращающее в нуль диаграмму с более чем одной уникарсальной компонентой, у которой имеется отдельно стоящая тривиальная компонента.

Более точно сказанное выше можно сформулировать в виде леммы, которой мы предположим определения.

Назовем оснащенный 4-граф *упрощаемым*, если он либо содержит компоненту без вершин, либо содержит две вершины A и B , соединенные парой ребер p, q таких, что p, q являются соседними как в вершине A , так и в вершине B . Второй случай – это как раз ситуация, в которой к графу можно применить второе уменьшающее движение Рейдемейстера.

Оснащенные 4-графы, не допускающие упрощения, назовем *минимальными*. Скажем, что граф Γ_0 получается из графа Γ *последовательным упрощением*, если существует цепочка оснащенных 4-графов $\Gamma = \Gamma_n \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$, в которой каждый следующий граф получается из предыдущего применением второго уменьшающего движения Рейдемейстера.

Назовем *минимальным представителем* графа Γ минимальный граф, получаемый из графа Γ последовательным упрощением.

В случае $\mathfrak{G}$ понятия минимального и неупрощаемого графов совпадают.

ЛЕММА 2. *Если оснащенные 4-графы Γ_0 и Γ'_0 с одной уникарсальной компонентой минимальны и оба получаются из оснащенного 4-графа Γ последовательным упрощением, то Γ_0 изоморфен графу Γ'_0 .*

Эта лемма утверждает, что у каждого оснащенного 4-графа с одной уникарсальной компонентой минимальный представитель единствен.

Из этой леммы вытекает

ЛЕММА 3. *Оснащенные 4-графы Γ и $\tilde{\Gamma}$ с одной уникарсальной компонентой эквивалентны в $\mathfrak{G}$, если и только если у них совпадают минимальные представители.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выведем лемму 3 из леммы 2. Утверждение $\Leftarrow$ очевидно. Предположим, что $\Gamma = \tilde{\Gamma}$ в $\mathfrak{G}$, при этом минимальные представители графов Γ и $\tilde{\Gamma}$ различны. Пусть Δ и Δ' – два оснащенных графа, получающихся один из другого вторым движением Рейдемейстера, при этом граф Δ' имеет на две вершины больше, чем граф Δ . Тогда по определению минимального представителя и в силу леммы 2 мы заключаем, что минимальные представители для Δ и Δ' совпадают. Рассмотрев цепочку $\Gamma = \Gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_k = \tilde{\Gamma}$ вторых движений Рейдемейстера, связывающих Γ с $\tilde{\Gamma}$, замечаем, что минимальные представители любых двух соседних графов в этой цепочке совпадают. Поэтому совпадают и минимальные представители графов Γ и $\tilde{\Gamma}$, откуда следует эквивалентность этих графов в $\mathfrak{G}$.

Доказательству леммы 2 предпошлим два простых утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Предположим, что оснащенный 4-граф Γ с одной уникарсальной компонентой имеет два неизоморфных минимальных представителя. Тогда найдется такое упрощение $\tilde{\Gamma}$ графа Γ , для которого имеет место следующее.*

Среди минимальных представителей графа $\tilde{\Gamma}$ найдутся такие неизоморфные оснащенные 4-графы Γ_0 и Γ'_0 , а среди элементарных упрощений оснащенного 4-графа $\tilde{\Gamma}$ найдутся такие графы Γ_1 и Γ'_1 , что Γ_0 является одним из минимальных представителей для Γ_1 , но не для Γ'_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем два неизоморфных минимальных представителя Γ_0 и Γ'_0 графа Γ и рассмотрим цепочку элементарных преобразований от Γ к Γ_0 . В начальный момент у графа Γ среди минимальных представителей имеется граф Γ'_0 , а в конце цепочки среди минимальных представителей графа Γ_0 минимального представителя Γ'_0 уже нет (так как Γ_0 не уменьшаем). Выбирая в цепочке от Γ до Γ_0 последний по счету граф, имеющий граф Γ_0 в качестве минимального представителя, и обозначая этот граф через $\tilde{\Gamma}$, получаем требуемое.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Если оснащенные 4-графы Γ_1 и Γ'_1 получаются из оснащенного 4-графа Γ одним элементарным упрощением каждый, то либо графы Γ_1 и Γ'_1 изоморфны, либо найдется оснащенный 4-граф Γ'_2 , который может быть получен одним элементарным преобразованием из каждого из графов Γ_1, Γ'_1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть вершины $\{\alpha, \beta\}$ графа Γ , в которых происходит упрощение $\Gamma \rightarrow \Gamma_1$, и вершины $\{\alpha', \beta'\}$, в которых происходит упрощение графа $\Gamma \rightarrow \Gamma'_1$. Если множество $\{\alpha, \beta\} \cup \{\alpha', \beta'\}$ состоит из двух или трех элементов, то очевидно, что графы Γ_1 и Γ'_1 изоморфны. Если

это множество состоит из четырех элементов, то легко видеть, что к графу Γ_1 можно применить элементарное упрощение в вершинах $\{\alpha', \beta'\}$ и в результате получить граф, изоморфный графу, получаемому из Γ'_1 применением элементарного упрощения в вершинах $\{\alpha, \beta\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Рассмотрим оснащенный 4-граф Γ с одной уникурсальной компонентой и предположим, что он имеет более одного минимального представителя.

В силу утверждения 4 имеется такое упрощение $\tilde{\Gamma}$ графа Γ , что среди графов, получающихся из $\tilde{\Gamma}$ одним элементарным упрощением, можно выбрать такую пару Γ_1 и Γ'_1 , для которой один из графов Γ_0 или Γ'_0 является минимальным представителем для Γ_1 , но не для Γ'_1 . Без ограничения общности будем считать, что это граф Γ_0 . Согласно утверждению 5 существует граф Γ'_2 , получаемый элементарным упрощением как из графа Γ_1 , так и из графа Γ'_1 .

Так как по условию Γ'_1 в числе минимальных представителей не имеет графа Γ_0 , то и граф Γ'_2 не имеет в числе минимальных представителей графа Γ_0 . С другой стороны, так как Γ_0 является минимальным представителем для Γ_1 , то у Γ_1 имеется по крайней мере два минимальных представителя.

Переобозначая Γ_1 через Γ и повторяя описанное выше рассуждение, мы получим, что один из графов (обозначим его через Γ_2), получаемых элементарным преобразованием из Γ_1 , также имеет по крайней мере два неизоморфных минимальных представителя. Рассуждая так же и далее, получим цепочку $\Gamma \rightarrow \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \rightarrow \dots$ графов, каждый следующий из которых получается из предыдущего упрощением, и при этом каждый граф Γ_i имеет по крайней мере два минимальных представителя.

В итоге получим противоречие для того из графов Γ_i , который является неуменьшаемым. Лемма доказана.

Итак, мы полностью описали, как распознавать эквивалентность оснащенных 4-графов из $\mathfrak{G}$: нужно взять их минимальные представители и сравнить. В случае $\mathfrak{G}$ минимальные графы не могут быть упрощаемыми, так как в них (по определению минимальности) не бывает двуугольников, которые можно было бы упростить вторым движением Рейдемейстера, а количество уникурсальных компонент равно единице.

В случае графов из $\tilde{\mathfrak{G}}$ минимальным представителем может быть упрощаемый граф, т.е. граф, у которого имеется отдельно стоящая компонента. В последнем случае такой граф эквивалентен нулю в $\tilde{\mathfrak{G}}$.

По аналогии с леммой 3 для $\tilde{\mathfrak{G}}$ доказывается следующая

ЛЕММА 4. *Оснащенные графы Γ и Γ' из $\tilde{\mathfrak{G}}$ эквивалентны, если их минимальные представители $\tilde{\Gamma}$ и $\tilde{\Gamma}'$ либо оба содержат отдельно стоящие тривиальные компоненты, либо не содержат отдельно стоящих тривиальных компонент и являются изоморфными.*

4.3. Применения инвариантов. Используя четность, построенную в п. 2.4.3, и инвариант $[\cdot]$, определенный для этой четности, можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 8. Пусть K – оснащенный 4-граф, гауссова диаграмма которого является нечетной несократимой. Тогда у любого оснащенного 4-графа K' , задающего тот же свободный узел, что и K , найдется одно из разведений, которое как оснащенный 4-граф изоморфно оснащеному 4-графу K .

Очевидно, что следствием этой теоремы является теорема 1.

ПРИМЕР 3. Оснащенный 4-граф, задаваемый хордовой диаграммой, изображенной на рис. 14, является нечетным несократимым.

Рис. 14. Нечетная несократимая хордовая диаграмма и ее граф пересечения

Легко видеть, что множество нечетных несократимых гауссовых диаграмм бесконечно, откуда следует и бесконечность множества различных минимальных оснащенных 4-графов.

Теорема 8 вытекает из следующего фундаментального, но просто доказываемого утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Для нечетного несократимого оснащенного 4-графа K с одной уникурсальной компонентой имеет место равенство

$$[K] = K. \quad (3)$$

В равенстве (3) в левой части граф K понимается как представитель свободного узла, а в правой части – как представитель элемента из $\mathfrak{G}$.

Доказательство утверждения 6 очевидно: так как все перекрестки оснащенного 4-графа K являются нечетными, то в формуле для $[K]$ разводить нужно пустое множество перекрестков. Таким образом, мы получаем единственное слагаемое, представляющее собой оснащенный 4-граф K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Выведем теорему 8 из утверждения 6. Пусть оснащенный 4-граф K' эквивалентен оснащеному 4-графу K как свободный узел. Тогда $[K'] = [K] = K$. Следовательно, у графа K' имеется хотя бы одно разведение $\tilde{K}$, эквивалентное графу K как элемент из $\mathfrak{G}$. Поэтому K является минимальным представителем для $\tilde{K}$. Далее можно заметить, что если оснащенный 4-граф L' получается из L одним элементарным упрощением, то граф L' получается из L разведением в двух вершинах (тех самых, в которых мы проводили элементарное упрощение). Следовательно, граф $\tilde{K}$ получается

разведением некоторых вершин графа K' , а граф K получается разведением графа $\tilde{K}$. Отсюда следует, что K получается разведением из $\tilde{K}$.

Аналогичные результаты о минимальности можно получить и для зацеплений из произвольного количества компонент. Для этого вместо скобки $[\cdot]$ и четности из п. 2.4.1 можно использовать, например, скобку $\{\cdot\}$ и четность из п. 2.4.2. А именно, полностью аналогично теореме 8 доказывается

ТЕОРЕМА 9. Пусть L – свободное зацепление из двух компонент, у которого все перекрестки принадлежат обеим компонентам, при этом к диаграмме L не применимо второе уменьшающее движение Рейдемейстера. Тогда у любого графа L' , задающего то же свободное зацепление, что и L , найдется разведение, изоморфное L как оснащенный 4-граф.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению инварианта $\{\cdot\}$ для четности из п. 2.4.2 имеем $\{L\} = L$ (заметим, что инвариант $[\cdot]$ в четности из п. 2.4.1 не дает никакой информации, так как после разведения пустого множества перекрестков у диаграммы L мы снова получаем диаграмму L , которая имеет больше одной уникарсальной компоненты и, следовательно, $[L] = 0$).

Так как граф L не уменьшаем посредством второго движения Рейдемейстера, то в $\mathfrak{G}$ имеет место $L \neq 0$. Далее, для любой диаграммы L' , дающей то же свободное зацепление, что и L , имеет место $\{L'\} = L$. Отсюда следует, что одно из разведений для L' представляет элемент, эквивалентный L в $\mathfrak{G}$, из чего в свою очередь следует, что сам оснащенный 4-граф L получается из L' разведением.

В качестве примера приведем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Свободное зацепление L_1 , приведенное на рис. 15, минимально, а соответствующий ему атом является ориентируемым.

Рис. 15. Минимальный представитель двухкомпонентного зацепления

Ориентируемость соответствующего атома получается из непосредственной проверки наличия структуры источник–сток. Минимальность вытекает из теоремы 9.

Заметим, что примеры минимальных диаграмм оснащенных зацеплений с неориентируемым атомом можно устанавливать проще; простейшим примером является оснащенное зацепление из двух компонент с одной вершиной, принадлежащей обоим компонентам.

Однако такому остову соответствуют неориентируемые атомы, так как остов не имеет структуры источник–сток.

Оказывается, что методы, приведенные выше, позволяют доказывать минимальность и для диаграмм свободных узлов, которым соответствуют ориентируемые атомы. Далее мы покажем, как из этого можно вывести нетривиальность свободных узлов, которым соответствуют ориентируемые атомы, т.е. узлов, задаваемых оснащенными 4-графами, у которых все вершины четны.

4.4. Необратимость свободных зацеплений. Естественной операцией на множестве свободных узлов и зацеплений является обращение ориентации. Введем обозначение: если K – ориентированный свободный узел (оснащенный 4-граф), то через $\bar{K}$ будем обозначать свободный узел (оснащенный 4-граф), полученный из K обращением ориентации. Аналогично, для свободного зацепления L через $\bar{L}$ будем обозначать свободное зацепление, полученное обращением у L всех компонент.

В настоящем пункте мы покажем существование необратимых свободных зацеплений: $L \neq \bar{L}$. Для этого нам придется модифицировать скобку $\{\cdot\}$ таким образом, чтобы входящие в нее в качестве слагаемых графы несли в себе информацию об ориентации исходного зацепления. Через $|K|$, $|L|$ будем обозначать соответственно неориентированные узлы и зацепления, получаемые из K и L “забыванием” ориентации.

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $L = L_1 \cup L_2$ – оснащенный 4-граф, представляющий собой диаграмму ориентированного свободного зацепления из двух компонент L_1 , L_2 , и пусть при этом выполнены следующие условия.

- 1) Все перекрестки зацепления L образованы обеими компонентами L_1 и L_2 .
- 2) К оснащенному 4-графу L не применимо уменьшающее второе движение Рейдемейстера.
- 3) Общее количество перекрестков диаграммы L нечетно.
- 4) Оснащенный ориентированный 4-граф L не изоморфен ни одному из графов $\bar{L}_1 \cup L_2$, $\bar{L}_1 \cup \bar{L}_2$ с учетом ориентации. (Иными словами, замена ориентации компоненты L_1 меняет 4-граф вне зависимости от ориентации компоненты L_2 .)
- 5) Не существует изоморфизма оснащенного 4-графа $|L|$ на себя, переводящего $|L_1|$ в $|L_2|$, а $|L_2|$ в $|L_1|$.

Условия 1), 2) этой теоремы гарантируют минимальность диаграммы L согласно теореме 9.

Ясно, что диаграмма $\bar{L}$ является минимальной также в силу теоремы 9. Тем не менее скобка $\{\cdot\}$ не позволяет различать зацепления L и $\bar{L}$, так как все

слагаемые в скобке представляют собой классы эквивалентности неориентированных 4-графов.

Теперь модифицируем скобку $\{\cdot\}$. Заметим, что для двухкомпонентных зацеплений нечетность количества перекрестков, образованных двумя компонентами, является инвариантным свойством.

Пусть $\mathfrak{H}$ – множество классов эквивалентности $\mathbb{Z}_2$ -линейных комбинаций оснащенных 4-графов с двумя уникальными компонентами, одна из которых ориентирована по двум соотношениям эквивалентности:

- 1) по второму движению Рейдемейстера (которое учитывает ориентацию ориентированной компоненты);
- 2) по соотношению $L \sqcup \bigcirc = 0$, где нулю приравниваются диаграммы, имеющие одну отдельно стоящую тривиальную компоненту.

Для множества свободных зацеплений из двух компонент, имеющих нечетное количество перекрестков между компонентами и одну ориентированную выделенную компоненту, мы построим инвариант $L \mapsto \{L\}_2 \in \mathfrak{H}$.

Если обе компоненты зацепления L являются ориентированными и выполнено условие нечетности количества перекрестков между компонентами, то такому зацеплению, вообще говоря, будут соответствовать два инварианта, $\{L\}_{2,L_1}$ и $\{L\}_{2,L_2}$, в зависимости от выбранной ориентированной компоненты.

Перейдем к построению инварианта $\{\cdot\}_2$.

У двухкомпонентного зацепления L *нечетными* мы будем называть перекрестки, относящиеся к обоим компонентам. Рассмотрим четные разведения для зацепления L . Каждое из них будет представлять собой оснащенный 4-граф, задающий зацепление не менее чем из двух компонент: так как мы разводим лишь четные перекрестки, мы получим некоторый набор компонент, происходящий из компоненты L_1 , и некоторый набор компонент, происходящий из L_2 .

Мы выберем лишь те слагаемые, у которых количество компонент равно двум, при этом компоненту, соответствующую компоненте L_1 , снабдим ориентацией.

Ориентация выбирается согласно следующему правилу. В каждой диаграмме L_s , получающейся разведением всех четных перекрестков диаграммы L , в каждом нечетном перекрестке мы имеем ориентацию компоненты $(L_s)_1$, соответствующую ориентации компоненты L_1 в этом же перекрестке.

Количество таких перекрестков нечетно, и в каждом из них компонента L_1 задает одну из двух ориентаций для новообразованной компоненты $(L_s)_1$. В качестве ориентации для $(L_s)_1$ выберем ту из двух ориентаций, которая встречается нечетное число раз. Формульно это выглядит так:

$$\{L\}_2 = \sum_{\text{с четн., 2 комп.}} ((L_s)_{1,\text{неч. ор.}}, (L_s)_2) \in \mathfrak{H}. \quad (4)$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 11. *Скобка $\{L\}_2$ является инвариантом двухкомпонентных зацеплений с одной фиксированной ориентированной компонентой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим доказательство теоремы 6, обращая внимание на ориентацию и четность.

Во-первых, заметим, что “неориентированная” версия $\{\bar{L}\}_2$ инварианта $\{L\}_2$ получается естественной проекцией инварианта $\{L\}$ на линейное пространство оснащенных 4-графов, задающих двухкомпонентные зацепления.

Таким образом, нам нужно лишь проследить за ориентациями компонент, возникающими в разложении $\{L\}$ при применении движений Рейдемейстера.

При первом движении Рейдемейстера проверка очевидна: перекресток, в нем участвующий, сглаживается и не влияет на ориентацию.

То же самое происходит в случае второго движения Рейдемейстера с двумя четными перекрестками и в случае третьего движения Рейдемейстера с тремя четными перекрестками: соответствующие диаграммы до и после применения движения Рейдемейстера имеют одинаковые наборы нечетных перекрестков с одинаковой ориентацией компоненты L_1 в каждом из них.

В случае второго увеличивающего движения Рейдемейстера $L \rightarrow L'$, применяемого к двум нечетным перекресткам, слагаемые в $\{L\}_2$ и в $\{L'\}_2$ находятся в однозначном соответствии и отличаются друг от друга вторым движением Рейдемейстера. Остается заметить, что у каждого слагаемого из $\{L'\}_2$ оба новых перекрестка задают одну и ту же ориентацию для ориентированной компоненты. Следовательно, от наличия этих перекрестков правило ориентации для ориентированной компоненты соответствующего слагаемого не меняется.

Рассмотрим теперь случай третьего движения Рейдемейстера, в котором участвуют две компоненты. Если из трех ветвей две относятся к неориентированной компоненте L_2 , а одна – к ориентированной компоненте L_1 , то как на диаграмме L (до применения движения), так и на диаграмме L' (после применения движения) мы имеем два последовательных перекрестка на компоненте L_1 , задающих одинаковые ориентации. Следовательно, имеет место совпадение ориентаций у соответствующих слагаемых в $\{L\}_2$ и в $\{L'\}_2$.

Остается наиболее трудный случай, когда ориентированная компонента образует две ветви, а неориентированная компонента образует одну ветвь, при этом единственный четный перекресток, принимающий участие в третьем движении Рейдемейстера, лежит на самопересечении ориентированной компоненты.

Две версии этого движения изображены на рис. 16.

В верхней части рис. 16 видно, что слагаемые из первой пары в правой части и в левой части имеют по два перекрестка каждое, причем ориентации компоненты L_1 в этих перекрестках в обоих случаях противоположны; следовательно, в целом соответствующие слагаемые задают один и тот же элемент из $\mathfrak{H}$ (с учетом второго движения Рейдемейстера).

Что касается второго слагаемого в верхней части рис. 16, то две точки пересечения (левая и правая) компоненты L_1 с компонентой L_2 в левой части задают те же самые ориентации, что и две точки пересечения в правой части; следовательно, и в этом случае правило для определения ориентации компоненты из $\{L\}_2$ в правой части и в левой части одно и то же.

В нижней части рис. 16 первое слагаемое в левой части имеет два перекрестка, ориентированных одинаково; следовательно, их совместный вклад в определение ориентации компоненты L_1 можно не учитывать. То же самое происходит и в первом слагаемом в правой части.

Рис. 16. Поведение ориентаций при третьем движении Рейдемейстера

В нижней части рис. 16 второе слагаемое в левой части имеет две точки пересечения a, b между компонентами L_1, L_2 , а второе слагаемое в правой части имеет две точки пересечения a', b' между соответствующими компонентами. Заметим, что ориентация компоненты L_1 в точке a противоположна ориентации в точке a' , а ориентация в точке b противоположна ориентации в точке b' . Если ориентации компоненты L_1 в точках a и b в левой части согласованы, то согласованы и соответствующие ориентации в правой части. Если же ориентации в точках a и b различны, то как в правой, так и в левой части мы имеем пару перекрестков, дающих обе возможные ориентации для компоненты L_1 . Суммируя сказанное, приходим к выводу, что во всех случаях ориентация соответствующего слагаемого в $\{L\}_2$ будет одна и та же.

Тем самым, мы показали, что скобка $\{L\}_2$ инвариантна относительно движений Рейдемейстера как элемент из $\mathfrak{H}$. Теорема 11 доказана.

Из определения, заданного формулой (4), следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *Если у зацепления $L = L_1 \cup |L_2|$ все перекрестки принадлежат одной компоненте, то $\{L_1 \cup |L_2|\}_2 = L_1 \cup |L_2|$ в $\mathfrak{H}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. Пусть зацепление L удовлетворяет условиям этой теоремы. Предположим, что зацепление L эквивалентно зацеплению $\bar{L}_1 \cup \bar{L}_2$. Применяя скобку $\{\cdot\}$ к $|L|$, мы видим, что движения Рейдемейстера не могут перевести зацепление $|L|$ в себя, чтобы поменялись местами компоненты L_1 и L_2 (свойство 5).

Далее, $L_1 \cup |L_2|$ не эквивалентно как двухкомпонентное свободное зацепление с выделенной ориентированной компонентой зацеплению $\bar{L}_1 \cup |L_2|$. Переходя к $\{\cdot\}_2$, мы видим, что $L_1 \cup |L_2| \neq \bar{L}_1 \cup |L_2|$ в $\mathfrak{H}$.

Поэтому L не эквивалентно зацеплению $\bar{L}$ ни при перестановке компонент L_1 и L_2 (что следует из свойств скобки $\{\cdot\}$), ни при перемене этих компонент местами (что следует из свойств новой скобки $\{\cdot\}$).

Примером к теореме 10 может служить свободное зацепление, изображенное на рис. 17. Все посыпки теоремы 10 легко проверяются.

Рис. 17. Пример необратимого свободного зацепления

§ 5. Скобка Голдмана и коскобка Тураева

Оказывается, что на множестве пар (двумерная замкнутая ориентированная поверхность, кривая на этой поверхности) имеются интересные операции, инвариантные относительно движений Рейдемейстера. А именно пусть S – фиксированная двумерная поверхность (мы будем считать эту поверхность ориентированной, в противном случае все рассуждения проходят с коэффициентами из $\mathbb{Z}_2$).

Все кривые мы будем считать погруженными посредством погружения общего положения. Такая кривая представляет собой вложение оснащенного 4-графа. Две погруженные кривые в общем положении гомотопны, если и только если одна из них получается из другой композицией движений Рейдемейстера (естественно, в случае, когда графы вложены в поверхность, движения Рейдемейстера учитывают структуру этой поверхности в отличие от движений Рейдемейстера свободных графов).

Пусть Γ_S – множество всех линейных комбинаций гомотопических классов кривых на поверхности S с коэффициентами из основного поля F (поле предполагается произвольным в случае ориентированной поверхности S или полем характеристики 2 в случае неориентируемой S). Кривые предполагаются ориентированными.

Пусть, далее, Γ_S^2 – линейное пространство F -линейных комбинаций гомотопических классов пар ориентированных кривых на S , а $\Gamma_{S,0}^2$ – факторпространство пространства Γ_S^2 по соотношениям вида $K \sqcup \bigcirc = 0$ (т.е. нулю полагаются равными все зацепления, имеющие диаграмму на S , состоящую из двух связанных компонент, одна из которых тривиальна).

Перейдем к построению инвариантных отображений.

5.1. Отображение $m: \Gamma_S^2 \rightarrow \Gamma_S$. Пусть γ_1, γ_2 – пара ориентированных кривых, погруженных в S в общем положении, и пусть $X_1, \dots, X_N$ – перекрестки из $\gamma_1 \cap \gamma_2$ (в силу предположения общности положения они трансверсальные и их конечное число). Пусть $m(\gamma_1, \gamma_2)_k$ – ориентированная кривая, полученная разведением $\gamma_1 \cup \gamma_2$ в перекрестке X_k способом, согласованным с ориентацией. Положим

$$m(\gamma_1, \gamma_2) = \sum_k \text{sign}_k(1, 2) m(\gamma_1, \gamma_2)_k \in \Gamma_S, \quad (5)$$

где сумма берется по всем номерам перекрестков $k = 1, \dots, N$, а знак $\text{sign}(1, 2)$ в перекрестке k обозначает знак перекрестка, т.е. равен 1, если базис, образованный касательными векторами $(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2)$, положителен, и равен -1 в противном случае. Эта сумма рассматривается как элемент из Γ_S .

ТЕОРЕМА 12. *Отображение $m: \Gamma_S^2 \rightarrow \Gamma_S$ корректно определено, т.е. если пара (γ_1, γ_2) гомотопна паре (γ'_1, γ'_2) , то $m(\gamma_1, \gamma_2) = m(\gamma'_1, \gamma'_2)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 9. В случае оснащенных зацеплений операция (5) определена только над полем характеристики 2, так как знак $\text{sign}_k(1, 2)$ можно определить только при наличии ориентированной поверхности S , которой нет в случае свободных зацеплений. Более того, не имея поверхности, мы уже не можем определить отображение m для произвольной пары кривых, а можем определить его лишь для двухкомпонентного свободного зацепления (не имея поверхности, мы не имеем и точек пересечения кривых, заданных абстрактно).

5.2. Алгебра Ли Голдмана. Отображение m можно трактовать несколько иначе. Имея пару кривых γ_1, γ_2 (фактически мы говорили о паре гомотопических классов кривых на S), мы можем считать, что задано отображение

$$[\cdot, \cdot]: \gamma_1, \gamma_2 \mapsto [\gamma_1, \gamma_2] = \sum_k \text{sign}_k(1, 2) m(\gamma_1, \gamma_2), \quad (6)$$

при этом при перемене мест γ_1 и γ_2 мы, естественно, придем к замене знака: $[\gamma_1, \gamma_2] = -[\gamma_2, \gamma_1]$.

Легко проверяется также, что операция $[\cdot, \cdot]$ удовлетворяет тождеству Якоби: для любой тройки ориентированных кривых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ имеем

$$[[\gamma_1, \gamma_2], \gamma_3] + [[\gamma_2, \gamma_3], \gamma_1] + [[\gamma_3, \gamma_1], \gamma_2] = 0.$$

Таким образом, множество Γ_S обладает структурой алгебры Ли.

5.3. Отображения $\Gamma_S \rightarrow \Gamma_{S,0}^2$ и $\Gamma_S \rightarrow \Gamma_S \otimes \Gamma_S / \langle \cdot \rangle$. Коскобка Тураева.

Пусть γ – ориентированная кривая общего положения на ориентированной поверхности S , и пусть $X_1, \dots, X_N$ – точки самопересечения кривой S . Тогда в результате разведения кривой γ в перекрестке X_i способом, согласованным с ориентацией, мы получим две кривые, одну из которых $(\gamma_{i,L})$ естественно называть *левой*, а другую $(\gamma_{i,R})$ – *правой*. Следовательно, мы можем определить отображение

$$\gamma \mapsto \sum_i (\gamma_{i,L} \otimes \gamma_{i,R} - \gamma_{i,R} \otimes \gamma_{i,L}). \quad (7)$$

Это отображение является кососимметричным, но оно определено не вполне корректно: если мы применим к кривой γ первое движение Рейдемейстера, увеличивающее количество перекрестков на единицу, то в правой части формулы (7) возникнут дополнительные слагаемые вида $\gamma_0 \otimes \gamma' - \gamma' \otimes \gamma_0$, где γ_0 – стягиваемая кривая, а γ' – кривая, гомотопная кривой γ .

Таким образом, чтобы коскобка была определена корректно, нам нужно профакторизовать множество кривых по соотношению, согласно которому стягиваемая кривая равна нулю. Те же соображения позволяют построить инвариантное отображение (кривая $\rightarrow$ пара кривых), не задающее структуры коалгебры, поэтому достаточно рассмотреть отображение, заданное по формуле

$$\Delta: \gamma \rightarrow \sum_s \gamma_{X_s} \in \Gamma_{S,0}^2, \quad (8)$$

где γ_{X_s} означает пару кривых на поверхности S , полученных разведением кривой γ в перекрестке X_s , согласованным с ориентацией, а результат отображения γ рассматривается как элемент из $\Gamma_{S,0}^2$.

Тем самым, мы получили отображение $\Delta: \Gamma_S \rightarrow \Gamma_{S,0}^2$, которое в дальнейшем будем называть *дельтой Тураева*.

Аналогично определим отображение дельты Тураева из $\mathfrak{G}$ в $\tilde{\mathfrak{G}}$: каждому оснащенному 4-графу K с одной уникурсальной компонентой мы сопоставим линейную комбинацию $\sum_i L_i$ (над $\mathbb{Z}_2$) оснащенных 4-графов с двумя уникурсальными компонентами каждый, при этом будем рассматривать полученную сумму как элемент из $\tilde{\mathfrak{G}}$.

§ 6. Применения дельты Тураева

В п. 4.3 мы показали, как четность (в смысле п. 2.4.1 или в смысле п. 2.4.2) можно применять для доказательства минимальности диаграмм свободных узлов. Однако первый пример (о минимальности нечетного несократимого узла) был применим лишь к свободным узлам, гауссовы диаграммы которых имеют

все нечетные хорды. Использовался инвариант $[\cdot]$, который ничего не дает для свободных узлов с ориентируемыми атомами.

Далее был рассмотрен пример двухкомпонентного свободного зацепления, которому соответствуют ориентируемые атомы. Посредством инварианта $\{\cdot\}$, примененного для четности из п. 2.4.2, была доказана минимальность этой диаграммы L в сильном смысле: мы доказали, что у каждого оснащенного 4-графа L' , задающего то же зацепление, что и L , найдется разведение, представляющее собой граф, изоморфный L как оснащенный 4-граф.

Теперь мы приведем пример минимальной диаграммы свободного узла, которой соответствует ориентируемый атом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Диаграмма K_1 свободного узла, изображенного на рис. 18, минимальна.*

Рис. 18. Минимальная гауссова диаграмма

Ориентируемость атомов, соответствующих диаграмме K_1 , легко проверяется прямым построением структуры источник–сток.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 9. Рассмотрим $\Delta(K_1) \in \tilde{\mathfrak{G}}$.

По построению $\Delta(K_1)$ состоит из девяти слагаемых (так как K_1 имеет девять вершин), и каждое из этих слагаемых является двухкомпонентным зацеплением. Эти слагаемые получаются разведениями диаграммы K_1 в перекрестках. Одно из этих слагаемых (полученное разведением по хорде x) представляет собой двухкомпонентное зацепление L_1 , изображенное на рис. 15. Обозначим остальные слагаемые через M_i , $i = 1, \dots, 8$.

Таким образом, $\Delta(K_1) = L_1 + \sum_i M_i$.

Мы утверждаем, что ни одно из восьми слагаемых M_i не эквивалентно свободному зацеплению L_1 .

Действительно, исходная диаграмма узла K_1 имеет девять хорд, при этом ровно одна хорда этой диаграммы (x) зацеплена со всеми восемью остальными хордами. Таким образом, взяв разведение для K_1 вдоль любой из хорд, отличной от x , мы получим оснащенный 4-граф (скажем, M_i), у которого по крайней мере один перекресток принадлежит лишь одной компоненте. Следовательно, согласно определению инварианта $\{\cdot\}$ относительно четности из п. 2.4.2

мы видим, что $\{M_i\}$ представляет собой сумму элементов из $\tilde{\mathfrak{G}}$, представимых диаграммами, имеющими строго меньше восьми перекрестков. Следовательно, $M_i \neq L_1$.

Таким образом, мы доказали, что в разложении $\{\Delta(K_1)\}$ имеется ровно одна диаграмма, минимальный представитель которой в $\tilde{\mathfrak{G}}$ имеет ровно восемь перекрестков, а все остальные диаграммы имеют минимальные представители в $\tilde{\mathfrak{G}}$ менее чем с восемью перекрестками. Принимая во внимание инвариантность отображения $\{\cdot\}$, мы видим, что любая диаграмма K_1 свободного узла K имеет по крайней мере девять перекрестков (ибо $\Delta(K)$ имеет по крайней мере одно слагаемое не менее чем с восемью перекрестками).

Более того, мы на самом деле доказали, что любая диаграмма свободного узла K имеет по крайней мере одно разведение, представляющее собой L_1 как оснащенный 4-граф.

6.1. Необратимость свободных узлов. Подобно тому как нетривиальность свободных узлов можно доказать исходя из нетривиальности свободных зацеплений, необратимость свободных узлов можно вывести из необратимости свободных зацеплений. Для этого нужно лишь обратить внимание на то, что дельта Тураева согласована с ориентацией.

Рис. 19. Пример необратимого свободного узла

ТЕОРЕМА 13. *Свободный узел K_2 , изображенный на рис. 19, необратим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко убедиться, что $\Delta(K) = L + \sum_i L_i$, где L – свободное зацепление, изображенное на рис. 17, а L_i – свободные зацепления из двух компонент, у каждого из которых имеется по крайней мере один перекресток, образованный двумя ветвями одной и той же компоненты. Действительно, у хордовой диаграммы, изображенной на рис. 19, имеется ровно одна хорда x , зацепленная со всеми остальными хордами.

Отсюда следует, что $\{\Delta(K)\}_2 \neq \{\Delta(K)\}_2$.

6.2. Четные и нечетные аналоги скобки Голдмана и коскобки Тураева. Пусть в некоторой теории узлов $\mathcal{H}$ задана некоторая четность. Мы будем иметь дело в основном с теорией свободных узлов и четностью из п. 2.4.1.

Рассмотрим множества $\tilde{\Gamma}_S$ и $\tilde{\Gamma}_S^2$. Определим на них отображения $\Delta_{\text{чет}}$ и $\Delta_{\text{неч}}$: $\tilde{\Gamma}_S \rightarrow \tilde{\Gamma}_S^2$.

Пусть K – оснащенный 4-граф с единственной уникурсальной компонентой. Положим

$$\Delta_{\text{чет}}(K) = \sum_{S_{\text{чет}}} K_s, \quad \Delta_{\text{неч}}(K) = \sum_{S_{\text{неч}}} K_s. \quad (9)$$

Здесь в первом случае берется сумма всех оснащенных 4-графов, получающихся разведением одной четной вершины графа X (сумма берется по всем четным вершинам) способом, согласованным с ориентацией. Во втором случае сумма берется по всем нечетным вершинам, и также выбираются разведения, согласованные с ориентацией.

При применении каждого из отображений $\Delta_{\text{чет}}$ и $\Delta_{\text{неч}}$ к конкретному оснащенному 4-графу K мы получаем сумму, которую можно рассматривать как элемент из $\tilde{\Gamma}_S^2$.

Отметим, что выражение “способ, согласованный с ориентацией” имеет смысл и для неориентированных оснащенных 4-графов: нам нужно выбрать тот способ разведения в вершине, который приводит к двухкомпонентному оснащенному зацеплению. Из двух способов разведения ровно один согласован с любой из двух ориентаций данного свободного узла.

Имеет место

ТЕОРЕМА 14. *Отображения $\Delta_{\text{чет}}$ и $\Delta_{\text{неч}}$ корректно определены как отображения из $\mathfrak{G}$ в $\tilde{\mathfrak{G}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства заметим следующее. Если оснащенные 4-графы K и K' отличаются применением первого движения Рейдемейстера, то имеет место почленное равенство $\Delta_{\text{неч}}(K) = \Delta_{\text{неч}}(K')$: количество нечетных перекрестков у K совпадает с количеством нечетных перекрестков у K' , следовательно, имеет место взаимно однозначное соответствие между слагаемыми в разложениях $\Delta_{\text{неч}}(K')$ и $\Delta_{\text{неч}}(K)$. Соответствующие слагаемые получаются друг из друга применением одного первого движения Рейдемейстера. В случае $\Delta_{\text{чет}}$ в разложении у K' количество слагаемых на единицу больше, чем в разложении у K . Это “лишнее” слагаемое в K' представляет собой двухкомпонентное зацепление с одной отдельно стоящей тривиальной компонентой. Таким образом, это слагаемое тривиально в $\tilde{\mathfrak{G}}$. Все остальные слагаемые в $\Delta_{\text{чет}}(K')$ находятся во взаимно однозначном соответствии со слагаемыми из $\Delta_{\text{чет}}(K)$, при этом соответствующие слагаемые изоморфны как оснащенные 4-графы.

Пусть теперь K' получается из K применением второго движения Рейдемейстера, причем количество перекрестков у K' на два больше, чем количество перекрестков у K . Эти два “лишних” перекрестка имеют одинаковую четность. Если оба перекрестка нечетные, то в разложениях $\Delta_{\text{чет}}(K)$ и $\Delta_{\text{чет}}(K')$ количества слагаемых одинаковы, и все соответствующие слагаемые получаются друг из друга применением второго движения Рейдемейстера. Если оба перекрестка четные, то в $\Delta_{\text{чет}}(K')$ на три слагаемых больше, чем в $\Delta_{\text{чет}}(K)$, но два из этих трех слагаемых тождественно совпадают, а одно имеет тривиальную окружность, поэтому все новые слагаемые сокращаются в $\tilde{\mathfrak{G}}$. Все остальные

слагаемые в $\Delta_{\text{чет}}(K)$ находятся во взаимно однозначном соответствии со слагаемыми из $\Delta_{\text{чет}}(K')$, при этом соответствующие слагаемые представляют собой изоморфные оснащенные 4-графы.

Аналогично, если мы рассматриваем случай $\Delta_{\text{неч}}$, то в случае двух четных перекрестков мы получим два “лишних” слагаемых в $\Delta_{\text{неч}}(K')$ по сравнению с $\Delta_{\text{неч}}(K)$; эти два новых слагаемых будут сокращаться; в случае двух нечетных перекрестков мы получим взаимно однозначное соответствие между слагаемыми. Таким образом, $\Delta_{\text{неч}}(K) = \Delta_{\text{неч}}(K')$.

Если K' получается из K третьим движением Рейдемейстера, то имеет место взаимно однозначное соответствие между перекрестками оснащенного 4-графа K и перекрестками оснащенного 4-графа K' . При этом четные перекрестки соответствуют четным, а нечетные – нечетным.

Если разводим диаграммы K и K' в перекрестке X (и соответствующем ему перекрестке, который мы также обозначим через X), при этом перекресток X не участвует в третьем движении Рейдемейстера, то, очевидно, что соответствующие оснащенные двухкомпонентные свободные зацепления будут совпадать, так как представляющие их графы будут получаться друг из друга “тем же самым” третьим движением Рейдемейстера, которое преобразует K в K' .

Если же этот перекресток X – один из трех, участвующих в третьем движении Рейдемейстера, то легко видеть, что разведение диаграммы K в перекрестке X либо совпадает с разведением диаграммы K' в перекрестке X' (соответствующем X), либо отличается от него применением двух движений Рейдемейстера, одно из которых уменьшает количество перекрестков на два, а второе – увеличивает количество перекрестков на два. Теорема 14 доказана.

Аналогично “коумножающим” отображениям $\Delta_{\text{чет}}$, $\Delta_{\text{неч}}$ строятся “умножающие” отображения $m_{\text{чет}}$, $m_{\text{неч}}$, при этом в качестве пространства, на котором эти отображения определены, можно рассматривать более широкое пространство, чем $\mathfrak{B}$: равенство нулю диаграмм, имеющих отдельно стоящую тривиальную компоненту, не является более обязательным в случае “умножений”.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Было бы интересно рассмотреть комбинации операций Δ , $\Delta_{\text{чет}}$ и $\Delta_{\text{неч}}$, взятых в разных порядках, и проанализировать, какие зацепления (свободные зацепления) могут получиться из того или иного узла при рассмотрении на каждом шаге той или иной четности.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Для определения отображения Δ не требуется структура проход–переход в перекрестках (которая имеется в случае виртуальных узлов). Вопрос о том, как применять эту структуру для уточнения инвариантов типа Δ , мы обсудим в дальнейших публикациях.

§ 7. Скобка Кауфмана

В настоящем параграфе мы построим аналог скобки Кауфмана $\langle \cdot \rangle$ для теорий узлов с четностью, который обобщает обычную скобку Кауфмана в случае классических узлов. Имеется много усиленных скобки Кауфмана на случай виртуальных узлов; см., например, статьи [8], [25]–[27] и ссылки в них.

Мы явно выпишем все формулы в случае теории виртуальных узлов. Изложенное ниже обобщение скобки Кауфмана работает также и в других случаях, когда у каждого перекрестка имеется естественный способ определения одного из разведений как разведения типа A , а другого разведения – как разведения типа B , при этом движения Рейдемейстера в естественном смысле согласованы с этими правилами. Мы не будем проводить уточнения; отметим, что такие обобщения проходят, например, для теории граф-зацеплений, (см. [4], [5]).

Напомним определение *стандартной скобки Кауфмана*: для диаграммы K положим

$$\langle K \rangle = \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)-1}, \quad (10)$$

где $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ соответственно равны количеству перекрестков (вершин), разведенных способом A : $\times \rightarrow \succ$ и способом B : $\times \rightarrow \swarrow$, а $\gamma(s)$ означает количество окружностей (уникурсальных компонент) в состоянии s (после разведения всех перекрестков). Отметим, что в определении скобки Кауфмана разведению подвергаются все перекрестки. Таким образом, значение скобки Кауфмана представляет собой полином Лорана переменной a .

Рассмотрим свободный модуль $\mathcal{F}$ над кольцом $\mathbb{Z}[a, a^{-1}]$, порожденный всеми оснащенными 4-графами.

Пусть $\widetilde{\mathcal{F}}$ – модуль, полученный факторизацией модуля $\mathcal{F}$ по двум соотношениям:

- 1) по второму движению Рейдемейстера;
- 2) по соотношению $L \sqcup \bigcirc = (-a^2 - a^{-2})L$, где L означает произвольный оснащенный 4-граф, а $L \sqcup \bigcirc$ – несвязную сумму графа L с отдельно стоящей окружностью.

Алгоритмическая распознаваемость элементов из $\widetilde{\mathcal{F}}$ (наличие у них единственного минимального представителя) доказывается полностью аналогично случаю $\mathfrak{G}$.

Теория виртуальных узлов обладает четностью в смысле п. 2.4.1; эта четность в свою очередь удовлетворяет аксиомам 1, 2, 3, а), 3, б), 4. Для каждой диаграммы узла в каждом классическом перекрестке мы будем использовать тот факт, что имеются разведения различных видов A и B (мы не будем выписывать аксиоматику, которой должны подчиняться разведения типов A и B для перекрестков диаграмм, участвующих в движениях Рейдемейстера).

Построим теперь *четную скобку Кауфмана*, принимающую значение в модуле $\mathcal{F}$, следующим образом:

$$\langle K \rangle_{\text{чет}} = \sum_{s_{\text{чет}}} a^{\alpha(s)-\beta(s)} K_s, \quad (11)$$

где K_s – свободное зацепление, получающееся разведением узла K согласно состоянию s и рассмотренное как элемент из $\mathcal{F}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Имеется естественное отображение $\widetilde{\mathcal{F}} \rightarrow \widetilde{\mathfrak{G}}$, получаемое факторизацией кольца коэффициентов: $\mathbb{Z}[a, a^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}_2$, где $a \mapsto 1, 2 \mapsto 0$.

Таким образом, инвариант $\{\cdot\}_{\text{чет}}$ будет представлять собой частный случай инварианта $\langle \cdot \rangle$.

ТЕОРЕМА 15. Скобка $\langle \cdot \rangle_{\text{чет}}$ является инвариантом узлов из теории $\mathcal{K}$ относительно движений Рейдемейстера Ω_2, Ω_3 . При применении движения Ω_1 значение $\langle \cdot \rangle$ умножается на $(-a)^{\pm 3}$, при этом следующая нормировка для $\langle \cdot \rangle$ инвариантна относительно всех трех движений Рейдемейстера: $X_{\text{чет}}(K) = (-a)^{-3w(K)} \langle K \rangle_{\text{чет}}$, где $w(K)$ обозначает число закрученности для ориентированной диаграммы K .

Назовем $X(K)$ четным полиномом Джонса для узла K .

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Четный полином Джонса является обобщением инварианта $\{ \cdot \}$ для любой теории узлов с четностью и правилом разведений перекрестков A и B . Переход осуществляется посредством отображения $\mathbb{Z}[a, a^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}_2$: $a \mapsto 1, 2 \mapsto 0$.

Кроме того, для четности в смысле п. 2.4.1 полином $X_{\text{чет}}(K)$ является обобщением обычного полинома Джонса для классических узлов и для узлов, диаграммы которых имеют ориентируемые атомы. В этом случае в определении скобки $\langle \cdot \rangle_{\text{чет}}$ все элементы K_s представляют собой тривиальные зацепления, которые в модуле $\widetilde{\mathcal{F}}$ являются кратными тривиального узла с коэффициентами, равными соответствующим степеням полинома $(-a^2 - a^{-2})$. Считая образующую модуля $\mathcal{F}$, порожденную тривиальным узлом, единицей, мы получаем стандартный полином Джонса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 15. Это доказательство полностью аналогично доказательству инвариантности скобки $\{ \cdot \}$. Пусть K' получается из K применением одного из трех движений Рейдемейстера.

При движении Ω_1 имеем (в $\mathcal{F}$)

$$\langle \text{⋈} \rangle_{\text{чет}} = a \langle \text{⋈} \rangle_{\text{чет}} + a^{-1} \langle \text{⋈} \rangle_{\text{чет}} = (a + a^{-1}(-a^2 - a^{-2})) \langle \text{⋈} \rangle_{\text{чет}} = (-a^{-3}) \langle \text{⋈} \rangle_{\text{чет}}. \quad (12)$$

Аналогично для другого случая первого движения Рейдемейстера имеем

$$\langle \text{⋈} \rangle_{\text{чет}} = (-a^3) \langle \text{⋈} \rangle_{\text{чет}}. \quad (13)$$

При применении второго движения Рейдемейстера нужно различать два случая. Если оба перекрестка, принимающих участие во втором движении Рейдемейстера, являются нечетными, то имеется взаимно однозначное соответствие между перекрестками диаграмм K и K' , из которого вытекает взаимно однозначное соответствие между слагаемыми в $\langle K \rangle_{\text{чет}}$ и $\langle K' \rangle_{\text{неч}}$. При этом соответствующие слагаемые получаются друг из друга применением второго движения Рейдемейстера и, следовательно, представляют собой одинаковые элементы из $\mathcal{F}$.

В случае двух четных перекрестков, принимающих участие во втором движении Рейдемейстера, проходит стандартное доказательство инвариантности для обычной скобки Кауфмана относительно второго движения Рейдемейстера. Как и в стандартной скобке Кауфмана, три слагаемых сокращаются в $\mathcal{F}$ за счет коэффициентов a^2, a^{-2} и $-a^2 - a^{-2}$. В случае третьего движения Рейдемейстера нужно различать случаи, когда количество четных перекрестков, участвующих в третьем движении, равно единице, и когда количество четных перекрестков, участвующих в движении, равно трем.

Если количество четных перекрестков в диаграмме K (или K'), участвующих в третьем движении Рейдемейстера, равно единице, то после разведения диаграмм K и K' в соответствующих перекрестках x и x' мы получим суммы

$$\langle K \rangle_{\text{чет}} = a \langle K \rangle_{\text{чет},+} + a^{-1} \langle K \rangle_{\text{чет},-}, \quad \langle K' \rangle_{\text{чет}} = a \langle K' \rangle_{\text{чет},+} + a^{-1} \langle K' \rangle_{\text{чет},-},$$

где индексы плюс (минус) отвечают за положительные (отрицательные) разведения в перекрестках x и x' . Легко видеть, что соответствующие слагаемые для K и K' в одном из разведений (+ или −) совпадают, а в другом отличаются применением второго движения Рейдемейстера к соответствующим графам, т.е. равны в $\widetilde{\mathcal{F}}$.

В случае когда все три перекрестка диаграммы K , участвующие в третьем движении Рейдемейстера $K \rightarrow K'$, являются четными, доказательство дословно повторяет доказательство инвариантности скобки Кауфмана относительно третьего движения Рейдемейстера в случае классических и виртуальных узлов.

Теорема 15 доказана.

Список литературы

- [1] L. H. Kauffman, “Virtual knot theory”, *European J. Combin.*, **20**:7, (1999), 663–691.
- [2] L. H. Kauffman, “A self-linking invariant of virtual knots”, *Fund. Math.*, **184**, (2004), 135–158.
- [3] M. Goussarov, M. Polyak, O. Viro, “Finite-type invariants of classical and virtual knots”, *Topology*, **39**:5, (2000), 1045–1068.
- [4] D. P. Ilyutko, V. O. Manturov, “Introduction to graph-link theory”, *J. Knot Theory Ramifications*, **18**:6, (2009), 791–823.
- [5] Д. П. Ильютко, В. О. Мантуров, “Граф-зацепления”, *Докл. РАН*, **428**:5, (2009), 591–594; англ. пер.: D. P. Ilyutko, V. O. Manturov, “Graph-links”, *Dokl. Math.*, **80**:2, (2009), 739–742.
- [6] L. Traldi, L. Zulli, “A bracket polynomial for graphs, I”, *J. Knot Theory Ramifications*, **18**:12, (2009), 1681–1709, arXiv:0808.3392.
- [7] V. Turaev, “Topology of words”, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **95**:2, (2007), 360–412.
- [8] V. O. Manturov, *On free knots*, arXiv:0901.2214.
- [9] V. O. Manturov, *On free knots and links*, arXiv:0902.0127.
- [10] V. O. Manturov, *Free knots are not invertible*, arXiv:0909.2230.
- [11] A. Gibson, *Homotopy invariants of Gauss words*, arXiv:0902.0062.
- [12] Д. П. Ильютко, В. О. Мантуров, “Кобордизмы свободных узлов”, *Докл. РАН*, **429**:4, (2009), 439–441; англ. пер.: D. P. Ilyutko, V. O. Manturov, “Cobordisms of free knots”, *Dokl. Math.*, **80**:3, (2009), 844–846.
- [13] V. O. Manturov, *Parity and cobordisms of free knots*, arXiv:1001.2827.
- [14] V. O. Manturov, *Free knots and parity*, arXiv:math.gt/0912.5348; *Proceedings of the Advanced Summer School on Knot Theory* (Trieste), World Scientific, Hackensack, NJ–London–Singapore (to appear).
- [15] W. M. Goldman, “Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations”, *Invent. Math.*, **85**:2, (1986), 263–302.
- [16] V. G. Turaev, “Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **24**:6, (1991), 635–704.

- [17] A. T. Fomenko, “The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom”, *Topological classification of integrable systems*, Adv. Soviet Math., **6**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 1–35.
- [18] А. Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, *Докл. АН СССР*, **287**:5, (1986), 1071–1075; англ. пер.: A. T. Fomenko, “Morse theory of integrable Hamiltonian systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **33**:2, (1986), 502–506.
- [19] А. Т. Фоменко, “Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:6, (1986), 1276–1307; англ. пер.: A. T. Fomenko, “The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability”, *Math. USSR-Izv.*, **29**:3, (1987), 629–658.
- [20] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике”, *Докл. АН СССР*, **294**:2, (1987), 283–287; англ. пер.: A. T. Fomenko, H. Zieschang, “On the topology of the three-dimensional manifolds arising in Hamiltonian mechanics”, *Soviet Math. Dokl.*, **35**:2, (1987), 529–534.
- [21] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Изоэнергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий”, *УМН*, **43**:1, (1988), 5–22; англ. пер.: S. V. Matveev, A. T. Fomenko, “Constant energy surfaces of Hamiltonian systems, enumeration of three-dimensional manifolds in increasing order of complexity, and computation of volumes of closed hyperbolic manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **43**:1, (1988), 3–24.
- [22] В. О. Мантуров, *Теория узлов*, РХД, М.–Ижевск, 2005; англ. пер.: V. O. Manturov, *Knot theory*, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2004.
- [23] В. О. Мантуров, “Доказательство гипотезы В. А. Васильева о планарности сингулярных зацеплений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:5, (2005), 169–178; англ. пер.: V. O. Manturov, “A proof of Vassiliev’s conjecture on the planarity of singular links”, *Izv. Math.*, **69**:5, (2005), 1025–1033.
- [24] В. О. Мантуров, “Вложения четырехвалентных оснащенных графов в двумерные поверхности”, *Докл. РАН*, **424**:3, (2009), 308–310; англ. пер.: V. O. Manturov, “Embeddings of 4-valent framed graphs into 2-surfaces”, *Dokl. Math.*, **79**:1, (2009), 56–58.
- [25] H. A. Dye, L. H. Kauffman, “Virtual crossing number and the arrow polynomial”, *J. Knot Theory Ramifications*, **18**:10, (2009), 1335–1357.
- [26] Y. Miyazawa, “Magnetic graphs and an invariant for virtual links”, *J. Knot Theory Ramifications*, **15**:10, (2006), 1319–1334.
- [27] M. O. Bourgain, “Twisted link theory”, *Algebr. Geom. Topol.*, **8**:3, (2008), 1249–1279, arXiv:math/0608233.

В. О. Мантуров (V. O. Manturov)

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: vomanturov@yandex.ru

Поступила в редакцию

07.05.2009 и 21.01.2010