Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, О гипотезе Чилиберто, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 7, 137–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7575>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 08:41:45

УДК 512.7

И. А. Чельцов

О гипотезе Чилиберто

В работе показано, что трехмерная гиперповерхность степени d , имеющая не более чем обыкновенные двойные точки, является факториальной, если она не содержит плоскостей, а количество ее особых точек не превосходит $(d - 1)^2$.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: гиперповерхности, обыкновенные двойные точки, факториальность.

§ 1. Введение

Пусть X – нормальная гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени $d \geq 3$, которая имеет не более чем изолированные особые точки. Тогда X может быть задано уравнением

$$f(x, y, z, t, u) = 0 \subset \mathbb{P}^4 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, u]),$$

где $f(x, y, z, t, u)$ – некоторый однородный многочлен степени d .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Гиперповерхность X принято называть *факториальной*, если каждый дивизор Вейля на гиперповерхности X является дивизором Картье.

Хорошо известно, что следующие условия эквивалентны:

- гиперповерхность X является факториальной;
- каждая поверхность $S \subset X$ высекается на X гиперповерхностью в $\mathbb{P}^4$;
- факторкольцо

$$\mathbb{C}[x, y, z, t, u] / \langle f(x, y, z, t, u) \rangle$$

является кольцом с однозначным разложением на множители.

ПРИМЕР 1.2. Предположим, что гиперповерхность X задана уравнением

$$xg(x, y, z, t, u) + yh(x, y, z, t, u) = 0 \subset \mathbb{P}^4 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, u]),$$

где g и h – общие однородные многочлены степени $d - 1$. Тогда

$$|\text{Sing}(X)| = (d - 1)^2,$$

гиперповерхность X имеет только изолированные обыкновенные двойные точки, гиперповерхность X содержит плоскость $x = y = 0$ и гиперповерхность X не факториальна.

ПРИМЕР 1.3. Предположим, что гиперповерхность X задана уравнением

$$xg(x, y, z, t, u) + (yz + tu)h(x, y, z, t, u) = 0 \subset \mathbb{P}^4 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, u]),$$

где g – общий однородный многочлен степени $d - 1$, а h – общий однородный многочлен степени $d - 2$. Тогда

$$|\text{Sing}(X)| = 2(d - 1)(d - 2),$$

гиперповерхность X имеет только изолированные обыкновенные двойные точки, гиперповерхность X содержит квадрику $x = yz + tu = 0$ и гиперповерхность X не факториальна.

Естественно сделать следующее предположение (см. [1]).

ГИПОТЕЗА 1.4. Гиперповерхность X факториальна, если выполнено неравенство

$$|\text{Sing}(X)| \leq 2(d - 1)(d - 2),$$

гиперповерхность X имеет только изолированные обыкновенные двойные точки и гиперповерхность X не содержит плоскостей и двумерных квадрик.

Утверждение гипотезы 1.4 доказано только при $d \leq 4$ (см. [2], [3]), однако имеет место следующий ослабленный вариант гипотезы 1.4 (см. [2] и [4]–[9]).

ТЕОРЕМА 1.5. *Гиперповерхность X факториальна, если выполнено неравенство*

$$|\text{Sing}(X)| < (d - 1)^2,$$

а гиперповерхность X имеет только изолированные обыкновенные двойные точки.

Недавно Youngho Woo анонсировал следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.6. *Гиперповерхность X факториальна, если выполнено неравенство*

$$|\text{Sing}(X)| \leq (d - 1)^2,$$

гиперповерхность X имеет только изолированные обыкновенные двойные точки и гиперповерхность X не содержит плоскостей.

Цель настоящей работы – дать независимое геометрическое доказательство теоремы 1.6, которое опирается на результаты работ [8] и [9]. Структура настоящей работы следующая: в § 2 приведем несколько вспомогательных результатов; в § 3 докажем теорему 3.1, необходимую для доказательства теоремы 1.6; в § 4 докажем теорему 1.6, опуская при этом доказательство леммы 4.10; в § 5 докажем лемму 4.10.

§ 2. Вспомогательные результаты

Пусть Σ – конечное непустое подмножество в $\mathbb{P}^n$, где $n \geq 2$, и пусть ξ – натуральное число. Тогда точки множества Σ накладывают независимые линейные условия на гиперповерхности в $\mathbb{P}^n$ степени ξ , если и только если для каждой

точки $P \in \Sigma$ существует гиперповерхность степени ξ , которая содержит множество $\Sigma \setminus P$ и не содержит точку $P \in \Sigma$.

Рассмотрим Σ как подсхему в $\mathbb{P}^n$. Имеет место точная последовательность пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_\Sigma \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\xi) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\xi) \longrightarrow \mathcal{O}_\Sigma \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{I}_\Sigma$ – пучок идеалов подсхемы Σ . Мы видим, что Σ накладывает независимые линейные условия на гиперповерхности степени ξ , если и только если $h^1(\mathcal{I}_\Sigma \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\xi)) = 0$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Предположим, что подсхема Σ является замкнутой подсхемой нульмерной схемы Γ , которая в свою очередь является нульмерным полным пересечением гиперповерхностей $X_1, \dots, X_n$ в $\mathbb{P}^n$. Пусть Λ – замкнутая подсхема схемы Γ такая, что*

$$\mathcal{I}_\Lambda = \text{Ann}(\mathcal{I}_\Sigma / \mathcal{I}_\Gamma),$$

где $\mathcal{I}_\Lambda$ и $\mathcal{I}_\Gamma$ – пучки идеалов подсхем Λ и Γ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} h^1(\mathcal{I}_\Sigma \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\xi)) &= h^0\left(\mathcal{I}_\Lambda \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\left(\sum_{i=1}^n \deg(X_i) - n - 1 - \xi\right)\right) \\ &\quad - h^0\left(\mathcal{I}_\Gamma \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\left(\sum_{i=1}^n \deg(X_i) - n - 1 - \xi\right)\right). \end{aligned}$$

Это утверждение является следствием теоремы 3 из [10].

ЛЕММА 2.2. *Предположим, что $\xi \geq 2$ и не более $k\xi + 1$ точек множества Σ содержатся в линейном подпространстве размерности k при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда множество Σ накладывает независимые линейные условия на гиперповерхности степени ξ .*

Это утверждение является следствием теоремы 2 из [11].

ЛЕММА 2.3. *Пусть P – точка в Σ . Предположим, что $n = 2$, выполнено неравенство*

$$|\Sigma \setminus P| \leq \max\left\{\left\lfloor \frac{\xi+3}{2} \right\rfloor \left(\xi+3 - \left\lfloor \frac{\xi+3}{2} \right\rfloor\right) - 1, \left\lfloor \frac{\xi+3}{2} \right\rfloor^2\right\},$$

выполнено неравенство $\xi \geq 3$ и не более

$$k(\xi+3-k)-2$$

точек в $\Sigma \setminus P$ лежат на кривой степени k при всех $k \leq (\xi+3)/2$. Тогда существует некоторая кривая в $\mathbb{P}^2$ степени ξ , которая содержит $\Sigma \setminus P$ и не содержит точку $P \in \Sigma$.

Это утверждение является частным случаем следствия 4.3 из [12].

Пусть $\Pi \subset \mathbb{P}^n$ – линейное подпространство размерности $m < n$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{P}^n$ – общее линейное подпространство размерности $n - m - 1$. Рассмотрим линейную проекцию

$$\psi: \mathbb{P}^n \dashrightarrow \Pi \cong \mathbb{P}^m$$

из подпространства Ω . Предположим, что $m \geq 2$. Пусть λ – некоторое натуральное число.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\mathcal{M}$ – линейная система, состоящая из гиперповерхностей в $\mathbb{P}^n$ степени λ , которые проходят через все точки множества Σ . Тогда базисное множество линейной системы $\mathcal{M}$ нульмерно, если выполнены следующие условия:

- множество Σ не содержится ни в какой неприводимой кривой степени λ ;
- множество $\psi(\Sigma)$ содержится в некоторой неприводимой кривой степени λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $m = 2$. Предположим, что существует неприводимая кривая $Z \subset \mathbb{P}^n$, которая содержится в базисном множестве линейной системы $\mathcal{M}$, но выполнены следующие условия:

- множество Σ не содержится ни в какой кривой степени λ ;
- множество $\psi(\Sigma)$ содержится в неприводимой кривой степени λ .

Положим $\Xi = Z \cap \Sigma$. Можно считать, что $\psi|_Z$ является бирациональным морфизмом и

$$\psi(Z) \cap \psi(\Sigma \setminus \Xi) = \emptyset,$$

поскольку линейное подпространство Ω общее. В частности, выполнено равенство

$$\deg(\psi(Z)) = \deg(Z).$$

Пусть C – неприводимая кривая в Π степени λ , которая содержит множество $\psi(\Sigma)$, и пусть W – конус в $\mathbb{P}^n$ над кривой C с вершиной в Ω . Тогда

$$W \in \mathcal{M},$$

откуда $Z \subset W$. Показано, что $\psi(Z) = C$. Тогда $\Xi = \Sigma$ и $\deg(Z) = \lambda$. Противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Если множество Σ не содержится ни в какой прямой, то $\psi(\Sigma)$ также не содержится ни в какой прямой.

ЛЕММА 2.6. Пусть $\mathcal{M}$ – линейная система, состоящая из гиперповерхностей в $\mathbb{P}^n$ степени λ , которые проходят через все точки множества Σ . Тогда базисное множество линейной системы $\mathcal{M}$ не содержит поверхностей, если выполнены следующие условия:

- множество Σ не содержится ни в какой неприводимой поверхности степени λ ;
- множество $\psi(\Sigma)$ содержится в некоторой неприводимой поверхности степени λ ;
- выполнено неравенство $m \geq 3$.

См. доказательство леммы 2.4.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Предположим, что $m \geq 3$, а множество Σ не содержится ни в каком двумерном линейном подпространстве. Тогда $\psi(\Sigma)$ также не содержится ни в каком двумерном линейном подпространстве.

ЛЕММА 2.8. Пусть $\mathcal{M}$ – линейная система, состоящая из гиперповерхностей в Π степени λ , которые проходят через все точки множества $\psi(\Sigma)$. Тогда базисное множество линейной системы $\mathcal{M}$ нульмерно, если выполнены следующие условия:

- множество Σ не содержится ни в какой неприводимой кривой степени λ ;
- множество $\psi(\Sigma)$ содержится в некоторой неприводимой кривой степени λ ;
- выполнены равенство $m = n - 1$ и неравенство $m \geq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что выполнены следующие условия:

- множество Σ не содержится ни в какой неприводимой кривой степени λ ;
- множество $\psi(\Sigma)$ содержится в некоторой неприводимой кривой степени λ ;
- выполнены равенство $m = n - 1$ и неравенство $m \geq 3$.

Заметим, что Ω – точка.

Пусть $\mathcal{Y}$ – множество всех конусов в $\mathbb{P}^n$ над неприводимыми кривыми в Π степени λ , которые содержат все точки множества Σ , и пусть Υ – теоретико-множественное пересечение всех конусов из множества $\mathcal{Y}$. Очевидно, что

$$\Sigma \subseteq \Upsilon \subset \mathbb{P}^n,$$

поскольку каждый конус из множества $\mathcal{Y}$ содержит Σ .

Пусть C – неприводимая кривая в Π степени λ , которая содержит все множество $\psi(\Sigma)$, и пусть W – конус в $\mathbb{P}^n$ над кривой C с вершиной в Ω . Тогда $W \in \mathcal{Y}$, откуда $\Upsilon \subseteq W$.

Покажем, что Υ – конечное множество.

Предположим, что существует неприводимая кривая $Z \subset \Upsilon$. Тогда конус W содержит кривую Z . Положим $\Xi = Z \cap \Sigma$. Можно считать, что $\psi|_Z$ является изоморфизмом и

$$\psi(Z) \cap \psi(\Sigma \setminus \Xi) = \emptyset,$$

поскольку точка Ω общая. Тогда $\psi(Z)$ – кривая степени $\deg(Z)$. Имеем

$$\psi(Z) = C,$$

откуда следует, что $\Xi = \Sigma$ и $\deg(Z) = \lambda$, что является противоречием.

Итак, показано, что Υ – конечное множество.

Пусть $\mathcal{S}$ – множество всех неприводимых поверхностей в $\mathbb{P}^m$ такое, что

$$S \in \mathcal{S} \iff \exists Y \in \mathcal{Y} : \psi(Y) = S,$$

и пусть Ψ – теоретико-множественное пересечение всех поверхностей из множества $\mathcal{S}$. Тогда

$$\psi(\Sigma) \subseteq \psi(\Upsilon) \subseteq \Psi.$$

Множество Ψ является теоретико-множественным пересечением поверхностей, чья степень не превышает λ . Каждая такая поверхность является теоретико-множественным пересечением гиперповерхностей степени λ . Таким образом, множество Ψ является теоретико-множественным пересечением из линейной системы $\mathcal{M}$. Значит, для завершения доказательства достаточно показать, что Ψ – конечное множество.

Пусть $W_1, W_2, \dots, W_r$ – неприводимые поверхности из множества $\mathcal{U}$ такие, что

$$\Upsilon = \bigcap_{i=1}^r W_i,$$

и $\psi(W_i) \in \mathcal{S}$ при всех возможных i . Положим

$$\Theta = \bigcap_{i=1}^r \psi(W_i)$$

и покажем, что подмножество $\Theta \subset \mathbb{P}^m$ конечно при условии, что точка Ω была выбрана достаточно общей. Из конечности множества Θ следует конечность Ψ , поскольку $\Psi \subseteq \Theta$.

Пусть H – общая гиперплоскость в $\mathbb{P}^n$, содержащая точку Ω . Положим

$$C_i = W_i \cap H \subset H \cong \mathbb{P}^m$$

при всех i . Тогда $C_1 \cap C_1 \cap \dots \cap C_r = \emptyset$, поскольку Υ – конечное множество. Однако

$$\Theta \cap H = \bigcap_{i=1}^r \psi(W_i) \cap H = \bigcap_{i=1}^r \psi(C_i),$$

так как $\Omega \in H$. Итак, для доказательства конечности Θ достаточно показать, что

$$\bigcap_{i=1}^r \psi(C_i) = \emptyset.$$

Рассмотрим, возможно, пустое подмножество $\Delta \subset H$ такое, что

$$P \in \Delta \iff \exists L \subset H: P \in L, L \cap C_i \neq \emptyset \quad \forall i,$$

где P – точка гиперплоскости H . Из определения множества Δ следует, что

$$\bigcap_{i=1}^r \psi(C_i) = \emptyset \iff \Omega \notin \Delta,$$

но из подсчета размерности следует, что $\dim(\Delta) \leq 2$, поскольку $C_1 \cap C_1 \cap \dots \cap C_r = \emptyset$.

Из неравенства $m \geq 3$ следует, что $\Delta \neq H$. Таким образом, можно считать, что

$$\Omega \in H \setminus \Delta,$$

откуда следует конечность множества Θ . Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.9. *Предположим, что множество Σ не содержится ни в какой неприводимой кривой степени λ . Предположим также, что выполнены неравенства*

$$|\Sigma| > \lambda^2$$

и $m \geq 3$. Тогда $\psi(\Sigma)$ не содержится ни в какой неприводимой кривой степени λ .

ЛЕММА 2.10. *Предположим, что множество Σ является несвязным объединением некоторых непустых конечных подмножеств Λ и Δ таких, что:*

- *существует гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени ζ , которая проходит через все точки множества Λ и не содержит ни одной точки множества Δ ;*
- *точки множества Λ и точки множества Δ накладывают независимые линейные условия на гиперповерхности степеней ξ и $\xi - \zeta$ соответственно;*

где ζ – натуральное число такое, что $\xi \geq \zeta$.

Тогда множество Σ накладывают независимые линейные условия на гиперповерхности степени ξ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P – произвольная точка множества Σ . Для доказательства достаточно показать, что существует гиперповерхность степени ξ , которая содержит множество $\Sigma \setminus P$ и не содержит точку P .

Отметим, что мы можем считать, что $P \in \Lambda$.

Пусть F – однородный многочлен степени ξ , который обращается в нуль в каждой точке множества $\Lambda \setminus P$, но не обращается в нуль в точке P . Положим

$$\Delta = \{Q_1, \dots, Q_\delta\},$$

где Q_i – точка. Для каждой точки Q_i существует однородный многочлен G_i степени ξ , который обращается в нуль в каждой точке в $\Sigma \setminus Q_i$, но не обращается в нуль в Q_i . Тогда

$$F(Q_i) + \mu_i G_i(Q_i) = 0$$

для некоторого $\mu_i \in \mathbb{C}$, поскольку $G_i(Q_i) \neq 0$. Гиперповерхность, заданная уравнением

$$F + \sum_{i=1}^{\delta} \mu_i G_i = 0,$$

содержит множество $\Sigma \setminus P$ и не содержит точку P .

§ 3. Точки проективных пространств

Пусть Σ – конечное подмножество в $\mathbb{P}^n$, где $n \geq 2$. Рассмотрим некоторые натуральные числа d и ε такие, что $d \geq 3$ и $\varepsilon < d$. В этом параграфе мы докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.1. *Множество Σ накладывают независимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d - 4 - \varepsilon$, если выполнено строгое неравенство*

$$|\Sigma| < (d - 1)(d - \varepsilon)$$

и не более $k(d - 1)$ точек множества Σ могут лежать на кривой в $\mathbb{P}^n$ степени k для любого натурального числа $k \leq d - \varepsilon - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что утверждение теоремы 3.1 очевидным образом выполнено при $\varepsilon = d - 1$, а из [9; теорема 1.1] следует, что утверждение

теоремы 3.1 очевидным образом выполнено при $\varepsilon = 1$. Поэтому предположим, что

$$|\Sigma| \leq (d-1)(d-\varepsilon) - 1,$$

не более чем $k(d-1)$ точек множества Σ могут лежать на кривой в $\mathbb{P}^n$ степени k для каждого натурального $k \leq d-\varepsilon-1$ и выполнены неравенства $2 \leq \varepsilon \leq d-2$.

Предположим, что утверждение теоремы 3.1 не выполнено. Тогда Σ накладывает зависимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d-4-\varepsilon$.

ЛЕММА 3.2. *Выполнено неравенство $\varepsilon \leq d-3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\varepsilon = d-2$. Тогда $2d-4-\varepsilon = d-2$, но

$$|\Sigma| \leq 2d-3,$$

и не более чем $d-1$ точек множества Σ могут лежать на прямой в $\mathbb{P}^n$. Из леммы 2.2 следует, что точки множества Σ накладывают зависимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d-4-\varepsilon$, что противоречит нашему предположению.

Существует точка $P \in \Sigma$ такая, что каждая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени $2d-4-\varepsilon$, содержащая множество $\Sigma \setminus P$, также содержит точку $P \in \Sigma$. Отметим, что $d \geq 5$.

ЛЕММА 3.3. *Выполнено неравенство $n \neq 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $n = 2$. Положим $\xi = 2d-4-\varepsilon$. Тогда $\xi \geq 3$ и

$$|\Sigma \setminus P| \leq \max \left\{ \left\lfloor \frac{\xi+3}{2} \right\rfloor \left(\xi+3 - \left\lfloor \frac{\xi+3}{2} \right\rfloor \right) - 1, \left\lfloor \frac{\xi+3}{2} \right\rfloor^2 \right\},$$

поскольку $|\Sigma| \leq (d-1)(d-\varepsilon) - 1$.

Покажем, что не более чем $k(\xi+3-k) - 2$ точек множества $\Sigma \setminus P$ лежат на кривой степени k для любого $k \leq (\xi+3)/2$. Для этого достаточно показать, что

$$k(2d-1-\varepsilon-k) - 2 \geq k(d-1)$$

для всех $k \leq (\xi+3)/2$. Более того, требуемое неравенство необходимо доказать только для натуральных чисел $k \geq 1$ таких, что выполнено неравенство

$$k(2d-1-\varepsilon-k) - 2 < |\Sigma \setminus P| \leq (d-1)(d-\varepsilon) - 2.$$

Мы можем считать, что $k < d-\varepsilon$, поскольку в противном случае

$$k(2d-1-\varepsilon-k) - 2 \geq (d-\varepsilon)(2d-1-\varepsilon-d+\varepsilon) - 2 = (d-1)(d-\varepsilon) - 2 \geq |\Sigma \setminus P|.$$

Мы можем считать, что $k \neq 1$, поскольку $\varepsilon \leq d-3$ и не более

$$d-1 \leq \xi = 2d-4-\varepsilon$$

точек множества $\Sigma \setminus P$ лежат на прямой. Тогда

$$k(2d-1-\varepsilon-k) - 2 \geq k(d-1) \iff k(d-\varepsilon-k) \geq 2 \iff d-\varepsilon > k,$$

откуда сразу следует, что не более $k(\xi + 3 - k) - 2$ точек множества $\Sigma \setminus P$ лежат на кривой степени k для любого натурального числа $k \leq (\xi + 3)/2$.

Из леммы 2.3 следует, что существует кривая в $\mathbb{P}^2$ степени $2d - 4 - \varepsilon$, которая содержит все точки множества $\Sigma \setminus P$, но не содержит точку $P \in \Sigma$, что является противоречием.

Из леммы 2.4 и следствия 2.9 следует, что для завершения доказательства теоремы 3.1 мы можем считать, что $n = 3$. Пусть Π – общая плоскость в $\mathbb{P}^3$. Рассмотрим проекцию

$$\psi: \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \Pi \cong \mathbb{P}^2$$

из достаточно общей точки $O \in \mathbb{P}^3$. Положим $\Sigma' = \psi(\Sigma)$ и $P' = \psi(P)$.

ЛЕММА 3.4. *Существует кривая $C \subset \Pi$ степени $k \leq d - \varepsilon - 1$ такая, что*

$$|C \cap \Sigma'| \geq k(d - 1) + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что не более чем $k(d - 1)$ точек множества Σ' могут лежать на кривой в $\mathbb{P}^2$ степени k для любого $k \leq d - \varepsilon - 1$. Рассуждая, как при доказательстве леммы 3.3, мы сразу получаем существование кривой

$$Z \subset \Pi \cong \mathbb{P}^2$$

степени $2d - 4 - \varepsilon$, которая содержит множество $\Sigma' \setminus P'$, но не проходит через точку $P' \in \Sigma'$.

Конус в $\mathbb{P}^3$ над кривой Z с вершиной в точке O есть поверхность степени $2d - 4 - \varepsilon$, которая содержит $\Sigma \setminus P$, но не содержит точку $P \in \Sigma$, что противоречит нашему предположению.

Мы можем считать, что число k является наименьшим натуральным числом таким, что по крайней мере $k(d - 1) + 1$ точек множества Σ' содержатся в некоторой неприводимой кривой в $\Pi \cong \mathbb{P}^2$ степени k . Мы видим, что существует несвязное объединение множеств

$$\bigcup_{j=k}^l \bigcup_{i=1}^{c_j} \Lambda_j^i \subset \Sigma$$

такое, что $|\Lambda_j^i| \geq j(d - 1) + 1$, все точки множества $\psi(\Lambda_j^i)$ содержатся в неприводимой кривой степени j , но не более чем $\zeta(d - 1)$ точек подмножества

$$\psi\left(\Sigma \setminus \left(\bigcup_{j=k}^l \bigcup_{i=1}^{c_j} \Lambda_j^i\right)\right) \subsetneq \Sigma' \subset \Pi \cong \mathbb{P}^2$$

могут содержаться в кривой в $\Pi \cong \mathbb{P}^2$ степени ζ для каждого натурального числа ζ . Положим

$$\Lambda = \bigcup_{j=k}^l \bigcup_{i=1}^{c_j} \Lambda_j^i.$$

Пусть Ξ_j^i – базисное множество линейной подсистемы в $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(j)|$, которая содержит все поверхности, проходящие через все точки множества Λ_j^i . Положим

$$\Delta = \Sigma \cap \left(\bigcup_{j=k}^l \bigcup_{i=1}^{c_j} \Xi_j^i \right).$$

Множество Ξ_j^i конечно по лемме 2.4. С другой стороны, выполнено неравенство

$$|\Sigma \setminus \Lambda| \leq (d-1) \left(d - \varepsilon - \sum_{i=k}^l c_i i \right) - 2. \quad (*)$$

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *Выполнено неравенство $\sum_{i=k}^l i c_i \leq d - \varepsilon - 1$.*

Отметим, что $\Lambda \subseteq \Delta \subseteq \Sigma$. Из следствия 2.5 следует, что $k \geq 2$.

ЛЕММА 3.6. *Точки множества Δ накладывают независимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d - \varepsilon - 4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что Δ накладывает зависимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d - \varepsilon - 4$. Рассмотрим Δ как нульмерную подсхему в $\mathbb{P}^3$. Тогда

$$h^1(\mathcal{I}_\Delta \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2d - \varepsilon - 4)) \neq 0,$$

где $\mathcal{I}_\Delta$ – пучок идеалов подсхемы Δ .

Пусть $\mathcal{M}$ – линейная подсистема линейной системы $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d - \varepsilon - 1)|$, которая содержит все поверхности, проходящие через все точки множества Δ . Тогда базисное множество линейной системы $\mathcal{M}$ нульмерно, поскольку $\sum_{i=k}^l i c_i \leq d - \varepsilon - 1$ и

$$\Delta \subseteq \bigcup_{j=k}^l \bigcup_{i=1}^{c_j} \Xi_j^i,$$

а множество Ξ_j^i является нульмерным базисным множеством линейной подсистемы линейной системы $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(j)|$. Положим

$$\Gamma = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3,$$

где M_1, M_2, M_3 – общие поверхности в линейной системе $\mathcal{M}$. Тогда Γ – замкнутая нульмерная подсхема в $\mathbb{P}^3$, а Δ – замкнутая подсхема схемы Γ .

Пусть Υ – замкнутая подсхема схемы Γ такая, что

$$\mathcal{I}_\Upsilon = \text{Ann}(\mathcal{I}_\Delta / \mathcal{I}_\Gamma),$$

где $\mathcal{I}_\Upsilon$ и $\mathcal{I}_\Gamma$ – пучки идеалов подсхем Υ и Γ соответственно. Тогда

$$0 \neq h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2d - \varepsilon - 4) \otimes \mathcal{I}_\Delta) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d - 2\varepsilon - 3) \otimes \mathcal{I}_\Upsilon) - h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d - 2\varepsilon - 3) \otimes \mathcal{I}_\Gamma)$$

по теореме 2.1. Значит, существует поверхность $F \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d - 2\varepsilon - 3) \otimes \mathcal{I}_\Upsilon|$. Тогда

$$(d - 2\varepsilon - 3)(d - \varepsilon - 1)^2 = F \cdot M_1 \cdot M_2 \geq h^0(\mathcal{O}_\Upsilon) = h^0(\mathcal{O}_\Gamma) - h^0(\mathcal{O}_\Delta) = (d - \varepsilon - 1)^3 - |\Delta|,$$

откуда следует, что $|\Delta| \geq (\varepsilon + 2)(d - \varepsilon - 1)^2$. Таким образом, выполнены неравенства

$$(d - 1)(d - \varepsilon) - 1 \geq |\Sigma| \geq |\Delta| \geq (\varepsilon + 2)(d - \varepsilon - 1)^2,$$

откуда легко получить противоречие. Лемма доказана.

Положим $\Gamma = \Sigma \setminus \Delta$, $\Gamma' = \psi(\Gamma)$ и $\xi = 2d - \varepsilon - 4 - \sum_{i=k}^l ic_i$.

ЛЕММА 3.7. *Выполнено неравенство $\xi \geq 3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\xi \leq 2$. Тогда из следствия 3.5 следует, что

$$2 \geq \xi = 2d - \varepsilon - 4 - \sum_{i=k}^l ic_i \geq d - 3,$$

откуда $d \leq 5$. Из неравенств $2 \leq \varepsilon \leq d - 3$ следует, что $d = 5$ и $\varepsilon = 2$. Тогда $|\Sigma| \leq 11$.

Из леммы 2.2 следует, что множество Σ накладывает независимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d - \varepsilon - 4$, если никакие 10 точек множества Σ не содержатся в одной плоскости $\mathbb{P}^3$. Значит, существует плоскость $\Upsilon \subset \mathbb{P}^3$ такая, что $|\Upsilon \cup \Sigma| \geq 10$.

Из леммы 3.4 следует, что $|\Upsilon \cup \Sigma| = 10$. Очевидно, что $P \in \Upsilon$.

Рассуждая, как при доказательстве леммы 3.3, мы сразу получаем существование кривой

$$Z \subset \Upsilon \cong \mathbb{P}^2$$

степени $2d - \varepsilon - 4$, которая содержит множество $\Upsilon \setminus P$, но не содержит точку $P \in \Sigma$.

Конус в $\mathbb{P}^3$ над кривой Z с вершиной в точке $\Sigma \setminus \Upsilon$ есть поверхность степени $2d - \varepsilon - 4$, которая содержит $\Sigma \setminus P$, но не содержит точку $P \in \Sigma$. Противоречие.

Из неравенства (*) следует, что выполнено неравенство

$$|\Gamma'| \leq \max \left\{ \left\lfloor \frac{\xi + 3}{2} \right\rfloor \left(\xi + 3 - \left\lfloor \frac{\xi + 3}{2} \right\rfloor \right) - 1, \left\lfloor \frac{\xi + 3}{2} \right\rfloor^2 \right\}.$$

ЛЕММА 3.8. *Не более ξ точек множества Γ могут лежать на прямой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\xi + 1$ точек множества Γ лежат на прямой. Тогда

$$d - 1 \geq \xi + 1 = 2d - \varepsilon - 4 - \sum_{i=k}^l ic_i,$$

поскольку не более $d - 1$ точек множества Γ могут лежать на прямой в $\mathbb{P}^3$. Тогда

$$d - \varepsilon - 1 \geq \sum_{i=k}^l c_i i \geq d - \varepsilon - 2$$

по следствию 3.5. Итак, либо $\sum_{i=k}^l c_i i = d - \varepsilon - 2$, либо $\sum_{i=k}^l c_i i = d - \varepsilon - 1$.

Предположим, что $\sum_{i=k}^l c_i i = d - \varepsilon - 2$. Тогда

$$|\Gamma| \leq |\Sigma \setminus \Lambda| \leq (d-1) \left(d - \varepsilon - \sum_{i=k}^l c_i i \right) - 2 = 2d - 4,$$

откуда следует, что Γ накладывает независимые линейные условия на гиперповерхности степени $\xi = d - 2$ по лемме 2.2. Таким образом, точки множества Σ накладывают независимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d - \varepsilon - 4$ по лемме 2.10. Противоречие.

Мы видим, что $\sum_{i=k}^l c_i i = d - \varepsilon - 1$. Тогда

$$|\Gamma| \leq |\Sigma \setminus \Lambda| \leq (d-1) \left(d - \varepsilon - \sum_{i=k}^l c_i i \right) - 2 = d - 3,$$

откуда следует, что Γ накладывает независимые линейные условия на гиперповерхности степени $\xi = d - 3$. Множество Σ накладывает независимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d - \varepsilon - 4$ по лемме 2.10. Противоречие.

Из следствия 2.5 следует, что не более ξ точек множества Γ' могут лежать на прямой.

ЛЕММА 3.9. *Для каждого $t \leq (\xi + 3)/2$ не более*

$$t(\xi + 3 - t) - 2$$

точек множества Γ' могут лежать на кривой в $\Pi \cong \mathbb{P}^2$ степени t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы знаем, что не более $t(d-1)$ точек множества Γ' могут лежать на кривой степени t . Таким образом, из леммы 3.8 следует, что для доказательства нашей леммы достаточно показать выполнение неравенства

$$t(\xi + 3 - t) - 2 \geq t(d-1)$$

при всех $t \leq (\xi + 3)/2$ таких, что $t(\xi + 3 - t) - 2 < |\Gamma'|$ и $t > 1$. Заметим, что

$$t(\xi + 3 - t) - 2 \geq t(d-1) \iff d - \varepsilon - \sum_{i=k}^l c_i i > t,$$

поскольку $t > 1$. Таким образом, можно считать, что $t(\xi + 3 - t) - 2 < |\Gamma'|$ и

$$d - \varepsilon - \sum_{i=k}^l c_i i \leq t \leq \frac{\xi + 3}{2}.$$

Рассмотрим функцию $g(x) = x(\xi + 3 - x) - 2$. Тогда

$$g(t) \geq g\left(d - \varepsilon - \sum_{i=k}^l c_i i\right),$$

поскольку функция $g(x)$ возрастает при $x < (\xi + 3)/2$. Имеем

$$\begin{aligned} (d-1) \left(d - \varepsilon - \sum_{i=k}^l i c_i \right) - 2 &\geq |\Gamma'| > g(t) \geq g \left(d - \varepsilon - \sum_{i=k}^l c_i i \right) \\ &= (d-1) \left(d - \varepsilon - \sum_{i=k}^l i c_i \right) - 2, \end{aligned}$$

что является противоречием.

Из леммы 2.3 следует, что множество Γ' накладывает независимые линейные условия на гиперповерхности степени ξ . Тогда Γ также накладывает независимые линейные условия на гиперповерхности степени ξ . Значит, точки множества Σ накладывают независимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d - \varepsilon - 4$ по лемме 2.10. Противоречие.

Теоремы 3.1 доказана.

§ 4. Основной результат

Цель этого параграфа – доказать теорему 1.6. Пусть X – гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени d , которая имеет не более чем изолированные обыкновенные двойные точки.

ЛЕММА 4.1. Пусть C – кривая в $\mathbb{P}^4$ степени λ . Тогда выполнено неравенство

$$|\text{Supp}(C) \cap \text{Sing}(X)| \leq \lambda(d-1),$$

а из равенства $|\text{Supp}(C) \cap \text{Sing}(X)| = \lambda(d-1)$ следует, что

$$\text{Sing}(C) \cap \text{Sing}(X) = \emptyset.$$

Доказательство см. в [8; лемма 29].

Из работы [13] следует, что следующие условия эквивалентны:

- гиперповерхность X является факториальной;
- точки множества $\text{Sing}(X)$ накладывают независимые линейные условия на гиперповерхности в $\mathbb{P}^4$ степени $2d - 5$.

Предположим, что выполнено неравенство

$$|\text{Sing}(X)| \leq (d-1)^2,$$

а гиперповерхность X не содержит плоскостей. Положим $\Sigma = \text{Sing}(X)$.

ЛЕММА 4.2. Предположим, что $|\Sigma| < (d-1)^2$. Тогда гиперповерхность X факториальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.1 следует, что Σ накладывает независимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d - 5$, откуда следует, что X факториальна.

Предположим, что $|\Sigma| = (d-1)^2$, а Σ накладывает зависимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d - 5$. Покажем, что сделанные предположения противоречивы.

ЛЕММА 4.3. Пусть $\Pi \subset \mathbb{P}^4$ – некоторая плоскость. Тогда $|\Pi \cap \Sigma| \leq d - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно показать (см. [6; лемма 2.9]), что выполнено неравенство

$$|\Pi \cap \Sigma| \leq \frac{d(d-1)}{2} \leq (d-1)^2 - 1,$$

поскольку X не содержит плоскостей. В частности, точки множества $\Pi \cap \Sigma$ накладывают независимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d - 5$ по теореме 3.1.

Предположим, что $|\Pi \cap \Sigma| \geq d - 1$. Пусть H – общая гиперплоскость в $\mathbb{P}^4$, содержащая плоскость Π . Тогда $H \cap \Sigma = \Pi \cap \Sigma$. С другой стороны, имеем

$$|\Sigma \setminus (\Pi \cap \Sigma)| \leq (d-1)^2 - d = (d-1)(d-2) - 1,$$

откуда следует, что точки множества $\Sigma \setminus (\Pi \cap \Sigma)$ накладывают независимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d - 6$ по теореме 3.1. Тогда Σ накладывает независимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d - 5$ по лемме 2.10. Противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Не более $d - 2$ точек множества Σ могут лежать на прямой.

Утверждение теоремы 1.6 доказано в [2] в случае $d \leq 4$. Итак, показано, что $d \geq 5$.

ЛЕММА 4.5. Выполнено неравенство $d \geq 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d = 5$. Тогда Σ накладывает независимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d - 5$ согласно леммам 2.2 и 4.3. Противоречие.

ЛЕММА 4.6. Пусть C – кривая в $\mathbb{P}^4$ степени $\lambda \leq d - 2$. Тогда

$$|C \cap \Sigma| \leq \lambda(d-1) - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для доказательства требуемого неравенства можно считать, что кривая C неприводима. Предположим, что $|C \cap \Sigma| = \lambda(d-1)$. Тогда

$$|\Sigma \setminus (C \cap \Sigma)| = (d-1)(d-\lambda-1) \geq 5$$

по лемме 4.5. Более того, выполнено неравенство $\lambda \neq 1$ по следствию 4.4.

Пусть P и Q – различные точки множества $\Sigma \setminus (C \cap \Sigma)$, и пусть Y_P и Y_Q – конусы в $\mathbb{P}^4$ над кривой C с вершинами в P и Q соответственно. Тогда поверхности Y_P и Y_Q неприводимы.

Покажем, что $Y_P \neq Y_Q$. Предположим, что $Y_P = Y_Q$. Пусть L – прямая в $\mathbb{P}^4$, проходящая через точки P и Q . Тогда Y_P – конус над кривой C с вершиной в прямой L , откуда следует, что Y_P – плоскость, что противоречит лемме 4.3. Итак, показано, что $Y_P \neq Y_Q$.

Пусть O – точка поверхности Y_P такая, что $O \notin Y_Q$, и пусть Y_O – конус над C с вершиной в точке O . Тогда $Q \notin Y_O$, поскольку $O \notin Y_Q$. С другой стороны, конус Y_O является теоретико-множественным пересечением гиперповерхностей

степени λ . Таким образом, существует гиперповерхность $F \subset \mathbb{P}^4$ степени λ такая, что

$$F \cap \Sigma = Y_O \cap \Sigma,$$

откуда следует, что $Q \notin F$. Значит, множество $F \cap \Sigma$ накладывает независимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d-5$ по теореме 3.1. С другой стороны, имеем

$$|\Sigma \setminus (\Pi \cap \Sigma)| \leq (d-1)(d-1-\lambda) - 1,$$

откуда следует, что множество $\Sigma \setminus (F \cap \Sigma)$ накладывает независимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d-5-\lambda$ по теореме 3.1. Тогда Σ накладывает независимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d-5$ по лемме 2.10. Противоречие.

ЛЕММА 4.7. Пусть C – кривая в $\mathbb{P}^4$ степени $d-1$. Тогда

$$|C \cap \Sigma| \leq (d-1)^2 - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $|C \cap \Sigma| = (d-1)^2$. Тогда $\Sigma \subset C$, кривая C неприводима по лемме 4.6, кривая C не содержится в двумерном линейном подпространстве по лемме 4.3.

Разберем по отдельности следующие два возможных случая:

- кривая C содержится в некотором трехмерном линейном подпространстве в $\mathbb{P}^4$;
- кривая C не содержится ни в каком трехмерном линейном подпространстве в $\mathbb{P}^4$.

Предположим, что кривая C содержится в некотором трехмерном линейном подпространстве $H \subset \mathbb{P}^4$. Тогда $H \cong \mathbb{P}^3$. Рассмотрим Σ как нульмерную подсхему в $\mathbb{P}^3$. Тогда

$$h^1(\mathcal{I}_\Sigma \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2d-5)) \neq 0,$$

где $\mathcal{I}_\Sigma$ – пучок идеалов подсхемы Σ .

Рассматривая линейную проекцию $\mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ из достаточно общей точки кривой C , мы видим, что существуют две различные неприводимые поверхности F_1 и F_2 в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d-2)|$ такие, что $C \subset F_1 \cap F_2$.

Пусть $\mathcal{M}$ – линейная подсистема в $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d-1)|$, которая содержит все поверхности, проходящие через Σ . Тогда базисное множество линейной системы $\mathcal{M}$ нульмерно. Положим

$$\Gamma = M \cdot F_1 \cdot F_2,$$

где M – общая поверхность в линейной системе $\mathcal{M}$. Тогда Γ – замкнутая нульмерная подсхема в $\mathbb{P}^3$, а Σ – замкнутая подсхема схемы Γ .

Пусть Υ – замкнутая подсхема схемы Γ такая, что

$$\mathcal{I}_\Upsilon = \text{Ann}(\mathcal{I}_\Sigma / \mathcal{I}_\Gamma),$$

где $\mathcal{I}_\Upsilon$ и $\mathcal{I}_\Gamma$ – пучки идеалов подсхем Υ и Γ соответственно. Тогда

$$0 \neq h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2d-5) \otimes \mathcal{I}_\Sigma) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d-4) \otimes \mathcal{I}_\Upsilon) - h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d-4) \otimes \mathcal{I}_\Gamma)$$

по теореме 2.1. Значит, существует поверхность $G \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d-4) \otimes \mathcal{I}_Y|$. Тогда $(d-4)(d-2)(d-1) = G \cdot F_1 \cdot M \geq h^0(\mathcal{O}_Y) = h^0(\mathcal{O}_\Gamma) - h^0(\mathcal{O}_\Sigma) = (d-1)(d-2)^2 - |\Sigma|$,

откуда следует, что $(d-1)^2 = |\Sigma| \geq 2(d-2)(d-1)$, что является противоречием.

Итак, показано, что кривая C не содержится ни в каком трехмерном линейном подпространстве в $\mathbb{P}^4$. Отметим, что $C \subset X$, поскольку в противном случае

$$d(d-1) = \deg(C) \deg(X) \geq 2(d-1)^2,$$

что является противоречием, поскольку $d \geq 6$.

Пусть O – достаточно общая точка кривой C . Рассмотрим проекцию

$$\psi: \mathbb{P}^4 \dashrightarrow \Pi$$

из точки O , где Π – трехмерное линейное подпространство в $\mathbb{P}^4$. Тогда ψ индуцирует бирациональный морфизм $C \dashrightarrow \psi(C)$. Положим $Z = \psi(C)$. Тогда Z – кривая степени $d-2$.

Пусть Y – конус в $\mathbb{P}^4$ над кривой Z с вершиной в точке O . Тогда

$$C \subset Y \not\subset X$$

в силу общности точки O , поскольку X не может быть многообразием секущих кривой C .

В силу общности выбора точки O мы можем считать, что точка O не содержится в трехмерном линейном подпространстве, которое касается гиперповерхности X в некоторой точке кривой C , поскольку кривая C не содержится ни в каком трехмерном линейном подпространстве в $\mathbb{P}^4$. Таким образом, цикл $X \cdot Y$ приведен в общей точке кривой C . Положим

$$X \cdot Y = C + R,$$

где R – кривая степени $d^2 - 3d + 1$ такая, что $C \not\subseteq \text{Supp}(R)$.

Из леммы 4.1 и общности выбора точки O следует, что

$$C \cap \Sigma \subset Y \setminus \text{Sing}(Y).$$

Пусть $\alpha: \bar{Z} \rightarrow Z$ – нормализация кривой Z . Тогда существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \bar{Y} & \xrightarrow{\beta} & Y \\ \pi \downarrow & & \downarrow \psi|_Y \\ \bar{Z} & \xrightarrow{\alpha} & Z \end{array}$$

где $\bar{Y}$ – неособая поверхность, β – бирациональный морфизм, а π – морфизм со связными слоями, являющийся $\mathbb{P}^1$ -расслоением.

Пусть L – слой морфизма π , и пусть E – сечение расслоения π такое, что $\beta(E) = O$. Тогда

$$E^2 = -d + 2$$

на поверхности $\bar{Y}$. Пусть $\bar{C}$ и $\bar{R}$ – кривые на $\bar{Y}$ такие, что $\alpha(\bar{C}) = C$, выполнено равенство

$$\bar{R} \cdot \alpha^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)|_Y) = d^2 - 3d + 1$$

и $\alpha(\bar{R}) = R$. Тогда на поверхности $\bar{Y}$ выполнена численная эквивалентность

$$\bar{R} \equiv (d - 2)E + (d^2 - 3d + 1)L$$

и выполнена численная эквивалентность $\bar{C} \equiv E + (d - 1)L$. Положим $s = (d - 1)^2$ и

$$\Sigma = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_s\},$$

где Q_i – точка множества Σ . Для каждой точки Q_i существует точка $\bar{Q}_i \in \bar{Y}$ такая, что

$$\bar{Q}_i \in \text{Supp}(\bar{C} \cdot \bar{R})$$

и $\beta(\bar{Q}_i) = Q_i$. Таким образом, имеем

$$(d - 1)^2 - 2 = \bar{C} \cdot \bar{R} \geq \sum_{i=1}^s \text{mult}_{Q_i}(\bar{C} \cdot \bar{R}) \geq (d - 1)^2,$$

что является противоречием.

СЛЕДСТВИЕ 4.8. Пусть C – кривая в $\mathbb{P}^4$ степени λ . Тогда

$$|C \cap \Sigma| \leq \lambda(d - 1) - 1.$$

Пусть $\eta: \mathbb{P}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ – общая линейная проекция. Положим $\Xi = \eta(\Sigma)$. Тогда из следствий 2.9 и 2.7 следует, что множество Ξ обладает следующими свойствами:

- выполнено равенство $|\Xi| = (d - 1)^2$;
- не более чем $\lambda(d - 1) - 1$ точек множества Ξ лежат на кривой степени $\lambda \leq d - 2$;
- не более чем $d - 1$ точек множества Ξ могут содержаться в плоскости.

Но точки множества Ξ накладывают зависимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d - 5$. Рассмотрим Ξ как подсхему в $\mathbb{P}^3$. Тогда

$$h^1(\mathcal{I}_{\Xi} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2d - 5)) \neq 0,$$

где $\mathcal{I}_{\Xi}$ – пучок идеалов подсхемы Ξ .

ЛЕММА 4.9. Пусть C – кривая в $\mathbb{P}^3$ степени $d - 1$. Тогда $|C \cap \Xi| \leq (d - 1)^2 - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $|C \cap \Xi| = (d - 1)^2$. Тогда C – неприводимая кривая, которая не содержится в плоскости. Рассуждая, как при доказательстве леммы 4.7 и используя лемму 2.8, мы сразу получаем противоречие.

Итак, показано, что множество Ξ обладает следующими свойствами:

- выполнено равенство $|\Xi| = (d - 1)^2$;
- не более чем $\lambda(d - 1) - 1$ точек множества Ξ лежит на кривой степени $\lambda \leq d - 1$;
- не более чем $d - 1$ точек множества Ξ могут содержаться в плоскости;

- существует точка $Q \in \Xi$ такая, что каждая гиперповерхность в $\mathbb{P}^3$ степени $2d - 5$, содержащая множество $\Xi \setminus Q$, также содержит точку $Q \in \Xi$.

ЛЕММА 4.10. Пусть $\mathcal{M}$ – линейная подсистема в $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d - 1)|$, состоящая из поверхностей, содержащих Ξ . Тогда базисное множество линейной системы $\mathcal{M}$ содержит кривую.

Доказательство см. в § 5.

Зафиксируем общую плоскость $\Pi \subset \mathbb{P}^3$ и рассмотрим линейную проекцию

$$\psi: \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \Pi \cong \mathbb{P}^2$$

из достаточно общей точки $O \in \mathbb{P}^3$. Положим $\Xi' = \psi(\Xi)$ и $Q' = \psi(Q)$.

ЛЕММА 4.11. Предположим, что не более чем $\lambda(d - 1)$ точек множества Ξ' могут лежать на кривой степени λ при всех $\lambda \leq d - 2$. Тогда Ξ' не лежит на кривой степени $d - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что Ξ' лежат на кривой $C \subset \mathbb{P}^2$ степени $d - 1$. Покажем, что сделанное предположение противоречит лемме 4.10.

Пусть $\mathcal{M}$ – линейная подсистема линейной системы $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d - 1)|$, состоящая из поверхностей, содержащих Ξ . Тогда по лемме 4.10 базисное множество линейной системы $\mathcal{M}$ содержит некоторую неприводимую кривую $Z \subset \mathbb{P}^3$.

Кривая C приводима по лемме 2.4. Положим

$$C = \sum_{i=1}^s C_i,$$

где C_i – неприводимая кривая. Пусть d_i – степень кривой C_i . Тогда $|C_i \cap \Xi'| = d_i(d - 1)$.

Пусть Ξ_i – подмножество в Ξ такое, что $|\Xi_i| = d_i(d - 1)$ и $\psi(\Xi_i) \subset C_i$, и пусть $\mathcal{M}_i$ – линейная подсистема линейной системы $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d_i)|$, которая состоит из поверхностей, содержащих множества Ξ_i . По лемме 4.10 и следствию 4.8 базисное множество системы $\mathcal{M}_i$ нульмерно.

Пусть M_i – поверхность в $\mathcal{M}_i$, которая не содержит кривую Z . Тогда

$$\sum_{i=1}^s M_i \in \mathcal{M},$$

что является противоречием, поскольку кривая Z содержится в базисном множестве линейной системы $\mathcal{M}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.12. Существует кривая $C \subset \Pi$ степени $k \leq d - 2$ такая, что $|C \cap \Xi'| > k(d - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что не более чем $k(d - 1)$ точек множества Ξ' могут лежать на кривой в $\mathbb{P}^2$ степени k для любого $k \leq d - 2$ и не существует кривой в $\mathbb{P}^2$ степени $d - 1$, которая содержит все множество Ξ' . Покажем, что эти предположения противоречивы.

Положим $\xi = 2d - 5$. Тогда $\xi \geq 7$, поскольку $d \geq 6$.

Предположим, что не более $k(\xi + 3 - k) - 2$ точек множества $\Xi' \setminus Q'$ лежат на кривой степени k при всех $k \leq (\xi + 3)/2$. Тогда из леммы 2.3 следует, что существует кривая

$$Z \subset \mathbb{P}^2$$

степени $2d - 5$, которая содержит $\Xi' \setminus Q'$ и не содержит Q' . Конус в $\mathbb{P}^3$ над кривой Z с вершиной в точке O является поверхностью в $\mathbb{P}^3$ степени $2d - 5$, которая содержит все точки множества $\Xi \setminus Q$, но не содержит точку Q , что является противоречием.

Итак, показано, что существует некоторая кривая $R \subset \mathbb{P}^2$ степени $k \leq d - 1$, которая содержит не менее $k(\xi + 3 - k) - 1$ точек множества $\Xi' \setminus Q'$.

Предположим, что $k = d - 1$. Тогда кривая R содержит не менее

$$k(\xi + 3 - k) - 1 = k(2d - 2 - k) - 1 = (d - 1)^2 - 1$$

точек множества $\Xi' \setminus Q'$. Тогда $Q' \notin R$, поскольку не существует кривой степени $d - 1$, которая содержит все множество Ξ' . Конус в $\mathbb{P}^3$ над кривой R с вершиной в точке O является поверхностью степени $2d - 5$, которая содержит все точки множества $\Xi \setminus Q$, но не содержит точку $Q \in \Xi$, что является противоречием.

Итак, мы видим, что $k \leq d - 2$. Тогда $k(2d - 2 - k) - 1 \leq k(d - 1)$.

Предположим, что $k = 1$. Тогда $2d - 4 \leq d - 1$, что противоречит неравенству $d \geq 6$.

Итак, показано, что $k \neq 1$. Тогда

$$k(2d - 2 - k) - 1 \leq k(d - 1) \iff k(d - 1 - k) \leq 1 \iff k \geq d - 1,$$

что является противоречием, поскольку $k \leq d - 2$.

Без ограничения общности можно считать, что число k является наименьшим натуральным числом с таким свойством. Тогда кривая C неприводима.

ЛЕММА 4.13. *Кривая C содержит все множество Ξ' .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\Xi' \not\subset C$. Пусть S – конус в $\mathbb{P}^3$ над кривой C с вершиной в точке O . Тогда $\Xi \not\subset S$ и выполнено неравенство

$$|\Xi \setminus (S \cap \Xi)| \leq (d - 1)(d - 1 - k) - 1,$$

откуда следует, что по теореме 3.1 точки множества $\Xi \setminus (S \cap \Xi)$ накладывают независимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d - 5 - k$. Тогда Ξ накладывает независимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d - 5$ по лемме 2.10. Противоречие.

Рассмотрим Ξ как подсхему в $\mathbb{P}^3$, заданную пучком идеалов $\mathcal{I}_\Xi$. Тогда

$$h^1(\mathcal{I}_\Xi \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2d - 5)) \neq 0.$$

Пусть $\mathcal{D}$ – линейная подсистема линейной системы $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d - 2)|$, которая содержит все поверхности, проходящие через все точки множества Ξ . Тогда базисное множество линейной системы $\mathcal{D}$ нульмерно по лемме 2.4. Положим

$$\Gamma = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3,$$

где M_1, M_2, M_3 – общие поверхности в линейной системе $\mathcal{D}$. Тогда Γ – замкнутая нульмерная подсхема в $\mathbb{P}^3$, а Ξ – замкнутая подсхема схемы Γ .

Пусть Υ – замкнутая подсхема схемы Γ такая, что

$$\mathcal{I}_\Upsilon = \text{Ann}(\mathcal{I}_\Xi / \mathcal{I}_\Gamma),$$

где $\mathcal{I}_\Upsilon$ и $\mathcal{I}_\Gamma$ – пучки идеалов подсхем Υ и Γ соответственно. Тогда

$$0 \neq h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2d-5) \otimes \mathcal{I}_\Xi) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d-5) \otimes \mathcal{I}_\Upsilon) - h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d-5) \otimes \mathcal{I}_\Gamma)$$

по теореме 2.1. Значит, существует поверхность $F \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d-5) \otimes \mathcal{I}_\Upsilon|$. Тогда

$$(d-5)(d-2)^2 = F \cdot M_1 \cdot M_2 \geq h^0(\mathcal{O}_\Upsilon) = h^0(\mathcal{O}_\Gamma) - h^0(\mathcal{O}_\Xi) = (d-2)^3 - |\Xi|,$$

откуда следует, что $(d-1)^2 = |\Xi| \geq 3(d-2)^2$, что является противоречием.

Теорема 1.6 доказана.

§ 5. Специальная проекция

Цель настоящего параграфа – доказать лемму 4.10.

Пусть Ξ – конечное подмножество в $\mathbb{P}^3$, пусть P – точка множества Ξ , и пусть d – натуральное число такое, что $d \geq 6$. Предположим, что Ξ обладает следующими свойствами:

- выполнено равенство $|\Xi| = (d-1)^2$;
- не более чем $\lambda(d-1) - 1$ точек из Ξ лежат на кривой степени λ при всех $\lambda \in \mathbb{N}$;
- не более чем $d-1$ точек множества Ξ могут содержаться в плоскости;
- каждая поверхность в $\mathbb{P}^3$ степени $2d-5$, содержащая $\Xi \setminus P$, содержит точку $P \in \Xi$.

ЛЕММА 5.1. Пусть S – поверхность в $\mathbb{P}^3$ степени μ . Тогда

$$\Xi \subset S,$$

если выполнено неравенство $|S \cap \Xi| \geq (d-1)\mu + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $|S \cap \Xi| \geq (d-1)\mu + 1$, но $\Xi \not\subset S$. Тогда

$$|\Xi \setminus (S \cap \Xi)| \leq (d-1)^2 - (d-1)\mu + 1 = (d-1)(d-1-\mu) - 1,$$

откуда следует, что по теореме 3.1 точки множества $\Xi \setminus (S \cap \Xi)$ накладывают независимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d-5-\mu$. Тогда по лемме 2.10 Ξ накладывают независимые линейные условия на гиперповерхности степени $2d-5$. Противоречие.

Пусть $\mathcal{M}$ – линейная подсистема в $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d-1)|$, состоящая из поверхностей, содержащих все множество Ξ . Для доказательства леммы 4.10 необходимо показать, что базисное множество линейной системы $\mathcal{M}$ содержит кривую. Предположим, что базисное множество линейной системы $\mathcal{M}$ нульмерно. Покажем, что сделанное предположение противоречиво.

ЛЕММА 5.2. *Подмножество $\Xi \subset \mathbb{P}^3$ содержит две различные точки Q_1 и Q_2 такие, что:*

- *прямая, содержащая точки Q_1 и Q_2 , не содержит точку $P \in \Xi$;*
- *прямая, содержащая точки Q_1 и Q_2 , содержит не более $d - 3$ точек множества Ξ .*

Это утверждение очевидно.

Пусть L – прямая в $\mathbb{P}^3$, проходящая через точки Q_1 и Q_2 , пусть O – общая точка на прямой L , и пусть Π – плоскость в $\mathbb{P}^3$ такая, что $L \not\subset \Pi$. Рассмотрим линейную проекцию

$$\psi: \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \Pi \cong \mathbb{P}^2$$

из точки $O \in \mathbb{P}^3$. Положим $\Xi' = \psi(\Xi)$ и $P' = \psi(P)$. Тогда ψ индуцирует биекцию

$$\Xi \setminus (\Xi \cap L) \longleftrightarrow \Xi' \setminus \psi(L)$$

и выполнены строгие неравенства $(d-1)(d-2) < |\Xi'| < (d-1)^2$.

ЛЕММА 5.3. *Пусть Λ – подмножество множества Ξ такое, что*

$$|\psi(\Lambda)| \geq \lambda(d-1) + 1,$$

где λ – некоторое натуральное число. Предположим, что

$$\psi(\Lambda) \subset C \subset \Pi \cong \mathbb{P}^2,$$

где C – кривая степени λ . Пусть $\mathcal{D}$ – линейная подсистема в $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\lambda)|$, которая содержит все поверхности, проходящие через все точки множества Λ . Тогда базисное множество линейной системы $\mathcal{D}$ содержится в объединении прямой L и конечного множества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует неприводимая кривая $Z \subset \mathbb{P}^3$, которая содержится в базисном множестве линейной системы $\mathcal{D}$. Покажем, что $Z = L$.

Предположим, что $Z \neq L$. Покажем, что данное предположение приводит к противоречию. Можно считать, что $O \notin Z$. Тогда $\psi(Z)$ – неприводимая кривая.

Для каждой точки $Q \in \Lambda$ пусть Y_Q – конус в $\mathbb{P}^3$ над кривой Z с вершиной в Q . Тогда

$$L \subset Y_Q \iff Q \in L,$$

откуда следует, что мы можем считать, что $O \notin Y_Q$, если $Q \notin L$, в силу общности выбора точки $O \in L$. Положим $\Theta = Z \cap \Lambda$ и $\Omega = L \cap \Lambda$. Тогда

$$\psi(Z) \cap \psi(\Lambda \setminus (\Xi \cup \Omega)) = \emptyset.$$

В силу общности выбора точки $O \in L$ мы можем считать, что $|\Lambda \setminus \Omega| = |\psi(\Lambda \setminus \Omega)|$.

Пусть C – неприводимая кривая в Π степени λ , которая содержит множество $\psi(\Sigma)$, и пусть W – конус в $\mathbb{P}^3$ над кривой C с вершиной в точке O . Тогда

$W \in \mathcal{D}$, откуда следует, что конус W содержит кривую Z . Тогда $\psi(Z) = C$. Имеем $\Lambda \setminus (\Xi \cup \Omega) \subset Z$.

Пусть B – некоторая неособая точка кривой Z такая, что точка B не содержится в прямой L , и пусть H – плоскость в $\mathbb{P}^3$, проходящая через прямую L и точку B .

Предположим, что $Z \subset H$. Тогда $H \cap \Pi = Z$, откуда следует, что $\lambda = 1$. Противоречие.

Итак, показано, что $Z \not\subset H$. Значит, пересечение $H \cap Z$ состоит из конечного числа точек, одна из которых – точка B . В частности, существует прямая $L' \subset H$ такая, что

$$L' \cap Z = B,$$

и прямая L' не касается кривой Z в точке B . Если $O = L \cap L'$, то морфизм

$$\psi|_Z: Z \longrightarrow C$$

бирационален, откуда следует, что $\deg(Z) = \lambda$. Таким образом, в силу общности выбора точки $O \in L$ мы можем считать, что выполнено равенство $\deg(Z) = \lambda$.

Итак, показано, что Z – неприводимая кривая в $\mathbb{P}^3$ степени λ , которая содержит все точки множества $\Lambda \setminus \Omega$. С другой стороны, имеем

$$|\Lambda \setminus \Omega| = |\psi(\Lambda)| - |\psi(\Omega)| \geq |\psi(\Lambda)| - 1 \geq \lambda(d - 1),$$

поскольку $\psi(\Omega) = \psi(L)$, если Ω не пусто. С другой стороны, не более чем $\lambda(d - 1) - 1$ точек множества Ξ могут лежать на кривой степени λ . Противоречие.

ЛЕММА 5.4. *Существует кривая $C \subset \Pi$ степени $k \leq d - 2$ такая, что $|C \cap \Xi'| > k(d - 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что не более чем $k(d - 1)$ точек множества Ξ' могут лежать на кривой в $\mathbb{P}^2$ степени k для любого $k \leq d - 2$.

Положим $\xi = 2d - 5$. Тогда $\xi \geq 7$, поскольку $d \geq 6$.

Предположим, что не более $k(\xi + 3 - k) - 2$ точек множества $\Xi' \setminus P'$ лежат на кривой степени k при всех $k \leq (\xi + 3)/2$. Тогда из леммы 2.3 следует, что существует кривая

$$Z \subset \mathbb{P}^2$$

степени $2d - 5$, которая содержит $\Xi' \setminus P'$ и не содержит P' . Конус в $\mathbb{P}^3$ над кривой Z с вершиной в точке O является поверхностью в $\mathbb{P}^3$ степени $2d - 5$, которая содержит все точки множества $\Xi \setminus P$, но не содержит точку P , что является противоречием.

Итак, показано, что существует некоторая кривая $R \subset \mathbb{P}^2$ степени $k \leq d - 1$, которая содержит не менее $k(\xi + 3 - k) - 1$ точек множества $\Xi' \setminus P'$.

Предположим, что $k = d - 1$. Тогда кривая R содержит не менее

$$k(\xi + 3 - k) - 1 = k(2d - 2 - k) - 1 = (d - 1)^2 - 1$$

точек множества $\Xi' \setminus P'$, но множество $\Xi' \setminus P'$ состоит не более чем из $(d - 1)^2 - 2$ точек.

Итак, мы видим, что $k \leq d - 2$. Тогда $k(2d - 2 - k) - 1 \leq k(d - 1)$.

Предположим, что $k = 1$. Тогда $2d - 4 \leq d - 1$, что противоречит неравенству $d \geq 6$.

Итак, показано, что $k \neq 1$. Тогда

$$k(2d - 2 - k) - 1 \leq k(d - 1) \iff k(d - 1 - k) \leq 1 \iff k \geq d - 1,$$

что является противоречием, поскольку $k \leq d - 2$.

Без ограничения общности мы можем считать, что k – минимальное из возможных натуральных чисел, обладающих подобными свойствами. Тогда кривая C неприводима. Пусть S – конус в $\mathbb{P}^3$ над кривой C с вершиной в точке O . Тогда

$$|S \cap \Xi| \geq k(d - 1) + 1,$$

откуда следует, что $\Xi \subset S$ по лемме 5.1. Тогда $\Xi' \subset C$.

Рассмотрим Ξ как замкнутую нульмерную подсхему в $\mathbb{P}^3$. Тогда

$$h^1(\mathcal{I}_\Xi \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2d - 5)) \neq 0,$$

где $\mathcal{I}_\Xi$ – пучок идеалов подсхемы Ξ .

Пусть $\mathcal{R}$ – линейная подсистема линейной системы $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d - 2)|$, которая содержит все поверхности, содержащие множество Ξ . Из леммы 5.3 следует, что базисное множество линейной системы $\mathcal{R}$ содержится в объединении прямой L и конечного множества. Положим

$$\Gamma = R_1 \cdot R_2 \cdot M,$$

где R_1 и R_2 – общие поверхности в линейной системе $\mathcal{R}$, а M – общая поверхность в линейной системе $\mathcal{M}$. Тогда Γ – нульмерная подсхема в $\mathbb{P}^3$, а Ξ – подсхема схемы Γ .

Пусть Υ – замкнутая подсхема схемы Γ такая, что

$$\mathcal{I}_\Upsilon = \text{Ann}(\mathcal{I}_\Xi / \mathcal{I}_\Gamma),$$

где $\mathcal{I}_\Upsilon$ и $\mathcal{I}_\Gamma$ – пучки идеалов подсхем Υ и Γ соответственно. Тогда

$$0 \neq h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2d - 5) \otimes \mathcal{I}_\Xi) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d - 4) \otimes \mathcal{I}_\Upsilon) - h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d - 4) \otimes \mathcal{I}_\Gamma)$$

по теореме 2.1. Значит, существует поверхность $F \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d - 4) \otimes \mathcal{I}_\Upsilon|$. Тогда $(d - 4)(d - 1)(d - 2) = F \cdot R_1 \cdot M \geq h^0(\mathcal{O}_\Upsilon) = h^0(\mathcal{O}_\Gamma) - h^0(\mathcal{O}_\Xi) = (d - 2)^2(d - 1) - |\Xi|$, откуда следует, что $|\Xi| \geq 2(d - 2)(d - 1)$. Таким образом, выполнены неравенства

$$(d - 1)^2 = |\Xi| \geq 2(d - 2)(d - 1),$$

что является противоречием, поскольку $d \geq 4$.

Лемма 4.10 доказана.

Список литературы

- [1] C. Ciliberto, V. Di Gennaro, “Factoriality of certain hypersurfaces of $\mathbb{P}^4$ with ordinary double points”, *Algebraic transformation groups and algebraic varieties* (Vienna, Austria, 2001), *Encyclopaedia Math. Sci.*, **132**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, 1–7.
- [2] I. Cheltsov, “Nonrational nodal quartic threefolds”, *Pacific J. Math.*, **226**:1 (2006), 65–81.

- [3] К. А. Шрамов, “ $\mathbb{Q}$ -факториальные трехмерные квартики”, *Матем. сб.*, **198**:8 (2007), 103–114; англ. пер.: K. A. Shramov, “ $\mathbb{Q}$ -factorial quartic threefolds”, *Sb. Math.*, **198**:8 (2007), 1165–1174.
- [4] A. A. du Plessis, C. T. C. Wall, “Singular hypersurfaces, versality, and Gorenstein algebras”, *J. Algebraic Geom.*, **9**:2 (2000), 309–322.
- [5] I. Cheltsov, “On factoriality of nodal threefolds”, *J. Algebraic Geom.*, **14**:4 (2005), 663–690.
- [6] I. Cheltsov, J. Park, “Factorial hypersurfaces in $\mathbb{P}^4$ with nodes”, *Geom. Dedicata*, **121**:1 (2006), 205–219.
- [7] D. Kosta, “Factoriality condition of some nodal threefolds in $\mathbb{P}^4$ ”, *Manuscripta Math.*, **127**:2 (2008), 151–166.
- [8] I. Cheltsov, “Points in projective spaces and applications”, *J. Differential Geom.*, **81**:3 (2009), 575–599.
- [9] I. Cheltsov, “Factorial threefold hypersurfaces”, *J. Algebraic Geom.* (to appear).
- [10] E. D. Davis, A. V. Geramita, F. Orecchia, “Gorenstein algebras and the Cayley–Bacharach theorem”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **93**:4 (1985), 593–597.
- [11] D. Eisenbud, J.-H. Koh, “Remarks on points in a projective space”, *Commutative algebra* (Berkeley, CA, 1987), Math. Sci. Res. Inst. Publ., **15**, Springer-Verlag, New York, 1989, 157–172.
- [12] E. D. Davis, A. V. Geramita, “Birational morphisms to $\mathbb{P}^2$: an ideal-theoretic perspective”, *Math. Ann.*, **279**:3 (1988), 435–448.
- [13] A. Dimca, “Betti numbers of hypersurfaces and defects of linear systems”, *Duke Math. J.*, **60**:1 (1990), 285–298.

И. А. Чельцов (I. A. Cheltsov)

University of Edinburgh, UK

E-mail: cheltsov@yahoo.com

Поступила в редакцию

12.05.2009