Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Богатая, С. А. Богатый, Е. А. Кудрявцева, Обращение теоремы об “экономичных” отображениях, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 4, 103–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7578>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:33:14

УДК 515.127.15

С. И. Богатая, С. А. Богатый, Е. А. Кудрявцева

Обращение теоремы об “экономичных” отображениях

Доказывается неувлучшаемость теоремы об “экономичных” отображениях. А именно, при $m > n + d$ построено такое отображение n -мерного симплекса в m -мерное евклидово пространство, для которого (и для всякого близкого к нему отображения) имеется d -мерная плоскость, мощность прообраза которой не меньше верхней оценки $\lceil (dn + n + 1)/(m - n - d) \rceil + d$ из теоремы об “экономичных” отображениях.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: вложение, евклидово пространство, мощность прообраза плоскости.

Знаменитая теорема Нёбелинга–Понтрягина [1], [2] о вложении в форме Гуревича [3] утверждает, что *если $m \geq 2n + 1$, то для всякого компакта X размерности $\dim X \leq n$ множество всех вложений X в евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ плотно в пространстве $C(X, \mathbb{R}^m)$ всех непрерывных отображений X в $\mathbb{R}^m$. Для полиэдра X с $\dim X = n$ оценка $m \geq 2n + 1$ неувлучшаема*. Имеются обобщения теоремы Нёбелинга–Понтрягина–Гуревича в разных направлениях. В частности, Болтянский доказал [4] аналог теоремы Нёбелинга–Понтрягина–Гуревича для k -регулярных отображений. *Если $m \geq kn + n + k$, то для всякого компакта X размерности $\dim X \leq n$ множество всех k -регулярных вложений X в $\mathbb{R}^m$ плотно в пространстве $C(X, \mathbb{R}^m)$. Для полиэдра X с $\dim X = n$ оценка $m \geq kn + n + k$ неувлучшаема*. Понятие k -регулярных отображений ввел в 1957 г. К. Борсук (см. [5]) – это отображения “максимально возможно экономичные” по отношению к $(k - 1)$ -мерным плоскостям, т.е. такие отображения $g = (g_1, \dots, g_m): X \rightarrow \mathbb{R}^m$, что прообраз всякой $(k - 1)$ -мерной плоскости состоит из не более чем k точек. Важность k -регулярных отображений описывает теорема Хаара–Колмогорова–Рубинштейна [6]–[8], [9; теорема 3.11], согласно которой k -регулярность отображения g , возможность интерполяции любых $k + 1$ значений в любых $k + 1$ точках компакта X посредством функций $\{1, g_1, \dots, g_m\}$ и не более чем $(m - k)$ -мерность многогранника наилучших аппроксимаций по Чебышёву произвольной непрерывной функции линейными комбинациями функций $\{1, g_1, \dots, g_m\}$ эквивалентны.

В. Гуревич [3] дал другое обобщение – вычислил минимально возможную кратность “общих” отображений X в $\mathbb{R}^m$ при $n + 1 \leq m \leq 2n$. В настоящей работе вычисляется минимально возможная мощность прообразов $(k - 1)$ -мерных

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (гранты № НШ-1562.2008.1 и № НШ-1410.2012.1), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 09-01-00741-а и № 10-01-00748-а), Программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант № 2.1.1.3704) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (грант № 14.740.11.0794).

плоскостей “общего” отображения X в $\mathbb{R}^m$ при $n + k \leq m < kn + n + k$. Можно сказать, что работа посвящена многомерному (трансверсальному) аналогу теоремы Гуревича. Для удобства обозначений далее все результаты формулируются в терминах числа $d = k - 1$. Богатый и Вылов получили [10; следствие 1.6] теорему о плотности множества “экономичных” отображений. Под “экономичными” отображениями в [10] и в настоящей работе понимаются отображения, для которых справедлива некоторая конкретная верхняя оценка мощности прообраза произвольной плоскости заданной размерности. В настоящей работе доказано, что эта оценка точна, т.е. она неулучшаема ни для какого плотного множества отображений. Результат Богатого и Вылова [10; следствие 1.6] получен как следствие обращения (неулучшаемости) [10; теорема 1.1] трансверсальной теоремы Тверберга. В наиболее важном случае обращение трансверсальной теоремы Тверберга звучит следующим образом.

Пусть A_{ij} , $i = 1, 2, \dots, q$, $j = 1, 2, \dots, n_i + 1$, – такие точки в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, что множество всех их координат алгебраически независимо. Пусть $0 \leq d \leq m$, $d + 1 \leq q$ и

$$n_1 + n_2 + \dots + n_q + 1 \leq (q - d - 1)(m - d).$$

Тогда для всякой d -мерной плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$ существует такой индекс $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, что плоскость Π^d не пересекает линейную оболочку точек $\{A_{i1}, \dots, A_{in_i+1}\}$.

В настоящей работе доказывается (теорема 1.2) топологическая стабильность некоторого варианта трансверсальной теоремы Тверберга (топологическая стабильность неулучшаемости приведенной выше теоремы), которая неоднократно высказывалась в качестве гипотезы [10; гипотеза 4 при $t = 0$, $T = m$], [11; вопрос 14 при $t = 0$, $T = m$]. Это позволило доказать (следствие 1.6) неулучшаемость теоремы Богатого–Вылова о плотности множества “экономичных” отображений. Следствие 1.6 дает ответ на вопрос 10 из [11].

В § 2 доказывается (теорема 2.3) топологическая стабильность существования d -мерной секущей плоскости, подпространство направляющих векторов которой содержит некоторое t -мерное координатное подпространство и само содержится в некотором T -мерном координатном подпространстве. В качестве приложения (следствие 2.5) получена неулучшаемость оценки (см. [10; следствие 1.6]) числа прообразов d -мерной плоскости, подпространство направляющих векторов которой содержит некоторое t -мерное координатное подпространство и само содержится в некотором T -мерном координатном подпространстве, при “общем” отображении n -мерного полиэдра в m -мерное евклидово пространство. Показано (пример 2.1), что в общем случае гипотеза 4 из [10] неверна. Этот пример дает отрицательный ответ на вопрос 14 из [11], а теорема 2.3 описывает все случаи положительного ответа на вопрос 14 из [11], т.е. все случаи справедливости гипотезы 4 из [10].

§ 1. Основные результаты

Теорема о 0-трансверсали является частным случаем общей теоремы 1.2 о d -трансверсали, но так как в рамках теории оптимального управления [12; лемма 6.3, с. 65] она представляет самостоятельный интерес, то мы посчитали

целесообразным выделить ее более простое доказательство отдельно. Кроме того, доказательство общей теоремы 2.3 опирается не на формулировку, а на конструкцию нижеприведенного доказательства.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ представлено в виде прямой суммы q своих взаимно ортогональных подпространств $\mathbb{R}^m = L_1 \oplus \dots \oplus L_q$, $\dim L_i = k_i$, $i = 1, \dots, q$. Пусть $V_i = L_i^\perp$ и $I_i^{n_i}$, $n_i = m - k_i$, — центрально симметричный единичный куб в V_i . Пусть $f_i: I_i^{n_i} \rightarrow V_i \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ естественное вложение. Тогда существует такое число $\Delta > 0$, что для любых отображений $g_i: I_i^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$ таких, что $\varrho(g_i, f_i) \leq \Delta$, $i = 1, \dots, q$,

$$g_1(I_1^{n_1}) \cap \dots \cap g_q(I_q^{n_q}) \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По произвольным отображениям $h_i: I_i^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, q$, на кубе $I_1^{n_1} \times \dots \times I_q^{n_q}$ размерности

$$\begin{aligned} \dim I_1^{n_1} \times \dots \times I_q^{n_q} &= \dim I_1^{n_1} + \dots + \dim I_q^{n_q} \\ &= n_1 + \dots + n_q = (m - k_1) + \dots + (m - k_q) = (q - 1)m \end{aligned}$$

зададим отображение

$$H: I_1^{n_1} \times \dots \times I_q^{n_q} \rightarrow \mathbb{R}^{(q-1)m}.$$

Положим

$$H(X_1, \dots, X_q) = (h_1(X_1) - h_q(X_q), \dots, h_{q-1}(X_{q-1}) - h_q(X_q)).$$

Ясно, что $h_1(X_1) = \dots = h_q(X_q)$ тогда и только тогда, когда $H(X_1, \dots, X_q) = (0, \dots, 0)$. Для отображений $f_1, \dots, f_q$ соответствующее отображение F линейно и задается матрицей $\mathbf{M}$, которую удобно разбить на $(q - 1) \times q$ блоков.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{m \times n_1} & \dots & \mathbf{0}_{m \times n_{q-2}} & \mathbf{0}_{m \times n_{q-1}} & -\mathbf{M}_{m \times n_q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{m \times n_1} & \dots & \mathbf{M}_{m \times n_{q-2}} & \mathbf{0}_{m \times n_{q-1}} & -\mathbf{M}_{m \times n_q} \\ \mathbf{0}_{m \times n_1} & \dots & \mathbf{0}_{m \times n_{q-2}} & \mathbf{M}_{m \times n_{q-1}} & -\mathbf{M}_{m \times n_q} \end{pmatrix}.$$

Блоки $\mathbf{M}_{m \times n_i}$, в свою очередь, удобно разбить на шесть блоков

$$\mathbf{M}_{m \times n_i} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{p_i \times p_i} & \mathbf{0}_{p_i \times r_i} \\ \mathbf{0}_{k_i \times p_i} & \mathbf{0}_{k_i \times r_i} \\ \mathbf{0}_{r_i \times p_i} & \mathbf{E}_{r_i \times r_i} \end{pmatrix},$$

где $p_i = k_1 + \dots + k_{i-1}$, $r_i = k_{i+1} + \dots + k_q$, $n_i = p_i + r_i = m - k_i$. Отметим, что при $i = 1$ ($p_1 = 0$) и $i = q$ ($r_q = 0$) остаются два невырожденных блока. Легко проверить, что матрица $\mathbf{M}$ является квадратной $((q - 1)m \times (q - 1)m)$ -матрицей. Покажем, что ее определитель равен ± 1 . Разлагая определитель матрицы $\mathbf{M}$ последовательно по столбцам с номерами от $n_1 + \dots + n_{q-2} + 1$ до $n_1 + \dots + n_{q-2} + n_{q-1}$, получим такую $((q - 1)m - n_{q-1}) \times ((q - 1)m - n_{q-1})$ -матрицу

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{m \times n_1} & \dots & \mathbf{0}_{m \times n_{q-2}} & -\mathbf{M}_{m \times n_q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{m \times n_1} & \dots & \mathbf{M}_{m \times n_{q-2}} & -\mathbf{M}_{m \times n_q} \\ \mathbf{0}_{k_{q-1} \times n_1} & \dots & \mathbf{0}_{k_{q-1} \times n_{q-2}} & -\mathbf{E}_{k_{q-1} \times n_q} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{E}_{k_{q-1} \times n_q} = (\mathbf{0}_{k_{q-1} \times (n_q - k_{q-1})} \mathbf{E}_{k_{q-1} \times k_{q-1}})$, что $\det \mathbf{M} = (-1)^\sigma \det \mathbf{B}$, где

$$\begin{aligned} \sigma &= (n_1 + \dots + n_{q-2} + 1 + (q-2)m + 1)p_{q-1} \\ &\quad + (n_1 + \dots + n_{q-2} + p_{q-1} + 1 + (q-2)m + p_{q-1} + k_{q-1} + 1)k_q \\ &= (k_1 + \dots + k_{q-2})(1 + k_q) + k_{q-1}k_q. \end{aligned}$$

Разлагая далее определитель матрицы $\mathbf{B}$ по последним k_{q-1} строчкам, получим такую $((q-2)m \times (q-2)m)$ -матрицу

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{m \times n_1} & \dots & \mathbf{0}_{m \times n_{q-2}} & -\mathbf{M}_{m \times (n_q - k_{q-1})} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{m \times n_1} & \dots & \mathbf{M}_{m \times n_{q-2}} & -\mathbf{M}_{m \times (n_q - k_{q-1})} \end{pmatrix},$$

что $\det \mathbf{B} = (-1)^{k_{q-1}} \det \mathbf{M}_1$. Полученная матрица $\mathbf{M}_1$ соответствует разложению евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ на $q-1$ ортогональное слагаемое $\mathbb{R}^m = L_1 \oplus \dots \oplus L_{q-2} \oplus (L_{q-1} \oplus L_q)$. Это означает, что совершен индуктивный шаг. База индукции не представляет труда (случай $q=2$ получается упрощенным повторением индуктивного шага). Итак, мы убедились, что линейное отображение F является невырожденным, поэтому по теореме о существенности тождественного отображения куба существует такое число $\delta > 0$, что для всякого отображения $g: I^{(q-1)m} \rightarrow \mathbb{R}^{(q-1)m}$ такого, что $\varrho(g, F) \leq \delta$, справедливо включение $(0, \dots, 0) \in g(I^{(q-1)m})$. Теперь несложно найти такое число $\Delta > 0$, что из $\varrho(g_i, f_i) \leq \Delta$, $i = 1, \dots, q$, следует $\varrho(G, F) \leq \delta$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ задан ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_d\}$, где $k = m - d$. Для точек $A_1, \dots, A_q$, $q \geq d+1$, подпространства $\text{Lin}(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_d)$, координаты которых в этом базисе алгебраически независимы, и целых неотрицательных чисел $n_1, \dots, n_q \leq m-d$ таких, что

$$n_1 + \dots + n_q = (q-d-1)(m-d),$$

в плоскостях

$$\begin{aligned} P_1 &= A_1 + \text{Lin}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n_1}), \quad \dots, \\ P_q &= A_q + \text{Lin}(\mathbf{e}_{n_1+\dots+n_{q-1}+1}, \dots, \mathbf{e}_{n_1+\dots+n_{q-1}+n_q}) \end{aligned}$$

берутся единичные кубы $I_1^{n_1}, \dots, I_q^{n_q}$, симметричные относительно соответствующих точек $A^1, \dots, A^q$. Здесь индексы всех векторов берутся по модулю числа k . Пусть $f_i: I_i^{n_i} \rightarrow P_i \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ естественное вложение. Тогда существует такое число $\Delta > 0$, что для любых отображений $g_i: I_i^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$ таких, что $\varrho(g_i, f_i) \leq \Delta$, $i = 1, \dots, q$, существует такая d -мерная плоскость $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$, что

$$g_1(I_1^{n_1}) \cap \Pi^d \neq \emptyset, \quad \dots, \quad g_q(I_q^{n_q}) \cap \Pi^d \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $q = d+1$ утверждение очевидно, поэтому далее будем считать, что $q \geq d+2$. По произвольным отображениям

$$h_i: I_i^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad h_i(X_i) = (h_i^1(X_i), \dots, h_i^m(X_i)), \quad X_i \in I_i^{n_i}, \quad i = 1, \dots, q,$$

построим $q-1$ отображение

$$h_{i,0}: I_i^{n_i} \times I_q^{n_q} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad i = 1, \dots, q-1,$$

задаваемые формулами

$$h_{i,0}(X_i, X_q) = h_i(X_i) - h_q(X_q).$$

Далее построим $q - 2$ отображения

$$h_{i,1}: I_i^{n_i} \times I_{q-1}^{n_{q-1}} \times I_q^{n_q} \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}, \quad i = 1, \dots, q-2,$$

задаваемые формулами

$$h_{i,1}(X_i, X_{q-1}, X_q) = \left(\frac{h_{i,0}^1(X_i, X_q)}{h_{i,0}^m(X_i, X_q)} - \frac{h_{q-1,0}^1(X_{q-1}, X_q)}{h_{q-1,0}^m(X_{q-1}, X_q)}, \dots, \frac{h_{i,0}^{m-1}(X_i, X_q)}{h_{i,0}^m(X_i, X_q)} - \frac{h_{q-1,0}^{m-1}(X_{q-1}, X_q)}{h_{q-1,0}^m(X_{q-1}, X_q)} \right).$$

Конечно, необходимо наложить условие отличия от нуля знаменателей, но так как мы будем все это применять только для отображений, близких к заданным, то это условие будет автоматически выполнено.

Продолжаем таким образом делить координатные функции отображений на последнюю координату, игнорировать возникающую на последнем месте единицу и брать разность с последним отображением, пока не построим $q - d - 1$ отображений

$$h_{i,d}: I_i^{n_i} \times I_{q-d}^{n_{q-d}} \times \dots \times I_q^{n_q} \rightarrow \mathbb{R}^{m-d}, \quad i = 1, \dots, q-d-1.$$

Теперь на кубе $I_1^{n_1} \times \dots \times I_q^{n_q}$ размерности $n_1 + \dots + n_q = (q-d-1)(m-d)$ зададим отображение

$$H: I_1^{n_1} \times \dots \times I_q^{n_q} \rightarrow \mathbb{R}^{(q-d-1)(m-d)}.$$

Положим

$$H(X_1, \dots, X_q) = (h_{1,d}(X_1, X_{q-d}, \dots, X_q), \dots, h_{q-d-1,d}(X_{q-d-1}, X_{q-d}, \dots, X_q)).$$

Несложно проверить, что точки $h_1(X_1), \dots, h_q(X_q)$ лежат на одной d -мерной плоскости (задаваемой точками $h_{q-d}(X_{q-d}), \dots, h_q(X_q)$) тогда и только тогда, когда $H(X_1, \dots, X_q) = (0, \dots, 0)$.

Пусть $A_i = a_i^1 \mathbf{t}_1 + \dots + a_i^d \mathbf{t}_d$, $i = 1, \dots, q$. Для отображений $f_1, \dots, f_q$ соответствующее отображение F линейно. Найдем его матрицу $\mathbf{M}$ – одновременно мы получим доказательство корректности построения отображений $h_{i,r}$, если отображения h_i и f_i достаточно близки для всех i . Отображение f_i будем понимать как отображение в $\mathbb{R}^k$ и сдвиг в $\mathbb{R}^m$ на вектор $a_i^1 \mathbf{t}_1 + \dots + a_i^d \mathbf{t}_d$, поэтому будем говорить, что f_i задается $(k \times n_i)$ -матрицей

$$\mathbf{M}_{k \times n_i} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{(p_i-k) \times (p_i-k)} & \mathbf{0}_{(p_i-k) \times (kl-p_{i-1})} \\ \mathbf{0}_{(k-n_i) \times (p_i-k)} & \mathbf{0}_{(k-n_i) \times (kl-p_{i-1})} \\ \mathbf{0}_{(kl-p_{i-1}) \times (p_i-k)} & \mathbf{E}_{(kl-p_{i-1}) \times (kl-p_{i-1})} \end{pmatrix} & \text{при } p_{i-1} \leq kl \leq p_i; \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(p_{i-1}-kl) \times n_i} \\ \mathbf{E}_{n_i \times n_i} \\ \mathbf{0}_{(k(l+1)-p_i) \times n_i} \end{pmatrix} & \text{при } kl \leq p_{i-1} \leq p_i \leq k(l+1), \end{cases}$$

где $p_i = n_1 + \dots + n_i$, и d -столбцом $(a_i^1, \dots, a_i^d)^t$.

Тогда отображение $f_{i,0}$ задается $(k \times (n_i + n_q))$ -матрицей, которую удобно разбить на 2 блока

$$(\mathbf{M}_{k \times n_i} - \mathbf{M}_{k \times n_q}),$$

и d -столбцом

$$(a_i^1 - a_q^1, \dots, a_i^d - a_q^d)^t.$$

Ясно, что существуют такие числа $\varphi_r(A_i)^1, \dots, \varphi_r(A_i)^{d-r}$ и $\psi_r^{(0)}(A_i), \dots, \psi_r^{(r+1)}(A_i)$ (зависящие и от координат точек $A_{q-r}, \dots, A_q$), что отображение $f_{i,r}$ задается матрицей (разбитой на $r+2$ блока)

$$\begin{pmatrix} \psi_r^{(0)}(A_i)\mathbf{M}_{k \times n_i} & \psi_r^{(1)}(A_i)\mathbf{M}_{k \times n_{q-r}} & \dots & \psi_r^{(r+1)}(A_i)\mathbf{M}_{k \times n_q} \end{pmatrix}$$

и $(d-r)$ -столбцом

$$(\varphi_r(A_i)^1, \dots, \varphi_r(A_i)^{d-r})^t.$$

Указанные числа (функции) можно вычислить рекуррентно. Согласно описанию отображений $f_{i,0}$ надо положить $\varphi_0(A_i)^j = a_i^j - a_q^j$, $\psi_0^{(0)} = 1$ и $\psi_0^{(1)} = -1$. При $1 \leq r \leq d$, $1 \leq i \leq q-r$, $1 \leq j \leq d-r$, $2 \leq l \leq r+1$ имеют место рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \varphi_r(A_i)^j &= \frac{\varphi_{r-1}(A_i)^j}{\varphi_{r-1}(A_i)^{d-r+1}} - \frac{\varphi_{r-1}(A_{q-r})^j}{\varphi_{r-1}(A_{q-r})^{d-r+1}}, \\ \psi_r^{(0)}(A_i) &= \frac{\psi_{r-1}^{(0)}(A_i)}{\varphi_{r-1}(A_i)^{d-r+1}}, \quad \psi_r^{(1)}(A_i) = -\frac{\psi_{r-1}^{(0)}(A_{q-r})}{\varphi_{r-1}(A_{q-r})^{d-r+1}}, \\ \psi_r^{(l)}(A_i) &= \frac{\psi_{r-1}^{(l-1)}(A_i)}{\varphi_{r-1}(A_i)^{d-r+1}} - \frac{\psi_{r-1}^{(l-1)}(A_{q-r})}{\varphi_{r-1}(A_{q-r})^{d-r+1}}. \end{aligned}$$

Выписанные рекуррентные соотношения позволяют индукцией по r доказать, что

$$\varphi_r(A_i)^j = a_i^j \frac{P_{ij}}{Q_{ij}} + \frac{p_{ij}}{q_{ij}}$$

для некоторых многочленов P, Q, p, q с целыми коэффициентами от координат точек $A_{q-r}, \dots, A_q$ и координат $a_i^{d-r+1}, \dots, a_i^d$ точки A_i ; причем многочлены P, Q, q являются нетривиальными. Так как все координаты всех точек алгебраически независимы, то они не удовлетворяют никакому нетривиальному алгебраическому уравнению. Поэтому значения всех функций $\varphi_r(A_i)^j$ отличны от нуля (для отображений f_i , а тогда и для достаточно близких отображений h_i).

Теперь матрицу $\mathbf{M}$ легко выписать в виде естественного разбиения на $(q-d-1) \times q$ блоков

$$\begin{pmatrix} c_1^{(0)}\mathbf{M}_{k \times n_1} & \dots & \mathbf{0}_{k \times n_{q-d-1}} & c_1^{(1)}\mathbf{M}_{k \times n_{q-d}} & \dots & c_1^{(d+1)}\mathbf{M}_{k \times n_q} \\ \mathbf{0}_{k \times n_1} & \dots & \mathbf{0}_{k \times n_{q-d-1}} & c_2^{(1)}\mathbf{M}_{k \times n_{q-d}} & \dots & c_2^{(d+1)}\mathbf{M}_{k \times n_q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{k \times n_1} & \dots & c_{q-d-1}^{(0)}\mathbf{M}_{k \times n_{q-d-1}} & c_{q-d-1}^{(1)}\mathbf{M}_{k \times n_{q-d}} & \dots & c_{q-d-1}^{(d+1)}\mathbf{M}_{k \times n_q} \end{pmatrix},$$

где обозначено $c_i^{(l)} = \psi_d^{(l)}(A_i)$. Легко проверить, что матрица $\mathbf{M}$ является квадратной $((q-d-1)k \times (q-d-1)k)$ -матрицей. Покажем, что она невырождена.

Докажем, что определитель матрицы $\mathbf{M}$ является нетривиальной функцией координат заданных точек $A_1, \dots, A_q$. Тогда в силу алгебраической независимости координат заданных точек и числовое значение определителя будет отлично от нуля. Для упрощения выкладок нетривиальные множители столбцов будем опускать.

Разлагая определитель матрицы $\mathbf{M}$ последовательно по первым n_1 столбцам, сведем все к вычислению определителя $((q-d-1)k - n_1) \times ((q-d-1)k - n_1)$ -матрицы. Разлагая определитель получившейся матрицы по первым n_2 столбцам и так далее, сведем все к вычислению определителя $((n_{q-d} + \dots + n_q) \times (n_{q-d} + \dots + n_q))$ -матрицы

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \psi_d^{(1)}(A_1)\mathbf{M}_{(k-n_1) \times n_{q-d}}^{(1)} & \dots & \psi_d^{(d+1)}(A_1)\mathbf{M}_{(k-n_1) \times n_q}^{(1)} \\ \psi_d^{(1)}(A_2)\mathbf{M}_{(k-n_2) \times n_{q-d}}^{(2)} & \dots & \psi_d^{(d+1)}(A_2)\mathbf{M}_{(k-n_2) \times n_q}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_d^{(1)}(A_{q-d-1})\mathbf{M}_{(k-n_{q-d-1}) \times n_{q-d}}^{(q-d-1)} & \dots & \psi_d^{(d+1)}(A_{q-d-1})\mathbf{M}_{(k-n_{q-d-1}) \times n_q}^{(q-d-1)} \end{pmatrix},$$

где матрицы $\mathbf{M}_{(k-n_i) \times n_{q-d}}^{(i)}, \dots, \mathbf{M}_{(k-n_i) \times n_q}^{(i)}$ получаются из матриц $\mathbf{M}_{k \times n_{q-d}}, \dots, \mathbf{M}_{k \times n_q}$ соответственно зачеркиванием тех строчек, номера j которых соответствуют базисным векторам $\mathbf{e}_j$, входящим в подпространство параллельное плоскости P_i .

Докажем теперь невырожденность матрицы $\mathbf{B}$. Сведем все к доказательству невырожденности некоторых матриц меньшего размера.

Рассмотрим сначала случай, когда $n_{q-d} = \dots = n_q = k$. Это равносильно тому, что

$$\mathbf{M}_{k \times n_{q-d}} = \dots = \mathbf{M}_{k \times n_q} = \mathbf{E}_{k \times k}.$$

Предположим, что столбцы $((d+1)k \times (d+1)k)$ -матрицы $\mathbf{B}$ линейно зависимы.

Строка с номером j матрицы $\mathbf{M}_{k \times n_i}$ является нулевой, если вектор $\mathbf{e}_j$ не параллелен плоскости P_i , и содержит ровно одну единицу, если вектор $\mathbf{e}_j$ параллелен плоскости P_i . Следовательно, строка с номером j матрицы $\mathbf{M}_{k \times n_i}$ “оставляет след” в матрице $\mathbf{B}$ тогда и только тогда, когда вектор $\mathbf{e}_j$ не параллелен плоскости P_i .

Из условия $n_1 + \dots + n_q = (q-d-1)k$ и выбора плоскостей вытекает, что всякий вектор $\mathbf{e}_j$ параллелен ровно $(q-d-1)$ плоскостям, т.е. не параллелен ровно $(d+1)$ плоскостям. В рассматриваемом случае номера этих “исключительных” плоскостей $\leq q-d-1$.

Рассмотрим строки матрицы $\mathbf{M}$ с номерами $j, j+k, \dots, j+k(q-d-2)$. Ровно $(d+1)$ из этих строк “оставят след” в матрице $\mathbf{B}$. Рассмотрим теперь в матрице $\mathbf{B}$ столбцы с номерами $j, j+k, \dots, j+kd$. В этих столбцах единицы стоят на местах, отвечающих тем номерам $i \leq q-d-1$, что вектор $\mathbf{e}_j$ не параллелен плоскости P_i . На всех остальных местах в этих столбцах стоят нули. На этих местах у всех остальных столбцов стоят нули. Поэтому все столбцы матрицы $\mathbf{B}$ линейно независимы тогда и только тогда, когда для всякого индекса $1 \leq j \leq k$ линейно независимы столбцы с номерами $j, j+k, \dots, j+kd$. Последнее имеет

место тогда и только тогда, когда невырождена $((d+1) \times (d+1))$ -матрица

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \psi_d^{(1)}(A_{i_1}) & \psi_d^{(2)}(A_{i_1}) & \dots & \psi_d^{(d+1)}(A_{i_1}) \\ \psi_d^{(1)}(A_{i_2}) & \psi_d^{(2)}(A_{i_2}) & \dots & \psi_d^{(d+1)}(A_{i_2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_d^{(1)}(A_{i_{d+1}}) & \psi_d^{(2)}(A_{i_{d+1}}) & \dots & \psi_d^{(d+1)}(A_{i_{d+1}}) \end{pmatrix},$$

где индексы $i_1 < i_2 < \dots < i_{d+1} < q-d$ соответствуют тем плоскостям, которые не параллельны вектору $\mathbf{e}_j$.

Для упрощения символики без ограничения общности можно считать, что этими индексами являются $1 < 2 < \dots < d+1$. Так как все числа $\psi_d^{(1)}(A_1) = \dots = \psi_d^{(1)}(A_{d+1})$ зависят только от координат точек $A_{q-d}, \dots, A_q$ и в рекуррентных соотношениях для $\psi_d^{(l)}(A_i)$ второе слагаемое не зависит от i , то элементарными операциями со строками матрица $\mathbf{C}$ приводится к виду

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^d \varphi_{d-i}(A_1)^i & \prod_{i=2}^d \varphi_{d-i}(A_1)^i & \dots & \varphi_0(A_1)^d & 1 \\ \prod_{i=1}^d \varphi_{d-i}(A_2)^i & \prod_{i=2}^d \varphi_{d-i}(A_2)^i & \dots & \varphi_0(A_2)^d & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \prod_{i=1}^d \varphi_{d-i}(A_{d+1})^i & \prod_{i=2}^d \varphi_{d-i}(A_{d+1})^i & \dots & \varphi_0(A_{d+1})^d & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь индукцией по d докажем, что матрица $\mathbf{D}$ невырождена. Как мы уже отмечали, для этого достаточно показать, что ее определитель является нетривиальной функцией координат заданных точек. База индукции ($d=0$) очевидна (в этом случае $\mathbf{C} = -\mathbf{E}_{1 \times 1}$). Разложим определитель матрицы $\mathbf{D}$ по первому столбцу. Убедимся, что первый элемент даст нетривиальное слагаемое, которое не сокращается слагаемыми от других элементов. Согласно уже доказанному $\varphi_{d-1}(A_1)^1$ является нетривиальным рациональным выражением вида $a_1^1 \frac{P_{11}}{Q_{11}} + \frac{P_{11}}{q_{11}}$. Следовательно, первый элемент даст слагаемое

$$a_1^1 \frac{P_{11}}{Q_{11}} \varphi_{d-2}(A_1)^2 \dots \varphi_0(A_1)^d \begin{vmatrix} \varphi_{d-2}(A_2)^2 \dots \varphi_0(A_2)^d & \dots & \varphi_0(A_2)^d & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{d-2}(A_{d+1})^2 \dots \varphi_0(A_{d+1})^d & \dots & \varphi_0(A_{d+1})^d & 1 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, согласно ранее доказанной нетривиальности функций $\varphi_r(A_i)^j$ и индуктивному предположению, выписанный коэффициент при a_1^1 является нетривиальным. Так как ни в каком другом месте символ a_1^1 не присутствует, то это означает нетривиальность определителя матрицы $\mathbf{D}$.

Общий случай сводится к уже доказанному следующим образом. Добавим к заданным точкам такие точки $A_{q+1}, \dots, A_{q+d+1} \in \mathbb{R}^d$, что все последние d координат всех точек $A_1, \dots, A_q, A_{q+1}, \dots, A_{q+d+1}$ алгебраически независимы, и возьмем $n_{q+1} = \dots = n_{q+d+1} = k$. При $d=0$ рассматривается пустое множество координат и можно считать, что сформулированное условие выполнено. Новая большая конфигурация плоскостей (кубов) удовлетворяет условиям уже разобранного случая. Соответствующие положительное число Δ и d -трансверсаль Π^d большой системы отображений доказывают справедливость теоремы для первоначальной системы отображений.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. В одном из наиболее важных случаев ($q = d + 2$) теореме 1.2 доказал В. Г. Болтянский [4; следствие 1.6]. Однако нам кажется, что и в этом частном случае изложенное выше доказательство является более простым и коротким.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Если для n -мерного симплекса Δ^n , $n \geq 1$, и заданных целых чисел $0 \leq d$ и $q \geq d + 2$ множество таких отображений $h: \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, что прообраз $h^{-1}(\Pi^d)$ всякой d -мерной плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$ состоит из не более чем $q - 1$ точек, плотно во множестве всех непрерывных отображений Δ^n в $\mathbb{R}^m$, то

$$m \geq d + \left\lceil \frac{q(n+1) - d - 1}{q - d - 1} \right\rceil.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое неравенство можно переписать в эквивалентной форме без использования знака целой части $m \geq d + \frac{qn+1}{q-d-1}$, т.е. в виде $(q-d-1)(m-d) \geq qn+1$. Предположим, что справедливо обратное неравенство $qn \geq (q-d-1)(m-d)$. Выделим в симплексе q попарно дизъюнктивных n -мерных кубов $I_1^n, \dots, I_q^n$. Рассмотрим ортогональное разложение $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-d} \oplus \mathbb{R}^d$ и во втором подпространстве возьмем q точек $A_1, \dots, A_q$, все координаты которых алгебраически независимы. Если $qn = (q-d-1)(m-d)$, то возьмем числа $n_1 = \dots = n_q = n$. Иначе возьмем такие неотрицательные числа $n_1 \leq n, \dots, n_q \leq n$, что $n_1 + \dots + n_q = (q-d-1)(m-d)$. В кубе I_i^n выберем грань $I_i^{n_i}$ и на замкнутом подмножестве $S = I_1^{n_1} \cup \dots \cup I_q^{n_q} \subset \Delta^n$ зададим отображение $\tilde{f}: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ согласно теореме 1.2. Так как евклидово пространство обладает свойством продолжения непрерывного отображения, то существует такое отображение $f: \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, что $f|_S = \tilde{f}$. Согласно теореме 1.2 для всякого отображения $g: \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ из Δ -окрестности отображения f существует такая d -мерная плоскость Π^d , что $g(I_i^{n_i}) \cap \Pi^d \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, q$. Поэтому $|g^{-1}(\Pi^d)| \geq q$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Повторим отдельно, что неравенство

$$m \geq d + \left\lceil \frac{q(n+1) - d - 1}{q - d - 1} \right\rceil$$

следствия 1.4 эквивалентно любому из неравенств

$$m \geq d + \frac{qn+1}{q-d-1}, \quad (q-d-1)(m-d) \geq qn+1.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.6. Для n -мерного компакта X , содержащего n -мерный симплекс, $n \geq 1$, и заданных целых чисел $0 \leq d \leq m$, $q \geq d + 2$ следующие условия эквивалентны.

1) Множество таких отображений $h: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, что прообраз $h^{-1}(\Pi^d)$ всякой d -мерной плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$ состоит из не более чем $q - 1$ точек, плотно во множестве всех непрерывных отображений X в $\mathbb{R}^m$.

2) Справедливо неравенство

$$m \geq d + \left\lceil \frac{q(n+1) - d - 1}{q - d - 1} \right\rceil.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $1) \implies 2)$ вытекает из следствия 1.4.

Импликация $2) \implies 1)$ вытекает из [10; следствие 1.6]. Действительно, согласно теореме Богатого–Вылова (в [10; следствие 1.6] надо положить $t = 0$, $T = m$) плотным G_δ -множеством является множество всех таких отображений $h: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, что прообраз всякой d -мерной плоскости состоит из не более чем

$$k \leq d + 1 + \frac{(d+1)n}{m - n - d}$$

точек. Преобразуем оценку на k с учетом заданного неравенства на m

$$\begin{aligned} k &\leq d + 1 + \frac{(d+1)n}{m - n - d} \leq d + 1 + \frac{(d+1)n}{d + \frac{qn+1}{q-d-1} - n - d} \\ &= d + 1 + \frac{(q-d-1)(d+1)n}{1 + (d+1)n} < d + 1 + \frac{(q-d-1)(d+1)n}{(d+1)n} = q. \end{aligned}$$

С учетом целочисленности k полученное неравенство $k < q$ дает искомое неравенство $k \leq q - 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. В некоторых местах доказательств неявно предполагается, что в пространстве X имеется необходимое количество различных точек. Поэтому для справедливости и содержательности результатов работы достаточно предполагать, что компакт X бесконечен (при $\dim X \geq 1$ это требование автоматически выполнено).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. Известно [13], что при $n \geq 2$ требование $\Delta^n \subset X$ в следствии 1.6 является существенным уже при $d = 0$, $q = 2$. Однако представляется вероятным, что при $n = 1$ следствие 1.6 справедливо без соответствующего предположения $\Delta^1 \subset X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.9. При $d = 0$, $q = 2$ получаем неравенство $m \geq 2n + 1$ из теоремы Нёбелинга–Понтрягина–Гуревича о плотности множества вложений.

При $d = 0$ получаем неравенство $m \geq n + 1 + \left\lfloor \frac{n}{q-1} \right\rfloor$ из теоремы Гуревича о плотности множества отображений кратности не более $q - 1$.

При $d = k - 1$, $q = k + 1$ получаем неравенство $m \geq kn + n + k$ из теоремы Болтянского о плотности множества k -регулярных вложений.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10. Подчеркнем, что в оригинальной работе Гуревича сформулирована и доказана импликация $2) \implies 1)$ следствия 1.6 при $d = 0$, но в более сильной форме [3; с. 755]. Впоследствии этот результат был переоткрыт [14]. Именно эта импликация обычно приводится как теорема Гуревича [15; § 45, VIII]. Авторы не смогли найти первоисточник обратной импликации $1) \implies 2)$ при $d = 0$. Соответствующее утверждение опубликовано в [16; следствие 6]. Однако данное там доказательство опирается на утверждение [16; предложение 4], которое приводилось без доказательства и без точной ссылки, так как в то время автор не смог найти первоисточник. Теперь можно указать, что это утверждение [16; предложение 4] легко вытекает из [12; лемма 6.3, с. 65 (при $q = 3$)] (т.е. из теоремы 1.1 при $q = 3$).

§ 2. Полные результаты

Сначала покажем, что гипотеза 4 из [10] (и [11]) неверна в полной общности.

ПРИМЕР 2.1. Для $m = 5$, $d = 2$, $q = 3$, $T = 4$, $t = 0$ числа $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, $n_3 = 2$ удовлетворяют равенству

$$n_1 + n_2 + n_3 = 2 = (5 - 2)(3 - 1) - (4 - 2)(2 - 0) = (m - d)(q - 1) - (T - d)(d - t)$$

и неравенствам $n_1 \leq m - d - 1$, $n_2 \leq m - d - 1$, $n_3 \leq m - d - 1$. Но для любых отображений $f_1: I_1^0 \rightarrow \mathbb{R}^5$, $f_2: I_2^0 \rightarrow \mathbb{R}^5$, $f_3: I_3^0 \rightarrow \mathbb{R}^5$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое ε -близкое к f_1 отображение $g_1: I_1^0 \rightarrow \mathbb{R}^5$, что всякая 4-мерная плоскость (и тем более всякая 2-мерная плоскость), пересекающая $g_1(I_1^0)$ (т.е. проходящая через точку $g_1(I_1^0)$) и параллельная некоторому 4-мерному координатному подпространству, не проходит через точку $f_2(I_2^0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть заданы некоторые отображения f_1, f_2, f_3 и $\varepsilon > 0$. Ясно, что точку $f_1(I_1^0)$ можно таким образом ε -сдвинуть, что 5 координат новой точки $g_1(I_1^0)$ и соответствующие координаты точки $f_2(I_2^0)$ различны. Тогда для всякой 4-мерной плоскости, проходящей через точку $g_1(I_1^0)$ и параллельной некоторой координатной гиперплоскости, все ее точки имеют фиксированной некоторую координату. Следовательно, точка $f_2(I_2^0)$ не может лежать на такой плоскости.

Теперь покажем, что в важном для приложений случае (числа n_i отличаются друг от друга не более чем на единицу) гипотеза 4 из [10] (и [11]) верна.

Выделим отдельно частный случай $T = m$, что позволит впредь не беспокоиться по поводу вырожденности возникающих пространств.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ задан ортонормированный базис $\{e_1, \dots, e_m\}$, заданы целые числа $0 \leq t \leq d \leq m$, $q \geq d - t + 1$ и заданы целые неотрицательные числа $n_1, \dots, n_q \leq m - d$ такие, что

$$n_1 + \dots + n_q = (q - d + t - 1)(m - d).$$

Тогда существуют отображения $f_i: I_i^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, q$, и число $\Delta > 0$ такие, что для любых отображений $g_i: I_i^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$ таких, что $\varrho(g_i, f_i) \leq \Delta$, $i = 1, \dots, q$, существует такая d -мерная плоскость $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$, параллельная t -мерному подпространству, натянутому на t последних базисных векторов, что

$$g_1(I_1^{n_1}) \cap \Pi^d \neq \emptyset, \quad \dots, \quad g_q(I_q^{n_q}) \cap \Pi^d \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заданный в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ ортонормированный базис порождает ортогональное разложение $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-t} \oplus \mathbb{R}^t$. Для чисел $\tilde{m} = m - t$, $\tilde{d} = d - t$, q , $n_1, \dots, n_q$ выполнены условия теоремы 1.2. Возьмем соответствующие отображения $f_i: I_i^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{m-t} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, q$. Покажем, что положительное число Δ из теоремы 1.2 подходит и в этом случае. Пусть $g_i: I_i^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, q$, — отображения, отличающиеся от соответствующих отображений f_i не более чем на Δ . Ортогональную проекцию пространства $\mathbb{R}^m$ на первое слагаемое обозначим через P . Согласно выбору числа Δ и отображений f_i , $i = 1, \dots, q$, множества $P \circ g_i(I_i^{n_i})$, $i = 1, \dots, q$, обладают в $\mathbb{R}^{m-t}$

общей секущей $(d - t)$ -мерной плоскостью $\Pi^{d-t} \subset \mathbb{R}^{m-t}$. Тогда для множеств $g_i(I_i^{n_i})$, $i = 1, \dots, q$, искомой секущей d -мерной плоскостью является плоскость $\Pi^d = P^{-1}(\Pi^{d-t}) = \Pi^{d-t} + \mathbb{R}^t \subset \mathbb{R}^m$.

Пусть для чисел m , $0 \leq t \leq d \leq T \leq m$, $q \geq d - t + 1$ числа $n_1, n_2, \dots, n_q$ удовлетворяют равенству $n_1 + \dots + n_q = (q - 1)(m - d) - (d - t)(T - d)$ и обладают такими разложениями на целые слагаемые $n_1 = m_1 + k_1, \dots, n_q = m_q + k_q$, $0 \leq m_i \leq m - T$, $0 \leq k_i \leq T - d$, что $m_1 + \dots + m_q = (q - 1)(m - T)$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} k_1 + \dots + k_q &= (q - 1)(m - d) - (d - t)(T - d) - (q - 1)(m - T) \\ &= (q - 1)(T - d) - (d - t)(T - d) = (q - d + t - 1)(T - d). \end{aligned}$$

Будем считать, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ фиксирован ортонормированный базис и рассмотрим порожденное этим базисом ортогональное разложение $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-T} \oplus \mathbb{R}^T$.

Для чисел $\tilde{m} = m - T$, q , $m_1, \dots, m_q$ выполнены условия теоремы 1.1. Возьмем соответствующие отображения $f_{1i}: I_i^{m_i} \rightarrow \mathbb{R}^{m-T}$, $i = 1, \dots, q$.

Для чисел $\tilde{m} = T$, t , d , q , $k_1, \dots, k_q$ выполнены условия теоремы 2.2. Возьмем соответствующие отображения $f_{2i}: I_i^{k_i} \rightarrow \mathbb{R}^T$, $i = 1, \dots, q$.

Построим теперь отображения

$$f_i = f_{1i} \times f_{2i}: I_i^{n_i} = I_i^{m_i} \times I_i^{k_i} \rightarrow \mathbb{R}^{m-T} \oplus \mathbb{R}^T = \mathbb{R}^m, \quad i = 1, \dots, q.$$

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ задан ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$, заданы целые числа $0 \leq t \leq d \leq T \leq m$, $q \geq d - t + 1$ и заданы целые неотрицательные числа $n_1, \dots, n_q \leq m - d$ такие, что

$$n_1 + \dots + n_q = (q - 1)(m - d) - (d - t)(T - d),$$

обладающие разложениями $n_i = m_i + k_i$, $i = 1, \dots, q$, как сказано выше. Тогда существуют отображения $f_i: I_i^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, q$, и число $\Delta > 0$ такие, что для любых отображений $g_i: I_i^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$ таких, что $\varrho(g_i, f_i) \leq \Delta$, $i = 1, \dots, q$, существует такая d -мерная плоскость $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$, параллельная t -мерному подпространству, натянутому на t последних базисных векторов, и параллельная T -мерному подпространству, натянутому на T последних базисных векторов, что

$$g_1(I_1^{n_1}) \cap \Pi^d \neq \emptyset, \quad \dots, \quad g_q(I_q^{n_q}) \cap \Pi^d \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для упрощения обозначений рассмотрим отдельно случай $t = 0$. Покажем, что в качестве искомым отображений f_i , $i = 1, \dots, q$, можно взять отображения, построенные перед формулировкой теоремы. Ортогональную проекцию пространства $\mathbb{R}^m$ на первое и второе слагаемые обозначим через P_1 и P_2 соответственно. Для отображений $h_i: I_i^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, q$, рассмотрим отображения $h_{1i} = P_1 \circ h_i: I_i^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{m-T}$ и $h_{2i} = P_2 \circ h_i: I_i^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^T$. По отображениям h_{1i} построим отображение $H_1: I_1^{n_1} + \dots + I_q^{n_q} \rightarrow \mathbb{R}^{(q-1)(m-T)}$, которое рассматривалось в доказательстве теоремы 1.1

$$H_1(X_1, \dots, X_q) = (h_{11}(X_1) - h_{1q}(X_q), \dots, h_{1q-1}(X_{q-1}) - h_{1q}(X_q)).$$

По отображениям h_{2i} построим отображение $H_2: I^{n_1+\dots+n_q} \rightarrow \mathbb{R}^{(q-d-1)(T-d)}$, которое рассматривалось в доказательстве теоремы 1.2. Рассмотрим диагональное произведение

$$H: I^{n_1+\dots+n_q} \rightarrow \mathbb{R}^{(q-1)(m-T)+(q-d-1)(T-d)}$$

этих двух отображений.

Соответствующее отображение F является линейным отображением $(n_1 + \dots + n_q)$ -мерного куба в евклидово пространство той же размерности. Его матрица распадается на $((q-1)(m-T) \times (q-1)(m-T))$ -клетку и $((q-d-1)(T-d) \times (q-d-1)(T-d))$ -клетку. Согласно доказательству теорем 1.1 и 1.2 эти клетки невырождены. Следовательно, невырождена и матрица отображения F . Поэтому для любых отображений g_i , $i = 1, \dots, q$, достаточно близких к соответствующим отображениям f_i , $i = 1, \dots, q$, отображение G накрывает нулевую точку. Точка $(X_1, \dots, X_q) \in I^{n_1} \times \dots \times I^{n_q}$, попадающая при отображении G в нулевую точку, и задает требуемую d -мерную секущую плоскость.

Рассуждения из доказательства теоремы 2.2 сводят случай произвольного числа $t \leq d$ к уже разобранному случаю $t = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. В проводимых выше и ниже преобразованиях важное значение имеет доказанное ранее тождество

$$(q-1)(m-d) - (d-t)(T-d) = (q-1)(m-T) + (q-d+t-1)(T-d).$$

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Для n -мерного компакта X , содержащего n -мерный симплекс, $n \geq 1$, и заданных целых чисел $0 \leq t \leq d \leq T \leq m$, $q \geq d-t+1$, следующие условия эквивалентны.

1) Множество таких отображений $h: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, что прообраз $h^{-1}(\Pi^d)$ всякой d -мерной плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$, параллельной некоторой t -мерной координатной плоскости и некоторой T -мерной координатной плоскости, состоит из не более чем $q-1$ точек, плотно во множестве всех непрерывных отображений X в $\mathbb{R}^m$.

2) Справедливо неравенство

$$qn + 1 \leq (q-1)(m-T) + (q-d+t-1)(T-d).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $1) \implies 2)$ вытекает из теоремы 2.3. Предположим, что справедливо обратное неравенство $qn \geq (q-1)(m-T) + (q-d+t-1)(T-d)$. Выделим в симплексе q попарно дизъюнктивных n -мерных кубов $I_1^n, \dots, I_q^n$. Можно считать, что

$$q(n-1) < (q-1)(m-T) + (q-d+t-1)(T-d);$$

иначе в компакте X можно рассмотреть симплекс размерности $n-1$ или еще меньше, пока не будут выполнены нужные условия. Тогда

$$q(n-1) + a = (q-1)(m-T) + (q-d+t-1)(T-d)$$

для некоторого натурального $a \leq q$. Возьмем $n_1 = \dots = n_a = n$ и $n_{a+1} = \dots = n_q = n-1$. Имеет место равенство

$$n_1 + \dots + n_q = q(n-1) + a = (q-1)(m-T) + (q-d+t-1)(T-d).$$

Разделим число $(q-1)(m-T)$ на число q с остатком, т.е. пусть $(q-1)(m-T) = cq + b$ для целых c и b таких, что $0 \leq b \leq q-1$. Теперь для чисел $n_1, \dots, n_q$ возьмем разложения $m_1 = \dots = m_b = c+1$, $m_{b+1} = \dots = m_q = c$ и $k_i = n_i - m_i$, $i = 1, \dots, q$. Введенные числа удовлетворяют равенствам

$$m_1 + \dots + m_q = (q-1)(m-T), \quad k_1 + \dots + k_q = (q-d+t-1)(T-d).$$

Заметим, что $0 \leq n_i - n_j \leq 1$ и $0 \leq m_i - m_j \leq 1$ для любой пары индексов $i < j$. Отсюда вытекает, что $-1 \leq k_i - k_j \leq 1$ для любой пары индексов i, j .

Покажем, что $0 \leq m_i \leq m-T$ и $0 \leq k_i \leq T-d$ для $i = 1, \dots, q$. Неотрицательность чисел m_i ясна из их определения. Предположим, что $m_{i_0} > m-T$ для некоторого индекса i_0 . Тогда $m_i \geq m-T$ для всех остальных индексов. Поэтому

$$m_1 + \dots + m_q > q(m-T) \geq (q-1)(m-T),$$

что противоречит равенству. Предположим, что $k_{i_0} < 0$ для некоторого индекса i_0 . Тогда $k_i \leq 0$ для всех остальных индексов. Поэтому

$$k_1 + \dots + k_q < 0 \leq (q-d+t-1)(T-d),$$

что противоречит равенству. Предположим, что $k_{i_0} > T-d$ для некоторого индекса i_0 . Тогда $k_i \geq T-d$ для всех остальных индексов. Поэтому

$$k_1 + \dots + k_q > q(T-d) \geq (q-d+t-1)(T-d),$$

что противоречит равенству.

В кубе I_i^n выберем грань $I_i^{n_i}$ и на замкнутом подмножестве $S = I_1^{n_1} \cup \dots \cup I_q^{n_q} \subset \Delta^n$ зададим отображение $\tilde{f}: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ согласно теореме 2.3. Так как евклидово пространство обладает свойством продолжения непрерывного отображения, то существует такое отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, что $f|_S = \tilde{f}$. Согласно теореме 2.3 для всякого отображения $g: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ из Δ -окрестности отображения f существует такая d -мерная плоскость Π^d , параллельная некоторой t -мерной координатной плоскости и некоторой T -мерной координатной плоскости такая, что $g(I_i^{n_i}) \cap \Pi^d \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, q$. Поэтому $|g^{-1}(\Pi^d)| \geq q$.

Импликация 2) $\implies$ 1) вытекает из [10; следствие 1.6]. Действительно, из неравенства условия

$$n+1 \leq (q-1)(m-n-d) - (d-t)(T-d)$$

вытекает неравенство $m-n-d > 0$.

Если имеет место неравенство $n \geq (m-n-T)(d-t)$, то согласно следствию 1.6 из [10] плотным G_δ -множеством является множество всех таких отображений $h: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, что прообраз всякой d -мерной плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$, параллельной некоторой t -мерной координатной плоскости и некоторой T -мерной координатной плоскости, состоит из не более чем

$$k \leq d+1-t + \frac{n+(d-t)(n+T-m)}{m-n-d}$$

точек.

Преобразуем оценку на k (заменяя T) с учетом заданного неравенства

$$\begin{aligned} k &\leq d + 1 - t + \frac{n + (d - t)(n + T - m)}{m - n - d} \\ &\leq d + 1 - t + \frac{n + (d - t)(n + d - m) + (q - 1)(m - d) - qn - 1}{m - n - d} \\ &= 1 + \frac{n + (q - 1)(m - d) - qn - 1}{m - n - d} = 1 + q - 1 + \frac{-1}{m - n - d} < q. \end{aligned}$$

С учетом целочисленности k полученное неравенство $k < q$ дает искомое неравенство $k \leq q - 1$.

Если же имеет место неравенство $n < (m - n - T)(d - t)$, то согласно следствию 1.6 из [10] плотным G_δ -множеством является множество всех таких отображений $h: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, что прообраз всякой d -мерной плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$, параллельной некоторой t -мерной координатной плоскости и некоторой T -мерной координатной плоскости, состоит из не более чем

$$k \leq 1 + \frac{n}{m - n - T} < d - t + 1 \leq q$$

точек. С учетом целочисленности k опять получаем искомое неравенство $k \leq q - 1$.

Список литературы

- [1] G. Nöbeling, “Über eine n -dimensionale Universalmenge im $\mathbb{R}^{2n+1}$ ”, *Math. Ann.*, **104**:1 (1931), 71–80.
- [2] L. Pontrjagin, G. Tolstowa, “Beweis des Mengerschen Einbettungssatzes”, *Math. Ann.*, **105**:5 (1931), 734–745.
- [3] W. Hurewicz, “Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume”, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.*, 1933, № 24–25, 754–768.
- [4] В. Г. Болтянский, “Отображения компактов в евклидовы пространства”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **23**:6 (1959), 871–892.
- [5] K. Borsuk, “On the k -independent subsets of the Euclidean space and of the Hilbert space”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III*, **5**:4 (1957), 351–356.
- [6] A. Haar, “Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen”, *Math. Ann.*, **78**:1–4 (1918), 294–311.
- [7] А. Н. Колмогоров, “Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции”, *УМН*, **3**:1 (1948), 216–221.
- [8] Г. Ш. Рубинштейн, “Об одном методе исследования выпуклых множеств”, *Докл. АН СССР*, **102**:3 (1955), 451–454.
- [9] С. А. Богатый, “Гипотеза Борсука, препятствие Рышкова, интерполяция, аппроксимация Чебышева, трансверсальная теорема Тверберга, задачи”, *Дискретная геометрия и геометрия чисел*, Тр. МИАН, **239**, Наука, М., 2002, 63–82; англ. пер.: S. A. Bogatyĭ, “Borsuk’s conjecture, Ryshkov obstruction, interpolation, Chebyshev approximation, transversal Tverberg’s theorem, and problems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **239**:4 (2002), 55–73.
- [10] С. А. Богатый, В. М. Вылов, “Вложения Робертса и обращение трансверсальной теоремы Тверберга”, *Матем. сб.*, **196**:11 (2005), 33–52; англ. пер.: S. A. Bogatyĭ, V. M. Valov, “Roberts-type embeddings and conversion of transversal Tverberg’s theorem”, *Sb. Math.*, **196**:11 (2005), 1585–1603.

- [11] S. A. Bogatyι, “Finite-to-one maps”, *Topology Appl.*, **155**:17–18 (2008), 1876–1887.
- [12] V. Boltyanski, H. Martini, V. Soltan, *Geometric methods and optimization problems*, Comb. Optim., **4**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
- [13] D. McCullough, L. R. Rubin, “Some m -dimensional compacta admitting a dense set of imbeddings into $\mathbb{R}^{2m}$ ”, *Fund. Math.*, **133**:3 (1989), 237–245.
- [14] A. N. Dranišnikov, D. Repovš, E. V. Ščepin, “On intersections of compacta of complementary dimensions in Euclidean space”, *Topology Appl.*, **38**:3 (1991), 237–253.
- [15] К. Куратовский, *Топология*, т. 2, Мир, М., 1969; пер. с англ.: K. Kuratowski, *Topology*, v. 2, Academic Press, New York–London, 1968.
- [16] С. А. Богатый, “Геометрия отображений в евклидово пространство”, *УМН*, **53**:5 (1998), 27–56; англ. пер.: S. A. Bogatyι, “The geometry of maps into Euclidean space”, *Russian Math. Surveys*, **53**:5 (1998), 893–920.

С. И. Богатая (S. I. Bogataya)

Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики”, г. Москва

E-mail: svetbog@mail.ru

Поступила в редакцию

15.05.2009 и 09.09.2011

С. А. Богатый (S. A. Bogatyι)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: bogatyι@inbox.ru

Е. А. Кудрявцева (E. A. Kudryavtseva)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ekudr@mech.math.msu.su