Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степин, А. Г. Тарасов, Спектр резонансов оператора Шрёдингера с быстроубывающим потенциалом, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 12, 121–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7579>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 03:12:08

УДК 517.927

С. А. Степин, А. Г. Тарасов

Спектр резонансов оператора Шрёдингера с быстроубывающим потенциалом

Изучаются резонансы одномерного оператора Шрёдингера, т.е. полюсы аналитического продолжения соответствующей матрицы рассеяния. Для определенного класса супер-экспоненциально убывающих потенциалов, включающего гауссовский, установлена справедливость борновского приближения в задаче локализации полюсов матрицы рассеяния, что позволяет вывести асимптотический закон их распределения (правило квантования). С помощью разработанного метода в статье впервые получены асимптотические формулы для резонансов в случае нефинитных потенциалов.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: резонанс, полюс матрицы рассеяния, асимптотическое распределение, оператор Шрёдингера, супер-экспоненциально убывающий потенциал.

§ 1. Введение

Задача исследования локализации и асимптотического распределения резонансов оператора Шрёдингера занимает особое место в теории потенциально-го рассеяния. Этой проблематике посвящен целый ряд работ математиков и физиков, среди которых отметим монографии [1]–[3] и обзоры [4], [5]. В случае финитного потенциала известны (см. [6], [7]) оценки сверху для считающей функции количества резонансов соответствующего оператора Шрёдингера. Для одномерного оператора $L = -d^2/dx^2 + V(x)$ с финитным потенциалом и нулями конечных порядков на краях носителя в [8], [9] получены асимптотические формулы для резонансов, указывающие на точность оценок из [6], [7].

Согласно принятому определению под резонансами оператора Шрёдингера понимаются полюсы аналитического (мероморфного) продолжения матрицы рассеяния (см. [10]) на второй лист римановой поверхности спектрального параметра. Возможность указанного аналитического продолжения обеспечивается условием супер-экспоненциального убывания потенциала: для любого $M > 0$ найдется $C = C(M) > 0$ такое, что

$$|V(x)| \leq C e^{-M|x|}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Всюду в дальнейшем по умолчанию будет предполагаться, что это условие выполнено. Цель настоящей работы – установить для определенного класса потенциалов, включающего гауссовский, справедливость так называемого борновского приближения в задаче локализации резонансов и вывести асимптотический закон их распределения.

ТЕОРЕМА 1. *Резонансы оператора Шрёдингера с гауссовским потенциалом $e^{-x^2/2}$ имеют асимптотику*

$$k_{\pm n} = \pm \sqrt{\frac{\pi n}{2}} e^{\mp i\pi/4} \left(1 \mp i \frac{\ln n}{4\pi n} + \frac{1}{8n} + O(n^{-5/4}) \right).$$

Для одномерного оператора Шрёдингера с супер-экспоненциально убывающим потенциалом $V(x)$ в статье [11] используется связь определителя матрицы рассеяния с определителем возмущения (впервые установленная в [12]) и изучается локализация резонансов в терминах их угловой считающей функции. Для потенциалов рассматриваемого там класса предполагается, что преобразование Фурье $\hat{V}(k)$ – целая функция порядка $\rho > 1$ и вполне регулярного роста, а также выполнены некоторые дополнительные условия технического характера. В этих предположениях в [11] утверждается, что резонансы оператора Шрёдингера сосредоточены (концентрируются) вблизи лучей $\arg k = -\pi/2 \pm \pi/(2\rho)$. Эти сведения о локализации спектра резонансов дополняет и уточняет

ТЕОРЕМА 2. *В случае потенциала $V(x) = e^{-x^{2m}/(2m)}$, $m \in \mathbb{N}$, при $m \geq 2$ множество резонансов соответствующего оператора Шрёдингера состоит из двух серий с асимптотиками*

$$k_{\pm n} = \pm \frac{e^{\mp i\pi/(4m)}}{2} \left(\frac{2\pi m}{2m-1} n \right)^{(2m-1)/(2m)} \times \left[1 \mp i \frac{(3m-2)(2m-1)}{4\pi m^2} \frac{\ln n}{n} \mp i \frac{(2m-1)C_{\pm}}{4\pi m^2} \frac{1}{n} + O(n^{(1-3m)/(2m)}) \right],$$

где

$$C_{\pm} = m \ln \frac{2m-1}{2\pi} + (3m-2) \left(\ln \frac{2\pi m}{2m-1} \pm i \frac{\pi}{2} \right).$$

Вопрос о локализации резонансов оператора Шрёдингера с потенциалом $V(x)$ рассматриваемого здесь класса сводится (см. § 2) к исследованию распределения нулей определителя матрицы рассеяния как функции спектрального параметра. Исходной для применяемого здесь подхода (общая схема которого намечена в § 5) является информация об асимптотическом поведении преобразования Фурье $\hat{V}(k)$ в комплексной плоскости при $|k| \rightarrow \infty$. Аналитически он сводится к обоснованию асимптотических оценок интегралов типа Лапласа с помощью некоторой модификации метода перевала (см. §§ 7, 8).

Описанию зон, свободных от резонансов, посвящен § 3. Случай гауссовского потенциала (теорема 1) разобран отдельно в § 4. Далее, в § 6 по предложенной схеме для потенциалов $V(x) = e^{-x^{2m}/(2m)}$ получена асимптотическая формула распределения полюсов матрицы рассеяния (теорема 2). Наконец, в § 9 дано обоснование борновского приближения в задаче локализации резонансов и доказана основная

ТЕОРЕМА 3. *Для четных потенциалов вида*

$$V(x) = \exp(-(a_{2m}x^{2m} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_0))$$

таких, что $a_{2m}, a_{2n} > 0$, $m > 2$, резонансы оператора $L = -d^2/dx^2 + V(x)$ определяются соотношениями

$$S(z_0(k_{\nu}^{\pm}), k_{\nu}^{\pm}) = \omega_{\pm\nu} + \frac{3m-2}{2m} \ln \omega_{\pm\nu} + O(\nu^{-\min\{1-n/m, 1/2-1/m\}}), \quad \nu \in \mathbb{N},$$

типа правил квантования, где $z_0(k) \sim (ik/(ma_{2m}))^{1/(2m-1)}$ – точка перевала функции $S(z, k) = 2ikz + \ln V(z)$ и

$$\omega_{\pm\nu} = \pm\pi i\nu - \frac{3m-2}{2m} \ln((2m-1)a_{2m}) + \frac{1}{2} \ln\left(4m^3(2m-1)\frac{a_{2m}^3}{\pi}\right).$$

Условие четности потенциала $V(x)$ в теореме 3 налагается для простоты формулировки и не является ограничением по существу. Предложенный в настоящей работе подход применим к широкому классу потенциалов вида $V(x) = e^{-x^{2m}}f(x)$, где f – целая функция, порядок роста которой меньше $2m$. Этот класс потенциалов будет рассмотрен в следующей публикации. Авторы признательны рецензенту за литературные указания.

§ 2. Матрица рассеяния и ее борновское приближение

Как известно (см. [10]), при условии

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)|V(x)| dx < \infty$$

для вещественных значений параметра $k \neq 0$ уравнение

$$-y'' + V(x)y = k^2y \quad (2)$$

имеет две пары так называемых решений типа Йоста:

$$\begin{aligned} y_{1,2}^+(x, k) &\sim e^{\pm ikx}, & x \rightarrow +\infty, \\ y_{1,2}^-(x, k) &\sim e^{\pm ikx}, & x \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

которые по отдельности образуют две фундаментальные системы решений (2), причем $y_1^+(x, k) = y_2^+(x, k)$ и $y_1^-(x, k) = y_2^-(x, k)$ в предположении вещественности потенциала V . Вследствие этого у уравнения (2) существуют решения $y^{(+)}(x, k)$ и $y^{(-)}(x, k)$ такие, что

$$\begin{aligned} y^{(+)}(x, k) &= A(k)y_1^+(x, k) = y_1^-(x, k) + C(k)y_2^-(x, k), \\ y^{(-)}(x, k) &= y_2^+(x, k) + B(k)y_1^+(x, k) = D(k)y_2^-(x, k). \end{aligned}$$

Матрица

$$S(k) := \begin{pmatrix} A(k) & B(k) \\ C(k) & D(k) \end{pmatrix}$$

называется *матрицей рассеяния*, а ее элементы – *коэффициентами прохождения и отражения* соответственно. В случае супер-экспоненциального убывания потенциала $V(x)$ коэффициенты прохождения и отражения допускают аналитическое (мероморфное) продолжение по параметру k в комплексную плоскость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Полюсы мероморфного продолжения матрицы рассеяния $S(k)$, расположенные в нижней полуплоскости $\mathbb{C}_-$, называются *резонансами* соответствующего оператора Шрёдингера.

Для коэффициентов отражения и прохождения справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned} A(k) &= 1 + \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} V(x) y^{(+)}(x, k) dx, \\ B(k) &= \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} V(x) y^{(-)}(x, k) dx, \\ C(k) &= \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} V(x) y^{(+)}(x, k) dx, \\ D(k) &= 1 + \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} V(x) y^{(-)}(x, k) dx. \end{aligned}$$

При $k \in \mathbb{C}_+$ решения $y^{(\pm)}(x, k)$ выражаются формулами

$$\begin{aligned} y^{(+)}(x, k) &= e^{ikx} (1 - e^{-ikx} R_V(k) e^{ikx} V), \\ y^{(-)}(x, k) &= e^{-ikx} (1 - e^{ikx} R_V(k) e^{-ikx} V), \end{aligned}$$

где резольвента $R_V(k) := (-d^2/dx^2 + V(x) - k^2)^{-1}$ разлагается в ряд Неймана

$$R_V(k) e^{\pm ikx} V = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n R_0(k) (V R_0(k))^n e^{\pm ikx} V,$$

если k достаточно велико по модулю. Здесь свободная резольвента $R_0(k)$ представляет собой интегральный оператор с ядром $(i/(2k)) \exp(ik|x-y|)$, а ряд сходится абсолютно и равномерно по $x \in \mathbb{R}$. Эти формулы задают аналитическое продолжение коэффициентов отражения и прохождения в $\mathbb{C}_+$ для значений k , достаточно больших по модулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Борновским приближением для $S(k)$ называется матрица

$$\tilde{S}(k) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2ik} \int V(x) dx & \frac{1}{2ik} \int e^{-2ikx} V(x) dx \\ \frac{1}{2ik} \int e^{2ikx} V(x) dx & 1 + \frac{1}{2ik} \int V(x) dx \end{pmatrix},$$

получающаяся в результате линеаризации $S(k)$ относительно V .

Поскольку матрица рассеяния $S(k)$ унитарна на вещественной оси, то согласно принципу симметрии Шварца она продолжается аналитически (мероморфно) в $\mathbb{C}_-$ из $\mathbb{C}_+$ при помощи формулы

$$S(k) = (S^*(\bar{k}))^{-1}.$$

Таким образом, при комплексном сопряжении полюсы аналитического продолжения $S(k)$, т.е. резонансы, переходят в нули определителя $\det S(k)$. Учитывая, что для вещественных потенциалов $V(x)$ нули $\det S(k)$ симметричны относительно мнимой оси, получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Точка $k \in \mathbb{C}_-$ является резонансом оператора Шрёдингера в том и только том случае, когда

$$E(k) := \det S(-k) = 0.$$

Определение резонансов как полюсов аналитического продолжения матрицы рассеяния $S(k)$ в $\mathbb{C}_-$ согласуется с определением, принятым для финитных потенциалов (см. [13]), а именно, $k \in \mathbb{C}_-$ является резонансом, если существует нетривиальное решение уравнения (2) вида

$$y(x) = \begin{cases} c_1 e^{-ikx}, & x \leq a, \\ c_2 e^{ikx}, & x \geq b, \end{cases}$$

где отрезок $[a, b]$ содержит носитель $V(x)$.

§ 3. Зоны, свободные от резонансов

Всюду далее для простоты ограничимся рассмотрением случая вещественного потенциала $V(x)$. Положим

$$f_+(x, k) = e^{ikx} R_V(-k) e^{-ikx} V, \quad f_-(x, k) = e^{-ikx} R_V(-k) e^{ikx} V$$

и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} T_{11}(k) &= \int_{\mathbb{R}} V(x)(1 - f_+(x, k)) dx, & T_{12}(k) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2ikx} V(x)(1 - f_-(x, k)) dx, \\ T_{21}(k) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2ikx} V(x)(1 - f_+(x, k)) dx, & T_{22}(k) &= \int_{\mathbb{R}} V(x)(1 - f_-(x, k)) dx. \end{aligned}$$

В соответствии с этим имеем

$$E(k) = \det \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{i}{2k} \begin{pmatrix} T_{11}(k) & T_{12}(k) \\ T_{21}(k) & T_{22}(k) \end{pmatrix} \right].$$

ЛЕММА 1. Пусть V удовлетворяет условию (1). Тогда при $k \in \mathbb{C}_-$, $|k| \geq \|V\|_1$, и любых $x \in \mathbb{R}$ выполнена оценка

$$|f_{\pm}(x, k)| \leq \frac{\|V\|_1}{|k|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем только для f_- . Используя сходящийся при больших $|k|$ ряд Неймана для резольвенты $R_V(-k)$, получим, что

$$f_-(x, k) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n G(VG)^n V(x, k),$$

где $G = e^{-ikx} R_0(-k) e^{ikx}$ – интегральный оператор с ядром

$$G(x, y, k) = \frac{1}{2ik} \begin{cases} e^{2ik(y-x)}, & x \geq y, \\ 1, & x \leq y. \end{cases}$$

Поскольку $|G(x, y, k)| \leq 1/(2|k|)$ при $k \in \mathbb{C}_-$, то $\|GV\|_{\infty} \leq \|V\|_1/(2|k|)$. Далее,

$$\begin{aligned} |(G(VG)^n V)(x, k)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |G(x, y, k)(VG(VG)^{n-1} V)(y, k)| dy \\ &\leq \frac{\|V\|_1}{2|k|} \|G(VG)^{n-1} V\|_{\infty}, \end{aligned}$$

и, таким образом, индукцией по n устанавливается, что

$$\|G(VG)^n V\|_\infty \leq \left(\frac{\|V\|_1}{2|k|} \right)^{n+1},$$

откуда вытекает справедливость доказываемого неравенства.

Из леммы 1 следует ограниченность функций $T_{11}(k)$ и $T_{22}(k)$ в нижней полуплоскости при $|k| \geq \|V\|_1$. Таким образом,

$$E(k) = 1 + \frac{1}{4k^2} T_{12}(k) T_{21}(k) + \varepsilon(k),$$

где

$$\varepsilon(k) = \frac{i}{2k} (T_{11}(k) + T_{22}(k)) - \frac{1}{4k^2} T_{11}(k) T_{22}(k) = O(k^{-1}), \quad \mathbb{C}_- \ni k \rightarrow \infty.$$

В силу условия (1) для произвольного $d > 0$ функции $T_{12}(k)$ и $T_{21}(k)$ ограничены на множестве $\{k \in \mathbb{C}_-, |\operatorname{Im} k| \leq d, |k| \geq \|V\|_1\}$ и поэтому функция $E(k)$ имеет лишь конечное число нулей в полосе $\{k \in \mathbb{C}_-, |\operatorname{Im} k| \leq d\}$. Таким образом, справедливо следующее (ср. [14])

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *В любой полосе $\{k \in \mathbb{C}_-, |\operatorname{Im} k| \leq d\}$ находится лишь конечное множество резонансов оператора Шрёдингера с потенциалом V , удовлетворяющим условию (1).*

Дальнейший анализ $E(k)$ требует детального исследования поведения $T_{12}(k)$ и $T_{21}(k)$ во всей нижней полуплоскости при дополнительных предположениях относительно V . Для этого снова используется сходящийся при больших $|k|$ ряд Неймана для резольвенты $R_V(-k)$, входящей в определение функций $f_\pm(x, k)$. Имеем

$$T_{21}(k) = \sqrt{2\pi} \widehat{V}(2k) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \langle V, e^{-ikx} R_0(-k) (V R_0(-k))^{n-1} e^{-ikx} V \rangle,$$

причем в представлении Фурье n -ое слагаемое последней суммы принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \langle V, e^{-ikx} R_0(-k) (V R_0(-k))^{n-1} e^{-ikx} V \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \widehat{V}(k - x_1) \frac{1}{x_1^2 - k^2} \widehat{V}(x_1 - x_2) \frac{1}{x_2^2 - k^2} \\ & \quad \cdots \widehat{V}(x_{n-1} - x_n) \frac{1}{x_n^2 - k^2} \widehat{V}(x_n + k) dx_1 \cdots dx_n =: I_n(k). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$T_{12}(k) = \sqrt{2\pi} \widehat{V}(-2k) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(-k).$$

ЛЕММА 2. *Предположим, что целая функция $\widehat{V}(z)$ ограничена в секторе $\Sigma_\psi = \{|\arg(\pm z)| \leq \psi\}$, где $\psi \in (0, \pi/2]$. Тогда найдутся такие числа $\tilde{C} = \tilde{C}(\psi) > 0$ и $d = d(\psi) > 0$, что*

$$|I_n(k)| \leq \frac{\tilde{C}}{2^n}$$

при $k \in \Sigma_\psi$ и $|\operatorname{Im} k| \geq d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что $\operatorname{Re} k \geq 0$, а $\operatorname{Im} k = \beta \leq 0$. По условию леммы $|\widehat{V}(z)| \leq C$ при $z \in \Sigma_\psi$ и некотором $C > 0$. Обозначим $h = 4C/\sin \psi$, выберем $d > h$ так, чтобы при $|\beta| \geq d$ выполнялось неравенство

$$\frac{2\pi}{\sqrt{h|h+2\beta|}} + \frac{2}{\sin \psi} \frac{|\beta| - h}{2|\beta|h - h^2} \leq \frac{1}{2C}.$$

Положим $\Gamma = (-A + \mathbb{R}_-) \cup [-A, A] \cup (A + \mathbb{R}_+)$, где $A = (i - \operatorname{ctg} \psi)(\beta + h)$. Учитывая ограниченность $\widehat{V}(z)$ в секторе Σ_ψ , интегрирования по вещественной оси в определении $I_n(k)$ можно (последовательно) заменить на интегрирования вдоль Γ :

$$I_n(k) = \int_\Gamma dx_1 \cdots \int_\Gamma dx_n \widehat{V}(k - x_1) \prod_{j=1}^{n-1} \widehat{V}(x_j - x_{j+1}) \widehat{V}(x_n + k) \prod_{j=1}^n \frac{1}{x_j^2 - k^2}.$$

Заметим, что поскольку $x - y \in \Sigma_\psi$ при $x, y \in \Gamma$, то $\prod_{j=1}^{n-1} |\widehat{V}(x_j - x_{j+1})| \leq C^{n-1}$. Далее, в рассматриваемой ситуации множество $\{(k \pm x) \notin \Sigma_\psi\} \cap \Gamma$ представляет собой отрезок, содержащийся в круге $\{|k \pm x| \leq h/\sin \psi\}$, и, следовательно, найдется $C' > 0$ такое, что $|\widehat{V}(k \pm x)| \leq C'$ для $x \in \Gamma$. Таким образом,

$$|I_n(k)| \leq \frac{C'^2}{C} \left(C \int_\Gamma \frac{|dx|}{|x^2 - k^2|} \right)^n, \quad k \in \Sigma_\psi.$$

Интеграл в правой части последнего неравенства оценим отдельно на каждой части ломаной Γ . Имеем

$$\begin{aligned} \int_{A+\mathbb{R}_+} \frac{|dx|}{|x^2 - k^2|} &= \int_{-A+\mathbb{R}_-} \frac{|dx|}{|x^2 - k^2|} \leq \int_{\mathbb{R}-i(\beta+h)} \frac{|dx|}{|x^2 - k^2|} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{|t - k - i\beta - ih|^2} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{|t + k - i\beta - ih|^2} \right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{h|h+2\beta|}}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \int_{[-A, A]} \frac{|dx|}{|x^2 - k^2|} &= \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \psi} \int_{-|\beta|+h}^{|\beta|-h} \frac{dt}{|(\operatorname{ctg} \psi - i)^2 t^2 - k^2|} \\ &\leq \frac{1}{\sin \psi} \int_{-|\beta|+h}^{|\beta|-h} \frac{dt}{(t + \beta)^2} = \frac{2}{\sin \psi} \frac{|\beta| - h}{2|\beta|h - h^2} \end{aligned}$$

и поэтому в силу выбора d для $k \in \Sigma_\psi$ при условии $|\beta| \geq d$ справедлива оценка, указанная в утверждении леммы, где $\bar{C} = C'^2/C$.

В предположениях леммы 2 функции $T_{12}(k)$ и $T_{21}(k)$ будут ограничены для $k \in \Sigma_\psi \cap \{|\operatorname{Im} k| \geq d\}$. Следовательно,

$$E(k) = 1 + O(k^{-1}), \quad \Sigma_\psi \ni k \rightarrow \infty,$$

и, таким образом, $E(k) \neq 0$ при достаточно больших по модулю $k \in \Sigma_\psi$. Ввиду утверждения 2 тем самым установлено

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть выполнены условие (1) и предположения леммы 2. Тогда множество $\{k \in \mathbb{C}_- : |\arg(\pm k)| \leq \psi\}$ содержит лишь конечное число резонансов оператора L .

Сформулированное утверждение применимо, например, в случае гауссовского потенциала $V(x) = e^{-x^2/2}$, для которого преобразование Фурье ограничено в секторе $|\arg(\pm z)| \leq \pi/4$. В то же время для финитных потенциалов $V(x)$ предположения леммы 2 не выполняются (так, для потенциального барьера преобразование Фурье не ограничено ни в каком секторе); более того, в этом случае резонансы асимптотически расположены вблизи логарифмик (см. [9]) и, таким образом, любой сектор содержит бесконечное количество резонансов.

§ 4. Случай гауссовского потенциала $V(x) = e^{-x^2/2}$

В рассматриваемой ситуации

$$I_n(k) = I_n(-k) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q(x_1, \dots, x_n, k) \right\} \prod_{j=1}^n \frac{dx_j}{x_j^2 - k^2},$$

$$Q(x_1, \dots, x_n, k) = (x_1 - k)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} (x_j - x_{j+1})^2 + (x_n + k)^2,$$

а определитель $E(k) = \det S(-k)$ имеет вид

$$E(k) = 1 + \frac{1}{4k^2} \left(\sqrt{2\pi} e^{-2k^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(k) \right)^2 + \varepsilon(k),$$

где $\varepsilon(k) = O(k^{-1})$, $\mathbb{C}_- \ni k \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 3. Существуют числа $d > 0$ и $C > 0$ такие, что для произвольного $k = \alpha + i\beta$, $|\beta| \geq d$, справедлива оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n(k)| \leq C(1 + \exp\{\beta^2 - \alpha^2\}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что $\beta \leq 0$ и $\alpha \geq 0$. Если $\alpha \geq |\beta|$, то (согласно лемме 2) существуют $d > 0$ и $\tilde{C} > 0$ такие, что при $|\beta| \geq d$

$$|I_n(k)| \leq \frac{\tilde{C}}{2^n}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $|\beta| \geq \alpha$. Пусть сначала $|\beta| \geq \alpha + 6\pi$. Используя теорему Коши об интеграле по замкнутому контуру, выражение $I_n(k)$ преобразуем к виду

$$I_n(k) = \int_{\Gamma} \cdots \int_{\Gamma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q(x_1, \dots, x_n, k) \right\} \prod_{j=1}^n \frac{dx_j}{x_j^2 - k^2}, \quad (3)$$

где $\Gamma = (i\bar{k} + \mathbb{R}_-) \cup [i\bar{k}, -i\bar{k}] \cup (-i\bar{k} + \mathbb{R}_+)$, так что при $x_i \in \Gamma$ имеет место неравенство

$$\left| \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q(x_1, \dots, x_n, k) \right\} \right| \leq \left| \exp \left\{ -\frac{(x_1 - k)^2 + (x_n + k)^2}{2} \right\} \right|. \quad (4)$$

Далее, если $x \in \Gamma \setminus [i\bar{k}, -i\bar{k}]$, то $\arg(x \pm k) \in [-\pi/4, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4]$ и, следовательно,

$$\left| \exp \left\{ -\frac{(x \pm k)^2}{2} \right\} \right| \leq 1.$$

Если $x = (\beta + i\alpha)t$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. $x \in \mathbb{R}(\beta + i\alpha) \supset [i\bar{k}, -i\bar{k}]$, вещественная часть $\operatorname{Re}(x \pm k)^2 = t^2(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha^2 - \beta^2 \geq \alpha^2 - \beta^2$ и поэтому

$$\left| \exp \left\{ -\frac{(x_1 - k)^2 + (x_n + k)^2}{2} \right\} \right| \leq \exp\{\beta^2 - \alpha^2\}.$$

Таким образом,

$$|I_n(k)| \leq \exp\{\beta^2 - \alpha^2\} \left(\int_{\Gamma} \frac{|dx|}{|x^2 - k^2|} \right)^n,$$

где

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{|dx|}{|x^2 - k^2|} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}+i\alpha} + \int_{\mathbb{R}(\beta+i\alpha)} + \int_{\mathbb{R}-i\alpha} \right) \frac{|dx|}{|x^2 - k^2|} \\ &\leq \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} + \frac{\pi\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}{\beta^2 - \alpha^2} \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

в силу условия $|\beta| \geq \alpha + 6\pi$.

Наконец, в случае, когда $\alpha \leq |\beta| \leq \alpha + 6\pi$, выберем $h \geq 6\pi$ и $d > h$ так, чтобы при $|\beta| \geq d$ выполнялось неравенство

$$\frac{2\pi}{\sqrt{h|h+2\beta|}} + 2\sqrt{2} \frac{|\beta|}{\alpha} \frac{|\beta| - h}{2|\beta|h - h^2} \leq \frac{1}{2},$$

и положим $\Gamma = (-A + \mathbb{R}_-) \cup [-A, A] \cup (A + \mathbb{R}_+)$, где $A = (\beta/\alpha + i)(\beta + h)$. По аналогии с предыдущим случаем преобразуем выражение $I_n(k)$ к виду (3). При этом для $x_i \in \Gamma$ имеет место оценка (4) и, кроме того, $\operatorname{Re}(x \pm k)^2 \geq \alpha^2 - \beta^2$ при $x \in [-A, A] \subset (\beta + i\alpha)\mathbb{R}$. Далее, если $x \in (-A + \mathbb{R}_-)$, то $\operatorname{Re}(x - k)^2 \geq \alpha^2 - \beta^2$, а $\operatorname{Re}(x + k)^2 \geq -h^2$. Если же $x \in (A + \mathbb{R}_+)$, то $\operatorname{Re}(x - k)^2 \geq -h^2$ и $\operatorname{Re}(x + k)^2 \geq \alpha^2 - \beta^2$. Отсюда заключаем, что для $x_i \in \Gamma$

$$\left| \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q(x_1, \dots, x_n, k) \right\} \right| \leq e^{h^2/2} \exp\{\beta^2 - \alpha^2\}$$

и, следовательно,

$$|I_n(k)| \leq e^{h^2/2} \exp\{\beta^2 - \alpha^2\} \left(\int_{\Gamma} \frac{|dx|}{|x^2 - k^2|} \right)^n.$$

Интеграл в правой части последнего неравенства оценим отдельно на каждой части Γ :

$$\int_{A+\mathbb{R}_+} \frac{|dx|}{|x^2 - k^2|} = \int_{-A+\mathbb{R}_-} \frac{|dx|}{|x^2 - k^2|} \leq \int_{\mathbb{R}-i(\beta+h)} \frac{|dx|}{|x^2 - k^2|} \leq \frac{\pi}{\sqrt{h|h+2\beta|}}$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} \int_{[-A, A]} \frac{|dx|}{|x^2 - k^2|} &= \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2} \int_{-\operatorname{Re} A}^{\operatorname{Re} A} \frac{dt}{|(1 + i\alpha/\beta)^2 t^2 - k^2|} \\ &\leq \sqrt{2} \int_{-\operatorname{Re} A}^{\operatorname{Re} A} \frac{dt}{(\alpha t/\beta - \beta)^2} = 2\sqrt{2} \frac{|\beta|}{\alpha} \frac{|\beta| - h}{2|\beta|h - h^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу выбора h и d имеем

$$\int_{\Gamma} \frac{|dx|}{|x^2 - k^2|} \leq \frac{1}{2},$$

если $|\beta| \geq d$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В силу лемм 1 и 3 на множестве $\{k = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}_- : \beta^2 - \alpha^2 \leq M\}$, где $M > 0$, справедлива асимптотическая формула

$$E(k) = 1 + O(k^{-1}), \quad |k| \rightarrow \infty,$$

из которой видно, что рассматриваемое множество может содержать лишь конечное число нулей $E(k)$.

Далее, в замыкании области $\{k = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}_- : \beta^2 - \alpha^2 > M\}$, где $M > d^2$, перепишем уравнение $E(k) = 0$ в виде

$$-4k^2(1 + \varepsilon(k)) = 2\pi e^{-4k^2}(1 + \delta(k)). \quad (5)$$

Здесь функция

$$\delta(k) = \left[1 + \frac{e^{2k^2}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(k) \right]^2 - 1$$

в силу леммы 3 аналитична и, кроме того,

$$\delta(k) = O(\exp\{\operatorname{Re} k^2\}).$$

После замены $z = -k^2$ уравнение (5) принимает вид

$$2z(1 + \xi(z)) = \pi e^{4z}(1 + \eta(z)), \quad (5')$$

причем функции $\xi(z) = \varepsilon(-i\sqrt{z})$ и $\eta(z) = \delta(-i\sqrt{z})$ аналитичны в полуплоскости $\sigma = \operatorname{Re} z \geq M$ и там для них справедливы оценки $\xi(z) = O(|z|^{-1/2})$ и $\eta(z) = O(e^{-\sigma})$. Выберем $M > d^2$ так, чтобы при $\sigma \geq M$ выполнялись неравенства $|\xi(z)| \leq 1/10$ и $|\eta(z)| \leq 1/10$. Тогда если ζ – корень уравнения (5') и $\operatorname{Re} \zeta \geq M$, то

$$2|\zeta| \leq \pi e^{4\operatorname{Re} \zeta} (1 + |\eta(\zeta)|)(1 - |\xi(\zeta)|)^{-1} \leq 4e^{4\operatorname{Re} \zeta}$$

и, следовательно, множество $\{\sigma \geq M\} \cap \{e^{-\sigma} \geq 4|z|^{-1/4}\}$ не содержит корней (5').

Изучим теперь расположение корней уравнения (5') в замкнутой области

$$\Omega := \{z = \sigma + i\tau : \sigma \geq M, e^{-\sigma} \leq 4|z|^{-1/4}\}.$$

Заметим, что аналитическая в полуплоскости $\sigma \geq M$ функция

$$\varphi(z) := (1 + \eta(z))(1 + \xi(z))^{-1}$$

имеет асимптотику $\varphi(z) = 1 + O(|z|^{-1/4})$ при $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \Omega$. Увеличим M так, чтобы при $z \in \Omega$ было выполнено неравенство $|\varphi(z) - 1| < 1$, и перепишем уравнение (5') в эквивалентной форме

$$\exp\left(4z - \ln z + \ln \frac{\pi}{2} + \ln \varphi(z)\right) = 1,$$

где $\ln$ – арифметическая ветвь логарифма. Таким образом, $z \in \Omega$ является корнем уравнения (5') тогда и только тогда, когда для некоторого $n \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$z - \frac{1}{4} \ln z + \psi(z) = \omega_n, \quad (5'')$$

где

$$\omega_n = \frac{\pi i n}{2} - \frac{1}{4} \ln \frac{\pi}{2}, \quad \psi(z) = \frac{1}{4} \ln \varphi(z) = O(|z|^{-1/4}), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad z \in \Omega.$$

Так как левая часть последнего равенства аналитична в полуплоскости $\sigma \geq M$ и неограниченно возрастает с ростом модуля $z \in \Omega$, то это уравнение при любом фиксированном n может иметь в Ω лишь конечное число решений.

Ввиду того, что заключительный этап доказательства теоремы 1 повторяется неоднократно в дальнейшем, рассмотрим уравнение

$$z - a \ln z + \psi(z) = \omega_n, \quad (6)$$

где $\omega_n = ibn + c$, $a, b > 0$, $c \in \mathbb{R}$, и сформулируем соответствующее утверждение в несколько более общем контексте.

ЛЕММА 4. *Предположим, что функция $\psi(z)$ аналитична в замкнутой области D , содержащейся в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и содержащей круги единичного радиуса с центрами в точках $\omega_n + a \ln \omega_n$ при больших по абсолютной величине $n \in \mathbb{Z}$. Если для некоторого $\mu \in (0, 1)$ выполнена оценка $\psi(z) = O(|z|^{-\mu})$ при $D \ni z \rightarrow \infty$, то существуют $C > 0$ и $\tilde{N} > 0$ такие, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq \tilde{N}$, уравнение (6) имеет в D единственный корень z_n , причем*

$$|z_n - \omega_n - a \ln \omega_n| \leq C|n|^{-\mu}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку левая часть (6) ограничена на любом компакте в D , а $|\omega_n| \rightarrow \infty$ при $|n| \rightarrow \infty$, то для любого $R > 0$ существует $N(R) > 0$ такое, что множество $D \cap \{|z| \leq R\}$ не содержит корней уравнения (6), если $|n| \geq N(R)$. После деления на z уравнение (6) принимает вид

$$1 - \frac{\omega_n}{z} = a \frac{\ln z}{z} - \frac{\psi(z)}{z}.$$

Для произвольного фиксированного $r > 0$ выберем $R = R(r) > 1/r$ так, чтобы при $|z| \geq R$, $z \in D$, выполнялось неравенство

$$\left| a \frac{\ln z}{z} - \frac{\psi(z)}{z} \right| < \varepsilon := \frac{r}{1+r}.$$

Тогда если $z \in D$ – корень уравнения (6) и $|z| \geq R$, то $1 - |\omega_n/z| \leq |1 - \omega_n/z| < \varepsilon$ и, следовательно,

$$\left| \frac{z}{\omega_n} - 1 \right| = \left| \frac{z}{\omega_n} \right| \cdot \left| 1 - \frac{\omega_n}{z} \right| < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = r.$$

Таким образом, множество $\{z \in D, |z/\omega_n - 1| \geq r, |z| \geq R(r)\}$ не содержит решений уравнения (6). Поэтому корни (6) при $|n| \geq N(R(r))$ могут находиться только в областях

$$D_n(r) := \left\{ z \in D, \left| \frac{z}{\omega_n} - 1 \right| < r, |z| > R(r) \right\}.$$

Выберем и зафиксируем теперь $\rho > 0$ так, чтобы для $z \in D_n(\rho)$ выполнялось неравенство $|a \ln(z/\omega_n)| + |\psi(z)| \leq 1/2$. Замена $z(\zeta) = \omega_n + a \ln \omega_n + \zeta$ приводит уравнение (6) к виду

$$\zeta = a \ln \left(\frac{z(\zeta)}{\omega_n} \right) - \psi(z(\zeta)). \quad (6')$$

В силу выбора ρ множество $\{|\zeta| \geq 1, z(\zeta) \in D_n(\rho)\}$ не содержит корней уравнения (6'). Далее, если $|\zeta| \leq 1$, то для достаточно больших по абсолютной величине $n \in \mathbb{Z}$ имеют место оценки $|z(\zeta)| > R(\rho)$ и $|z(\zeta)/\omega_n - 1| < \rho$. Кроме того, по условию $z(\zeta) \in D$. Поэтому существует $\tilde{N} \geq N(R(\rho))$ такое, что $z(\zeta) \in D_n(\rho)$ при $|n| \geq \tilde{N}$. Вследствие этого и ввиду выбора ρ на окружности $|\zeta| = 1$ при $|n| \geq \tilde{N}$ имеет место неравенство

$$\left| a \ln \left(\frac{z(\zeta)}{\omega_n} \right) - \psi(z(\zeta)) \right| \leq 1/2$$

и согласно теореме Руше уравнение (6') имеет ровно один корень ζ_n в круге $|\zeta| \leq 1$. Более того, в силу равенства (6') и оценки $\psi(z) = O(|z|^{-\mu})$ существует такое $C > 0$, что

$$|\zeta_n| \leq \max_{|\zeta| \leq 1} \left| a \ln \left(1 + a \frac{\ln \omega_n}{\omega_n} + \frac{\zeta}{\omega_n} \right) - \psi(z(\zeta)) \right| \leq C|n|^{-\mu}.$$

Таким образом, установлено, что уравнение (6) при фиксированном $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq \tilde{N}$, имеет в D единственный корень

$$z_n := z(\zeta_n) = \omega_n + a \ln \omega_n + O(|n|^{-\mu}).$$

Для применения изложенной выше схемы в случае уравнения (5'') в области Ω достаточно заметить, что при больших по модулю значениях $n \in \mathbb{Z}$ имеют место оценки $\operatorname{Re} z(\zeta) \geq M$ и

$$e^{-\operatorname{Re} z(\zeta)} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/4} \left| \frac{\pi i n}{2} - \frac{1}{4} \ln \frac{\pi}{2} \right|^{-1/4} e^{-\operatorname{Re} \zeta} \leq 4|z(\zeta)|^{-1/4},$$

а, стало быть, $z(\zeta) \in \Omega$, если $|\zeta| \leq 1$. Таким образом, выполнены все условия леммы 4, откуда следует, что множество корней уравнения (5'') состоит из двух серий с асимптотиками

$$z_{\pm n} = \pm \frac{\pi i n}{2} + \frac{\ln n}{4} \pm \frac{i\pi}{8} + O(n^{-1/4}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Возвращаясь теперь обратно к переменной $k = -i\sqrt{z}$, получаем, что множество резонансов рассматриваемого оператора Шрёдингера также состоит из двух серий

$$k_{\pm n} = \pm \sqrt{\frac{\pi n}{2}} e^{\mp i\pi/4} \left(1 \mp i \frac{\ln n}{4\pi n} + \frac{1}{8n} + O(n^{-5/4}) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

§ 5. Общая схема метода

Цель настоящего параграфа – наметить план, по которому в дальнейшем при определенных предположениях относительно $V(x)$ будет исследован вопрос об асимптотическом распределении резонансов соответствующего оператора Шрёдингера в борновском приближении и оценке погрешности этого приближения.

Исходной для применяемого здесь подхода служит информация об асимптотическом поведении преобразования Фурье $\widehat{V}(k)$ в комплексной плоскости. Так, например, в случае $V(x) = e^{-x^{2m}/(2m)}$, $m \in \mathbb{N}$, функция $\widehat{V}(k)$ является целой порядка роста $2m/(2m-1)$ и конечного типа, а ее индикатриса

$$h(\psi) := \limsup_{r \rightarrow \infty} [\ln |\widehat{V}(re^{i\psi})| r^{-2m/(2m-1)}]$$

задается формулой (см. [15])

$$h(\psi) = \left(1 - \frac{1}{2m} \right) \cos \frac{2m(|\psi| - \pi/2)}{2m-1}.$$

Таким образом, функция $\widehat{V}(k)$ экспоненциально растет вне секторов

$$|\arg(\pm k)| \leq \frac{\pi}{4m}$$

и экспоненциально убывает внутри этих секторов с ростом $|k|$. Согласно предложению 1 соответствующий оператор Шрёдингера имеет лишь конечное множество резонансов в указанных секторах.

В дальнейшем для простоты изложения ограничимся рассмотрением потенциалов вида $V(x) = \exp(-P(x))$, где $P(x)$ – четный многочлен $a_{2m}x^{2m} + \dots + a_0$, причем $a_{2m} > 0$. С помощью метода перевала устанавливается, что асимптотика преобразования Фурье $\widehat{V}(2k)$ при $k \rightarrow \infty$ в нижней полуплоскости $\mathbb{C}_-$ определяется вкладом от точки перевала

$$z_0(k) \sim \left(\frac{ik}{ma_{2m}} \right)^{1/(2m-1)}$$

функции $S(z, k) = 2ikz - P(z)$, а именно,

$$\widehat{V}(2k) \sim \frac{1}{\sqrt{P''(z_0(k))}} \exp(S(z_0(k), k)).$$

В области, где $\operatorname{Re} S(z_0(k), k)$ растет, ввиду “малости” $f_{\pm}(x, k)$ естественно ожидать, что коэффициенты отражения $T_{21}(k)$ и $T_{12}(k)$, задаваемые формулами

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\mp 2ikx} V(x) (1 - f_{\pm}(x, k)) dx,$$

будут в некотором смысле близки к $\sqrt{2\pi}\widehat{V}(\pm 2k)$. В соответствии с этим в рассматриваемой области детерминант $E(k)$ с определенной погрешностью аппроксимируется функцией $\{1 + (\pi/(2k^2))\widehat{V}^2(2k)\}$ и, таким образом, для описания асимптотического распределения и локализации резонансов, т.е. нулей $E(k)$, можно использовать борновское приближение $\tilde{S}(k)$ матрицы рассеяния.

Рассматриваемый вопрос об асимптотической эквивалентности резонансов и корней соответствующего уравнения

$$1 + \frac{\pi}{2k^2}\widehat{V}^2(2k) = 0$$

сводится к оценке малости интегралов

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\mp 2ikx - P(x)} f_{\pm}(x, k) dx$$

по сравнению с $\widehat{V}(\pm 2k)$. Это делается с помощью некоторой модификации метода перевала, что представляет основную техническую трудность и одновременно ключевое место данного подхода. На этом пути предварительно необходимо установить, что функции $f_{\pm}(x, k)$ допускают аналитическое продолжение в определенную область, содержащую точку перевала $z_0(k)$, и построить перевальный контур для фазовой функции.

Отметим, что использование методов теории целых функций (а именно, связи между ростом целой функции и распределением ее нулей) применительно к $E(k)$ дает лишь частичную информацию о локализации резонансов. Так, в работе [14] в случае оператора Шрёдингера с супер-экспоненциально убывающим потенциалом для считающей функции $N(r)$ количества резонансов, расположенных в круге $|k| \leq r$, получена оценка

$$\int_0^r \frac{N(t)}{t} dt \leq \log \left(\iint e^{2r|x-y|} |V(x)V(y)| dx dy \right).$$

Как показывают результаты настоящей статьи, эта оценка в ряде случаев (например, для гауссовского потенциала) дает правильный порядок роста $N(r)$.

В следующем параграфе по указанной схеме для потенциалов

$$V(x) = e^{-x^{2m}/(2m)}$$

будет получена асимптотическая формула распределения резонансов, а затем дано обоснование борновского приближения (в задаче локализации резонансов) применительно к потенциалам вида $\exp(-P(x))$, где $P(x)$ – многочлен четной степени, принадлежащий определенному ниже классу $\mathcal{E}$. Условие четности потенциала налагается для упрощения формулировок и не является ограничением по существу. Предложенный подход применим к широкому классу потенциалов вида $e^{-x^{2m}} f(x)$, где f – целая функция порядка роста меньше $2m$.

§ 6. Случай $V(x) = e^{-x^{2m}/(2m)}$, $m \geq 2$

Введем обозначение $\psi = \arg k$ и положим

$$K = \left\{ k \in \mathbb{C}_- : \psi \in \left(-\pi + \frac{\pi}{4m}, -\frac{\pi}{4m} \right) \right\}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3 (см. [15]). При $k \in K$ справедлива асимптотическая формула

$$\widehat{V}(k) = \frac{1}{\sqrt{2m-1}} (ik)^{(1-m)/(2m-1)} \exp \left\{ \frac{2m-1}{2m} (ik)^{2m/(2m-1)} \right\} (1 + O(k^{-m/(2m-1)})), \quad (7)$$

а для значений $k \in \mathbb{C}_- \setminus K$ функция $\widehat{V}(k)$ равномерно ограничена.

В соответствии с намеченным в предыдущем параграфе планом покажем теперь, что функции $f_{\pm}(x, k)$ допускают аналитическое продолжение в часть сектора $\Sigma := \{|\arg z| \leq \pi/(4m)\}$, содержащую при $k \in K$ точку перевала $z_0(k) = (2ik)^{1/(2m-1)}$ функции $S(z, k) = 2ikz - z^{2m}/(2m)$.

ЛЕММА 5. При каждом фиксированном $k \in K$, $|k| \geq 2\|V\|_1$, функции $f_{\pm}(z, k)$ аналитически продолжаются по переменной z на множество

$$Z(k) := \Sigma \cap \left\{ |\operatorname{Im} z| \leq \sin\left(\frac{\pi}{4m}\right) \frac{|k|}{4} \right\},$$

где для них справедливы оценки

$$|f_{\pm}(z, k)| \leq \frac{\|V\|_1 + 2|\operatorname{Im} z|/\sin(\pi/(4m))}{|k|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем для f_- . В ходе доказательства леммы 1 для вещественных z функция $f_-(z, k)$ раскладывалась в ряд

$$f_-(z, k) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} G_n(z, k), \quad G_n = G(VG)^{n-1}V.$$

Покажем, что каждый член этого ряда можно аналитически продолжить по z в $\mathbb{C}$. Правая часть равенства

$$G_1(z, k) = -\frac{i}{2k} \left(\int_{-\infty}^z e^{-2ik(z-\xi)} V(\xi) d\xi + \int_z^{\infty} V(\xi) d\xi \right)$$

корректно определена и аналитична при $z \in \mathbb{C}$ для каждого фиксированного $k \neq 0$. Положим $z_{\psi} := \operatorname{Re} z - |\operatorname{Im} z| \operatorname{ctg} \psi$, где $\psi = \min\{-\psi, \pi + \psi\}$, и в качестве путей интегрирования выберем $\Gamma_-(z) = (-\infty, z_{\psi}] \cup [z_{\psi}, z]$ и $\Gamma_+(z) = [z, z_{\psi}] \cup [z_{\psi}, +\infty)$. Поскольку $|\arg(z - \xi)| \leq |\arg(z - z_{\psi})| = \psi$ при $\xi \in \Gamma_-(z)$, то $\psi + \arg(z - \xi) \in [-\pi, 0]$ и, следовательно,

$$\operatorname{Re}(2ik(z - \xi)) = -|2ik(z - \xi)| \sin(\psi + \arg(z - \xi)) \geq 0.$$

Таким образом, для $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$|G_1(z, k)| \leq \frac{1}{2|k|} \left(\|V\|_1 + 2 \int_{z_{\psi}}^z |V(\xi)| |d\xi| \right),$$

а в случае $z \in \mathbb{R}$ эту оценку можно улучшить: $|G_1(z, k)| \leq \|V\|_1/(2|k|)$. Далее, индукцией по n устанавливается, что целая по переменной z функция

$$\begin{aligned} G_n(z, k) &= (GV)G_{n-1}(z, k) \\ &= -\frac{i}{2k} \left(\int_{\Gamma_-(z)} e^{-2ik(z-\xi)} V(\xi) G_{n-1}(\xi, k) d\xi + \int_{\Gamma_+(z)} V(\xi) G_{n-1}(\xi, k) d\xi \right) \end{aligned}$$

допускает оценку

$$\begin{aligned} |G_n(z, k)| &\leq \max_{\xi \in \mathbb{R} \cup [z_\psi, z]} |G_{n-1}(\xi, k)| \frac{1}{2|k|} \left(\|V\|_1 + 2 \int_{z_\psi}^z |V(\xi)| |d\xi| \right) \\ &\leq \frac{1}{(2|k|)^n} \left(\|V\|_1 + 2 \int_{z_\psi}^z |V(\xi)| |d\xi| \right)^n \end{aligned}$$

и, кроме того, $|G_n(z, k)| \leq (\|V\|_1/(2|k|))^n$, $z \in \mathbb{R}$. Заметим, что $[z_\psi, z] \subset \Sigma$, если $z \in \Sigma$ и $k \in K$. Поэтому

$$\int_{z_\psi}^z |V(\xi)| |d\xi| \leq |z - z_\psi| \leq \frac{|\operatorname{Im} z|}{\sin(\pi/(4m))},$$

поскольку $\tilde{\psi} \in [\pi/(4m), \pi/2]$ для $k \in K$. Таким образом, ряд $f_-(z, k) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} G_n(z, k)$ сходится абсолютно и равномерно по $z \in Z(k)$ при $k \in K$, $|k| \geq 2\|V\|_1$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса функция $f_-(z, k)$ для $k \in K$, $|k| \geq 2\|V\|_1$, аналитична на множестве $Z(k)$ и, кроме того, выполнена оценка

$$|f_-(z, k)| \leq \frac{\|V\|_1 + 2|\operatorname{Im} z|/\sin(\pi/(4m))}{|k|}.$$

ЛЕММА 6. При $K \ni k \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} T_{12}(k) = T_{21}(k) &= \sqrt{\frac{2\pi}{2m-1}} (2ik)^{(1-m)/(2m-1)} \\ &\times \exp \left\{ \frac{2m-1}{2m} (2ik)^{2m/(2m-1)} \right\} (1 + O(k^{(1-m)/(2m-1)})). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (7) достаточно проверить, что для $k \in K$ имеет место оценка

$$\int_{\mathbb{R}} e^{S(z, k)} f_-(z, k) dz = \exp \left\{ \frac{2m-1}{2m} (2ik)^{2m/(2m-1)} \right\} O(k^{(2-2m)/(2m-1)}),$$

где $S(z, k) = 2ikz - z^{2m}/(2m)$. Поскольку $k \in K$, то точка стационарности $z_0(k) = (2ik)^{1/(2m-1)}$ функции $S(z, k)$ лежит в секторе Σ и

$$S(z_0, k) = \frac{2m-1}{2m} (2ik)^{2m/(2m-1)}.$$

В качестве пути интегрирования выберем ломаную $\Gamma(k) = \mathbb{R}_- \cup [0, 2z_0(k)] \cup \{2z_0(k) + \mathbb{R}_+\}$ и заметим, что

$$\max_{z \in [0, 2z_0]} \operatorname{Re} S(z, k) = \operatorname{Re} S(z_0, k) \geq 0.$$

Согласно лемме 5 функция $f_-(z, k)$ при достаточно больших по абсолютной величине $k \in K$ аналитична по z на множестве $Z(k)$, содержащем $\Gamma(k) \setminus \mathbb{R}_-$, причем для $z \in \Gamma(k) \setminus \mathbb{R}_-$ выполнена оценка

$$|f_-(z, k)| \leq \frac{1}{|k|} \left(\|V\|_1 + \frac{4|z_0(k)|}{\sin(\pi/(4m))} \right). \quad (8)$$

Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}} e^{S(z,k)} f_{-}(z,k) dz = \int_{\Gamma(k)} e^{S(z,k)} f_{-}(z,k) dz$$

ввиду супер-экспоненциального убывания $V(z)$ внутри сектора Σ . Последний интеграл оценим отдельно на каждой части ломаной $\Gamma(k)$. Для $k \in \mathbb{C}_{-}$, $|k| \geq \|V\|_1$, в силу леммы 1 имеем

$$\left| \int_{\mathbb{R}_{-}} e^{S(z,k)} f_{-}(z,k) dz \right| \leq \frac{\|V\|_1^2}{|k|}.$$

Далее, при $z = 2z_0 + t$, где $t \geq 0$ и $k \in K$, справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(S(z,k) - S(2z_0,k)) \leq -\frac{t^{2m}}{2m} + 2|k|t \sin \psi (2^{2m-1} - 1) \leq -\frac{t^{2m}}{2m},$$

откуда с учетом оценки (8) получаем

$$\left| \int_{2z_0+\mathbb{R}_{+}} e^{S(z,k)} f_{-}(z,k) dz \right| \leq e^{\operatorname{Re} S(2z_0,k)} \frac{\|V\|_1 + 4|z_0(k)|/\sin(\pi/(4m))}{|k|} \|V\|_1.$$

Таким образом,

$$\int_{2z_0+\mathbb{R}_{+}} e^{S(z,k)} f_{-}(z,k) dz = O\left(\exp(\operatorname{Re} S(z_0,k)) \frac{|z_0(k)|}{|k|}\right).$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_0^{2z_0} e^{S(z,k)} f_{-}(z,k) dz, \quad f_{-}(z,k) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} G_n(z,k).$$

При $z \in [0, 2z_0]$ и достаточно больших по абсолютной величине $k \in K$ имеем

$$G_1(z,k) = \frac{1}{2ik} \left(\int_0^z e^{-2ik(z-\xi)} V(\xi) d\xi - \int_0^z V(\xi) d\xi \right) + O(k^{-1})$$

и, кроме того, как показано в ходе доказательства леммы 5, справедливы неравенства

$$|G_n(z,k)| \leq \frac{1}{(2|k|)^n} \left(\|V\|_1 + \frac{4|z_0(k)|}{\sin(\pi/(4m))} \right)^n, \quad n \geq 2,$$

откуда следует, что

$$f_{-}(z,k) = \frac{1}{2ik} \left(\int_0^z e^{-2ik(z-\xi)} V(\xi) d\xi - \int_0^z V(\xi) d\xi \right) + O(k^{-1})$$

с равномерной по $z \in [0, 2z_0]$ оценкой остатка. Вследствие этого имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{2z_0} e^{S(z,k)} f_{-}(z,k) dz &= \frac{1}{2ik} \int_0^{2z_0} V(z) \left(\int_0^z e^{S(\xi,k)} d\xi \right) dz \\ &\quad - \frac{1}{2ik} \int_0^{2z_0} e^{S(z,k)} \left(\int_0^z V(\xi) d\xi \right) dz + O\left(\exp(\operatorname{Re} S(z_0,k)) \frac{|z_0(k)|}{|k|}\right). \end{aligned}$$

Далее, так как

$$\int_0^{2z_0} V(z) \left(\int_0^z e^{S(\xi, k)} d\xi \right) dz = \int_0^{2z_0} e^{S(\xi, k)} \left(\int_\xi^{2z_0} V(z) dz \right) d\xi,$$

то

$$\int_0^{2z_0} e^{S(z, k)} f_-(z, k) dz = \frac{1}{2ik} \int_0^{2z_0} e^{S(z, k)} B(z) dz + O\left(\exp(\operatorname{Re} S(z_0, k)) \frac{|z_0(k)|}{|k|}\right),$$

где $B(z) = \int_z^{2z_0} V(\xi) d\xi - \int_0^z V(\xi) d\xi$. Рассмотрим отдельно интеграл

$$\int_0^{2z_0} e^{S(z, k)} B(z) dz = z_0 e^{S(z_0, k)} \int_0^2 e^{\lambda \tilde{S}(\rho)} B(z_0 \rho) d\rho,$$

где $\lambda = \lambda(k) = z_0(k)^{2m}$ и $\tilde{S}(\rho) = \rho - \rho^{2m}/(2m) - (2m-1)/(2m) \leq 0$. Ввиду того, что $\tilde{S}(1) = \tilde{S}'(1) = 0$ и $\tilde{S}''(1) \neq 0$, существует (см. [15; лемма 2.1.4]) функция $g \in C^\infty[-\delta, \delta]$, $\delta > 0$, взаимно-однозначно отображающая $[-\delta, \delta]$ на $[a, b] \subset [0, 2]$, такая, что $\tilde{S}(g(s)) \equiv -s^2$, причем $g(0) = 1$. Представим рассматриваемый интеграл в виде суммы трех слагаемых

$$\int_0^{2z_0} e^{S(z, k)} B(z) dz = z_0 e^{S(z_0, k)} \left(\int_0^a + \int_a^b + \int_b^2 \right) e^{\lambda \tilde{S}(\rho)} B(z_0 \rho) d\rho.$$

Интегрируя по частям первое слагаемое, получим

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{\lambda \tilde{S}(\rho)} B(z_0 \rho) d\rho &= \frac{e^{\lambda \tilde{S}(\rho)}}{\lambda} \frac{B(z_0 \rho)}{\tilde{S}'(\rho)} \Big|_0^a \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} \int_0^a e^{\lambda \tilde{S}(\rho)} \left[B'(z_0 \rho) \frac{z_0}{\tilde{S}'(\rho)} - B(z_0 \rho) \frac{\tilde{S}''(\rho)}{\tilde{S}'(\rho)^2} \right] d\rho = O(k^{-1}), \end{aligned}$$

поскольку $B'(z_0 \rho) = -2V(z_0 \rho)$ ограничена, а $|B(z_0 \rho)| \leq 2|z_0|$ при $\rho \in [0, 2]$. Аналогично,

$$\int_b^2 e^{\lambda \tilde{S}(\rho)} B(z_0 \rho) d\rho = O(k^{-1}).$$

Сделав замену $\rho = g(s)$ во втором слагаемом, получаем

$$\int_a^b e^{\lambda \tilde{S}(\rho)} B(z_0 \rho) d\rho = \left(\int_{-\delta}^{-\delta/|z_0|} + \int_{-\delta/|z_0|}^{\delta/|z_0|} + \int_{\delta/|z_0|}^{\delta} \right) e^{-\lambda s^2} B(z_0 g(s)) g'(s) ds.$$

Интеграл по каждому отрезку оценим отдельно. Так как $|B(z_0 g(s))| \leq 2|z_0|$ и $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, то

$$\int_{-\delta/|z_0|}^{\delta/|z_0|} e^{-\lambda s^2} B(z_0 g(s)) g'(s) ds = O(1).$$

Далее, учитывая ограниченность $B'(z_0 g(s))$, имеем

$$\begin{aligned} &\int_{\delta/|z_0|}^{\delta} e^{-\lambda s^2} B(z_0 g(s)) g'(s) ds \\ &= \frac{e^{-\lambda s^2}}{\lambda} \frac{B(z_0 g(s)) g'(s)}{2s} \Big|_{\delta/|z_0|}^{\delta/|z_0|} + \frac{1}{2\lambda} \int_{\delta/|z_0|}^{\delta} e^{-\lambda s^2} [(B'(z_0 g(s)) z_0 (g'(s))^2 \\ &\quad + B(z_0 g(s)) g''(s)) s^{-1} - B(z_0 g(s)) g'(s) s^{-2}] ds = O(k^{(2-2m)/(2m-1)}) \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\int_{-\delta}^{-\delta/|z_0|} e^{-\lambda s^2} B(z_0 g(s)) g'(s) ds = O(k^{(2-2m)/(2m-1)}).$$

Объединяя установленные оценки, приходим в результате к требуемой асимптотической формуле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Преобразование Фурье $\widehat{V}(k)$ в рассматриваемом случае представляет собой целую функцию, равномерно ограниченную при $|\arg(\pm k)| \leq \pi/(4m)$ (утверждение 3). Следовательно, в силу предложения 1 в $\mathbb{C}_- \setminus K$ может находиться лишь конечное число резонансов оператора L .

Далее, из лемм 1 и 6 вытекает, что в секторе K имеет место представление

$$E(k) = 1 - \frac{2\pi}{2m-1} (2ik)^{(4-6m)/(2m-1)} \exp\left\{\frac{2m-1}{m} (2ik)^{2m/(2m-1)}\right\} (1 + \delta(k)) + \varepsilon(k),$$

причем функции $\delta(k) = O(k^{(1-m)/(2m-1)})$ и $\varepsilon(k) = O(k^{-1})$ аналитичны в указанном секторе при k достаточно больших по модулю (поскольку таковыми являются $T_{11}(k)$, $T_{12}(k)$, $T_{21}(k)$, $T_{22}(k)$). После замены переменной

$$z = (2ik)^{2m/(2m-1)},$$

переводящей сектор K в полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$, уравнение $E(k) = 0$ записывается следующим образом:

$$\frac{2m-1}{2\pi} z^{(3m-2)/m} (1 + \xi(z)) = \exp\left\{\frac{2m-1}{m} z\right\} (1 + \eta(z)), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \xi(z) &= \varepsilon\left(\frac{z^{(2m-1)/(2m)}}{2i}\right) = O(z^{(1-2m)/(2m)}), \\ \eta(z) &= \delta\left(\frac{z^{(2m-1)/(2m)}}{2i}\right) = O(z^{(1-m)/(2m)}). \end{aligned}$$

Выберем $R > 0$ так, чтобы в полуплоскости $D := \{\operatorname{Re} z \geq R\}$ функция

$$\varphi(z) = (1 + \eta(z))(1 + \xi(z))^{-1} = 1 + O(z^{(1-m)/(2m)})$$

была аналитична и, кроме того, выполнялось неравенство $|\varphi(z) - 1| < 1/2$, и перепишем уравнение (9) в эквивалентной форме

$$\exp\left\{\frac{2m-1}{m} z - \frac{3m-2}{m} \ln z - \ln \frac{2m-1}{2\pi} + \ln \varphi(z)\right\} = 1.$$

Таким образом, $z \in D$ является корнем уравнения (9) в том и только том случае, если для некоторого $n \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$z - \frac{3m-2}{2m-1} \ln z + \psi(z) = \omega_n, \quad (9')$$

где

$$\begin{aligned}\omega_n &= \frac{m}{2m-1} 2\pi i n + \frac{m}{2m-1} \ln \frac{2m-1}{2\pi}, \\ \psi(z) &= \frac{m}{2m-1} \ln \varphi(z) = O(z^{(1-m)/(2m)}).\end{aligned}$$

Поскольку левая часть (9') аналитична в D и неограниченно возрастает с ростом модуля $z \in D$, то это уравнение при любом фиксированном n может иметь в D лишь конечное число решений.

Наконец, в силу леммы 4 существуют $C > 0$ и $\tilde{N} > 0$ такие, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq \tilde{N}$, уравнение (9') имеет в D единственный корень z_n , причем

$$\left| z_n - \omega_n - \frac{3m-2}{2m-1} \ln \omega_n \right| \leq C |n|^{(1-m)/(2m)}.$$

Таким образом, установлено, что множество корней уравнения (9) состоит из двух серий с асимптотиками

$$z_{\pm n} = \pm \frac{2\pi m}{2m-1} i n + \frac{3m-2}{2m-1} \ln n + \frac{C_{\pm}}{2m-1} + O(n^{(1-m)/(2m)}),$$

где

$$C_{\pm} = m \ln \frac{2m-1}{2\pi} + (3m-2) \left(\ln \frac{2\pi m}{2m-1} \pm \frac{i\pi}{2} \right).$$

Возвращаясь обратно к переменной $k = z^{(2m-1)/(2m)}/(2i)$, получим искомую формулу

$$\begin{aligned}k_{\pm n} &= \pm \frac{e^{\mp i\pi/(4m)}}{2} \left(\frac{2\pi m}{2m-1} n \right)^{(2m-1)/(2m)} \left[1 \mp i \frac{(3m-2)(2m-1)}{4\pi m^2} \frac{\ln n}{n} \right. \\ &\quad \left. \mp i \frac{(2m-1)C_{\pm}}{4\pi m^2} \frac{1}{n} + O(n^{(1-3m)/(2m)}) \right].\end{aligned}$$

§ 7. Точка перевала фазовой функции

Как известно (см. [15]), асимптотика по параметру k интеграла

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(2ikz - P(z)) dz \quad (10)$$

где $P(z)$ – многочлен, определяется взаимным расположением точек перевала фазовой функции $S(z, k) := 2ikz - P(z)$. Определим класс многочленов с вещественными коэффициентами, представляющих собой асимптотически знакоопределенные возмущения мономов четной степени.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Класс $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}[z]$ состоит из многочленов вида

$$P(z) = a_{2m} z^{2m} + a_{2n} z^{2n} + \dots + a_0,$$

где $a_{2m} > 0$ и $\deg(P(z) - a_{2m} z^{2m}) = 2n > 0$, причем $a_{2n} > 0$.

Для многочленов указанного класса фазовая функция $S(z, k)$ при каждом достаточно большом по модулю $k \in \mathbb{C}_-$ имеет $2m - 1$ простых точек перегиба. В дальнейшем нас будет интересовать точка перегиба

$$z_0(k) = \left(\frac{ik}{ma_{2m}} \right)^{1/(2m-1)} - \frac{na_{2n}}{ma_{2m}(2m-1)} \left(\frac{ik}{ma_{2m}} \right)^{(2(n-m)+1)/(2m-1)} + O(k^{2(m-n)/(2m-1)}), \quad (11)$$

поскольку в рассматриваемой ситуации именно она (см. § 9) дает основной вклад в асимптотику интеграла (10). Положим $K_C := \{\operatorname{Re} S(z_0(k), k) \geq |C|\}$.

ЛЕММА 7. *Если $P \in \mathcal{E}$, то существует $R_0 = R_0(P) > 0$ такое, что на множестве*

$$K_0 \cap \{|k| \geq R_0\} \subset K = \left\{ k \in \mathbb{C}_- : \psi \in \left(-\pi + \frac{\pi}{4m}, -\frac{\pi}{4m} \right) \right\}$$

выполнено неравенство $\operatorname{Re} P(z_0(k)) \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу асимптотической формулы (11) при $\mathbb{C}_- \ni k \rightarrow \infty$ имеем

$$S(z_0(k), k) = (2m-1)a_{2m} \left(\frac{ik}{ma_{2m}} \right)^{2m/(2m-1)} - a_{2n} \left(\frac{ik}{ma_{2m}} \right)^{2n/(2m-1)} + O(k^{(2n-1)/(2m-1)}).$$

Если $\arg k \in [-\pi/(4m), 0]$, то

$$\arg(ik)^{2m/(2m-1)} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi m}{2m-1} \right], \quad \arg(ik)^{2n/(2m-1)} \in \left[\frac{\pi n}{2m}, \frac{\pi n}{2m-1} \right].$$

Следовательно,

$$(2m-1)a_{2m} \operatorname{Re} \left(\frac{ik}{ma_{2m}} \right)^{2m/(2m-1)} \leq 0,$$

поскольку $a_{2m} > 0$. Кроме того,

$$a_{2n} \operatorname{Re} \left(\frac{ik}{ma_{2m}} \right)^{2n/(2m-1)} \geq a_{2n} \left(\frac{|k|}{ma_{2m}} \right)^{2n/(2m-1)} \cos \frac{\pi n}{2m-1},$$

где $a_{2n} > 0$. Таким образом, $\operatorname{Re} S(z_0(k), k) < 0$ для достаточно больших по абсолютной величине k из угла $\psi \in [-\pi/(4m), 0]$. Аналогично рассматривается случай, когда $\psi \in [-\pi, -\pi + \pi/(4m)]$. Далее заметим, что

$$\begin{aligned} S(z_0(k), k) &= z_0(k)P'(z_0(k)) - P(z_0(k)) \\ &= a_{2m}(2m-1)z_0(k)^{2m} + a_{2n}(2n-1)z_0(k)^{2n} + \dots \end{aligned}$$

и поэтому

$$P(z_0(k)) - \frac{1}{2m-1}S(z_0(k), k) = a_{2n} \frac{2(m-n)}{2m-1} z_0(k)^{2n} + \dots,$$

где $a_{2n} > 0$. Поскольку $z_0(k) \sim (ik/(ma_{2m}))^{1/(2m-1)}$ при $\mathbb{C}_- \ni k \rightarrow \infty$, то

$$\varphi_0(k) := \arg z_0(k) = \frac{\pi/2 + \psi}{2m-1} + o(1), \quad (12)$$

так что согласно доказанному имеем

$$\liminf_{K_0 \ni k \rightarrow \infty} \varphi_0(k) \geq -\frac{\pi}{4m}, \quad \limsup_{K_0 \ni k \rightarrow \infty} \varphi_0(k) \leq \frac{\pi}{4m}.$$

Отсюда вытекает, что для достаточно больших по модулю $k \in K_0$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Re} z_0(k)^{2n} \geq |z_0(k)|^{2n} \cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{4m}\right) > 0$$

и, следовательно, $\operatorname{Re} P(z_0(k)) \geq (1/(2m-1)) \operatorname{Re} S(z_0(k), k) \geq 0$. Лемма доказана.

Ниже в настоящем параграфе установлены необходимые для дальнейшего свойства множества

$$\Omega_C := \{\operatorname{Re} P(z) \geq C\}, \quad C < 0,$$

где $P \in \mathcal{E}$, $\deg P = 2m$, граница которого задается уравнением $P(z) = C + it$, $t \in \mathbb{R}$. Решения $\tilde{z}_j(w)$, $j = 0, \dots, 2m-1$, уравнения $P(z) = w$ при достаточно больших по модулю значениях w представимы (см., например, [15]) в виде рядов Пуизо

$$\tilde{z}_j(w) = e^{i\pi j/m} \left(\frac{w}{a_{2m}}\right)^{1/(2m)} + \sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_{\varkappa}^{(j)} \left(\frac{w}{a_{2m}}\right)^{-\varkappa/(2m)}.$$

Подстановка этого ряда в равенство $P(\tilde{z}_j(w)) = w$ показывает, что $c_{\varkappa}^{(j)} = 0$ для $0 \leq \varkappa \leq 2(m-n-1)$, и позволяет найти первый ненулевой коэффициент $c_{2(m-n)-1}^{(j)}$. В частности, для значений аргумента $w = C + it$, $t \in \mathbb{R}$, в случае, когда $C < 0$ достаточно велико по абсолютной величине, имеет место асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \tilde{z}_j(C + it) &= e^{i\pi j/m} \left(\frac{C + it}{a_{2m}}\right)^{1/(2m)} - \frac{a_{2n}}{2ma_{2m}} e^{i\pi j(2n-2m+1)/m} \\ &\quad \times \left(\frac{C + it}{a_{2m}}\right)^{(2n-2m+1)/(2m)} + O((|C| + |t|)^{(n-m)/m}). \end{aligned}$$

Таким образом, абсолютная величина $C < 0$ может быть (и будет) выбрана настолько большой, что граница $\partial\Omega_C$ состоит из $2m$ попарно непересекающихся аналитических кривых

$$\{\tilde{z}_j(C + it), t \in \mathbb{R}\} \subset \left\{ \left| \arg z - \frac{\pi(2j+1)}{2m} \right| \leq \frac{3\pi}{8m}, |z| > \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4m} \right\}, \quad (13)$$

где $j = 0, \dots, 2m-1$. Кроме того, мы ограничимся рассмотрением значений $C < 0$, для которых угол $|\arg(\pm z)| \leq \pi/(4m)$ лежит внутри Ω_C ; как показывает неравенство $\operatorname{Re} P(re^{i\varphi}) \geq (1/2)a_{2n}r^{2n} \cos(\pi n/(2m))$, справедливое при

$|\varphi| \leq \pi/(4m)$ или $|\pi - \varphi| \leq \pi/(4m)$ и достаточно больших $r > 0$, указанный выбор $C < 0$ возможен.

Рассмотрим множество $\Omega_C(R)$ – связную компоненту $\Omega_C \cap \{\operatorname{Re} z \geq R\}$, содержащую луч $\{x \geq R\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Существует $R = R(C) > 0$ такое, что*

$$\Omega_C(R) = \{z = x + iy : x \geq R, |y| \leq f(x)\},$$

где функция f обладает следующими свойствами

$$0 < f'(x) < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4m}\right) =: a, \quad x \geq R, \quad (f(x) - ax) \downarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в силу симметричности Ω_C относительно вещественной оси достаточно провести только для случая $y = \operatorname{Im} z \geq 0$. Функция $z(t) := \tilde{z}_0(C + it)$ при больших по абсолютной величине t раскладывается в сходящийся ряд

$$z(t) = \left(\frac{C + it}{a_{2m}}\right)^{1/(2m)} - \frac{a_{2n}}{2ma_{2m}} \left(\frac{C + it}{a_{2m}}\right)^{(2n-2m+1)/(2m)} + \dots$$

и, следовательно,

$$\dot{z}(t) = \frac{i}{2ma_{2m}} \left[\frac{C + it}{a_{2m}}\right]^{(1-2m)/(2m)} \left(1 + B \left[\frac{C + it}{a_{2m}}\right]^{(n-m)/m} + \dots\right),$$

где $B = a_{2n}(2m - 2n - 1)/(2ma_{2m}) > 0$. Отсюда вытекает, что при достаточно большом $T = T(C) > 0$ для $t \geq T$ имеет место неравенство

$$0 < \arg \dot{z}(t) = \frac{\pi}{4m} - \frac{2m-1}{2m} \left(\arg(C + it) - \frac{\pi}{2}\right) + B \operatorname{Im} \left[\frac{C + it}{a_{2m}}\right]^{(n-m)/m} + O((C + it)^{(2n-2m-1)/(2m)}) < \frac{\pi}{4m},$$

поскольку $\arg(C + it) \downarrow \pi/2$, а

$$\begin{aligned} & B \operatorname{Im} \left[\frac{C + it}{a_{2m}}\right]^{(n-m)/m} + O((C + it)^{(2n-2m-1)/(2m)}) \\ &= -B \left[\frac{C^2 + t^2}{a_{2m}^2}\right]^{(n-m)/(2m)} \sin\left(\frac{m-n}{m} \left(\arctg\left(\frac{t}{C}\right) + \pi\right)\right) \\ &+ O(t^{(2n-2m-1)/(2m)}) \uparrow 0 \end{aligned}$$

при $C < 0$ и $t \rightarrow +\infty$.

Таким образом, $\dot{x}(t) = \operatorname{Re} \dot{z}(t) > 0$ и $\dot{y}(t) = \operatorname{Im} \dot{z}(t) > 0$ при $t \geq T$. Следовательно, кривая $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \geq T$, представляет собой график строго возрастающей функции $f(x) = y(t(x))$, где $t(x)$ – функция, обратная к $x(t)$. Ввиду того, что $\{0 \leq \arg z \leq \pi/(4m)\} \subset \Omega_C$ благодаря выбору $C < 0$, множество $\Omega_C(R) \cap \mathbb{C}_+$ при некотором $R \geq x(T)$ является подграфиком функции f . Наконец, согласно доказанному имеем

$$0 < f'(x) = \operatorname{tg}(\arg \dot{z}(t(x))) < \operatorname{tg} \frac{\pi}{4m} = a, \quad x \geq R,$$

и, кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (y(t) - ax(t)) = 0,$$

причем в силу оценки производной $f'(x)$ функция $(f(x) - ax)$ убывает монотонно.

СЛЕДСТВИЕ. Если $z_0(k) \in \Omega_C$ и $k \in K$ — достаточно велико, то $z_0(k) \in \Omega_C(R)$, где $R = R(C)$.

Для $\psi \in (-\pi + \pi/(4m), -\pi/(4m))$ рассмотрим множество

$$\tilde{\Omega}_C(\psi) = \{z = x + iy : [z_\psi, z] \subset \Omega_C\},$$

где $z_\psi = x - |y| \operatorname{ctg} \tilde{\psi}$, $\tilde{\psi} = \min\{-\psi, \pi + \psi\}$.

ЛЕММА 8. Для достаточно большого по модулю $C < 0$ при $R = R(C)$ имеем

$$\Omega_C(R) + \mathbb{R}_+ \subset \tilde{\Omega}_C(\psi), \quad \psi \in \left(-\pi + \frac{\pi}{4m}, -\frac{\pi}{4m}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (13) указанное в утверждении 4 значение $R = R(C)$ может быть (и будет считаться) выбранным настолько большим, что $b = f(R) - aR \leq 1$ и, кроме того,

$$\{0 \leq y \leq ax + b\} \cap \partial\Omega_C = \{x + if(x), x \geq R\}.$$

Пусть $z \in \Omega_C(R) \cap \mathbb{C}_+$, т.е. точка z лежит под графиком монотонно возрастающей функции $f(x)$ так, что $z + \mathbb{R}_+ \subset \Omega_C(R)$. Поскольку $\arg(z - z_\psi) = \tilde{\psi} \geq \pi/(4m)$ и $f'(x) < \operatorname{tg}(\pi/(4m))$ для $x \geq R$, то отрезок $[z_\psi, z]$ не пересекается с графиком $\{x + if(x), x \geq R\}$ и одновременно с z принадлежит сектору $\{0 \leq y \leq ax + b\}$. С учетом этого приходим к следующему заключению: $[z_\psi, z] \cap \partial\Omega_C = \emptyset$ и, таким образом, $[z_\psi, z] \subset \Omega_C$. Случай $z \in \Omega_C(R) \cap \mathbb{C}_-$ рассматривается аналогично ввиду симметричности Ω_C относительно вещественной оси.

§ 8. Перевальный контур для фазовой функции

Для многочлена $P(z) = a_{2m}z^{2m} + a_{2n}z^{2n} + \dots + a_0$, принадлежащего классу $\mathcal{E}$, выберем и зафиксируем $C = C(P) < 0$ и $R = R(C) > 0$ так, чтобы выполнялись все условия, налагаемые на них в предыдущем параграфе, и, в частности, были справедливы заключение леммы 8 и утверждение 4.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Для произвольного $k \in K$, достаточно большого по абсолютной величине, найдется кривая $\gamma(k) \subset \tilde{\Omega}_C(\psi)$ длины $|\gamma(k)| = O(|z_0(k)|)$, соединяющая точку $z = 0$ с определенной точкой $\xi = \xi(k)$ луча $z_0(k) + \mathbb{R}_+$, такая, что

$$\max_{z \in \gamma(k)} \operatorname{Re} S(z, k) \leq \max\{\operatorname{Re} S(z_0(k), k), |C|\} \quad (15)$$

и, кроме того, $\xi + \mathbb{R}_+ \subset \tilde{\Omega}_C(\psi)$, где $\psi = \arg k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Способ построения кривой $\gamma = \gamma(k)$ зависит от расположения точки $z_0(k)$. Напомним, что $\varphi_0(k) = \arg z_0(k)$, и для $k \in K$, достаточно больших по модулю, рассмотрим следующие три случая:

- i) $z_0(k) \in \{|\varphi_0(k)| \leq \pi/(4m)\} \subset \Omega_C(R)$,
- ii) $z_0(k) \in \{|\varphi_0(k)| > \pi/(4m)\} \cap \Omega_C(R)$,
- iii) $z_0(k) \notin \Omega_C(R)$.

i) В качестве $\gamma = \gamma(k)$ можно взять $[0, z_0(k)]$. Действительно, $\{|\arg z| \leq \pi/(4m)\} \subset \Omega_C$ в силу выбора C , причем каждая точка z этого сектора лежит в нем вместе с отрезком $[z_\psi, z]$, поскольку $|\arg(z - z_\psi)| = \tilde{\psi} \geq \pi/(4m)$ при $k \in K$. Таким образом, в рассматриваемом случае $[0, z_0(k)] \subset \tilde{\Omega}_C(\psi)$. Далее, для достаточно больших по модулю $k \in K$ и $\rho \in [0, 1]$ в силу того, что $P \in \mathcal{E}$ и $|\varphi_0(k)| \leq \pi/(4m)$, производная

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} S(\rho z_0, k))'_\rho &= \operatorname{Re}((P'(z_0) - P'(\rho z_0))z_0) \\ &= (1 - \rho) \left(2ma_{2m} \sum_{j=0}^{2m-2} \rho^j |z_0|^{2m} \cos 2m\varphi_0 + 2na_{2n} \sum_{j=0}^{2n-2} \rho^j |z_0|^{2n} \cos 2n\varphi_0 + \dots \right) \end{aligned}$$

неотрицательна и, следовательно, $\max_{\rho \in [0, 1]} \operatorname{Re} S(\rho z_0, k) = \operatorname{Re} S(z_0, k)$.

ii) Для определенности ограничимся рассмотрением множества

$$K' = \left\{ k \in K : z_0(k) \in \Omega_C(R), \varphi_0(k) > \frac{\pi}{4m} \right\}.$$

Согласно утверждению 4 при $K' \ni k \rightarrow \infty$ имеем $\varphi_0(k) \downarrow \pi/(4m)$, откуда в силу (12) получаем, что $\psi(k) \uparrow -\pi/(4m)$. Поэтому $\tilde{\psi}(k) = -\psi(k)$ при достаточно больших по модулю $k \in K'$ и, таким образом, $\tilde{\psi}(k) \downarrow \pi/(4m)$, когда $K' \ni k \rightarrow \infty$.

Если $\varphi_0(k) \geq \tilde{\psi}$, то в качестве $\gamma = \gamma(k)$ возьмем отрезок $[0, z_0]$, принадлежащий $\tilde{\Omega}_C(\psi)$ ввиду леммы 8. При этом для $z \in [0, z_0]$ и достаточно больших по абсолютной величине $k \in K'$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Re} S(z, k) = -2|kz| \sin(\varphi_0 + \psi) - \operatorname{Re} P(z) \leq -\operatorname{Re} P(z) \leq |C|.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\varphi_0(k) < \tilde{\psi}$. Согласно утверждению 4 график функции $y = f(x)$, $x \geq R$, допускает параметризацию углом $\theta(x) = \arg\{x + if(x)\}$, причем

$$\theta'(x) < 0, \quad x \geq R, \quad \theta(x) \downarrow \frac{\pi}{4m}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (16)$$

Таким образом, для каждого $k \in K'$, достаточно большого по модулю, луч $e^{i\tilde{\psi}}\mathbb{R}_+$ пересекает график $f(x)$ в некоторой точке $A = A(k) \in \Omega_C(R)$ так, что $[0, A] = [A_\psi, A] \subset \tilde{\Omega}_C(\psi)$ согласно лемме 8.

Далее, поскольку $k \in K'$, то точка $z_0(k)$ лежит выше прямой $e^{i\pi/(4m)}\mathbb{R}$ и ниже графика функции $f(x)$, причем $\operatorname{Re} z_0(k) \rightarrow +\infty$, если $|k| \rightarrow \infty$. Следовательно, в силу (14) отрезок $\{z_0(k) + \zeta(\rho), \rho \in [0, 1]\}$, где $\zeta(\rho) = \rho \exp(i[\pi/2 + \pi/(3m)])$, при достаточно больших по модулю $k \in K'$ пересекает график $f(x)$ в некоторой точке $B = B(k)$ такой, что $[B, z_0(k)] \subset \Omega_C(R) \subset \tilde{\Omega}_C(\psi)$ ввиду утверждения 4

и леммы 8. Предположим сначала, что $\operatorname{Re} A \geq \operatorname{Re} B$. Тогда в силу (16) имеем $\arg A \leq \arg B$, поскольку точки A и B лежат на графике $f(x)$. В этом случае γ представляет собой двузвенную ломаную, соединяющую нуль и z_0 , с вершиной в точке пересечения отрезков $[0, A]$ и $[B, z_0]$. Если же $\operatorname{Re} A \leq \operatorname{Re} B$, то в качестве γ можно взять объединение отрезков $[0, A]$, $[B, z_0]$ и участка графика $\{x + if(x), x \in [\operatorname{Re} A, \operatorname{Re} B]\} \subset \Omega_C(R)$, принадлежащего множеству $\Omega_C(\psi)$ в силу леммы 8.

Итак, по построению $\gamma(k) \subset \tilde{\Omega}_C(\psi)$ и, кроме того, $|\gamma(k)| = O(|z_0(k)|)$. Покажем теперь, что при этом выполнено неравенство (15). Действительно, для $z \in [0, A] \subset \Omega_C$ справедлива оценка

$$\operatorname{Re} S(z, k) = 2 \operatorname{Re}(ikz) - \operatorname{Re} P(z) = -\operatorname{Re} P(z) \leq |C|.$$

Для $z = z_0 + \zeta(\rho)$ при $k \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$S(z_0, k) - S(z_0 + \zeta(\rho), k) = a_{2m} m(2m-1) z_0^{2m-2} \zeta(\rho)^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{z_0}\right)\right)$$

с равномерной по $\rho \in [0, 1]$ оценкой остатка. Следовательно, поскольку $\varphi_0(k) \downarrow \pi/(4m)$ при $K' \ni k \rightarrow \infty$, то

$$\arg(S(z_0, k) - S(z_0 + \zeta(\rho), k)) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6m} + o(1).$$

Таким образом,

$$-\frac{\pi}{2} < \arg(S(z_0, k) - S(z_0 + \zeta(\rho), k)) < 0$$

и поэтому

$$\operatorname{Re} S(z_0 + \zeta(\rho), k) \leq \operatorname{Re} S(z_0, k), \quad \rho \in [0, 1],$$

если $k \in K'$ достаточно велико по модулю. Наконец, в случае, когда $\operatorname{Re} A \leq \operatorname{Re} B$, при $z(x) = x + if(x)$, $x \in [\operatorname{Re} A, \operatorname{Re} B]$, и больших по модулю $k \in K'$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} S(z(x), k) = -2 \operatorname{Im}[kz(x)] - C \leq -2 \operatorname{Im}[kB] - C = \operatorname{Re} S(B, k),$$

поскольку $(\operatorname{Im}[kz(x)])' = \operatorname{Im}[k(1 + if'(x))] < 0$ в силу утверждения 4. Остается заметить, что согласно доказанному $\operatorname{Re} S(B, k) \leq \operatorname{Re} S(z_0(k), k)$.

iii) Выберем и зафиксируем $M > 0$ такое, что $\operatorname{Re} z_0(k) \geq R$ для всех $k \in K$, $|k| \geq M$, и, кроме того,

$$\{z_0(k) : \psi \in [-\pi + \hat{\theta}, -\hat{\theta}], |k| \geq M\} \subset \left\{|\varphi_0(k)| \leq \frac{\pi}{4m}, \operatorname{Re} z_0(k) \geq R\right\} \subset \Omega_C(R),$$

где $\hat{\theta} = \theta(R) > \pi/(4m)$; если же $z_0(k) \notin \Omega_C(R)$, то либо $\psi \in (-\hat{\theta}, -\pi/(4m))$, либо $\psi + \pi \in (\pi/(4m), \hat{\theta})$. Ограничимся рассмотрением множества

$$K'' := \left\{k \in K : \psi \in \left(-\hat{\theta}, -\frac{\pi}{4m}\right), |k| \geq M\right\},$$

поскольку в случае $\psi + \pi \in (\pi/(4m), \hat{\theta})$ все конструкции аналогичны.

Так как график функции $f(x)$, $x \geq R$, допускает параметризацию полярным углом $\theta(x)$, изменяющимся в пределах $(\pi/(4m), \hat{\theta}]$, то для любого $k \in K''$ луч $e^{i\psi}\mathbb{R}_+ = e^{-i\psi}\mathbb{R}_+$ пересекает график $f(x)$ в некоторой точке $A = A(k) \in \Omega_C(R)$, причем $[0, A] \subset \tilde{\Omega}_C(\psi)$ в силу леммы 8. Неравенство $\operatorname{Re} S(z, k) \leq |C|$ для $k \in K''$ и $z \in [0, A]$ проверяется так же, как и в случае ii).

Далее, в силу того, что $\operatorname{Re} z_0(k) \geq R$ и $z_0(k) \notin \Omega_C(R)$, т.е. точка $z_0(k)$ лежит над графиком функции $f(x)$, луч $z_0(k) + \mathbb{R}_+$ пересекает график $f(x)$ в некоторой точке $B = B(k)$. Предположим сначала, что $\operatorname{Re} A \geq \operatorname{Re} B$. Тогда $\arg A \leq \arg B$ в силу (16). Следовательно, отрезок $[0, A]$ пересекает луч $B + \mathbb{R}_+$ в определенной точке $\xi = \xi(k)$ и в этом случае положим $\gamma(k) = [0, \xi(k)]$. Если же $\operatorname{Re} A \leq \operatorname{Re} B$, то $\xi := B(k)$ и в качестве $\gamma(k)$ можно взять объединение отрезка $[0, A]$ и участка графика $\{x + if(x), x \in [\operatorname{Re} A, \operatorname{Re} B]\}$, принадлежащего $\tilde{\Omega}_C(\psi)$ согласно лемме 8.

Для проверки неравенства (15) предварительно представим $S(z_0(k) + t, k)$ в виде

$$S(z_0(k) + t, k) = S(z_0(k), k) - \sum_{j=2}^{2m-1} \frac{P^{(j)}(z_0(k))}{j!} t^j - a_{2m} t^{2m},$$

где $\operatorname{Re} P^{(j)}(z_0(k))/j! \sim C_{2m}^j a_{2m} |z_0(k)|^{2m-j} \cos((2m-j)\varphi_0(k))$ при $\mathbb{C}_- \ni k \rightarrow \infty$. Отсюда в силу (12) следует, что $\operatorname{Re} P^{(j)}(z_0(k)) > 0$, $j = 2, \dots, 2m-1$, и для достаточно больших по модулю $k \in \mathbb{C}_-$. Следовательно, для таких k и произвольных $t > 0$ имеем

$$\operatorname{Re} S(z_0(k) + t, k) < \operatorname{Re} S(z_0(k), k) - a_{2m} t^{2m} < \operatorname{Re} S(z_0(k), k). \quad (17)$$

Наконец, повторяя рассуждения, проведенные в случае ii), приходим к заключению, что $\operatorname{Re} S(z(x), k) \leq \operatorname{Re} S(B, k) \leq \operatorname{Re} S(z_0(k), k)$ при $z(x) = x + if(x)$, $x \in [\operatorname{Re} A, \operatorname{Re} B]$, $k \in K''$. По построению $|\gamma(k)| = O(|z_0(k)|)$, а указанная в формулировке утверждения точка $\xi = \xi(k)$ принадлежит $\Omega_C(R)$ и поэтому к ней применима лемма 8.

СЛЕДСТВИЕ. Для произвольного $\delta \in (0, 1)$ при любом

$$k \in K_C = \{\operatorname{Re} S(z_0, k) \geq |C|\},$$

достаточно большом по модулю, существует кривая $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(k, \delta)$, соединяющая точку $z = 0$ с некоторой точкой $w = w(k, \delta)$ окружности с центром $z_0 = z_0(k)$ радиуса $\delta|z_0|$, такая, что

$$\max_{z \in \tilde{\gamma}(k)} \operatorname{Re} S(z, k) \leq \operatorname{Re} S(z_0(k), k), \quad (18)$$

причем $|\tilde{\gamma}(k)| = O(|z_0(k)|)$ и $\arg w(k, \delta) - \varphi_0(k) \rightarrow 0$, если $K_C \ni k \rightarrow \infty$.

Действительно, в силу леммы 7 и следствия из утверждения 4 для больших по модулю $k \in K_C$ имеем $z_0(k) \in \Omega_C(R)$, поскольку $K_C \cap \{|k| \geq R_0\} \subset K$. В процессе доказательства утверждения 5 для достаточно больших по абсолютной величине $k \in K$ в случае, когда $z_0(k) \in \Omega_C(R)$, была построена соединяющая точки $z = 0$ и $z_0(k)$ кривая $\gamma = \gamma(k)$ длины $|\gamma(k)| = O(|z_0(k)|)$, на которой справедливо неравенство (15). В качестве $\tilde{\gamma}$ возьмем часть γ , идущую от нуля до точки ее пересечения с указанной окружностью. Оценка (18) вытекает

из (15), так как $k \in K_C$. Наконец заметим, что в рассматриваемой ситуации для $z \in \gamma(k)$ либо $\arg z = \varphi_0(k)$, если $|\varphi_0(k)| \leq \pi/(4m)$, либо $\arg z \in [\varphi_0(k), \tilde{\psi}(k)]$, когда $|\varphi_0(k)| > \pi/(4m)$, и, следовательно, $\max_{z \in \tilde{\gamma}(k)} \arg z - \varphi_0(k) \rightarrow 0$ при $K_C \ni k \rightarrow \infty$ в силу (12) и (14).

§ 9. Асимптотика преобразования Фурье быстро убывающих функций

В настоящем параграфе с помощью метода перевала (ср. [15]) изучается асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2ikz - P(z)) dz$$

при больших по абсолютной величине значениях параметра $k \in \mathbb{C}_-$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если многочлен $P(z) = a_{2m}z^{2m} + \dots + a_0$ принадлежит классу $\mathcal{E}$, то для некоторого $C = C(P) < 0$ при $K_C \ni k \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{S(z,k)} dz = \left(\frac{2\pi}{P''(z_0(k))} \right)^{1/2} \exp(S(z_0(k), k)) [1 + O(|k|^{-m/(2m-1)})]. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\lambda = \lambda(k) = z_0(k)^{2m}$ и рассмотрим функцию

$$Q(\xi, k) := \frac{1}{\lambda(k)} \{S(z_0(k)\xi, k) - S(z_0(k), k)\}$$

в окрестности ее точки перевала $\xi = 1$, т.е. такой, что $Q'(1, k) = 0$ и $Q''(1, k) \neq 0$, для достаточно больших по абсолютной величине значений $k \in \mathbb{C}_-$. Выберем $r \in (0, 1)$ и $R > 0$ так, чтобы при каждом значении $k \in \mathbb{C}_-$, $|k| \geq R$, в круге $U_r(1) = \{|\xi - 1| \leq r\}$ функция

$$f(\xi, k) = \left(\frac{2Q(\xi, k)}{Q''(1, k)} \right)^{1/2}$$

была однозначна, аналитична и, кроме того, выполнялось условие

$$\left| 1 - \frac{f^2(\xi, k)}{(\xi - 1)^2} \right| < 1.$$

Поскольку $f(1, k) = 0$ и $\partial_\xi f(1, k) = 1$, то в силу теоремы об обратной функции существует $\rho > 0$ такое, что для $k \in \mathbb{C}_-$, $|k| \geq R$, в круге $U_\rho(0)$ определена обратная к $f(\cdot, k)$ аналитическая функция $g(\cdot, k)$, удовлетворяющая тождеству

$$Q(g(s, k), k) = \frac{Q''(1, k)}{2} s^2.$$

При этом $g(0, k) = \partial_s g(0, k) = 1$ и для $s \in U_{\rho/2}(0)$ производная $((\partial_s g(s, k) - 1)/s)'$ ограничена равномерно по $k \in \mathbb{C}_-$, $|k| \geq R$. Выберем и зафиксируем $\delta \in (0, r)$ малым настолько, что $f(\cdot, k): U_\delta(1) \rightarrow U_{\rho/2}(0)$ при $k \in \mathbb{C}_-$, $|k| \geq R$.

Увеличим R так, чтобы для $k \in K_C$, $|k| \geq R$, существовала кривая $\tilde{\gamma}(k, \delta)$, указанная в следствии из утверждения 5, и рассмотрим контур

$$\ell = \ell(k) := \mathbb{R}_- \cup \tilde{\gamma}(k, \delta) \cup [w(k, \delta), z_0(k)] \cup \{z_0(k) + \mathbb{R}_+\}.$$

Согласно выбору $C = C(P)$ луч $\mathbb{R}_-$ принадлежит Ω_C и поэтому $\operatorname{Re} S(x, k) \leq |C| \leq \operatorname{Re} S(z_0(k), k)$ при $x \in \mathbb{R}_-$ и $k \in K_C$. Кроме того, для достаточно больших по модулю $k \in K_C$ на луче $\{z_0(k) + \mathbb{R}_+\}$ имеет место неравенство (17) и, наконец, на $\tilde{\gamma}(k, \delta)$ выполнена оценка (18). В дальнейшем мы продеформируем контур $\ell(k)$ в окрестности точки $z_0(k)$ так, чтобы продеформированный контур стал перевальным для функции $S(z, k)$.

Обозначим через Γ кривую, получаемую из ℓ после замены переменной $z(\xi) = z_0(k)\xi$. С помощью леммы Жордана, учитывая супер-экспоненциальное убывание функции $e^{-P(z)}$ внутри угла $\{|\arg z| \leq \pi/(4m)\}$, получаем равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{S(x, k)} dx = \int_{\ell} e^{S(z, k)} dz = z_0(k) e^{S(z_0(k), k)} \int_{\Gamma} e^{\lambda Q(\xi, k)} d\xi.$$

Положим $\Gamma' := \Gamma \cap U_{\delta}(1)$ – кривая с концами $\xi_-(k) = w(k, \delta)/z_0(k)$ и $\xi_+(k) = 1 + \delta e^{-i\varphi_0(k)}$, и $\Gamma'' := \Gamma \setminus \Gamma'$ так, что по построению $\operatorname{Re}(\lambda Q(\xi, k)) \leq 0$, когда $\xi \in \Gamma''$. Далее мы покажем, что при $K_C \ni k \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические формулы

$$\int_{\Gamma'} e^{\lambda Q(\xi, k)} d\xi = \left(\frac{-2\pi}{\lambda(k)Q''(1, k)} \right)^{1/2} [1 + O(\lambda(k)^{-1/2})], \quad (20)$$

$$\int_{\Gamma''} e^{\lambda Q(\xi, k)} d\xi = O(\lambda(k)^{-1}), \quad (21)$$

из которых вытекает справедливость (19).

Обозначим через $\tilde{\Gamma}$ образ Γ' под действием отображения $f(\cdot, k)$. Согласно установленным выше свойствам функции $g(\cdot, k)$ после замены $\xi = g(s, k)$ интеграл (20) принимает вид

$$\int_{\Gamma'} e^{\lambda Q(\xi, k)} d\xi = \int_{\tilde{\Gamma}} e^{-\mu s^2} ds + \int_{\tilde{\Gamma}} e^{-\mu s^2} (\partial_s g(s, k) - 1) ds,$$

где $\mu = -\lambda Q''(1, k)/2$. Здесь в силу аналитичности подынтегральных выражений кривую $\tilde{\Gamma}$ можно заменить на ломаную $[s_-, 0] \cup [0, s_+] =: \Lambda \subset U_{\rho/2}(0)$ с концами $s_{\pm} = f(\xi_{\pm}(k), k)$, на которой выполнено неравенство $\operatorname{Re}(\mu s^2) \geq 0$, так как $\operatorname{Re}(\mu s_{\pm}^2) = \operatorname{Re}(-\lambda Q(\xi_{\pm}, k)) \geq 0$. Учитывая это обстоятельство, а также равномерную по $k \in K_C$, $|k| \geq R$, ограниченность производной $((\partial_s g(s, k) - 1)/s)'$ при $s \in \Lambda$, в результате интегрирования по частям получаем оценку

$$\int_{\tilde{\Gamma}} e^{-\mu s^2} (\partial_s g(s, k) - 1) ds = \frac{1}{2\mu} \int_{\Lambda} \frac{1 - \partial_s g(s, k)}{s} d(e^{-\mu s^2}) = O(\lambda(k)^{-1}).$$

После замены переменной $\zeta = \mu^{1/2}s$ продеформированный путь интегрирования Λ превращается в ломаную $[\zeta_-, 0] \cup [0, \zeta_+]$, причем точки $\zeta_{\pm} = \mu^{1/2}s_{\pm}$

лежат в секторах $|\arg \zeta_+| \leq \pi/4$ и $|\pi - \arg \zeta_-| \leq \pi/4$. Действительно, по построению $\operatorname{Re} \zeta_{\pm}^2 \geq 0$. В силу следствия из утверждения 5 существует предел $\lim_{K_C \ni k \rightarrow \infty} \xi_-(k) = (1 - \delta)$ и поэтому

$$\lim_{K_C \ni k \rightarrow \infty} s_-(k) = \lim_{K_C \ni k \rightarrow \infty} f(\xi_-(k), k) < 0.$$

Отсюда в силу неравенства

$$\limsup_{K_C \ni k \rightarrow \infty} |\arg \lambda(k)| = 2m \limsup_{K_C \ni k \rightarrow \infty} |\varphi_0(k)| \leq \frac{\pi}{2}$$

вытекает, что $\operatorname{Re} \zeta_-(k) < 0$ и, таким образом, $|\pi - \arg \zeta_-| \leq \pi/4$, если $k \in K_C$ достаточно велико по абсолютной величине. Далее, согласно выбору $\delta < r$, при $k \in K_C$, $|k| \geq R$, имеем $|\arg s_+(k) + \varphi_0(k)| \leq \pi/4$. Поэтому

$$\limsup_{K_C \ni k \rightarrow \infty} |\arg \zeta_+(k)| = \limsup_{K_C \ni k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2} \arg \lambda(k) + \arg s_+(k) \right| \leq \frac{\pi}{2},$$

так что $\operatorname{Re} \zeta_+(k) > 0$ и, следовательно, $|\arg \zeta_+| \leq \pi/4$. Повторяя теперь дословно рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 4.1.3 из [15], получаем

$$\int_{\tilde{\Gamma}} e^{-\mu s^2} ds = \left(\frac{-2\pi}{\lambda(k)Q''(1, k)} \right)^{1/2} [1 + O(\lambda(k)^{-1/2})]$$

и тем самым устанавливается асимптотическая формула (20).

Для вывода оценки (21) воспользуемся интегрированием по частям. Предварительно заметим, что путь интегрирования Γ'' в силу следствия из утверждения 5 при достаточно больших $R > 0$ отделен от корней уравнения $\xi^{2m-1} = 1$ равномерно по $k \in K_C$, $|k| \geq R$. Поэтому для $\xi \in \Gamma''$ при $K_C \ni k \rightarrow \infty$ справедливы формулы

$$\begin{aligned} Q'(\xi, k) &= -2ma_{2m}(\xi^{2m-1} - 1)(1 + O(|k|^{2(n-m)/(2m-1)})), \\ Q''(\xi, k) &= -2m(2m-1)a_{2m}\xi^{2m-2} + O(|k|^{2(n-m)/(2m-1)}) \end{aligned}$$

с равномерной оценкой остатков и поэтому на Γ'' функция $Q''(\xi, k)/Q'(\xi, k)^2$ имеет интегрируемую мажоранту. Наконец, учитывая, что $\operatorname{Re}(\lambda Q(\xi, k)) \leq 0$ для $\xi \in \Gamma''$, в результате интегрирования по частям приходим к следующему заключению:

$$\int_{\Gamma''} e^{\lambda Q(\xi, k)} d\xi = \int_{\Gamma''} \frac{d(e^{\lambda Q(\xi, k)})}{\lambda Q'(\xi, k)} = O(\lambda(k)^{-1}),$$

чем завершается доказательство предложения.

ЛЕММА 9. Если $P \in \mathcal{E}$, то при $K \ni k \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая оценка

$$\int_{\mathbb{R}} e^{S(x, k)} dx = O(|z_0(k)|[1 + \exp(\operatorname{Re} S(z_0(k), k))]), \quad (22)$$

в то время как в секторах $\mathbb{C}_- \setminus K$ рассматриваемый интеграл по модулю ограничен величиной

$$\max_{|\psi| \leq \pi/(4m)} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\operatorname{Re} P(\pm e^{i\psi} t)) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу интегральной теоремы Коши имеем

$$\int_{\mathbb{R}} e^{S(x,k)} dx = \left(\int_{\mathbb{R}_-} + \int_{\gamma} + \int_{\xi+\mathbb{R}_+} \right) e^{S(z,k)} dz,$$

где γ – построенная в утверждении 5 для достаточно больших по абсолютной величине $k \in K$ кривая, соединяющая точку $z = 0$ с определенной точкой $\xi = \xi(k)$ луча $z_0(k) + \mathbb{R}_+$. Рассматриваемый интеграл оценим отдельно на каждой части пути интегрирования:

$$\left| \int_{\mathbb{R}_-} e^{S(x,k)} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}_-} e^{-P(x)} dx, \quad k \in \mathbb{C}_-.$$

Далее, в силу неравенства (17) верна оценка

$$\left| \int_{\xi+\mathbb{R}_+} e^{S(z,k)} dz \right| \leq \int_{\mathbb{R}_+} e^{\operatorname{Re} S(z_0+t,k)} dt \leq e^{\operatorname{Re} S(z_0,k)} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-a_{2m} t^{2m}} dt.$$

Наконец, по построению $|\gamma(k)| = O(|z_0(k)|)$ и

$$\operatorname{Re} S(z, k) \leq \max\{\operatorname{Re} S(z_0(k), k), |C|\}$$

при $z \in \gamma$, если $k \in K$ достаточно велико по модулю. Таким образом,

$$\int_{\gamma} e^{S(z,k)} dz = O(|z_0(k)|[1 + \exp(\operatorname{Re} S(z_0(k), k))]).$$

Пусть теперь $k \in \mathbb{C}_- \setminus K$, т.е. $\psi = \arg k \in (-\pi, -\pi + \pi/(4m)] \cup [-\pi/(4m), 0)$. Поскольку $P \in \mathcal{E}$, то функция $e^{-P(z)}$ супер-экспоненциально убывает в секторе $|\arg(\pm z)| \leq \pi/(4m)$ и, следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{S(z,k)} dz = \int_{e^{-i\psi}\mathbb{R}} e^{2ikz} e^{-P(z)} dz = e^{-i\psi} \int_{\mathbb{R}} e^{2i|k|t} e^{-P(e^{-i\psi}t)} dt,$$

где последний интеграл по модулю ограничен величиной, указанной в формулировке леммы.

§ 10. Распределение резонансов в борновском приближении

В настоящем параграфе для четных потенциалов вида $V(x) = e^{-P(x)}$, где $P \in \mathcal{E}$, $\deg P = 2m > 4$, исследуется локализация резонансов соответствующего оператора Шрёдингера в борновском приближении и дается оценка погрешности этого приближения. Поскольку в секторе $|\arg(\pm z)| \leq \pi/(4m)$ преобразование Фурье $\widehat{V}(z)$ согласно лемме 9 ограничено, рассматриваемый оператор Шрёдингера в силу предложения 1 имеет в $\mathbb{C}_- \setminus K$ лишь конечное множество резонансов.

Ниже в соответствии со схемой, намеченной в § 5, при больших по модулю значениях параметра $k \in K$ будут получены оценки интегралов

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\mp 2ikx - P(x)} f_{\pm}(x, k) dx,$$

которые позволяют изучить асимптотическое распределение резонансов в секторе K . Отметим, что $f_{-}(x, k) = f_{+}(-x, k)$ в силу четности потенциала $V(x)$. Аналогом леммы 5 в рассматриваемой здесь ситуации является

ЛЕММА 10. При каждом фиксированном $k \in \mathbb{C}_-$, $|k| \geq 2\|V\|_1$, функция $f_-(z, k) = e^{-ikz} R_V(-k) e^{ikz} V$ аналитически продолжается по переменной z в замкнутую область

$$Z_C(k) := \tilde{\Omega}_C(\psi) \cap \left\{ |\operatorname{Im} z| \leq (e^C \sin \tilde{\psi}) \frac{|k|}{4} \right\},$$

в которой для нее справедлива оценка

$$|f_-(z, k)| \leq \frac{\|V\|_1 + 2e^{-C} |\operatorname{Im} z| / \sin \tilde{\psi}}{|k|}. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО по существу повторяет доказательство леммы 5. Для вещественных z функция $f_-(z, k)$ представима в виде

$$f_-(z, k) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} G_n(z, k), \quad G_n = G(VG)^{n-1} V,$$

причем каждый член этого ряда при фиксированном $k \in \mathbb{C}_-$ можно аналитически продолжить по z в $\mathbb{C}$. Далее, индукцией по n устанавливается оценка

$$|G_n(z, k)| \leq \frac{1}{(2|k|)^n} \left(\|V\|_1 + 2 \int_{z_\psi}^z |V(\xi)| |d\xi| \right)^n.$$

Заметим, что для $z \in \tilde{\Omega}_C(\psi)$ выполнено неравенство

$$\int_{z_\psi}^z |V(\xi)| |d\xi| \leq e^{-C} \frac{|\operatorname{Im} z|}{\sin \tilde{\psi}}.$$

Следовательно, при $|k| \geq 2\|V\|_1$ ряд, представляющий $f_-(z, k)$, сходится абсолютно и равномерно по $z \in Z_C(k)$, так что функция $f_-(z, k)$ аналитична в $Z_C(k)$ и имеет место оценка (23).

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Если $P \in \mathcal{E}$, то при $K \ni k \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая оценка

$$\int_{\mathbb{R}} e^{S(x, k)} f_-(x, k) dx = O\left(\frac{|z_0(k)|^2}{|k|} [1 + \exp(\operatorname{Re} S(z_0(k), k))]\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналитичность функции $f_-(z, k)$ в $Z_C(k)$ позволяет, используя лемму Жордана и оценку (23), для достаточно больших по абсолютной величине $k \in K$ преобразовать рассматриваемый интеграл к виду

$$\int_{\mathbb{R}} e^{S(x, k)} f_-(x, k) dx = \left(\int_{\mathbb{R}_-} + \int_{\gamma} + \int_{\xi + \mathbb{R}_+} \right) e^{S(z, k)} f_-(z, k) dz,$$

где $\gamma = \gamma(k)$ – кривая, построенная в ходе доказательства утверждения 5, соединяющая точку $z = 0$ с определенной точкой $\xi = \xi(k)$ луча $z_0(k) + \mathbb{R}_+$. Последний интеграл оценим отдельно на каждой части пути интегрирования. При $k \in \mathbb{C}_-$, $|k| \geq \|V\|_1$, согласно лемме 1 имеем

$$\left| \int_{\mathbb{R}_-} e^{S(x, k)} f_-(x, k) dx \right| \leq \frac{\|V\|_1}{|k|} \int_{\mathbb{R}_-} e^{-P(x)} dx \leq \frac{\|V\|_1^2}{|k|}.$$

Далее, в силу неравенства (17), включения $\xi + \mathbb{R}_+ \subset Z_C(k)$ и леммы 10 верна оценка

$$\left| \int_{\xi + \mathbb{R}_+} e^{S(z,k)} f_-(z,k) dz \right| \leq \int_{\mathbb{R}_+} |e^{S(\xi+t)} f_-(\xi+t,k)| dt = O\left(\frac{e^{\operatorname{Re} S(z_0,k)} |z_0(k)|}{|k|}\right).$$

Наконец, поскольку по построению $|\gamma(k)| = O(|z_0(k)|)$ и $\gamma \subset Z_C(k)$, то снова с учетом леммы 10 и оценки (15) получаем

$$\int_{\gamma} e^{S(z,k)} f_-(z,k) dz = O\left(\exp(\max\{\operatorname{Re} S(z_0(k),k), |C|\}) \frac{|z_0(k)|^2}{|k|}\right).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для четных потенциалов вида $V(x) = e^{-P(x)}$, $P \in \mathcal{E}$, при условии $\deg P > 4$ резонансы оператора $L = -d^2/dx^2 + e^{-P(x)}$, за исключением конечного их числа, принадлежат множеству

$$\left\{ k \in \mathbb{C}_- : \frac{\ln |k|}{2} < \operatorname{Re} S(z_0(k),k) < \frac{3 \ln |k|}{2} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, рассматриваемый оператор Шрёдингера имеет в $\mathbb{C}_- \setminus K$ лишь конечное множество резонансов. Если $K \ni k \rightarrow \infty$, так что выполнено неравенство $\operatorname{Re} S(z_0(k),k) \leq 0.5 \ln |k|$, то $T_{12}(k) = T_{21}(k) = O(k^{1/2+1/(2m-1)})$ в силу утверждения 6 и леммы 9 и поэтому

$$E(k) = 1 + \frac{1}{4k^2} T_{12}(k) T_{21}(k) + O\left(\frac{1}{k}\right) = 1 + O(k^{(3-2m)/(2m-1)}).$$

Если же $k \in K$ и $\operatorname{Re} S(z_0(k),k) \geq 1.5 \ln |k|$, то согласно предложению 2 и утверждению 6 справедлива асимптотическая формула

$$T_{12}(k) = T_{21}(k) = \left(\frac{2\pi}{P''(z_0(k))} \right)^{1/2} \exp(S(z_0(k),k)) [1 + O(k^{(2-m)/(2m-1)})]. \quad (24)$$

Отсюда ввиду ограничения $m > 2$ следует, что величина $|E(k)|/|k|^{1/(2m-1)}$ отделена от нуля при достаточно больших по модулю k . Тем самым (с учетом утверждения 2) установлено, что множества $\{k \in \mathbb{C}_- : \operatorname{Re} S(z_0(k),k) \leq 0.5 \ln |k|\}$ и $\{k \in \mathbb{C}_- : \operatorname{Re} S(z_0(k),k) \geq 1.5 \ln |k|\}$ могут содержать лишь конечное число нулей определителя $E(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В силу предложения 2 и утверждения 6 при $K_C \ni k \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$T_{12}(k) = T_{21}(k) = \sqrt{2\pi} \widehat{V}(2k) [1 + O(k^{(2-m)/(2m-1)})],$$

эквивалентная (24). Следовательно,

$$E(k) = 1 + \frac{\pi}{2k^2} \widehat{V}(2k)^2 [1 + O(k^{(2-m)/(2m-1)})] + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Последнее равенство означает, что определитель $E(k) = \det S(-k)$ в рассматриваемой области асимптотически эквивалентен своему борновскому приближению $\det \tilde{S}(-k)$ и дает квалифицированную оценку погрешности указанного приближения.

Согласно предложению 3 все резонансы оператора L , начиная с некоторого, принадлежат K_C . Для достаточно больших по модулю $k \in K_C$ уравнение $E(k) = 0$, определяющее резонансы, равносильно соотношению

$$1 + \frac{\pi}{2k^2 P''(z_0(k))} \exp(2S(z_0(k), k)) [1 + O(k^{(2-m)/(2m-1)})] = 0,$$

которое после замены $w = z_0(k)$ принимает вид

$$\frac{P'(w)^2 P''(w)}{2\pi} = e^{2F(w)} [1 + \delta(w)]. \quad (25)$$

Здесь $F(w) = wP'(w) - P(w)$ и $P'(w) = 2ik$, причем функция $\delta(w)$ аналитична для $w \in z_0(K_C)$, достаточно больших по абсолютной величине, и допускает оценку $\delta(w) = O(w^{2-m})$. Так как $z_0(k) \sim (ik/(ma_{2m}))^{1/(2m-1)}$ и K_C асимптотически содержится в K , то $\limsup_{z_0(K_C) \ni w \rightarrow \infty} |\arg w| \leq \pi/(4m)$. Следовательно,

$$\limsup_{z_0(K_C) \ni w \rightarrow \infty} |\arg P'(w)^2| \leq \pi - \frac{\pi}{2m}, \quad \limsup_{z_0(K_C) \ni w \rightarrow \infty} |\arg P''(w)| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}.$$

Учитывая это, выберем R настолько большим, чтобы при $w \in z_0(K_C)$, $|w| \geq R$, выполнялись равенства $P'(w)^2 = \exp(2 \ln P'(w))$, $P''(w) = \exp(\ln P''(w))$ и, кроме того, была бы корректно определена функция

$$\Phi(w) := \ln[1 + \delta(w)] = O(w^{2-m}).$$

На множестве $z_0(K_C) \cap \{|w| \geq R\}$ перепишем уравнение (25) в эквивалентной форме

$$\exp(2F(w) - 2 \ln P'(w) - \ln P''(w) + \ln 2\pi + \Phi(w)) = 1.$$

Таким образом, $w \in z_0(K_C)$, достаточно большое по модулю, является корнем уравнения (25) тогда и только тогда, когда для некоторого $\nu \in \mathbb{Z}$ имеет место соотношение

$$2F(w) - 2 \ln P'(w) - \ln P''(w) + \Phi(w) = 2\pi i\nu - \ln 2\pi. \quad (25')$$

Поскольку левая часть уравнения (25') аналитична в рассматриваемой области и неограниченно возрастает с ростом модуля w , то при любом фиксированном $\nu \in \mathbb{Z}$ оно может иметь там лишь конечное число решений.

Далее, для достаточно больших по модулю $w \in z_0(K_C)$ представим $\ln P'(w)$ и $\ln P''(w)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ln P'(w) &= \frac{2m-1}{2m} \ln F(w) + \frac{2m-1}{2m} \ln(1 + \varphi(w)) \\ &\quad - \frac{2m-1}{2m} \ln((2m-1)a_{2m}) + \ln(2ma_{2m}), \end{aligned}$$

где

$$\varphi(w) := \frac{(2m-1)a_{2m}}{F(w)} \left(\frac{P'(w)}{2ma_{2m}} \right)^{2m/(2m-1)} - 1 = O(w^{2(n-m)}),$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned} \ln P''(w) &= \frac{2m-2}{2m} \ln F(w) + \frac{2m-2}{2m} \ln(1 + \phi(w)) \\ &\quad - \frac{2m-2}{2m} \ln((2m-1)a_{2m}) + \ln(2m(2m-1)a_{2m}), \end{aligned}$$

где

$$\phi(w) := \frac{(2m-1)a_{2m}}{F(w)} \left(\frac{P''(w)}{2m(2m-1)a_{2m}} \right)^{2m/(2m-2)} - 1 = O(w^{2(n-m)}).$$

Увеличим R так, чтобы для $w \in z_0(K_C)$ при условии $|w| \geq R$ были корректно определены и аналитичны функции $\ln(1 + \varphi(w))$ и $\ln(1 + \phi(w))$ и, кроме того, отображение, задаваемое функцией $F(w)$, было бы взаимно однозначным. Уравнение (25') на множестве $z_0(K_C) \cap \{|w| \geq R\}$ перепишем в форме

$$F(w) - \frac{3m-2}{2m} \ln F(w) + \Psi(w) = \omega_\nu,$$

где

$$\omega_\nu = \pi i \nu - \frac{3m-2}{2m} \ln((2m-1)a_{2m}) + \frac{1}{2} \ln \left(4m^3(2m-1) \frac{a_{2m}^3}{\pi} \right),$$

а функция

$$\Psi(w) = \frac{\Phi(w)}{2} - \frac{2m-1}{2m} \ln(1 + \varphi(w)) - \frac{m-1}{2m} \ln(1 + \phi(w))$$

аналитична и допускает оценку $\Psi(w) = O(w^{-\min\{2(m-n), m-2\}})$. После замены $\zeta = F(w)$ (такой, что $F(z_0(K_C)) = \{\operatorname{Re} \zeta \geq |C|\}$ при C , достаточно большом по модулю) рассматриваемое уравнение принимает следующий вид:

$$\zeta - \frac{3m-2}{2m} \ln \zeta + \psi(\zeta) = \omega_\nu.$$

Здесь функция $\psi(\zeta) := \Psi(F^{-1}(\zeta))$ аналитична в замкнутой области

$$D := \{\operatorname{Re} \zeta \geq |C|\} \cap F(\{|w| \geq R\})$$

и поскольку $\deg F(w) = 2m$, то $\psi(\zeta) = O(\zeta^{-\mu})$, где $\mu = \min\{1-n/m, 1/2-1/m\}$, когда $D \ni \zeta \rightarrow \infty$. Область D , очевидно, содержит круги единичного радиуса с центрами в точках $(\omega_\nu + ((3m-2)/(2m)) \ln \omega_\nu)$, если $\nu \in \mathbb{Z}$ достаточно велико по модулю. Таким образом, для рассматриваемого уравнения выполнены все условия леммы 4, согласно которой при достаточно больших по абсолютной величине $\nu \in \mathbb{Z}$ оно имеет ровно один корень

$$\zeta_\nu = \omega_\nu + \frac{3m-2}{2m} \ln \omega_\nu + O(\nu^{-\mu}).$$

Так как сделанные замены обратимы, то корням ζ_ν взаимно однозначно соответствуют нули $k_\nu = P'(F^{-1}(\zeta_\nu))/(2i) \in K_C$ определителя $E(k)$ и других достаточно больших по абсолютной величине нулей у $E(k)$ в K_C нет. При этом $\zeta_\nu = F(z_0(k_\nu)) = S(z_0(k_\nu), k_\nu)$ и, таким образом, искомые резонансы определяются соотношениями типа правил квантования

$$S(z_0(k_\nu), k_\nu) = \omega_\nu + \frac{3m-2}{2m} \ln \omega_\nu + O(\nu^{-\min\{1-n/m, 1/2-1/m\}}).$$

Список литературы

- [1] В. де Альфаро, Т. Редже, *Потенциальное рассеяние*, Мир, М., 1966; пер. с англ.: V. de Alfaro, T. Regge, *Potential scattering*, North-Holland, Amsterdam, 1965.
- [2] А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, М., 1971.
- [3] R. B. Melrose, *Geometric scattering theory*, Stanford Lectures, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [4] M. Zworski, “Counting scattering poles”, *Spectral and scattering theory* (Sanda, Hyogo, Japan, 1992), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **161**, Dekker, Basel–New York, 1994, 301–331.
- [5] J. Sjöstrand, “A trace formula and review of some estimates for resonances”, *Microlocal analysis and spectral theory* (Lucca, Italy, 1996), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **490**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, 377–437.
- [6] M. Zworski, “Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles of radial potentials”, *J. Funct. Anal.*, **82**:2 (1989), 370–403.
- [7] M. Zworski, “Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles”, *Duke Math. J.*, **59**:2 (1989), 311–323.
- [8] M. Zworski, “Distribution of poles for scattering on the real line”, *J. Funct. Anal.*, **73**:2 (1987), 277–296.
- [9] С. А. Степин, А. Г. Тарасов, “Асимптотическое распределение резонансов для одномерного оператора Шрёдингера с финитным потенциалом”, *Матем. сб.*, **198**:12 (2007), 87–104; англ. пер.: S. A. Stepin, A. G. Tarasov, “Asymptotic distribution of resonances for one-dimensional Schrödinger operators with compactly supported potential”, *Sb. Math.*, **198**:12 (2007), 1787–1804.
- [10] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1983.
- [11] R. Froese, “Asymptotic distribution of resonances in one dimension”, *J. Differential Equations*, **137**:2 (1997), 251–272.
- [12] М. Ш. Бирман, М. Г. Крейн, “К теории волновых операторов и операторов рассеяния”, *Докл. АН СССР*, **144**:3 (1962), 475–478; англ. пер.: M. Sh. Birman, M. G. Krejn, “On the theory of wave operators and scattering operators”, *Soviet Math. Dokl.*, **3** (1962), 740–744.
- [13] B. Simon, “Resonances in one dimension and Fredholm determinants”, *J. Funct. Anal.*, **178**:2 (2000), 396–420.
- [14] M. Hitrik, “Bounds on scattering poles in one dimension”, *Comm. Math. Phys.*, **208**:2 (1999), 381–411.
- [15] М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М., 1987.

С. А. Степин (S. A. Stepin)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова;
University of Białystok

Поступила в редакцию

18.05.2009 и 08.07.2009

А. Г. Тарасов (A. G. Tarasov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ag_tarasov@mail.ru