Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Артамонов, Оценки решений некоторых классов дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 8, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm758>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:36:52

УДК 517.95+517.958

Н. В. Артамонов

Оценки решений некоторых классов дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве

В работе исследуется линейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$u''(t) + (B + iD)u'(t) + (T + iS)u(t) = 0$$

в гильбертовом пространстве. При определенных условиях на (вообще говоря, неограниченные) операторы T , S , B и D доказана корректная разрешимость уравнения в “энергетическом” пространстве и получены неулучшаемые в общем случае оценки решений на полусоси.

Библиография: 19 названий.

Исследование ряда задач механики и математической физики может быть естественным образом сведено к изучению абстрактных дифференциальных уравнений в (конечно- или бесконечномерном) гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. При этом для приложений важны результаты о корректной разрешимости уравнений и оценки решений в соответствующих пространствах, в частности условия ограниченности решений, при выполнении которых движение соответствующих механических систем будет устойчивым. Разрешимость и свойства решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^p A_k u^{(k)}(t) = f(t)$$

(здесь A_k — линейные, возможно неограниченные, операторы в $\mathfrak{H}$ и $u(t)$, $f(t)$ — вектор-функции) тесно связаны со спектральными свойствами оператор-функции (пучка)

$$L(\lambda) = \sum_{k=0}^p \lambda^k A_k,$$

возникающей при подстановке в однородное дифференциальное уравнение функций вида $u(t) = e^{\lambda t} \mathbf{x}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{H}$). Если существует собственное значение λ пучка $L(\lambda)$ с $\operatorname{Re} \lambda > 0$ и $\mathbf{y}$ — соответствующий собственный вектор, то решение однородного уравнения $u(t) = e^{\lambda t} \mathbf{y}$ растет при $t \rightarrow +\infty$, а если существует собственное значение λ с $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$, то это решение неограничено на прямой. В конечномерном случае ($\dim \mathfrak{H} < \infty$) вопрос об отсутствии собственных значений пучка $L(\lambda)$ с положительной действительной частью полностью решается теоремой Рауса–Гурвица [1]. В случае дифференциального уравнения второго порядка

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 00-15-96100, 02-01-06065, 02-01-0079).

(и $\dim \mathfrak{H} < \infty$) отметим также важный результат Томпсона–Тэта: если $A_2 = I$, $A_0 = A_0^*$ и $A_1 + A_1^* > 0$, то число собственных значений пучка $L(\lambda)$ с положительной действительной частью (*индекс неустойчивости*) равно числу отрицательных собственных значений оператора A_0 (см. [2] и приведенные там ссылки). В частности, если $A_0 > 0$, то все решения ограничены при $t \geq 0$. Обобщения этого результата на случай $\dim \mathfrak{H} = \infty$ и неограниченных операторов получены в работах [2]–[4]. Другой важный вопрос – проблема полноты и базисности собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$ в различных пространствах – изучался во многих работах (см. [2], [5]–[7] и ссылки в них).

В настоящей статье рассматривается линейное операторно-дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$u''(t) + (B + iD)u'(t) + (T + iS)u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, где через $\mathbb{R}^+$ обозначена положительная полуось $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$. При выполнении определенных условий на операторы T , S , B и D доказана корректная разрешимость задачи Коши с начальными данными

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \quad (2)$$

и найдены неулучшаемые в общем случае оценки решений в “энергетическом” пространстве. В частности, найдены условия ограниченности решений на $\mathbb{R}^+$. Отметим, что в работах [2]–[4] подробно исследовался случай $S = 0$.

В последней части работы полученные результаты применяются для исследования дифференциального уравнения в частных производных ($\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ – постоянный вектор и $\alpha > 0$)

$$w_{tt} + \alpha w_t + \Delta^2 w + (\mathbf{v}, \text{grad } w) = 0, \quad w = w(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, \quad (3)$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ и с граничными условиями $w|_{\Gamma} = w_{\nu}|_{\Gamma} = 0$. В случае $n = 2$ уравнение (3) описывает малые поперечные колебания плоской пластины, занимающей в плоскости область Ω и находящейся в потоке газа, скорость которого пропорциональна $\mathbf{v}$. При общих предположениях оно было выведено в работе [8] и исследовалось как численными, так и аналитическими методами в случае, когда область Ω есть плоскость, полоса, круг (см. [9]–[12] и приведенные там ссылки). Были найдены оценки критической скорости $\mathbf{v}$, при превышении которой колебания механической системы теряют устойчивость. Частный случай уравнения (3) исследовался также ранее в работах [13], [14], где были найдены (численно) оценки критической скорости. В настоящей работе для произвольной ограниченной области с гладкой границей найдены энергетические оценки решений начально-краевой задачи для уравнения (3). В частности, получены достаточные условия ограниченности решений: если $\|\mathbf{v}\|_n^2 \leq \alpha^2 \lambda_{\min}$, то все решения ограничены в смысле энергетической нормы ($\lambda_{\min}$ – минимальное собственное значение первой краевой задачи для оператора Лапласа в области Ω и $\|\cdot\|_n$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$).

Работа является обобщением результатов, полученных в [15].

1. Далее будем предполагать, что для операторов T , S , B и D выполнены следующие условия:

- а) T – самосопряженный положительно определенный оператор;
- б) B – самосопряженный положительно определенный $T^{1/2}$ -ограниченный оператор; обозначим

$$m_B = \inf_{x \in \mathcal{D}(B), \|x\|=1} (Bx, x);$$

D – замкнутый симметрический $T^{1/2}$ -ограниченный оператор;

- с) S – замкнутый симметрический T -ограниченный оператор; оператор $T + iS$ имеет ограниченный обратный.

Через $\mathfrak{H}_s$ обозначим шкалу гильбертовых пространств, построенную по оператору $T^{1/2}$ (так что $\mathfrak{H}_{2s} = \mathcal{D}(T^s)$ для произвольного $s \in \mathbb{R}$). Норму в $\mathfrak{H}_s$ будем обозначать через $\|\cdot\|_s$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вторая часть условия с) будет выполнена при подчинении оператора S оператору T в следующем смысле: существуют положительные числа $a < 1$ и b такие, что $\|Sx\| \leq a\|Tx\| + b\|x\|$ для произвольного $x \in \mathcal{D}(T)$. В частности, это верно, если оператор S является T -компактным [16].

При исследовании корректной разрешимости задачи Коши для уравнения (1) важен выбор пространства, в котором рассматривается уравнение, и выбор множества начальных данных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть выполнены условия а), б), с). Вектор-функция $u(t) \in C^2(\mathbb{R}^+; \mathfrak{H})$ называется (классическим) решением уравнения (1), если $u(t) \in \mathfrak{H}_2$, $u'(t) \in \mathfrak{H}_1$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$ и выполнено равенство (1).

Из определения классического решения видно, что начальные условия (2) естественно брать из множества $(u_1, u_0) \in \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$.

Если $u(t)$ – (классическое) решение уравнения (1), то вектор-функция $\mathbf{w}(t) = (u'(t), u(t))$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\mathbf{w}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{w}(t), \quad (4)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -(B + iD) & -(T + iS) \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

с начальным условием $\mathbf{w}(0) = (u_1, u_0)$. С механической точки зрения уравнение (4) наиболее естественно рассматривать в “энергетическом” пространстве $\mathcal{H} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}_1$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathbf{A}) = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$. В случае $S = 0$ спектральные свойства оператора $\mathbf{A}$ детально изучены [2], [3]: $-i\mathbf{A}$ есть максимальный диссипативный оператор в пространстве $\mathcal{H}$ со стандартной метрикой, и, следовательно, оператор $\mathbf{A}$ является генератором C_0 -полугруппы [17]. Таким образом, в этом случае уравнение (4) (и, следовательно, уравнение (1)) корректно разрешимо в пространстве $\mathcal{H}$ для всех $\mathbf{w}(0) = (u_1, u_0) \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ и при $t \in \mathbb{R}^+$

$$\|\mathbf{w}(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathbf{w}(0)\|_{\mathcal{H}}.$$

Если $S \neq 0$, то оператор $-i\mathbf{A}$ уже не будет диссипативным относительно стандартной метрики в $\mathcal{H}$. Однако при некотором условии подчинения в пространстве $\mathcal{H}$

можно ввести новое скалярное произведение, эквивалентное исходному, относительно которого $-i\mathbf{A} + i\beta I$ для некоторого действительного β будет максимальным диссипативным оператором и, следовательно, генератором C_0 -полугруппы.

По определению $(Bx, x) \geq m_B(x, x)$ для произвольного $x \in \mathcal{D}(B)$. Следовательно, при $\zeta < m_B$ оператор $B - \zeta I$ самосопряжен, положительно определен и $0 \in \rho(B - \zeta I)$. Для произвольного $\zeta \in [0, m_B)$ и $z \in \mathfrak{H}_2$ обозначим

$$q_{\zeta, \delta}(z) = 4\delta\zeta(Tz, z) - ((B - \zeta I)^{-1}(S - \zeta D)z, (S - \zeta D)z). \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия а), б), в) и существуют $\zeta \in [0, m_B)$, $\delta > 0$ и $c \in \mathbb{R}$ такие, что $q_{\zeta, \delta}(z) \geq -c\|z\|_1^2$ при $z \in \mathfrak{H}_2$. Тогда оператор $\mathbf{A}$ порождает в пространстве $\mathcal{H} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}_1$ C_0 -полугруппу $\exp(t\mathbf{A})$, причем

$$\|\exp(t\mathbf{A})\|_{\mathcal{H}} \leq M \exp(\omega t) \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

где $M > 0$ и $\omega = \max\{(4\delta)^{-1}c, (\delta - 1)m_B\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме о замкнутом графике из условия б) следует, что оператор $B' = T^{-1/2}BT^{-1/2}$ ограничен в пространстве $\mathfrak{H}$. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{H}$ полуторалинейную форму $(x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathcal{H})$

$$[x, y] = ((I + \zeta B' - \zeta^2 T^{-1})T^{1/2}x_2, T^{1/2}y_2) + (x_1 + \zeta x_2, y_1 + \zeta y_2) \equiv a(x_2, y_2) + b(x, y). \quad (6)$$

Из определения следует, что $[x, y] = \overline{[y, x]}$ для произвольных $x, y \in \mathcal{H}$. Далее, при всех $z \in \mathfrak{H}$

$$(B'z, z) = (BT^{-1/2}z, T^{-1/2}z) \geq m_B(T^{-1/2}z, T^{-1/2}z) = m_B(T^{-1}z, z).$$

Следовательно, для некоторого $c' > 0$

$$\|x_2\|_1^2 + \zeta(m_B - \zeta)\|x_2\|^2 \leq a(x_2, x_2) \leq c'\|x_2\|_1^2 \quad (7)$$

при всех $x_2 \in \mathfrak{H}_1$. Так как $0 \leq \zeta < m_B$, то $[x, x] \geq 0$, и если $[x, x] = 0$, то $x_2 = 0$, что влечет $x_1 = 0$. Следовательно, билинейная форма $[\cdot, \cdot]$ удовлетворяет всем свойствам скалярного произведения. Обозначим $|x|_{\zeta}^2 = [x, x]$. Так как

$$b(x, x) = (x_1, x_1) + \zeta^2(x_2, x_2) + 2\zeta \operatorname{Re}(x_1, x_2),$$

то, применяя неравенство $2|(x_1, x_2)| \leq (\|x_1\|^2/m_B + m_B\|x_2\|^2)$, для $b(x, x)$ получаем оценку

$$\left(1 - \frac{\zeta}{m_B}\right)\|x_1\|^2 + \zeta(\zeta - m_B)\|x_2\|^2 \leq b(x, x) \leq \left(1 + \frac{\zeta}{m_B}\right)\|x_1\|^2 + \zeta(\zeta + m_B)\|x_2\|^2. \quad (8)$$

Складываем (7) и (8):

$$\left(1 - \frac{\zeta}{m_B}\right)\|x_1\|^2 + \|x_2\|_1^2 \leq [x, x] \leq \left(1 + \frac{\zeta}{m_B}\right)\|x_1\|^2 + \zeta(\zeta + m_B)\|x_2\|^2 + \tilde{c}\|x_2\|_1^2. \quad (9)$$

Так как $\|x_2\|_\alpha \leq C_{\alpha,\beta}\|x_2\|_\beta$ для произвольных $x_2 \in \mathfrak{H}_\beta$ и $\alpha < \beta$, то существует $d > 0$ такое, что для всех $x \in \mathcal{H} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}_1$

$$\left(1 - \frac{\zeta}{m_B}\right)(x, x)_{\mathcal{H}} \leq [x, x] \leq d(x, x)_{\mathcal{H}}.$$

Следовательно, нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ и $|\cdot|_{\zeta}$ эквивалентны. Далее, при $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}x, x] &= (T^{1/2}x_1, T^{1/2}x_2) - ((B + iD)x_1, x_1) + \zeta(x_1, x_1) \\ &\quad - i\zeta(Dx_1, x_2) - \zeta((T + iS)x_2, x_2) - ((T + iS)x_2, x_1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}[\mathbf{A}x, x] = -((B - \zeta I)x_1, x_1) - \zeta(Tx_2, x_2) - \operatorname{Re}(i(S - \zeta D)x_2, x_1).$$

Так как $B - \zeta I$ есть самосопряженный положительно определенный оператор, то, применяя неравенство Коши–Буняковского и учитывая, что $\delta > 0$, получаем

$$\begin{aligned} 2| (i(S - \zeta D)x_2, x_1) | &= 2| ((B - \zeta I)^{-1/2}(S - \zeta D)x_2, (B - \zeta I)^{1/2}x_1) | \\ &\leq (2\delta)^{-1}((B - \zeta I)^{-1}(S - \zeta D)x_2, (S - \zeta D)x_2) \\ &\quad + 2\delta((B - \zeta I)x_1, x_1), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\mathbf{A}x, x] &\leq -(1 - \delta)((B - \zeta I)x_1, x_1) - \zeta(Tx_2, x_2) \\ &\quad + (4\delta)^{-1}((B - \zeta I)^{-1}(S - \zeta D)x_2, (S - \zeta D)x_2) \\ &\leq -(1 - \delta)(m_B - \zeta)\|x_1\|^2 - (4\delta)^{-1}q_{\zeta, \delta}(x_2) \\ &\leq -(1 - \delta)(m_B - \zeta)\|x_1\|^2 + (4\delta)^{-1}c\|x_2\|_1^2 \leq \omega|x|_{\zeta}^2, \end{aligned}$$

где $\omega = \max\{(4\delta)^{-1}c, (\delta - 1)m_B\}$ в силу оценки (9). Так как оператор $T + iS$ ограниченно обратим в пространстве $\mathfrak{H}$, то оператор $\mathbf{A}$ также ограниченно обратим в пространстве $\mathcal{H}$, т.е. $0 \in \rho(\mathbf{A}) \neq \emptyset$. Таким образом, $-i(\mathbf{A} - \omega I)$ есть максимальный диссипативный оператор в пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$. Согласно теореме Хилле–Филлиса [17] оператор $\mathbf{A}$ есть генератор C_0 -полугруппы $\exp(t\mathbf{A})$, $t \in \mathbb{R}^+$, в пространстве $\mathcal{H}$ и имеет место оценка

$$|\exp(t\mathbf{A})|_{\zeta} \leq \exp(\omega t), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Так как нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ и $|\cdot|_{\zeta}$ эквивалентны, то существует $M > 0$ такое, что

$$\|\exp(t\mathbf{A})\|_{\mathcal{H}} \leq M \exp(\omega t)$$

для всех $t \in \mathbb{R}^+$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $x_0 = (u_1, u_0) \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$. Тогда $x(t) \equiv (w(t), u(t)) = \exp(t\mathbf{A})x_0$ является решением уравнения (4) с условием $x(0) = x_0$, $u(t)$ есть (классическое) решение уравнения (1) с начальными условиями (2) и при $t \in \mathbb{R}^+$ имеет место оценка

$$\|u(t)\|_1^2 + \|u'(t)\|_0^2 \leq M^2 \exp(2\omega t)(\|u_0\|_1^2 + \|u_1\|_0^2), \quad (10)$$

т.е. задача Коши (1), (2) корректно разрешима в пространстве $\mathcal{H}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если для некоторого $\zeta \in [0, m_B)$ форма $q_{\zeta,1}(z)$ неотрицательна ($q_{\zeta,1}(z) \geq 0$ для всех $z \in \mathfrak{H}_2$), то все решения (1) ограничены на $\mathbb{R}^+$ в пространстве $\mathfrak{H}_1$ (уравнение устойчиво).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $T^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$, $B = bT^q$, $D = 0$ и $S = sT^p$ ($q, p \leq 1/2$), где $b > 0$, $s \in \mathbb{R}$ и оператор T положительно определен. Несложно показать, что в этом случае все решения уравнения (1) будут ограничены на полуоси в пространстве $\mathfrak{H}_1$ тогда и только тогда, когда форма $q_{\zeta,1}(z)$ неотрицательна при $\zeta = m_B/2$.

2. Для некоторых важных приложений условие подчиненности операторов B и D оператору T (условие $T^{1/2}$ -ограниченности) не выполнено. Такая ситуация, например, возникает при рассмотрении уравнения малых колебаний однородного упругого стержня на упругом основании: в этом случае $B = \alpha T$, $\alpha > 0$ – коэффициент внутреннего трения [2], [4]. Поэтому естественно рассмотреть случай, когда операторы B и D удовлетворяют условию

b') B – самосопряженный положительно определенный T -ограниченный оператор; D – замкнутый симметрический T -ограниченный оператор.

Обозначим $B' = T^{-1/2}BT^{-1/2}$, $D' = T^{-1/2}DT^{-1/2}$, $S' = T^{-1/2}ST^{-1/2}$.

Так как B , D , S – замкнутые симметрические операторы, то, как следует из теоремы об интерполяции [18], определенные на $\mathfrak{H}_1$ операторы B' , D' , S' ограничены в $\mathfrak{H}$. Так как плотно определенный ограниченный оператор можно единственным образом доопределить до ограниченного оператора на всем $\mathfrak{H}$, то далее будем считать, что операторы B' , D' и S' определены на всем $\mathfrak{H}$. Отметим, что по определению $B'\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_1$ (это верно также для D' и S'). Уточним, что следует понимать под решением в этом случае. В отличие от случая $T^{1/2}$ -ограниченности операторов B и D при выполнении условия b') оператор $\mathbf{A}$ с областью определения $\mathfrak{H}_2 \times \mathfrak{H}_2$ (соответствующий классическому решению) уже может не быть замкнутым (и, следовательно, ограниченно обратимым и порождать C_0 -полугруппу) в “энергетическом” пространстве $\mathcal{H} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}_1$. В этом случае естественно положить

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathfrak{H}_1, (B + iD)x_1 + (T + iS)x_2 \in \mathfrak{H} \right\}. \quad (11)$$

Так как имеет место включение $\mathfrak{H}_2 \times \mathfrak{H}_2 \subset \mathcal{D}(\mathbf{A})$, то область определения оператора $\mathbf{A}$ плотна в $\mathcal{H}$. Заметим также, что если $x_1, x_2 \in \mathfrak{H}_1$, то

$$(B + iD)x_1 + (T + iS)x_2 \in \mathfrak{H} \Leftrightarrow (B' + iD')T^{1/2}x_1 + (I + iS')T^{1/2}x_2 \in \mathfrak{H}_1.$$

Оператор, обратный к $\mathbf{A}$, формально задается равенством

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -(T + iS)^{-1} & -(T + iS)^{-1}(B + iD) \end{pmatrix}.$$

Так как

$$(T + iS)^{-1}(B + iD) = T^{-1/2}(I + iS')^{-1}(B' + iD')T^{1/2} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1),$$

то $\mathbf{A}^{-1} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Покажем, что $\mathbf{A}^{-1}\mathcal{H} = \mathcal{D}(\mathbf{A})$. Пусть $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{w}$, где $\tilde{\mathbf{w}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ и $\mathbf{w} = (x_1, x_2) \in \mathcal{H} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}_1$. Тогда $\tilde{x}_1 = x_2 \in \mathfrak{H}_1$, $-\tilde{x}_2 = (T + iS)^{-1}x_1 + T^{-1/2}(I + iS')^{-1}(B' + iD')T^{1/2}x_2 \in \mathfrak{H}_1$ и

$$(B' + iD')T^{1/2}\tilde{x}_1 + (I + iS')T^{1/2}\tilde{x}_2 = -T^{-1/2}x_1 \in \mathfrak{H}_1.$$

Таким образом, оператор $\mathbf{A}$ имеет ограниченный обратный и, следовательно, замкнут. Если $\mathbf{w}(t) = (u_1(t), u_2(t))$ есть решение уравнения (4), то функция $u_2(t)$ (формально удовлетворяющая уравнению (1)) может не принадлежать $\mathfrak{H}_2$ и поэтому может не быть классическим решением. Функцию $u_2(t)$ будем называть *общенным решением* уравнения (1).

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия а), б'), с) и

$$B' - k^{-1} (S' - \zeta D')^2 \geq -cT^{-1} \quad (12)$$

для некоторых $k > 0$ и $0 \leq \zeta < m_B$. Тогда оператор $\mathbf{A}$ с областью определения (11) в пространстве $\mathcal{H}$ является генератором C_0 -полугруппы $\exp(t\mathbf{A})$ и для всех $t \in \mathbb{R}^+$

$$\|\exp(t\mathbf{A})\|_{\mathcal{H}} \leq M \exp(\omega t),$$

где $M > 0$ и

$$\omega = \max \left\{ \left(\frac{k}{4} - \zeta \right), \frac{cm_B}{m_B - \zeta} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{H} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}_1$ билинейную форму (6). Она определяет в $\mathcal{H}$ скалярное произведение $[\cdot, \cdot]$, эквивалентное исходному (см. доказательство теоремы 1). Пусть

$$\mathbf{w} = (x_1, x_2) \in \mathcal{D}(\mathbf{A}) \subset \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_1;$$

обозначим $y_i = T^{1/2}x_i$, $i = 1, 2$. Тогда после несложных преобразований получаем, что

$$\operatorname{Re}[\mathbf{A}\mathbf{w}, \mathbf{w}] = -((B' - \zeta T^{-1})y_1, y_1) - \zeta(y_2, y_2) + \operatorname{Re} i((S' - \zeta D')y_1, y_2).$$

Так как (согласно неравенству Коши–Буняковского)

$$2|(z, z')| \leq 2\|z\| \cdot \|z'\| \leq \frac{\|z\|^2}{\delta} + \delta\|z'\|^2$$

для произвольного $\delta > 0$ и произвольных $z, z' \in \mathfrak{H}$, то, полагая $\delta = 2k$, $z = y_2$ и $z' = (S' - \zeta D')y_1$, получаем

$$\operatorname{Re}[\mathbf{A}\mathbf{w}, \mathbf{w}] \leq \left(\frac{k}{4} - \zeta \right) \|x_2\|_1^2 + c\|x_1\|^2 \leq \omega \|x\|_{\zeta}^2,$$

где согласно оценке (9)

$$\omega = \max \left\{ \left(\frac{k}{4} - \zeta \right), \frac{cm_B}{m_B - \zeta} \right\}.$$

Так как оператор $\mathbf{A}$ обратим, то $\rho(\mathbf{A}) \neq \emptyset$ и, следовательно, $-i(\mathbf{A} - \omega I)$ есть максимальный диссипативный оператор в пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$. По теореме Хилле–Филлипса [17] оператор $\mathbf{A}$ есть генератор C_0 -полугруппы $\exp\{t\mathbf{A}\}$, $t \in \mathbb{R}^+$, в пространстве $\mathcal{H}$ и имеет место оценка

$$|\exp\{t\mathbf{A}\}|_{\zeta} \leq \exp(\omega t), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Так как нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ и $|\cdot|_{\zeta}$ эквивалентны, то существует $M > 0$ такое, что

$$\|\exp\{t\mathbf{A}\}\|_{\mathcal{H}} \leq M \exp(\omega t)$$

для всех $t \in \mathbb{R}^+$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $x_0 = (u_1, u_0) \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$. Тогда $x(t) \equiv (w(t), u(t)) = \exp(t\mathbf{A})x_0$ является решением уравнения (4) с условием $x(0) = x_0$, $u(t)$ есть обобщенное решение уравнения (1) с начальными условиями (2) и при $t \in \mathbb{R}^+$ имеет место оценка (10). Таким образом, задача Коши (1), (2) корректно разрешима в пространстве $\mathcal{H}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если при $k = 4\zeta$ имеет место оценка (12) с $s = 0$, то все решения (1) ограничены на $\mathbb{R}^+$ в пространстве $\mathfrak{H}_1$ (уравнение устойчиво).

3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой (класса C^∞) границей Γ . В области Ω рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta^2 w + (\mathbf{v}, \text{grad } w) = 0, \quad (13)$$

где $\alpha > 0$ и $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ – постоянный вектор. Для простоты рассмотрим случай краевых условий Дирихле:

$$w|_\Gamma = \frac{\partial w}{\partial \nu} \Big|_\Gamma = 0. \quad (14)$$

Начальные условия имеют вид: $w(0, x) = w_0(x)$, $w'_t(0, x) = w_1(x)$. Введем в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} = L_2(\Omega)$ следующие операторы:

- i) $Tu = \Delta^2 u$ с областью определения $\mathcal{D}(T) = W_2^4(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$; при данных условиях на область Ω оператор T самосопряжен в пространстве $L_2(\Omega)$ [1; §2, п. 2.4] и положительно определен. Более того, так как область Ω ограничена (ее замыкание компактно), то согласно теореме вложения Соболева тождественное отображение $W_2^4(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ компактно и, следовательно, $T^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ [19];
- ii) $iS_0u = (\mathbf{v}, \text{grad } u)$, $\mathcal{D}(S_0) = \mathcal{D}(T)$; S_0 – симметрический и, следовательно, замыкаемый в $L_2(\Omega)$ оператор [16]; через S обозначим его замыкание. Согласно теореме вложения Соболева оператор ST^{-1} компактен;
- iii) $B = \alpha I$ – ограниченный самосопряженный положительно определенный в $L_2(\Omega)$ оператор; $D = 0$.

Таким образом, операторы T и B удовлетворяют условиям а) и б) (см. п. 1), причем $m_B = \alpha$. Так как оператор S является T -компактным, то согласно замечанию 1 он удовлетворяет условию с). Отметим, что если $u(x) \in \mathcal{D}(T)$, то, применяя интегрирование по частям с учетом граничных условий, получаем, что $\|u\|_1 = \|\Delta u\|_{\mathfrak{H}}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $w_0(x) \in \mathcal{D}(T)$ и $w_1(x) \in \mathcal{D}(T^{1/2})$. Тогда существует единственное решение $w(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$, уравнения (13) с начальными условиями

$$w(0, x) = w_0(x), \quad w'_t(0, x) = w_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (15)$$

причем $w(t, x) \in \mathcal{D}(T)$, $t \in \mathbb{R}^+$, и существуют $M > 0$ и $h \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\int_\Omega (|\Delta w(t, x)|^2 + |w'_t(t, x)|^2) dx \leq M e^{ht} \int_\Omega (|\Delta w_0(x)|^2 + |w_1(x)|^2) dx. \quad (16)$$

Пусть для некоторого $p > 0$ (эллиптический самосопряженный) оператор $T_p u = p\alpha^2 \Delta^2 u + \text{div}((\mathbf{v}, \text{grad } u)\mathbf{v})$ с областью определения $\mathcal{D}(T)$ неотрицателен (т.е. $(T_p u, u) \geq 0$ для всех $u \in \mathcal{D}(T)$). Тогда в (16) можно положить $h = \alpha(\sqrt{1 + 8p} - 3)/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\|\cdot\|_n$ евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^n$, и пусть $v = \|\mathbf{v}\|_n$. Тогда согласно неравенству Коши–Буняковского

$$|(\mathbf{v}, \text{grad } u)|^2 \leq \|\mathbf{v}\|_n^2 \cdot \|\text{grad } u\|_n^2 = v^2 \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2.$$

Пусть $u \in W_2^4(\Omega)$ и $u|_{\Gamma} = 0$. Интегрированием по частям получаем

$$\|Su\|_{\mathfrak{H}}^2 = \|(\mathbf{v}, \text{grad } u)\|_{L_2}^2 \leq v^2 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} dx = v^2 ((-\Delta)u, u). \quad (17)$$

Через $\lambda_{\min}$ обозначим наименьшее собственное значение оператора Лапласа $(-\Delta)$ на области Ω с краевым условием Дирихле $u|_{\Gamma} = 0$ (Ω – ограниченная область с гладкой границей, поэтому спектр дискретен). Тогда

$$((-\Delta)u, u) \leq \|\Delta u\| \cdot \|u\| \leq \lambda_{\min}^{-1} \|\Delta u\|^2.$$

Рассмотрим квадратичную форму (5) при $\zeta = \alpha/2$ и $\delta = 1$ ($u \in \mathcal{D}(T)$):

$$\begin{aligned} q_{\zeta,1}(u) &= 4\zeta(Tu, u) - \frac{1}{\alpha - \zeta} \|Su\|^2 \geq 2\alpha \|\Delta u\|^2 - \frac{2v^2}{\alpha} ((-\Delta)u, u) \\ &\geq \left(2\alpha - \frac{2v^2}{\alpha \lambda_{\min}}\right) \|\Delta u\|^2 = -\frac{2}{\alpha} \left(\frac{v^2}{\lambda_{\min}} - \alpha^2\right) \|u\|_1^2. \end{aligned}$$

Таким образом, выполнены условия теоремы 1. По следствию 1 при $w_0(x) \in \mathcal{D}(T)$ и $w_1(x) \in \mathcal{D}(T^{1/2})$ существует единственное решение

$$w(t, x) \in \mathcal{D}(T), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega,$$

уравнения (1) с начальными условиями $w(0, x) = w_0(x)$, $w'_t(0, x) = w_1(x)$ и выполнена оценка (10), где

$$\omega = \max \left\{ 0, \frac{2}{\alpha} \left(\frac{v^2}{\lambda_{\min}} - \alpha^2 \right) \right\}.$$

Из равенства $\|u\|_1 = \|\Delta u\|_{\mathfrak{H}}$ следует, что (10) эквивалентно неравенству (16) с $h = 2\omega$.

Пусть для некоторого $p > 0$ (эллиптический самосопряженный) оператор $T_p u = p\alpha^2 \Delta^2 u + \text{div}((\mathbf{v}, \text{grad } u)\mathbf{v})$, $u \in \mathcal{D}(T)$, неотрицателен. Это условие эквивалентно неравенству

$$p\alpha^2 (Tu, u) \geq \|Su\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad u \in \mathcal{D}(T).$$

Рассмотрим квадратичную форму (5) при $\zeta = \alpha/2$ и $\delta = (\sqrt{1+8p} + 1)/4$. Тогда при $u \in \mathcal{D}(T)$

$$q_{\zeta,\delta}(u) = 2\delta\alpha(Tu, u) - \frac{2}{\alpha} \|Su\|_{\mathfrak{H}}^2 \geq 2\alpha(\delta - p)(Tu, u) = -2\alpha(p - \delta) \|u\|_1^2.$$

Согласно следствию 1 в неравенстве (16) можно положить

$$h = 2\omega = 2 \max \left\{ \frac{p - \delta}{2\delta} \alpha, (\delta - 1)\alpha \right\}.$$

Так как

$$\delta - 1 = \frac{p - \delta}{2\delta} = \frac{\sqrt{1+8p} - 3}{4},$$

то второе утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если самосопряженный эллиптический оператор

$$T_1 u = \alpha^2 \Delta^2 u + \operatorname{div}((\mathbf{v}, \operatorname{grad} u) \mathbf{v})$$

с областью определения $\mathcal{D}(T)$ неотрицателен, то в (16) можно положить $h = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $\lambda_{\min}$ – наименьшее собственное значение оператора Лапласа $(-\Delta)$ на области Ω с краевым условием Дирихле ($u|_{\Gamma} = 0$). Тогда при $\|\mathbf{v}\|_n^2 \leq \alpha^2 \lambda_{\min}$ выполнена оценка (16) с $h = 0$.

Список литературы

1. Розенблум Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А. Спектральная теория дифференциальных операторов // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 64. М.: ВИНТИ, 1989. С. 5–247.
2. Chen S., Triggiani R. Proof of extensions of two conjecture on structure damping for elastic systems // Pacific J. Math. 1989. V. 136, № 1. P. 15–55.
3. Милославский А. И. О спектрнеустойчивости операторного пучка // Матем. заметки. 1991. Т. 49, № 4. С. 88–94.
4. Шкаликов А. А. Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними // Труды сем. им. И. Г. Петровского. № 14. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 140–224.
5. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. 1971. Т. 26, № 4. С. 15–41.
6. Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кипинев: Штиинца, 1986.
7. Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н. Проблема Рауса–Гурвица для полиномов и целых функций // Труды МИАН. 1949. Т. 26.
8. Ильюшин А. А., Кийко И. А. Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки // ПММ. 1994. Т. 58, № 3. С. 167–171.
9. Ильюшин А. А., Кийко И. А. Колебания прямоугольной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1994. № 4. С. 40–44.
10. Ильюшин А. А., Кийко И. А. Закон плоских сечений в сверхзвуковой аэродинамике и проблема панельного флаттера // Изв. РАН. Сер. мех. тв. тела. 1995. № 6. С. 138–142.
11. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Численно-аналитическое исследование флаттера пластины произвольной формы в плане // ПММ. 1997. Т. 61, № 1. С. 171–174.
12. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Исследование собственных значений оператора в задачах панельного флаттера // Изв. РАН. Сер. мех. тв. тела. 1999. № 1. С. 170–176.
13. Мовчан А. А. О колебаниях пластины, движущейся в газе // ПММ. 1956. Т. 20, № 2. С. 211–222.
14. Мовчан А. А. Об устойчивости панели, движущейся в газе // ПММ. 1957. Т. 21, № 2. С. 231–243.
15. Артамонов Н. В. Достаточные условия ограниченности решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве // Докл. РАН. 2001. Т. 381, № 3. С. 295–297.
16. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
17. Хилле Э., Филлипс Р. С. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
18. Крейн С. Г., Петунин Ю. И. Шкалы банаховых пространств // УМН. 1966. Т. 21, № 2. С. 87–186.
19. Мазья В. Г. Пространства Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

Московский государственный институт
международных отношений (университет) МИД РФ
E-mail: artamono@imm.mgimo.ru

Поступила в редакцию
04.09.2002