Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ф. Лукомский, Кратномасштабный анализ на нуль-мерных группах и всплесковые базисы, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 5, 41–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7580>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:12:05

УДК 517.518.34+517.518.36+517.986.62

С. Ф. Лукомский

Кратномасштабный анализ на нульмерных группах и всплесковые базисы

На локально компактной нульмерной группе $(G, +)$ строится кратномасштабный анализ и указывается алгоритм построения ортогональных всплесковых базисов. Указывается случай, когда всплесковый базис получается из одной функции с использованием сжатий, сдвигов и возведения в степень.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: нульмерные группы, кратномасштабный анализ, всплесковые базисы.

§ 1. Введение

В последние годы значительный интерес вызывают вопросы построения всплесковых базисов на локально компактных нульмерных абелевых группах. В работах [1]–[3] эти вопросы рассмотрены на двоичной группе – группе Кантора. В. Ю. Протасов и Ю. А. Фарков в работах [4], [5] охарактеризовали все двоичные финитные всплески на $\mathbb{R}_+$ и указали алгоритм их построения. В работе В. Ю. Протасова [6] исследованы аппроксимативные свойства диадических всплесков, построенных в [4]. Ю. А. Фарков в работах [7], [8] указал метод построения ортогональных всплесков с компактным носителем на локально компактной группе Виленкина G с постоянной образующей последовательностью и нашел необходимые и достаточные условия, при которых решения масштабирующего уравнения генерируют кратномасштабный анализ (далее для краткости – КМА) в $L_2(G)$. Большая группа работ связана с построением КМА на группах всех p -адических чисел. В работах С. В. Козырева [9], [10] были найдены ортонормированные p -адические базисы всплесков, которые являются собственными функциями p -адических псевдодифференциальных операторов. В. М. Шелкович, А. Ю. Хренников и М. А. Скопина в работах [11]–[13] ввели понятие p -адического КМА с ортогональной масштабирующей функцией и описали общую схему их построения. Всплесковые базисы Рисса в поле p -адических чисел построены в [14]. В работе J. J. Benedetto и R. L. Benedetto [15] строятся всплесковые базисы на локально компактных абелевых группах, содержащих открытую подгруппу. В работе автора [16] приводится конструкция системы Хаара на компактной нульмерной абелевой группе. В отличие от предыдущих

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-4383.2010.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00097-а).

работ в [16] базис Хаара получается из одной функции с помощью операций возведения в степень, сжатий и сдвигов.

Отметим, что в работах [8] и [13] решалась одна и та же задача – построение КМА и на его основе построение ортонормированных базисов в $L_2(G)$ как сжатий и сдвигов нескольких функций. В работе [8] эта задача рассмотрена на группе Виленина, а в [13] – на поле всех p -адических чисел. В настоящей работе мы рассмотрим вопросы построения ортогональных всплесковых базисов на произвольных локально компактных нульмерных группах, для которых порядки смежных классов соседних подгрупп совпадают и равны некоторому простому числу. Для этого по заданной масштабирующей функции, преобразование Фурье которой имеет компактный носитель, вначале будет построен КМА. Затем мы укажем способ построения такой масштабирующей функции, для которой соответствующий КМА порождает ортонормированный базис сжатий и сдвигов нескольких функций. Такая масштабирующая функция строится по произвольному вектору $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p^s-1})$, составленному из комплексных чисел с единственным условием $|\lambda_j| = 1$ при всех j . Будет указан случай, когда ортонормированный базис получается из одной функции с помощью операций возведения в степень, сжатий и сдвигов.

§ 2. Локально компактные нульмерные группы, топология, характеры

Приведем основные понятия и факты, связанные с анализом на нульмерных группах. Более подробную информацию можно найти в [17].

Топологическая группа, у которой связная компонента нуля есть нуль, называется обычно *нульмерной группой*. Если локально компактная группа $(G, +)$ со второй аксиомой счетности нульмерна, то топология в ней задается с помощью убывающей системы подгрупп. Обратное утверждение справедливо для всех топологических групп (см. [17; гл. 1, § 3]). Поэтому для локально компактной группы вместо термина “группа, в которой топология задана цепочкой подгрупп,” будем использовать термин “нульмерная группа”.

Пусть $(G, +)$ – локально компактная нульмерная абелева группа, топология в которой задана счетной системой открытых подгрупп

$$\cdots \supset G_{-n} \supset \cdots \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots$$

таких, что

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = G, \quad \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = \{0\}$$

(0 – нулевой элемент группы G). При каждом фиксированном $N \in \mathbb{Z}$ подгруппа G_N является компактной абелевой группой относительно той же операции $+$ в топологии, порожденной системой подгрупп

$$G_N \supset G_{N+1} \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots$$

Так как каждая группа G_n компактна, то каждая факторгруппа G_n/G_{n+1} конечна, и пусть p_n – ее порядок. Можно считать, что p_n – простые числа, так как, используя теорему Силова (см. [18]), можно уплотнить цепочку подгрупп так, что порядки факторгрупп G_n/G_{n+1} станут простыми. В этом случае базой топологии являются всевозможные смежные классы $G_n \dot{+} g$, $g \in G$.

Определим далее числа $(\mathfrak{m}_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ следующим образом:

$$\mathfrak{m}_0 = 1, \quad \mathfrak{m}_{n+1} = \mathfrak{m}_n \cdot p_n.$$

Ясно, что при $n \geq 1$

$$\mathfrak{m}_n = p_0 p_1 \cdots p_{n-1}, \quad \mathfrak{m}_{-n} = \frac{1}{p_{-1} p_{-2} \cdots p_{-n}}.$$

Смежные классы $G_n \dot{+} g$, $n \in \mathbb{Z}$, вместе с пустым множеством образуют полукольцо $\mathcal{K}$. На каждом классе $G_n \dot{+} g$ мера μ определена равенством $\mu(G_n \dot{+} g) = \mu G_n = 1/\mathfrak{m}_n$. Таким образом, если $n \in \mathbb{N}$ и $p_n = p$, то $\mu G_n \cdot \mu G_{-n} = 1$. Меру μ можно продолжить с полукольца $\mathcal{K}$ на σ алгебру (например, по схеме Каратеодори). Получим меру μ , которая совпадает на борелевских множествах с мерой Хаара на G и инвариантна относительно сдвига. Пусть, далее, $\int_G f(x) d\mu(x)$ – абсолютно сходящийся интеграл, порожденный мерой μ .

При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выберем элементы $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ и зафиксируем их. Тогда любой элемент $x \in G$ единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n, \quad a_n = \overline{0, p_n - 1}, \quad (2.1)$$

причем в сумме (2.1) слагаемых с отрицательными номерами конечное число, т.е.

$$x = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n g_n, \quad a_n = \overline{0, p_n - 1}, \quad a_N \neq 0. \quad (2.2)$$

Классическими примерами нульмерных групп являются группы Виленкина и группы p -адических чисел (см. [17; гл. 1, § 2]).

Группой Виленкина называют прямую сумму циклических групп $Z(p_k)$ простого порядка p_k , $k \in \mathbb{Z}$. Это означает, что элементами группы Виленкина являются бесконечные последовательности $x = (x_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ такие, что:

- 1) $x_k = \overline{0, p_k - 1}$;
- 2) лишь конечное число членов последовательности (x_k) с отрицательными номерами отлично от нуля;
- 3) групповая операция $\dot{+}$ определяется как покоординатное сложение по модулю p_k , т.е.

$$x \dot{+} y = (x_k \dot{+} y_k), \quad x_k \dot{+} y_k = (x_k + y_k) \mod p_k.$$

Топология в такой группе задается цепочкой подгрупп

$$G_n = \{x \in G : x = (\dots, 0, 0, \dots, 0, x_n, x_{n+1}, \dots), \ x_\nu = \overline{0, p_\nu - 1}, \ \nu \geq n\}.$$

Очевидно, что подгруппы G_n образуют убывающую цепочку. В качестве g_n можно выбрать последовательность, в которой на n -м месте стоит единица, а на остальных – нули.

Группа $\mathbb{Z}_p$ всех p -адических чисел (p простое) также состоит из последовательностей $x = (x_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$, в которых $x_k = \overline{0, p-1}$ и лишь конечное число элементов x_k с отрицательными номерами отлично от нуля. Но операция в $\mathbb{Z}_p$ определяется иначе, а именно, пусть

$$x = (\dots, 0, \dots, 0, x_N, x_{N+1}, \dots), \quad y = (\dots, 0, \dots, 0, y_N, y_{N+1}, \dots) \in \mathbb{Z}_p.$$

Элементы x и y снова складываем покоординатно, но если в группе Виленкина $x_n \dot{+} y_n = (x_n + y_n) \bmod p$ (т.е. единица не переносится в следующий, $(n+1)$ -й разряд), то при p -адическом сложении единица, которая возникает при сложении $x_n + y_n$, переносится в следующий, $(n+1)$ -й разряд. Топология в группе $\mathbb{Z}_p$ определяется той же системой подгрупп G_n , что и в группе Виленкина. В качестве g_n можно выбрать ту же последовательность, что и в группе Виленкина.

Пусть X – совокупность характеров группы $(G, \dot{+})$, которая является группой относительно операции умножения, $G_n^\perp = \{\chi \in X : \forall x \in G_n \chi(x) = 1\}$ – аннулятор группы G_n . Каждый аннулятор $G_n^\perp$ есть группа относительно умножения, подгруппы $G_n^\perp$ образуют возрастающую последовательность

$$\dots \subset G_{-n}^\perp \subset \dots \subset G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset \dots \subset G_n^\perp \subset \dots \quad (2.3)$$

такую, что

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^\perp = X, \quad \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^\perp = \{1\},$$

причем факторгруппа $G_{n+1}^\perp / G_n^\perp$ имеет порядок p_n . В группе характеров X можно ввести топологию, используя цепочку подгрупп (2.3) и выбирая в качестве базы топологии совокупность смежных классов $G_n^\perp \cdot \chi$, $\chi \in X$. Совокупность таких смежных классов вместе с пустым множеством образует кольцо $\mathcal{X}$. Для каждого смежного класса $G_n^\perp \cdot \chi$ определим его меру ν равенством $\nu(G_n^\perp \cdot \chi) = \nu(G_n^\perp) = m_n$. Таким образом, всегда $\mu(G_n) \nu(G_n^\perp) = 1$. Мера ν продолжается стандартным способом (например, по схеме Каратеодори) на σ -алгебру измеримых множеств. По этой мере строится абсолютно сходящийся интеграл $\int_X F(\chi) d\nu(\chi)$.

Значение $\chi(g)$ характера χ на элементе $g \in G$ будем обозначать через (χ, g) . Преобразование Фурье $\hat{f}$ для $f \in L_2(G)$ определяется равенством

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x) \overline{(\chi, x)} d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{G_n^\perp} f(x) \overline{(\chi, x)} d\mu(x),$$

где $\lim$ понимается в смысле сходимости по норме $L_2(X)$. Для $f \in L_2(G)$ справедливо равенство Планшереля

$$f(x) = \int_X \hat{f}(\chi) (\chi, x) d\nu(\chi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{G_n^\perp} \hat{f}(\chi) (\chi, x) d\nu(\chi),$$

в котором $\lim$ также понимается в смысле сходимости по норме $L_2(G)$.

Группа характеров X с такой топологией является нульмерной локально компактной группой и имеет место двойственная ситуация: каждый элемент $x \in G$ является характером группы X и G_n есть аннулятор группы $G_n^\perp$. В дальнейшем (в определении 2.1) мы определим на группе G оператор растяжения. Однако определить такой оператор удастся только в случае, когда $p_n = p$ при любом $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому всюду в дальнейшем будем рассматривать группы G , для которых $p_n = p$. Символом $f_{\dot{+}g}$ будем обозначать сдвиг функции f на элемент $g \in G$, т.е. $f_{\dot{+}g}(x) = f(x \dot{+} g)$. Кроме того, будем предполагать, что операция $\dot{+}$ удовлетворяет условию

$$pg_n = \alpha_1 g_{n+1} \dot{+} \alpha_2 g_{n+2} \dot{+} \cdots \dot{+} \alpha_s g_{n+s}, \quad (2.4)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ – фиксированные числа. Отметим, что если $pg_n = 0$, то группа G есть группа Виленкина, а если $pg_n = g_{n+1}$, то G – группа всех p -адических чисел.

ЛЕММА 2.1. Если $\varphi \in L_2(G)$, то $\widehat{\varphi}_{\dot{-}h}(\chi) = \overline{(\chi, h)} \widehat{\varphi}(\chi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя свойства характеров и инвариантность интеграла, имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{\dot{-}h}(\chi) &= \int_G \varphi(x \dot{-} h) \overline{(\chi, x)} d\mu(x) = \int_G \varphi(x \dot{-} h) \overline{(\chi, x \dot{-} h \dot{+} h)} d\mu(x) \\ &= \overline{(\chi, h)} \int_G \varphi(x \dot{-} h) \overline{(\chi, x \dot{-} h)} d\mu(x) = \overline{(\chi, h)} \int_G \varphi(x) \overline{(\chi, x)} d\mu(x) \\ &= \overline{(\chi, x)} \widehat{\varphi}(\chi). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Обозначим

$$H_n = \left\{ q \in G : q = \sum_{j=N}^{n-1} a_j g_j, N \in \mathbb{Z}, a_j = \overline{0, p-1} \right\}.$$

Если G – группа Виленкина, то H_n есть группа. В общем случае (например, если G – группа всех p -адических чисел) H_n не является группой. Однако следует отметить, что H_n есть счетное множество.

ЛЕММА 2.2. Если $g, h \in H_0$, то

$$\int_{G_0^\perp} \overline{(\chi, g)}(\chi, h) d\nu(\chi) = \delta_{g,h} = \begin{cases} 1, & g = h, \\ 0, & g \neq h. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим элементы $x \in G$ как характеры группы X , и пусть $\tilde{x} = x|_{G_0^\perp}$ – сужения этих характеров на группу $G_0^\perp$. Тогда

$$\tilde{x} = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{-N}g_{-N} \in H_0$$

(здесь нужно учесть, что $(G_0^\perp, g_k) = 1$ при $k \geq 0$). Поэтому H_0 есть группа характеров компактной группы $G_0^\perp$ и, значит, элементы из H_0 (точнее, их сужения на $G_0^\perp$) образуют ортонормированную систему в $L_2(G_0^\perp)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Справедливо равенство $\int_{G_0^\perp} (\chi, x) d\nu(\chi) = \mathbf{1}_{G_0}(x)$.

ЛЕММА 2.3. Если $\varphi \in L_2(G)$ и $|\widehat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$, то сдвиги $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ образуют ортонормированную систему в $L_2(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По равенству Планшереля и лемме 2.1 имеем

$$\begin{aligned} \int_G \varphi(x \dot{-} h) \overline{\varphi(x \dot{-} g)} d\mu(x) &= \int_X \widehat{\varphi \dot{-} h}(\chi) \overline{\widehat{\varphi \dot{-} g}(\chi)} d\nu(\chi) \\ &= \int_X \overline{(\chi, h)} \widehat{\varphi}(\chi) (\chi, g) \widehat{\varphi}(\chi) d\nu(\chi) = \int_{G_0^\perp} \overline{(\chi, h)} (\chi, g) d\nu(\chi) = \delta_{h, g}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Определим отображение $A: G \rightarrow G$ следующим образом. Если $x \in G$ и $x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n$, то $Ax := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_{n-1}$. Так как любой элемент $x \in G$ единственным образом представим в виде $x = \sum a_n g_n$, то A отображает G на G взаимно однозначно. Отображение A будем называть оператором растяжения, если $A(x \dot{+} y) = Ax \dot{+} Ay$ для всех $x, y \in G$.

Отметим, что если G – группа Вилленкина ($p \cdot g_n = 0$) или группа всех p -адических чисел ($p \cdot g_n = g_{n+1}$), то оператор A будет аддитивным, а значит, и оператором растяжения. Более того, оператор A будет аддитивным, если выполнено условие (2.3). Очевидно также, что $AG_n = G_{n-1}$.

ЛЕММА 2.4. Если $f \in L(G)$ и A – оператор растяжения, то

$$\int_G f(Ax) d\mu(x) = \frac{1}{p} \int_G f(x) d\mu(x). \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (2.5), очевидно, верно, если

$$f(x) = \lambda \cdot \mathbf{1}_{G_n \dot{+} g}(x).$$

Поэтому (2.5) верно для ступенчатых функций, а значит, и для $f \in L(G)$. Лемма доказана.

По аналогии с $f_{\dot{+}g}$ введем обозначение $f_{A \cdot \dot{+}g}(x) = f(Ax \dot{+} g)$.

ЛЕММА 2.5. Если $\varphi \in L_2(G)$ и A – оператор растяжения, то

$$\widehat{\varphi_{A \cdot \dot{+}g}}(\chi) = \overline{(\chi, A^{-1}g)} \widehat{\varphi}(\chi A^{-1}),$$

где χA^{-1} – характер, определенный равенством $\chi A^{-1}(x) = \chi(A^{-1}x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 2.4, получаем

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi_{A \cdot \dot{+}g}}(\chi) &= \int_G \varphi(Ax \dot{+} g) \overline{(\chi, x)} d\mu(x) = \int_G \varphi(Ax \dot{+} g) \overline{(\chi, A^{-1}Ax)} d\mu(x) \\ &= \frac{1}{p} \int_G \varphi(x \dot{+} g) \overline{(\chi, A^{-1}x)} d\mu(x) \\ &= \frac{1}{p} \int_G \varphi(x \dot{+} g) \overline{(\chi, A^{-1}x \dot{+} A^{-1}g \dot{+} A^{-1}g)} d\mu(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{p} \overline{(\chi, A^{-1}g)} \int_G \varphi(x \dot{-} g) \overline{(\chi A^{-1}, x \dot{-} g)} d\mu(x) \\
&= \frac{1}{p} \overline{(\chi, A^{-1}g)} \int_G \varphi(x) \overline{(\chi A^{-1}, x)} d\mu(x) = \frac{1}{p} \overline{(\chi, A^{-1}g)} \widehat{\varphi}(\chi A^{-1}).
\end{aligned}$$

§ 3. Кратномасштабный анализ на локально компактной нульмерной группе

Основной нашей задачей является построение всплесковых ортогональных базисов в $L_2(G)$. Для этого мы будем использовать кратномасштабный анализ на группе G в следующем виде.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Кратномасштабным анализом (КМА) в $L_2(G)$ будем называть семейство замкнутых подпространств V_n , $n \in \mathbb{Z}$, таких, что справедливы следующие аксиомы:

- 1) $V_n \subset V_{n+1}$;
- 2) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = L_2(G)$, $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \{0\}$;
- 3) $f(x) \in V_n \iff f(Ax) \in V_{n+1}$ (A – оператор растяжения);
- 4) $f(x) \in V_0 \implies f(x \dot{-} h) \in V_0$ при всех $h \in H_0$;
- 5) существует функция $\varphi \in L_2(G)$ такая, что система $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ есть ортонормированный базис в V_0 .

Функцию φ из аксиомы 5) называют *масштабирующей функцией*.

Используя КМА, мы будем строить функции ψ_ν , $\nu = \overline{1, p-1}$, сжатия и сдвиги которых, т.е. $\psi_\nu(A^j x \dot{-} h)$, образуют ортогональный базис в $L_2(G)$. Далее будем следовать традиционной схеме. Пусть $\varphi(x) \in L_2(G)$ и система $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ ортонормирована в $L_2(G)$. По функции φ и оператору растяжения A определим линейные подпространства $L_j = (\text{span } \varphi(A^j x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ и замкнутые подпространства $V_j = \overline{L_j}$. Если подпространства V_j образуют КМА, то говорят, что функция φ порождает КМА в $L_2(G)$. Функцию $\varphi \in L_2(G)$, порождающую КМА в $L_2(G)$, будем искать как решение масштабирующего уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H} c_h \varphi(Ax \dot{-} h), \quad (3.1)$$

где $H \subset H_0$. Так как в дальнейшем мы получим эффективный алгоритм построения всплесковых базисов только для конечных множеств H , то мы сразу будем предполагать, что $H \subset H_0$ – конечное множество. Если G – группа Вилленкина, то H_0 есть группа, и поэтому аксиомы 1) и 4) выполняются автоматически. В общем случае H_0 не группа, так как $pg_n \neq 0$, и поэтому для выполнения аксиом 1) и 4) требуются дополнительные условия. В работе [13] в случае группы всех p -адических чисел было предложено выбирать условие $\text{supp } \widehat{\varphi}(\chi) \subset G_0^\perp$. Если выполнено более сильное условие $|\widehat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$, то система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ согласно лемме 2.3 будет ортонормированной. Поэтому мы будем искать функцию φ , для которой выполнено условие $|\widehat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$.

ЛЕММА 3.1. Если $\text{supp } \widehat{\varphi} \subset G_n^\perp$, то функция φ периодична с периодом g_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для преобразования Фурье имеем

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}_{\dot{+}g_n}(\chi) &= \int_G \varphi_{\dot{+}g_n}(x) \overline{(\chi, x)} d\mu(x) = \int_G \varphi(x \dot{+} g_n) \overline{(\chi, x)} d\mu(x) \\ &= \overline{(\chi, \dot{-}g_n)} \int_G \varphi(x \dot{+} g_n) \overline{(\chi, x \dot{+} g_n)} d\mu(x) = \overline{(\chi, \dot{-}g_n)} \widehat{\varphi}(\chi).\end{aligned}$$

1) Если $\chi \notin \text{supp } \widehat{\varphi}$, то $\widehat{\varphi}(\chi) = 0$. Поэтому $\widehat{\varphi}_{\dot{+}g_n}(x) = \widehat{\varphi}(\chi) = 0$.

2) Если $\chi \in \text{supp } \widehat{\varphi} \subset G_n^\perp$, то $\chi(g_n) = 1$, следовательно, $\chi(\dot{-}g_n) = 1$ и, значит, $\widehat{\varphi}_{\dot{+}g_n}(\chi) = \widehat{\varphi}(\chi)$.

Таким образом, $\widehat{\varphi}_{\dot{+}g_n}(\chi) = \widehat{\varphi}(\chi)$ для всех $\chi \in G$. По теореме Планшереля имеем

$$\varphi_{\dot{+}g_n}(x) = \int_X \widehat{\varphi}_{\dot{+}g_n}(\chi) (\chi, x) d\mu(\chi) = \int_X \widehat{\varphi}(\chi) (\chi, x) d\mu(\chi) = \varphi(x).$$

Таким образом, $\varphi(x \dot{+} g_n) = \varphi(x)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если $\text{supp } \widehat{\varphi} \subset G_n^\perp$, то φ периодична с любым периодом g_s , $s \geq n$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Если $\text{supp } \widehat{\varphi} \subset G_n^\perp$ и φ непрерывна, то $\varphi(x) = \text{const}$ на любом смежном классе $G_n \dot{+} q$.

ЛЕММА 3.2. Если $|\widehat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^+}(\chi)$, то система

$$(p^{n/2} \varphi(A^n x \dot{-} h))_{h \in H_0} \quad (3.2)$$

есть ортонормированный базис в V_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что система (3.2) ортонормирована. Согласно лемме 2.3 система $\varphi(x \dot{-} h)$ есть ортонормированный базис в V_0 , следовательно,

$$\int_G \varphi(x \dot{-} h) \overline{\varphi(x \dot{-} q)} d\mu(x) = \delta_{h,q}, \quad h, q \in H_0.$$

По лемме 2.4

$$\int_G \varphi(A^n x \dot{-} h) \overline{\varphi(A^n x \dot{-} q)} d\mu(x) = \frac{1}{p^n} \int_G \varphi(x \dot{-} h) \overline{\varphi(x \dot{-} q)} d\mu(x) = \frac{1}{p^n} \delta_{h,q}.$$

ЛЕММА 3.3. Пусть $\text{supp } \widehat{\varphi} \subset G_0^\perp$ и $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению 3.1. Тогда $V_j \subset V_{j+1}$ при любом $j \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению φ при любом $q_0 \in H_0$

$$\varphi(x \dot{-} q_0) = \sum_{h \in H} c_h \varphi(A(x \dot{-} q_0) \dot{-} h).$$

Так как $pg_n = \alpha_1 g_{n+1} \dot{+} \cdots \dot{+} \alpha_s g_{n+s}$, то

$$\begin{aligned} Aq_0 \dot{+} h &= b_{-2}g_{-2} \dot{+} b_{-3}g_{-3} \dot{+} \cdots \dot{+} b_{-M}g_{-M} \dot{+} a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \cdots \dot{+} b_{-N}g_{-N} \\ &= \beta_{s-1}g_{s-1} \dot{+} \beta_{s-2}g_{s-2} \dot{+} \cdots \dot{+} \beta_0g_0 \dot{+} \cdots \dot{+} \beta_{-m}g_{-m}, \\ m &= \max(M, N), \quad p_j = \overline{0, p-1}. \end{aligned}$$

По следствию 3.1 имеем $\varphi(x \dot{+} g_j) = \varphi(x)$ при всех $j \geq 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi(Ax \dot{-} Aq_0 \dot{-} h) &= \varphi(Ax \dot{-} (\beta_{-1}g_{-1} \dot{+} \beta_{-2}g_{-2} \dot{+} \cdots \dot{+} \beta_{-m}g_{-m})) = \varphi(Ax \dot{-} q), \\ q &\in H_0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\varphi(x \dot{-} q_0) = \sum_{h \in H} c_h \varphi(Ax \dot{-} q_h), \quad q_h \in H_0.$$

Это означает, что $L_0 \subset L_1$, следовательно, $V_0 \subset V_1$. Отсюда легко выводим, что $V_j \subset V_{j+1}$ при любом $j \in \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 3.4. Пусть $\varphi \in L_2(G)$ – решение уравнения (3.1) и $|\widehat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$. Тогда $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \overline{V_j} = L_2(G)$ тогда и только тогда, когда

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \text{supp } \widehat{\varphi}(\cdot A^{-j}) = X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Покажем, что $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \overline{V_j}$ инвариантно относительно сдвигов. Сначала покажем, что V_j инвариантно относительно сдвигов $h \in H_j$. В самом деле, пусть $f \in L_j$. Тогда

$$f(x) = \sum_{h_j \in H_j} \beta_{h_j} \varphi(A^j(x \dot{-} h_j)).$$

Поэтому при $h \in H_j$

$$f(x \dot{-} h) = \sum_{h_j \in H_j} \beta_{h_j} \varphi(A^j x \dot{-} A^j h_j \dot{-} A^j h).$$

Так как $A^j h, A^j h_j \in H_0$, то

$$\begin{aligned} A^j h &= a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{-N}g_{-N}, \\ A^j h_j &= b_{-1}g_{-1} \dot{+} b_{-2}g_{-2} \dot{+} \cdots \dot{+} b_{-N}g_{-N}. \end{aligned}$$

Поэтому $A^j h_j \dot{+} A^j h \in H_{s-1}$, а так как φ периодична с любым периодом g_k при $k \geq 0$, то $f(x \dot{-} h) \in L_j$. Пусть теперь $f \in V_j = \overline{L_j}$. Тогда существует последовательность (f_n) такая, что $f_n \in L_j$ и $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$. В силу инвариантности L_j относительно сдвигов $h_n \in H_j$ имеем $f_n(\cdot \dot{+} h) \in L_j$. Учитывая инвариантность интеграла, имеем

$$\int_G |f(x \dot{+} h) - f_n(x \dot{+} h)|^2 d\mu(x) = \int_G |f(x) - f_n(x)|^2 d\mu(x) = \|f - f_n\|_2^2 \rightarrow 0.$$

Это означает, что $f(\cdot \dot{+} h) \in V_j$. Таким образом, мы доказали, что V_j инвариантно относительно сдвигов $h \in H_j$.

Покажем инвариантность $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$ относительно любых сдвигов. Пусть вначале $f \in \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$. Так как $V_j \subset V_{j+1}$, то существует $j_1 \in \mathbb{Z}$ такое, что для $j \geq j_1$ $f \in V_j$. По доказанному выше $f(\cdot \dot{+} h_j) \in V_j$ при $h_j \in H_j$, $j \geq j_1$. Выберем $h \in G$ произвольно. Тогда $h = \sum_{l=-k}^{+\infty} a_l g_l$. Рассмотрим последовательность h_j , определенную равенством

$$h_j = a_{-k} g_{-k} \dot{+} a_{-k+1} g_{-k+1} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{j-1} g_{j-1}.$$

Очевидно, $h_j \rightarrow h$ при $j \rightarrow +\infty$. Так как $h_j \in H_j$, то $f(x \dot{+} h_j) \in V_j$ при всех $j \geq j_1$ и, значит, $f(x \dot{+} h_j) \in \bigcup_{\nu \in \mathbb{Z}} V_\nu$ при всех $j \geq j_1$. Так как $f \in L_2(G)$, то

$$\|f(\cdot \dot{+} h) - f(\cdot \dot{+} h_j)\|_2 \rightarrow 0,$$

т.е. $f(\cdot \dot{+} h) \in \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$.

Пусть теперь $f \in \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$. Тогда существует последовательность $f_n \in \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ такая, что $\|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$. По только что доказанному $f_n(\cdot \dot{+} h) \in \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$. Поэтому

$$\|f(\cdot \dot{+} h) - f_n(\cdot \dot{+} h)\|_2 = \|f - f_n\|_2 \rightarrow 0,$$

т.е. $f(\cdot \dot{+} h) \in \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$.

2) Перейдем к доказательству утверждения, сформулированного в лемме. Обозначим $Y = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$. Так как Y инвариантно относительно любых сдвигов $h \in G$, то по теореме Винера $\hat{Y} = L_2(X_1)$, где $X_1 \subset X$. Так как

$$Y = L_2(G) \iff \hat{Y} = L_2(X),$$

то

$$Y = L_2(G) \iff X = X_1$$

с точностью до множества меры нуль. Поэтому достаточно доказать, что

$$X = X_1 \iff \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \text{supp } \hat{\varphi}(\cdot A^{-j}) = X.$$

Обозначим $\varphi_j(x) = \varphi(A^j x)$, $X_0 = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \text{supp } \hat{\varphi}_j$ и покажем, что $X_0 = X_1$ с точностью до множества меры нуль. Так как $\varphi_j \in V_j$, то $\text{supp } \hat{\varphi}_j \subset X_1$, ибо $\varphi_j \in Y$ и $\hat{Y}$ состоит из функций, определенных на X_1 . Поэтому

$$X_0 = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \text{supp } \hat{\varphi}_j \subset X_1.$$

Покажем, что $X_1 \setminus X_0$ имеет меру нуль. Выберем $f \in V_j$. Тогда

$$f = \lim f_n, \quad f_n = \sum_{h \in H_0} d_h \varphi(A^j x \dot{+} h),$$

где f_n есть конечная сумма. Отсюда находим, что при всех $\chi \in X_1 \setminus X_0$

$$\begin{aligned}\widehat{f}_n(\chi) &= \sum_{h \in H_0} d_n \int_G \varphi(A^j x \dot{-} h) \overline{(\chi, x)} d\mu(x) \\ &= \sum_{h \in H_0} d_n \overline{(\chi, A^{-j}h)} \int_G \varphi(A^j(x \dot{-} A^{-j}h)) \overline{(\chi, x \dot{-} A^{-j}h)} d\mu(x) \\ &= \sum_{h \in H_0} d_n \overline{(\chi, A^{-j}h)} \int_G \varphi(A^j x) \overline{(\chi, x)} d\mu(x) = 0,\end{aligned}$$

т.е. $\widehat{f}_n(\chi) = 0$ для всех $\chi \in X_1 \setminus X_0$. Отсюда следует, что $\widehat{f}(\chi) = 0$ почти всюду на $X_1 \setminus X_0$ для $f \in V_j$, а значит, и для $f \in Y$. Это означает, что $L_2(X_0) = L_2(X_1)$, и поэтому $\nu(X_1 \setminus X_0) = 0$. Но $\text{supp } \widehat{\varphi}_j = \text{supp } \widehat{\varphi}(\cdot A^{-j})$ и, значит,

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \text{supp } \widehat{\varphi}(\cdot A^{-j}) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \text{supp } \widehat{\varphi}_j = X_0.$$

Учитывая, что $X \supset X_1 \supset X_0$, получаем $X = X_1$ с точностью до множества меры нуль. Это означает, что $X_0 = X$ с точностью до множества меры нуль. Последнее равносильно тому, что $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \text{supp } \widehat{\varphi}(\cdot A^{-j}) = X$ с точностью до множества меры нуль.

Лемма 3.4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формулировку и доказательство теоремы Винера в $\mathbb{R}^m$ можно найти в [19; приложение A8]. Для случая нульмерной группы ее формулировка и доказательство меняются незначительно.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $\varphi \in L_2(G)$ – решение уравнения (3.1) и $|\widehat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$. Тогда $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L_2(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $|\widehat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$ следует $\text{supp } \widehat{\varphi}(\cdot A^{-j}) = G_j^\perp$. Так как

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} G_j^\perp = X,$$

то осталось воспользоваться леммой 3.4.

ЛЕММА 3.5. Пусть $\varphi \in L_2(G)$ и $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ – ортонормированная система. Тогда $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L_2(G)$. Тогда при $j > 0$ с учетом равенства

$$\int_G f(A \cdot) d\mu = \frac{1}{p} \int_G f d\mu$$

и ортонормированности системы $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^j} \sum_{h \in H_0} \left| \int_G f(x) \overline{\varphi(A^{-j}x \dot{-} h)} d\mu(x) \right|^2 &= \sum_{h \in H_0} \left| \int_G f(A^j x) \overline{\varphi(x \dot{-} h)} d\mu(x) \right|^2 \\ &\leq \|f(A^j \cdot)\|_2^2 = \int_G |f(A^j x)|^2 d\mu(x) = \frac{1}{p^j} \int_G |f(x)|^2 d\mu(x) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow +\infty.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Так как система $(p^{j/2}\varphi(A^j x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ есть ортонормированный базис V_j , то для $f \in V_j$

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{h \in H_0} |(f, p^{j/2}\varphi(A^j \cdot \dot{-} h))|^2 \right)^{1/2}. \quad (3.4)$$

Пусть $f \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$. Тогда из (3.3) и (3.4) следует $\|f\|_2 = 0$, т.е. $f = 0$ почти всюду.

ЛЕММА 3.6. *Если $\text{supp } \widehat{\varphi} \subset G_0^\perp$, то из условия $f \in V_0$ следует, что $f(\cdot \dot{-} y) \in V_0$ для $g \in H_0$, т.е. выполнена аксиома 4).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g, h \in H_0$ и

$$g = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{-N}g_{-N}, \quad h = b_{-1}g_{-1} \dot{+} b_{-2}g_{-2} \dot{+} \cdots \dot{+} b_{-N}g_{-N}.$$

Тогда

$$g \dot{+} h = (\widetilde{a}_s g_s \dot{+} \widetilde{a}_{s-1} g_{s-1} \dot{+} \cdots \dot{+} \widetilde{a}_0 g_0) \dot{+} (\widetilde{a}_{-1} g_{-1} \dot{+} \widetilde{a}_{-2} g_{-2} \dot{+} \cdots \dot{+} \widetilde{a}_{-N} g_{-N}) = \widetilde{g} \dot{+} \widetilde{h},$$

причем $\widetilde{h} \in H_0$.

Так как $\text{supp } \widehat{\varphi} \subset G_0^\perp$, то φ периодична с любым периодом g_j , $j \geq 0$. Учитывая, что $\widetilde{h} \in H_0$, получаем

$$\sum_{h \in H_0} c_h \varphi(x \dot{-} g \dot{-} h) = \sum_{\widetilde{h} \in H_0} c_{\widetilde{h}} \varphi(x \dot{-} \widetilde{h}),$$

т.е. аксиома 4) выполнена.

ЛЕММА 3.7. *Если $\varphi \in L_2(G)$, то $f \in V_n$ тогда и только тогда, когда $f(Ax) \in V_{n+1}$.*

Утверждение леммы сразу следует из равенства

$$\begin{aligned} & \int_G \left| f(Ax) - \sum_{h \in H_0} c_h \varphi(A^n Ax \dot{-} h) \right|^2 d\mu(x) \\ &= \frac{1}{p} \int_G \left| f(x) - \sum_{h \in H_0} c_h \varphi(A^n x \dot{-} h) \right|^2 d\mu(x). \end{aligned}$$

Соединяя леммы 3.3–3.7, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. *Если $\varphi \in L_2(G)$ – решение уравнения (3.1) и $|\widehat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$, то φ порождает КМА в $L_2(G)$.*

§ 4. Масштабирующее уравнение и его решения

При фиксированном $s \geq 1$ обозначим

$$H_0^{(s)} = \{a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{-s}g_{-s} : a_j = \overline{0, p-1}\}$$

и рассмотрим масштабирующее уравнение

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h \varphi(Ax \dot{-} h). \quad (4.1)$$

Из этого уравнения для преобразования Фурье $\widehat{\varphi}$ имеем

$$\begin{aligned}
 \widehat{\varphi}(\chi) &= \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h \int_G \varphi(Ax \dot{-} AA^{-1}h) \overline{(\chi, x)} d\mu(x) \\
 &= \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h \overline{(\chi, A^{-1}h)} \int_G \varphi(Ax) \overline{(\chi, x)} d\mu(x) \\
 &= \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h \overline{(\chi, A^{-1}h)} \int_G \varphi(Ax) \overline{(\chi, A^{-1}Ax)} d\mu(x) \\
 &= \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h \overline{(\chi, A^{-1}h)} \int_G \varphi(x) \overline{(\chi, A^{-1}x)} d\mu(x) = m_0(\chi) \widehat{\varphi}(\chi A^{-1}),
 \end{aligned}$$

где

$$m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h \overline{(\chi, A^{-1}h)}. \quad (4.2)$$

Таким образом, масштабирующее уравнение можно записать в терминах преобразования Фурье:

$$\widehat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) \widehat{\varphi}(\chi A^{-1}). \quad (4.3)$$

Функцию $m_0(\chi)$ называют *маской* уравнения (4.1). Зная маску, преобразование Фурье $\widehat{\varphi}$ можно восстановить по значению $\widehat{\varphi}(1)$. Вместо термина “маска” иногда используют термин “символ”.

ЛЕММА 4.1. Пусть $\varphi \in L_2(G)$ – решение масштабирующего уравнения (4.1), $\widehat{\varphi}(\chi)$ непрерывна в точке $\chi_0 \equiv 1$ и $\widehat{\varphi}(1) \neq 0$. Тогда

$$\widehat{\varphi}(\chi) = \widehat{\varphi}(1) \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi A^{-k}). \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя последовательно равенство

$$\widehat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) \widehat{\varphi}(\chi A^{-1}),$$

имеем при натуральном N

$$\widehat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^N m_0(\chi A^{-k}) \widehat{\varphi}(\chi A^{-N-1}).$$

Так как $\chi A^{-N-1} \rightarrow \chi_0 \equiv 1$, $N \rightarrow +\infty$, и $\widehat{\varphi}$ непрерывна, то лемма 4.1 доказана.

Справедливо и обратное утверждение.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\widehat{\varphi}$ определена равенством (4.4), $m_0(1) = 1$. Тогда

$$\widehat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) \widehat{\varphi}(\chi A^{-1}).$$

Если $\chi \in G_{-s+l+1}^\perp$, $l \geq 0$, то

$$\widehat{\varphi}(\chi) = \widehat{\varphi}(1) \prod_{j=0}^{l-1} m_0(\chi A^{-j}), \quad (4.5)$$

в частности, при $l = 0$ (т.е. если $\chi \in G_{-s+1}^\perp$) $\widehat{\varphi}(\chi) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя в равенстве (4.4) χ на χA^{-1} , получаем равенство

$$\widehat{\varphi}(\chi A^{-1}) = \widehat{\varphi}(1) \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi A^{-k-1}).$$

Умножая обе части этого равенства на $m_0(\chi)$ и учитывая (4.4), получаем (4.3).

Пусть $\chi \in G_{-s+l+1}^\perp$, $l \geq 0$. Проверим равенство (4.5). Так как $\chi \in G_{-s+l+1}^\perp$, то $\chi(G_{-s+l+1}) = 1$. Учитывая равенство $A^{-1}(G_n) = G_{n+1}$, откуда находим $\chi A^{-l-1}(G_{-s}) = 1$. Если $h \in H_0^{(s)} \subset G_{-s}$, то

$$(\chi A^{-l}, A^{-1}h) = (\chi A^{-l-1}, h) = 1.$$

Поэтому

$$m_0(\chi A^{-l}) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h(\overline{\chi A^{-l}, A^{-1}h}) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h = m_0(1) = 1.$$

Но из условия $\chi \in G_{-s+l+1}^\perp$ следует, что $\chi \in G_{-s+j+1}^\perp$ при $j \geq l$ и, значит, $m_0(\chi A^{-j}) = 1$ при $j \geq l$. Отсюда находим, что если $\chi \in G_{-s+l+1}^\perp$ при $l \geq 0$, то

$$\widehat{\varphi}(\chi) = \widehat{\varphi}(1) \prod_{j=0}^{l-1} m_0(\chi A^{-j}) \prod_{j=l}^{\infty} m_0(\chi A^{-j}) = \widehat{\varphi}(1) \prod_{j=0}^{l-1} m_0(\chi A^{-j}).$$

При $l = 0$ отсюда следует $\widehat{\varphi}(\chi) = \widehat{\varphi}(1)$ при $\chi \in G_{-s+1}^\perp$.

ЛЕММА 4.3. Пусть для $\widehat{\varphi}$ выполнены условия леммы 4.2. Тогда $\widehat{\varphi}$ постоянна на классах смежности по подгруппе $G_{-s+1}^\perp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\chi \in G_{-s+l+1}^\perp$, $l \geq 1$. Представим $G_{-s+l+1}^\perp$ в виде объединения смежных классов:

$$G_{-s+l+1}^\perp = \bigsqcup_{\alpha_{-s+1}=0}^{p-1} \cdots \bigsqcup_{\alpha_{-s+l}=0}^{p-1} G_{-s+l}^\perp r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}} \cdots r_{-s+l}^{\alpha_{-s+l}}.$$

На каждом таком смежном классе согласно лемме 4.2 выполняется

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(G_{-s+1}^\perp r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}} \cdots r_{-s+l}^{\alpha_{-s+l}}) &= \widehat{\varphi}(1) \prod_{j=0}^{l-1} m_0(G_{-s+1}^\perp r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}} \cdots r_{-s+l}^{\alpha_{-s+l}} A^{-j}) \\ &= \widehat{\varphi}(1) \frac{1}{p^l} \prod_{j=0}^{l-1} \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h(\overline{G_{-s+1}^\perp r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}} \cdots r_{-s+l}^{\alpha_{-s+l}}, A^{-j-1}h}). \end{aligned}$$

Так как $h \in G_{-s}$, то $A^{-j-1}h \in G_{-s+j+1}$, и поэтому $\overline{(G_{-s+1}^\perp, A^{-j-1}h)} = 1$. Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} & \widehat{\varphi}(G_{-s+1}^\perp r_{-s+1}^{\alpha-s+1} \cdots r_{-s+l}^{\alpha-s+l}) \\ &= \widehat{\varphi}(1) \frac{1}{p^l} \prod_{j=0}^{l-1} \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h(r_{-s+1}^{\alpha-s+1} \cdots r_{-s+l}^{\alpha-s+l}, A^{-j-1}h) = \text{const.} \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\widehat{\varphi}$ определена равенством (4.4), $\widehat{\varphi}(1) = 1$. Тогда если $|m_0(G_0^\perp)| = 1$ и $m_0(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) = 0$, то $|\widehat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По лемме 4.2

$$\widehat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) \widehat{\varphi}(\chi A^{-1}).$$

Если $m_0(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) = 0$, то отсюда сразу находим $\widehat{\varphi}(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) = 0$. Если $\chi \in G_2^\perp \setminus G_1^\perp$, то $\chi A^{-1} \in G_1^\perp \setminus G_0^\perp$ и, значит, $\widehat{\varphi}(\chi A^{-1}) = 0$, откуда $\widehat{\varphi}(\chi) = 0$. Продолжая рассуждения по индукции, получаем $\text{supp } \widehat{\varphi} \subset G_0^\perp$.

2) Пусть $|m_0(G_0^\perp)| = 1$. По лемме 4.2 если $\chi \in G_{-s+l+1}^\perp$, то

$$\widehat{\varphi}(\chi) = \widehat{\varphi}(1) \prod_{j=0}^{l-1} m_0(\chi A^{-j}).$$

Положим $l = s - 1$. Тогда $\chi \in G_0^\perp$ и, значит,

$$\widehat{\varphi}(\chi) = \widehat{\varphi}(1) \prod_{j=0}^{s-2} m_0(\chi A^{-j}).$$

Так как $\chi \in G_0^\perp$, то $\chi A^{-j} \in G_{-j}^\perp \subset G_0^\perp$, и поэтому $|\widehat{\varphi}(\chi)| = |\widehat{\varphi}(1)| = 1$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\widehat{\varphi}$ определена равенством (4.4), $\widehat{\varphi}(1) = 1$. Тогда если $|\widehat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$, то

$$m_0(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) = 0, \quad |m_0(G_0^\perp)| = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что из условия $|\widehat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$ следует, что $\widehat{\varphi}$ есть преобразование Фурье некоторой функции $\varphi \in L_2(G)$. Далее, так как $\widehat{\varphi}_{-h}(\chi) = (\chi, h) \widehat{\varphi}(\chi)$, то

$$\begin{aligned} \int_G \varphi(x) \overline{\varphi(x \dot{-} h)} d\mu(x) &= \int_X \widehat{\varphi}(\chi) \overline{\widehat{\varphi}_{-h}(\chi)} d\nu(\chi) \\ &= \int_X |\widehat{\varphi}(\chi)|^2(\chi, h) d\nu(\chi) = \int_{G_0^\perp} |\widehat{\varphi}(\chi)|^2(\chi, h) d\nu(\chi). \end{aligned}$$

Используя лемму 4.3 при $l = s - 1$, отсюда находим

$$\begin{aligned} \int_G \varphi(x) \overline{\varphi(x \dot{-} h)} d\mu(x) &= \sum_{\alpha_{-s+1}=0}^{p-1} \cdots \sum_{\alpha_{-1}=0}^{p-1} \int_{G_{-s+1}^\perp r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}} \cdots r_{-1}^{\alpha_{-1}}} |\widehat{\varphi}(\chi)|^2(\chi, h) d\nu(\chi) \\ &= \sum_{\alpha_{-1}=0}^{p-1} \cdots \sum_{\alpha_{-s+1}=0}^{p-1} |\widehat{\varphi}(G_{-s+1}^\perp r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}} \cdots r_{-1}^{\alpha_{-1}})|^2 \int_{G_{-s+1}^\perp r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}} \cdots r_{-1}^{\alpha_{-1}}} (\chi, h) d\nu(\chi). \end{aligned}$$

Если $\chi \in G_{-s+1}^\perp r_{-s+1}^{\alpha-s+1} \cdots r_{-1}^{\alpha-1}$ и $h \in H_0^{(s-1)}$, то $(\chi, h) = (r_{-s+1}^{\alpha-s+1} \cdots r_{-1}^{\alpha-1}, h)$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_G \varphi(x) \overline{\varphi(x \dot{-} h)} d\mu(x) \\ &= \sum_{\alpha_{-1}=0}^{p-1} \cdots \sum_{\alpha_{-s+1}=0}^{p-1} |\widehat{\varphi}(G_{-s+1}^\perp r_{-s+1}^{\alpha-s+1} \cdots r_{-1}^{\alpha-1})|^2 \frac{1}{p^{s-1}} (r_{-s+1}^{\alpha-s+1} \cdots r_{-1}^{\alpha-1}, h). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Рассмотрим равенства (4.6) при

$$h \in H_0^{(s-1)} = \{a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{-s+1}g_{-s+1}\}.$$

В этом случае равенства (4.6) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно неизвестных $|\widehat{\varphi}(G_{-s+1}^\perp r_{-s+1}^{\alpha-s+1} \cdots r_{-1}^{\alpha-1})|^2$ с коэффициентами

$$b_{j,k} = (r_{-s+1}^{\alpha-s+1} \cdots r_{-1}^{\alpha-1}, a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{-s+1}g_{-s+1}).$$

Это система порядка p^{s-1} . Покажем, что $\det(b_{j,k}) \neq 0$.

Рассмотрим характеры

$$\chi_k = r_{-s+1}^{\alpha-s+1} r_{-s+2}^{\alpha-s+2} \cdots r_{-2}^{\alpha-2} r_{-1}^{\alpha-1}$$

на группе G_{-s+1} . На каждом смежном классе $G_0 \dot{+} h_j$ (где $h_j = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{-s+1}g_{-s+1}$), объединение которых есть G_{-s+1} , характер χ_k принимает постоянное значение, равное $(r_{-s+1}^{\alpha-s+1} r_{-s+2}^{\alpha-s+2} \cdots r_{-2}^{\alpha-2} r_{-1}^{\alpha-1}, h_j)$. Так как характеры χ_k ортогональны на группе G_{-s+1} , то столбцы матрицы $(b_{j,k}) = (\chi_k, h_j)_{j,k=0}^{p^{s-1}-1}$ ортогональны. Отсюда следует, что матрица $(\frac{1}{\sqrt{p^{s-1}}} b_{j,k})$ является унитарной. Это означает, что система (4.6) имеет единственное решение

$$|\widehat{\varphi}(G_{-s+1}^\perp r_{-s+1}^{\alpha-s+1} \cdots r_{-1}^{\alpha-1})|^2 = 1.$$

Покажем, что $|m_0(G_0^\perp)| = 1$. Запишем равенство (4.5) из леммы 4.2 при $l = 1$:

$$\widehat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi), \quad \chi \in G_{-s+2}^\perp, \quad -s+2 \leq 0.$$

Так как $|\widehat{\varphi}(G_0^\perp)| = 1$ и $G_{-s+2}^\perp \subset G_0^\perp$, то $|m_0(G_{-s+2}^\perp)| = 1$. Запишем равенство (4.5) при $l = 2$ (при условии, что $-s+3 \leq 0$):

$$\widehat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)m_0(\chi A^{-1}), \quad \chi \in G_{-s+3}^\perp. \quad (4.7)$$

Если $\chi \in G_{-s+3}^\perp \setminus G_{-s+2}^\perp$, то $\chi A^{-1} \in G_{-s+2}^\perp$ и, значит, $|m_0(\chi A^{-1})| = 1$. А так как $|\widehat{\varphi}(\chi)| = 1$ при $\chi \in G_{-s+3}^\perp$, то из (4.7) следует, что $|m_0(G_{-s+3}^\perp \setminus G_{-s+2}^\perp)| = 1$ и, значит, $|m_0(G_{-s+3}^\perp)| = 1$. Продолжая эти рассуждения с использованием равенства (4.5) при $l = \overline{3, s-1}$, получаем $|m_0(G_0^\perp)| = 1$. Записывая равенство (4.5) при $l = s$, получаем с учетом $\text{supp } \widehat{\varphi} \subset G_0^\perp$ равенство $m_0(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) = 0$.

Теорема 4.2 доказана.

§ 5. Построение всплесковых базисов

Как обычно, через W_n обозначим ортогональное дополнение V_n до V_{n+1} , т.е. $V_{n+1} = V_n \otimes W_n$ и $V_n \perp W_n$ (где $n \in \mathbb{Z}$, знак $\otimes$ обозначает прямую сумму).

Нетрудно проверить, что для W_n справедливы утверждения:

- 1) $f \in W_n \iff f(Ax) \in W_{n+1}$;
- 2) $W_n \perp W_k$ при $k \neq n$;
- 3) $\otimes W_n = L_2(G)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Из лемм 4.1–4.3 и теорем 4.1, 4.2 следует алгоритм построения всплесковых базисов.

Шаг 1. Строим функцию $m_0(\chi)$, постоянную на смежных классах к $G_{-s+1}^\perp$, следующим образом. Равенство

$$m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h(\chi, A^{-1}h) \quad (5.1)$$

записываем в виде системы линейных уравнений. Для этого элементу

$$h = a_{-1}g_{-1} + a_{-2}g_{-2} + \dots + a_{-s}g_{-s} \in H_0^{(s)}$$

присваиваем номер

$$j = a_{-1} + a_{-2}p + \dots + a_{-s}p^{s-1}, \quad 0 \leq j \leq p^s - 1.$$

Так как функция $m_0(\chi)$ постоянна на классах смежности по подгруппе $G_{-s+1}^\perp$, т.е. на множествах

$$G_{-s+1}^\perp r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}} r_{-s+2}^{\alpha_{-s+2}} \dots r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \subset G_1^\perp,$$

то в каждом таком классе выбираем характеры χ_k , где

$$k = \alpha_{-s+1} + \alpha_{-s+2}p + \dots + \alpha_{-1}p^{s-2} + \alpha_0p^{s-1}.$$

Тогда равенство (5.1) можно записать в виде системы

$$m_0(\chi_k) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p^s-1} \beta_j(\chi_k, A^{-1}h_j), \quad k = \overline{0, p^s-1}, \quad (5.2)$$

относительно неизвестных β_j . Характеры χ_k рассмотрим на подгруппе G_{-s+1} , на которой они ортогональны. Элементы $A^{-1}h_j$ принадлежат G_{-s+1} . Поэтому матрица $p^{-s/2}(\chi_k, A^{-1}h_j)$ унитарна и, значит, система (5.2) имеет единственное решение для любой конечной последовательности $(m_0(\chi_k))_{k=0}^{p^s-1}$.

Шаг 2. Выбираем $m_0(\chi_k)$ так, чтобы $|m_0(\chi_k)| = 1$ при $k = \overline{0, p^{s-1}-1}$ и $m_0(\chi_k) = 0$ при $k = \overline{p^{s-1}, p^s-1}$. Решая систему (5.2), находим β_j . Таким образом, мы построили функцию $m_0(\chi)$, постоянную на смежных классах к $G_{-s+1}^\perp$ и такую, что $|m_0(G_0^\perp)| = 1$, $m_0(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) = 0$. Отметим, что числа $m_0(\chi_k)$ при $k = \overline{0, p^{s-1}-1}$ и есть те самые λ_k , которые были отмечены во введении.

Шаг 3. Полагаем $\widehat{\varphi}(1) = 1$ и строим $\widehat{\varphi}(\chi)$, используя равенство (4.4). По теореме 4.1 имеем $|\widehat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$ и, значит, функция φ порождает КМА.

Шаг 4. Определим функции $m_l(\chi) = m_0(\chi r_0^{-l})$, $l = \overline{1, p-1}$. Очевидно, что $m_l(\chi)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} m_l(\chi) &= \sum_{h \in H_0^{(s)}} \overline{\beta_h(\chi r_0^{-l}, A^{-1}h)} = \sum_{h \in H_0^{(s)}} \overline{\beta_h(r_0^{-l}, A^{-1}h)(\chi, A^{-1}h)} \\ &= \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h^{(l)}(\chi, A^{-1}h), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $\beta_h^{(l)} = \overline{\beta_h(r_0^{-l}, A^{-1}h)}$. Ясно также, что $|m_l(G_0^\perp r_0^l)| = 1$ и $|m_l(G_0^\perp r_0^{\nu'})| = 0$ при $\nu \neq l$.

Шаг 5. Образует функции

$$\psi_l(x) = \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h^{(l)} \varphi(Ax \dot{-} h), \quad \overline{1, p-1}.$$

ТЕОРЕМА 5.1. *Функции $\psi_l(x \dot{-} h)$, где $l = \overline{1, p-1}$, $h \in H_0$, образуют ортонормированный базис W_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Покажем, что $(\varphi(\cdot - g^{(1)}), \psi_l(\cdot - g^{(2)})) = 0$ для любых $g^{(1)}, g^{(2)} \in H_0$. Учитывая, что

$$\widehat{\varphi} \cdot_{-h}(\chi) = \overline{(\chi, h)} \widehat{\varphi}(\chi), \quad \widehat{\varphi}_{A \cdot -g}(\chi) = \frac{1}{p} \overline{(\chi, A^{-1}g)} \widehat{\varphi}(\chi A^{-1}),$$

имеем

$$\begin{aligned} (\varphi(\cdot - g^{(1)}), \psi_l(\cdot - g^{(2)})) &= \int_G \varphi(x \dot{-} g^{(1)}) \overline{\psi_l(x \dot{-} g^{(2)})} d\mu(x) \\ &= \sum_{h \in H_0^{(s)}} \overline{\beta_h^{(l)}} \int_G \varphi(x \dot{-} g^{(1)}) \overline{\varphi(Ax \dot{-} Ag^{(2)} \dot{-} h)} d\mu(x) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(s)}} \overline{\beta_h^{(l)}} \int_X \widehat{\varphi}(\chi) \overline{(\chi, g^{(1)})} \overline{\widehat{\varphi}(\chi A^{-1})}(\chi, g^{(2)}) (\chi, A^{-1}h) d\nu(\chi) \\ &= \int_X \widehat{\varphi}(\chi) \overline{\widehat{\varphi}(\chi A^{-1})}(\chi, g^{(1)}) (\chi, g^{(2)}) \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(s)}} \overline{\beta_h^{(l)}}(\chi, A^{-1}h) d\nu(\chi) \\ &= \int_X \widehat{\varphi}(\chi) \overline{\widehat{\varphi}(\chi A^{-1})}(\chi, g^{(1)}) (\chi, g^{(2)}) \overline{m_l(\chi)} d\nu(\chi) = 0, \end{aligned}$$

так как $\text{supp } \widehat{\varphi}(\chi) = G_0^\perp$ и $m_l(G_0^\perp) = 0$, $l = \overline{1, p-1}$. Аналогично убеждаемся, что

$$(\psi_l(\cdot \dot{-} g^{(1)}), \psi_k(\cdot \dot{-} g^{(2)})) = 0$$

при $k \neq l$, $k, l = \overline{1, p-1}$.

б) Проверим, что $(\psi_l(\cdot \dot{-} g^{(1)}), \psi_l(\cdot \dot{-} g^{(2)})) = 0$, если $g^{(1)}, g^{(2)} \in H_0$ и $g^{(1)} \neq g^{(2)}$. Прежде всего отметим, что из равенства

$$\begin{aligned} 0 &= \int_G \varphi(x \dot{-} g^{(1)}) \overline{\varphi(x \dot{-} g^{(2)})} d\mu(x) = \int_X \widehat{\varphi} \cdot \dot{-} g^{(1)}(\chi) \overline{\widehat{\varphi} \cdot \dot{-} g^{(2)}(\chi)} d\nu(\chi) \\ &= \int_X \overline{(\chi, g^{(1)})} \widehat{\varphi}(\chi) (\chi, g^{(2)}) \overline{\widehat{\varphi}(\chi)} d\nu(\chi) = \int_{G_0^\perp} \overline{(\chi, g^{(1)})} (\chi, g^{(2)}) d\nu(\chi) \end{aligned}$$

следует, что элементы $g \in H_0$ образуют ортогональную систему на $G_0^\perp$, а значит, и на смежных классах $G_0^\perp r_0^l$, $l = \overline{1, p-1}$. Поэтому из равенства

$$\int_G \psi_l(x \dot{-} g^{(1)}) \overline{\psi_l(x \dot{-} g^{(2)})} d\mu(x) = \int_{G_0^\perp r_0^l} \overline{(\chi, g^{(1)})} (\chi, g^{(2)}) d\nu(\chi)$$

получаем ортогональность системы сдвигов $(\psi_l(x \dot{-} g))_{g \in H_0}$ на G (при фиксированном $l = \overline{1, p-1}$). Таким образом, линейная оболочка системы

$$(\psi_l(x \dot{-} h))_{l=\overline{1, p-1}, h \in H_0}$$

ортогональна к V_0 и система $(\psi(\cdot \dot{-} h))$ ортонормирована.

в) Докажем, что любая функция $f \in W_0$ однозначно представима в виде суммы ряда по системе $(\psi_l(x \dot{-} g))_{g \in H_0, l=\overline{1, p-1}}$. Вначале отметим, что $\widehat{\psi_l}(\chi) = \frac{1}{p} \widehat{\varphi}(\chi A^{-1}) m_l(\chi)$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \widehat{\psi_l}(\chi) &= \int_G \psi_l(\chi) \overline{(\chi, x)} d\mu(x) = \int_G \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h^{(l)} \varphi(Ax \dot{-} h) \overline{(\chi, x)} d\mu(x) \\ &= \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h^{(l)} \int_G \varphi(Ax \dot{-} h) \overline{(\chi, x)} d\mu(x) = \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h^{(l)} \frac{1}{p} \overline{(\chi, A^{-1}h)} \widehat{\varphi}(\chi A^{-1}) \\ &= \frac{1}{p} \widehat{\varphi}(\chi A^{-1}) \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h^{(l)} \overline{(\chi, A^{-1}h)} = \frac{1}{p} \widehat{\varphi}(\chi A^{-1}) m_l(\chi). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Далее, отметим, что если $f \in V_1$ и

$$f = \sum_{h \in H_0} a_h \varphi(Ax \dot{-} h), \quad (5.5)$$

то

$$\widehat{f}(\chi) = \frac{1}{p} Q(\chi) \widehat{\varphi}(\chi A^{-1}), \quad (5.6)$$

где

$$Q(\chi) = \sum_{h \in H_0} a_h \overline{(\chi, A^{-1}h)} \in L_2(G_1^\perp). \quad (5.7)$$

Последнее равенство понимается в смысле сходимости ряда по норме $L_2(G_1^\perp)$. Верно и обратное: если $\widehat{f}(\chi)$ определена равенством (5.6) и $Q(x)$ имеет вид (5.7), то f есть сумма ряда (5.5).

Выберем $u(x) \in W_0$ и покажем, что u есть сумма ряда по системе

$$(\psi_l(x \dot{-} h))_{l=\overline{1, p-1}, h \in H_0}.$$

Пусть $v(x) \in V_0$. Тогда $f := v(x) + u(x) \in V_0 \otimes W_0 = V_1$ и поэтому

$$f = \sum_{h \in H_0} \alpha_h \varphi(Ax \dot{-} h).$$

Тогда (см. (5.3)–(5.5))

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\chi) &= \frac{1}{p} Q(\chi) \widehat{\varphi}(\chi A^{-1}) = \frac{1}{p} Q(\chi) \mathbf{1}_{G_1^\perp}(\chi) \widehat{\varphi}(\chi A^{-1}) = \frac{1}{p} Q(\chi) \sum_{l=0}^{p-1} |m_l(\chi)|^2 \widehat{\varphi}(\chi A^{-1}) \\ &= \frac{1}{p} Q(\chi) \overline{m_0(\chi)} \underbrace{m_0(\chi) \widehat{\varphi}(\chi A^{-1})}_{=\widehat{\varphi}(\chi)} + \sum_{l=1}^{p-1} Q(\chi) \overline{m_l(\chi)} \underbrace{\frac{1}{p} \widehat{\varphi}(\chi A^{-1}) m_l(\chi)}_{=\widehat{\psi}_l(\chi)} \\ &= \frac{1}{p} Q(\chi) \overline{m_0(\chi)} \widehat{\varphi}(\chi) + \sum_{l=1}^{p-1} Q(\chi) \overline{m_l(\chi)} \widehat{\psi}_l(\chi). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Из последнего равенства следует, что

$$f(x) = \sum_{h \in H_0} b_h \varphi(x \dot{-} h) + \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{h \in H_0} b_h^{(l)} \psi_l(x \dot{-} h). \quad (5.9)$$

Покажем это.

Функции $Q(\chi)$ принадлежат $L_2(G_1^\perp) \subset L_2(G_0^\perp)$, а $m_0(\chi)$ ограничена на $G_0^\perp$. Поэтому $\frac{1}{p} Q(\chi) \overline{m_0(\chi)} \in L_2(G_0^\perp)$, и так как по лемме 2.2 сужения элементов $h \in H_0$ на $G_0^\perp$ образуют ортонормированный базис $L_2(G_0^\perp)$, то

$$\frac{1}{p} Q(\chi) \overline{m_0(\chi)} = \sum_{h \in H_0} b_h \overline{(\chi, h)}.$$

Отсюда следует, что функция $\frac{1}{p} Q(\chi) \overline{m_0(\chi)} \widehat{\varphi}(\chi)$ есть преобразование Фурье функции

$$v(x) = \sum_{h \in H_0} b_h \varphi(x \dot{-} h).$$

Рассмотрим функции $Q(\chi) \overline{m_l(\chi)} \widehat{\psi}_l(\chi)$. Так как $Q(\chi)$ принадлежат $L_2(G_1^\perp)$, а $m_l(\chi) = m_0(\chi r_0^{-l})$ ограничена на $G_0^\perp r_0^l$, $m_l(G_1^\perp \setminus G_0^\perp r_0^l) = 0$, то $Q(\chi) \overline{m_l(\chi)} \in L_2(G_0^\perp r_0^l)$, а значит, $\overline{Q(\chi)} m_l(\chi) \in L_2(G_0^\perp r_0^l)$. Элементы $h \in H_0$ рассмотрим как функции, определенные на $(G_0^\perp r_0^l)$. Так как сужения элементов $h \in H_0$ на $G_0^\perp$ образуют ортонормированный базис в $L_2(G_0^\perp)$, то элементы $h(\chi r_0^{-l})$ образуют ортонормированный базис в $L_2(G_0^\perp r_0^l)$.

Поэтому при каждом $l = \overline{1, p-1}$:

$$\text{i) } \overline{Q(\chi)} m_l(\chi) = \sum_{h \in H_0} \overline{b_h^{(l)}(r_0^l, h)} (\chi r_0^{-l}, h), \quad \sum_{h \in H_0} |\overline{b_h^{(l)}(r_0^l, h)}|^2 < \infty;$$

$$\text{ii) } U^{(l)}(x) = \sum_{h \in H_0} b_h^{(l)} \psi_l(x \dot{-} h) \in L_2(G);$$

$$\text{iii) } \widehat{U}^{(l)}(\chi) = \widehat{\psi}_l(\chi) \overline{Q(\chi) m_l(\chi)}.$$

Поэтому из (5.8) следует (5.9).

В силу единственности представления f в виде $f = v + u$, $v \in V_0$, $u \in W_0$, отсюда следует

$$u(x) = \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{h \in H_0} b_h^{(l)} \psi_l(x \dot{-} h).$$

Это означает, что система $\psi_l(x \dot{-} h)$ – базис W_0 .

Теорема 5.1 доказана.

Шаг 6. Так как пространства $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ образуют КМА в $L_2(G)$, то функции

$$\psi_l(A^n x \dot{-} h), \quad l = \overline{1, p-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad h \in H_0,$$

образуют полную ортогональную систему в $L_2(G)$.

ПРИМЕР. Пусть $s = 1$. Маска m_0 имеет вид

$$m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(1)}} \beta_h \overline{(\chi, A^{-1}h)}$$

и постоянна на смежных классах по подгруппе $G_0^\perp$. Выбираем $m_0(\chi)$ так, чтобы $|m_0(G_0^\perp)| = 1$ и $m_0(\chi) = 0$ при $\chi \in G_1^\perp \setminus G_0^\perp$. Равенство (5.2) примет вид

$$m_0(\chi_k) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \beta_j \overline{(\chi_k, A^{-1}h_j)}. \quad (5.10)$$

В этом случае $h_j = jg_{-1}$, $A^{-1}h_j = jg_0$, $\chi_k = r_0^k$, $j, k = \overline{0, p-1}$, и равенства (5.10) принимают вид

$$m_0(r_0^k) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \beta_j \overline{(r_0, g_0)^{k \cdot j}}.$$

Полагая $m_0(r_0^k) = 0$, $k = \overline{1, p-1}$, $m_0(1) = 1$, получаем систему

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,p-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p-1,0} & a_{p-1,1} & \dots & a_{p-1,p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{p-1} \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

где

$$a_{k,j} = \frac{1}{\sqrt{p}} \overline{(r_0, g_0)^{kj}}.$$

Матрица $(a_{k,j})$ унитарна, поэтому система (5.11) имеет единственное решение $\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_{p-1} = 1$. Вычисляем коэффициенты $\beta_j^{(l)}$ по формулам

$$\beta_j^{(l)} = \beta_j \overline{(r_0^{-l}, jg_0)} = (r_0, g_0)^{jl}, \quad l = \overline{1, p-1},$$

и полагаем

$$\psi_l(x) = \sum_{j=0}^{p-1} (r_0, g_0)^{jl} \varphi(A(x \dot{-} jg_0)).$$

Осталось найти функцию φ . Полагаем $\widehat{\varphi}(1) = 1$ и из равенства

$$\widehat{\varphi}(\chi) = \widehat{\varphi}(1) \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi A^{-k})$$

находим $\widehat{\varphi}(G_0^\perp) = 1$ и $\widehat{\varphi}(\chi) = 0$ при $\chi \notin G_0^\perp$. Отсюда по следствию 2.1 получаем

$$\varphi(x) = \int_X \widehat{\varphi}(\chi)(\chi, x) d\nu(\chi) = \int_{G_0^\perp} (\chi, x) d\nu(\chi) = \begin{cases} 1, & x \in G_0, \\ 0, & x \notin G_0. \end{cases}$$

Подставляя $\varphi(x)$ в выражение для ψ_l , получаем

$$\psi_l(x) = r_0^l(x) \mathbf{1}_{G_0}(x), \quad l = \overline{1, p-1}.$$

Таким образом, мы нашли ортонормированный базис, который получается из одной функции $r_0(x) \mathbf{1}_{G_0}(x)$ с помощью сжатий, сдвигов и возведения в степень.

Найденные функции ψ_l являются комплекснозначными. Укажем способ получения ортонормированного базиса, состоящего из действительнозначных функций. Для этого отметим, что функция $r_0(x)$ на смежных классах $G_1 \dot{+} jg_0$, $j = \overline{1, p-1}$, постоянна и принимает значения, равные корням из 1 степени p . Без ограничения общности можно считать, что $r_0(G_1 \dot{+} jg_0) = e^{2\pi i j/p}$. Поэтому

$$\psi_l(G_1 \dot{+} jg_0) = e^{2\pi i j l/p} = \cos \frac{2\pi}{p} j l + i \sin \frac{2\pi}{p} j l.$$

Отсюда непосредственными вычислениями находим, что все функции $\operatorname{Re} \psi_l(x)$ ортогональны функциям $\operatorname{Im} \psi_m(x)$ при $m = \overline{1, p-1}$ и функциям $\operatorname{Re} \psi_m(x)$ при $m \neq l$ и $m \neq p-l$. Точно так же функции $\operatorname{Im} \psi_l(x)$ ортогональны всем функциям $\operatorname{Re} \psi_m(x)$ и функциям $\operatorname{Im} \psi_m(x)$ при $m \neq l$ и $m \neq p-l$. Поэтому по одной системе $(\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{p-1}(x))$ можно построить $4^{(p-1)/2}$ систем действительнозначных функций $(\psi_1^{(j)}, \psi_2^{(j)}, \dots, \psi_{p-1}^{(j)})$, $j = \overline{1, 4^{(p-1)/2}}$, среди которых могут быть одинаковые.

При $p = 2$ мы получаем одну функцию

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in G_1, \\ -1, & x \in G_0 \setminus G_1. \end{cases}$$

Это классическая функция Хаара.

При $p = 3$ получаются четыре системы, из которых различны только две:

$$\psi_1^{(1)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & x \in G_1, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, & x \in G_1 \dot{+} g_0, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, & x \in G_1 \dot{+} 2g_0, \\ 0, & x \notin G_0, \end{cases} \quad \psi_2^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, & x \in G_1, \\ \sqrt{\frac{3}{2}}, & x \in G_1 \dot{+} g_0, \\ -\sqrt{\frac{3}{2}}, & x \in G_1 \dot{+} 2g_0, \\ 0, & x \notin G_0, \end{cases}$$

и симметричные ей

$$\psi_1^{(2)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & x \in G_1, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, & x \in G_1 \dot{+} g_0, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, & x \in G_1 \dot{+} 2g_0, \\ 0, & x \notin G_0, \end{cases} \quad \psi_2^{(2)}(x) = \begin{cases} 0, & x \in G_1, \\ -\sqrt{\frac{3}{2}}, & x \in G_1 \dot{+} g_0, \\ \sqrt{\frac{3}{2}}, & x \in G_1 \dot{+} 2g_0, \\ 0, & x \notin G_0. \end{cases}$$

Для случая, когда G есть поле всех p -адических чисел, эти системы были получены в работе [13].

Список литературы

- [1] W. Ch. Lang, “Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group”, *SIAM J. Math. Anal.*, **27**:1, (1996), 305–312.
- [2] W. Ch. Lang, “Wavelet analysis on the Cantor dyadic group”, *Houston J. Math.*, **24**:3, (1998), 533–544.
- [3] W. Ch. Lang, “Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group”, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **21**:2, (1998), 307–314.
- [4] В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков, “Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой”, *Матем. сб.*, **197**:10, (2006), 129–160; англ. пер.: V. Yu. Protasov, Yu. A. Farkov, “Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line”, *Sb. Math.*, **197**:10, (2006), 1529–1558.
- [5] Ю. А. Фарков, “Биортогональные диадические вейвлеты на $\mathbb{R}_+$ ”, *УМН*, **62**:6, (2007), 189–190; англ. пер.: Yu. A. Farkov, “Biorthogonal dyadic wavelets on $\mathbb{R}_+$ ”, *Russian Math. Surveys*, **62**:6, (2007), 1197–1198.
- [6] В. Ю. Протасов, “Аппроксимация диадическими всплесками”, *Матем. сб.*, **198**:11, (2007), 135–152; англ. пер.: V. Yu. Protasov, “Approximation by dyadic wavelets”, *Sb. Math.*, **198**:11, (2007), 1665–1681.
- [7] Ю. А. Фарков, “Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3, (2005), 193–220; англ. пер.: Yu. A. Farkov, “Orthogonal wavelets with compact support on locally compact Abelian groups”, *Izv. Math.*, **69**:3, (2005), 623–650.
- [8] Ю. А. Фарков, “Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп”, *Матем. заметки*, **82**:6, (2007), 934–952; англ. пер.: Yu. A. Farkov, “Orthogonal wavelets with compact support on locally compact Abelian groups”, *Math. Notes*, **82**:5–6, (2007), 843–859.
- [9] С. В. Козырев, “Теория всплесков как p -адический спектральный анализ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2, (2002), 149–158; англ. пер.: S. V. Kozyrev, “Wavelet theory as p -adic spectral analysis”, *Izv. Math.*, **66**:2, (2002), 367–376.
- [10] С. В. Козырев, “ p -адические псевдодифференциальные операторы и p -адические всплески”, *ТМФ*, **138**:3, (2004), 383–394; англ. пер.: S. V. Kozyrev, “ p -adic pseudodifferential operators and p -adic wavelets”, *Theoret. and Math. Phys.*, **138**:3, (2004), 322–332.
- [11] A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, *p -adic multidimensional wavelets and their application to p -adic pseudo-differential operators*, arXiv: [math-ph/0612049](https://arxiv.org/abs/math-ph/0612049).
- [12] V. M. Shelkovich, M. Skopina, *p -adic Haar multiresolution analysis and pseudo-differential operators*, arXiv: [0705.2294](https://arxiv.org/abs/0705.2294).

- [13] A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, M. Skopina, *p-Adic refinable functions and MRA-based wavelets*, arXiv: [0711.2820](#).
- [14] S. Albeverio, S. Evdokimov, M. Skopina, “*p*-adic nonorthogonal wavelet bases”, *Избранные вопросы математической физики и p-адического анализа*, Тр. МИАН, **265**, МАИК, М., 2009, 7–18; англ. пер.: S. Albeverio, S. Evdokimov, M. Skopina, “*p*-adic nonorthogonal wavelet bases”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **265**:1, (2009), 1–12.
- [15] J. J. Benedetto, R. L. Benedetto, “A wavelet theory for local fields and related groups”, *J. Geom. Anal.*, **14**:3, (2004), 423–456.
- [16] С. Ф. Лукомский, “О рядах Хаара на компактной нульмерной группе”, *Изв. Саратовского ун-та. Сер. Матем. Мех. Информ.*, **9**:1, (2009), 14–19.
- [17] Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн, *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах*, Элм, Баку, 1981.
- [18] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, 3-е изд., Наука, М., 1982; англ. пер. 2-го изд.: M. I. Kargapolov, Ju. I. Merzljakov, *Fundamentals of the theory of groups*, Grad. Texts in Math., **62**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1979.
- [19] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.

С. Ф. Лукомский (S. F. Lukomskii)
Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: LukomskiiSF@info.sgu.ru

Поступила в редакцию
21.05.2009 и 07.07.2009