Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Трушин, Поля разложения и общая дифференциальная теория Галуа, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 9, 77–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7581>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:43:59

УДК 512.628.2

Д. В. Трушин

Поля разложения и общая дифференциальная теория Галуа

Представлена алгебраическая техника, не использующая результаты теории моделей и позволяющая построить общую теорию Галуа произвольных нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Основу алгебраической техники составляет поиск специального вида простых дифференциальных идеалов в тензорных произведениях дифференциальных колец. Основные результаты, демонстрирующие работу полученной техники, – это теорема о конструируемости дифференциального замыкания и общая теорема о соответствии Галуа для нормальных расширений.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: тензорные произведения, конструируемые поля, дифференциальное замыкание, поле разложения, дифференциальная группа Галуа.

§ 1. Введение

Первое алгебраическое доказательство существования и единственности дифференциального замыкания для дифференциального поля с конечным числом попарно коммутирующих дифференцирований появилось в работе Е. Р. Колчина¹ [1]. Достаточно подробный обзор работ по дифференциально замкнутым полям содержится во введении упомянутой работы, однако некоторые вопросы о структуре дифференциального замыкания остались не выясненными. С другой стороны, еще в работе С. Шелаха [2] используется метод, связанный с полными тотально трансцендентными теориями первого порядка, который содержит несколько больше информации о дифференциальном замыкании. По мнению Колчина (см. [1; с. 141]), доказательство Шелаха является одним из самых сложных. Работа Колчина [1] является попыткой проделать все доказательства на языке дифференциальной алгебры. Мы же собираемся изложить доказательство Шелаха в случае дифференциальных полей характеристики нуль без использования теоретико-модельной техники. Для этого развивается достаточно простая техника поиска дифференциальных идеалов в тензорных произведениях дифференциальных колец. Таким образом, мы не только переводим на алгебраический язык достаточно мощное доказательство Шелаха, но и делаем его существенное упрощение.

Теоретико-модельное доказательство разбивается на два этапа, мы будем обсуждать его только применительно к теории дифференциальных полей с конечным числом дифференцирований. Вначале вводится понятие конструируемой

¹Колчин использует термин *constrained closure*.

модели и для полных теорий доказывается теорема Рессера о единственности конструируемой модели² (см. [3; теорема 10.18]). Затем показывается, что для тотально трансцендентных теорий все простые модели конструируемы (см. [3; гл. 18, пп. а, b]). В настоящей работе мы будем придерживаться той же схемы доказательства. Самым сильным результатом в этом направлении является доказательство теоремы 35 о конструируемости дифференциального замыкания. Более того, полученная алгебраическая техника позволяет продвинуться дальше и получить понятие поля разложения для произвольной системы дифференциальных уравнений и для полей разложения доказать теорему о соответствии Галуа для нормальных расширений.

На сегодняшний день существует огромное количество работ по дифференциальной теории Галуа различных видов дифференциальных уравнений. Например, теория Пикара–Вессьо линейных дифференциальных уравнений (см. [4]) или теория Пикара–Вессьо параметризованных линейных дифференциальных уравнений (см. [5]). Одним из основных минусов этих работ является избыточное предположение о свойствах изначального дифференциального поля, а именно в теории Пикара–Вессьо предполагается алгебраическая замкнутость констант, а в теории параметризованных уравнений еще больше – дифференциальная замкнутость. В приложениях этих теорий подобные предположения недопустимы, особенно предположение о дифференциальной замкнутости, так как исходные поля обычно являются полями, построенными из функций, а их дифференциальные замыкания слишком большие и достаточно сложно устроены. Введенное нами понятие поля разложения устраняет этот недостаток, а именно обычное расширение Пикара–Вессьо (и его параметризованный аналог) является частным случаем поля разложения, для построения которого не требуется дополнительных предположений на исходное поле.

С подробным обзором существующих теорий Галуа можно познакомиться в работе П. Дж. Кэсиди и М. Ф. Сингера (см. [5; с. 135–137]). Однако наиболее интересным представляется цикл работ А. Пиллая (см. [6]–[8]), в которых он полностью описывает структуру дифференциального замыкания в терминах алгебраического замыкания, обобщенных расширений Галуа и расширений тривиальными элементами, соответствующих симметрическим группам. В итоге хотелось бы найти чисто алгебраическое доказательство результатов Пиллая. Настоящая работа лишь первый шаг на этом пути. Однако уже в ней удастся сконструировать алгебраический аппарат, позволяющий не использовать теоретико-модельную технику на некоторых этапах. Кроме того, стоит отметить, что развитая нами техника находит неожиданное применение в разностной алгебре, а именно, пользуясь ею, можно доказать существование разностно замкнутых полей в достаточно широком смысле³.

Завершающим штрихом в настоящей работе является теорема 61, в которой обсуждается связь дифференциального спектра дифференциально конечно порожденной алгебры над полем с соответствующим дифференциально алгебраическим многообразием. Показывается, что с этой точки зрения множество локально замкнутых точек дифференциального спектра играет ту же роль, что

²Мы будем использовать для ссылок книгу Б. Пуаза, а не оригинальную работу Шелаха.

³Указанное применение содержится в работе <http://arxiv.org/abs/0908.3865>.

и максимальный спектр для конечно порожденных алгебр над полем в коммутативном случае.

Работа была инициирована А.И. Овчинниковым. Он познакомил автора с книгой Б. Пуаза [3] и сформулировал вопросы, решаемые в этой работе. При подготовке работы неоценимую помощь оказал М.Ф. Сингер. Благодаря его комментариям появился подробный пример, иллюстрирующий разного рода эффекты. Выражаю признательность моему научному руководителю А.В. Михалеву.

§ 2. Подробная структура работы

Работа состоит из трех ключевых частей. Первая – это §§ 3 и 4, в них собрана вся основная техника, на которую опирается дальнейшее изложение. Рассматриваются вопросы построения дифференциальных идеалов с требуемыми свойствами и на их основе – специальных видов дифференциальных замыканий. Переводу на алгебраический язык теоретико-модельных результатов посвящены §§ 5 и 6, составляющие вторую часть текста. Впоследствии мы определим понятия поля разложения произвольной системы дифференциальных уравнений и дифференциальной группы Галуа. Изучению новых понятий и связи их с известными теориями посвящены §§ 7–9.

Опишем структуру работы более подробно. § 3 посвящен используемой терминологии. § 4 – это “сердце” развиваемой техники. Он состоит из трех пунктов, в каждом из которых мы строим специфические простые дифференциальные идеалы в тензорных произведениях дифференциальных колец. Пункт 4.1 посвящен построению простого дифференциального идеала с полем вычетов, не содержащим новых констант (теорема 1), и эта техника прилагается к теории Пикара–Вессю (утверждение 3) и построению дифференциального замыкания с алгебраическим полем констант (теорема 5). В п. 4.2 рассматриваются простые дифференциальные идеалы с чуть более тонким свойством (теорема 11). Как и в п. 4.1, на основе свойств полученных идеалов строится соответствующее дифференциальное замыкание (теорема 12). Пункт 4.3 посвящен простым дифференциальным идеалам, обладающим некоторым универсальным свойством (теорема 14). Такие идеалы позволяют строить конструируемые поля и конструируемые дифференциальные замыкания (теорема 17).

Детальному изучению конструируемых полей посвящен § 5. Наша основная цель – перевод на алгебраический язык теоретико-модельного доказательства теоремы Рессера – теоремы 10.18 из [3; гл. 10] (см. теорему 33). В § 6 на алгебраический язык переводится доказательство теоремы 18.1 из [3; гл. 18] (см. теорему 35).

Благодаря результатам §§ 5 и 6 мы в состоянии определить в § 7 понятие поля разложения для произвольной системы дифференциальных уравнений. В п. 7.1 мы определяем абстрактное поле разложения, детально изучаем его свойства и показываем связь с уже известными понятиями. Существованию и единственности посвящены утверждения 39 и 40. Связи полей разложения друг с другом посвящен п. 7.2. Все это приводит нас к понятию нормально-го расширения, которое представлено в п. 7.3 и составляет основной объект

изучения теории Галуа. В § 8 доказывается теорема о соответствии Галуа для нормальных расширений дифференциальных полей (теорема 59) и приводится пример, наглядно иллюстрирующий поведение определяемых нами объектов.

В § 9 дается геометрическая интерпретация локально замкнутых точек дифференциального спектра дифференциально конечно порожденной алгебры над произвольным дифференциальным полем (теорема 61) в терминах соответствующего дифференциально алгебраического многообразия и группы Галуа дифференциального замыкания.

§ 3. Определения и обозначения

На протяжении всей статьи мы считаем фиксированным некоторое базовое дифференциальное поле K характеристики нуль. Все дифференциальные кольца предполагаются алгебрами над K с конечным множеством попарно коммутирующих дифференцирований

$$\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}.$$

Дифференциально конечно порожденными алгебрами называются дифференциально конечно порожденные алгебры над K . *Простым кольцом* называется дифференциальное кольцо без нетривиальных дифференциальных идеалов. Если не сказано, над каким кольцом берется тензорное произведение, то подразумевается тензорное произведение над полем K . Дифференциальный спектр кольца A обозначается $\text{Spec}^\Delta A$, а через $\text{SMax}^\Delta A$ обозначается множество локально замкнутых точек дифференциального спектра. Поле $(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}}$ называется *полем вычетов простого идеала* $\mathfrak{p} \subseteq A$. Поле частных некоторой области целостности B обозначается через $\text{Qt}(B)$. Если в кольце D заданы два подкольца A и B , то через $A \cdot B$ будет обозначаться наименьшее подкольцо в D , порожденное A и B . Определения и используемые обозначения из коммутативной алгебры такие же, как в работе [9], а из дифференциальной алгебры – как в [10].

§ 4. Идеалы тензорных произведений

В этом параграфе строятся специальные типы дифференциальных идеалов в тензорных произведениях дифференциальных алгебр. Поиск специального вида простых дифференциальных идеалов означает поиск специального вида композитов дифференциальных полей. Такие композиты возникают, в частности, при построении дифференциально замкнутых полей, содержащих некоторое заданное дифференциальное поле. Поэтому чем более изощренные идеалы мы сможем найти, тем более деликатное дифференциально замкнутое надполе мы сможем построить. Здесь ищутся дифференциальные простые идеалы трех типов. Пользуясь каждым из них, мы показываем существование специальных видов дифференциально замкнутых полей. Мы начинаем с самого грубого условия – отсутствия новых констант, которое хорошо работает для расширений Пикара–Вессю, и заканчиваем построением дифференциального замыкания фиксированного поля.

Пусть $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ – некоторое множество простых дифференциальных K -алгебр. Предположим, что вдобавок алгебры B_α дифференциально конечно порождены. Рассмотрим $R = \bigotimes_\alpha B_\alpha$ как индуктивный (прямой) предел конечных тензорных произведений над K (см. [9; гл. 2, упражнение 23]).

4.1. Алгебраические расширения констант. Для начала выделим наиболее простой класс дифференциальных идеалов в R , связанный с константами.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ – некоторое множество простых дифференциально конечно порожденных K -алгебр. Обозначим через C подполе констант поля K . Тогда существует такой простой дифференциальный идеал $\mathfrak{p}$ в $R = \bigotimes_\alpha B_\alpha$, что константы поля вычетов $\mathfrak{p}$ алгебраичны над C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $\mathbb{S}$, состоящее из $\bigotimes_{\theta \in \Theta} B_\theta$ и простого дифференциального идеала $\mathfrak{p}_\Theta$ в нем, где $\Theta \subseteq \Lambda$ и константы поля вычетов $\mathfrak{p}_\Theta$ алгебраические над C . Упорядочим его следующим образом:

$$\left(\bigotimes_{\theta \in \Theta_1} B_\theta, \mathfrak{p}_{\Theta_1} \right) \leq \left(\bigotimes_{\theta \in \Theta_2} B_\theta, \mathfrak{p}_{\Theta_2} \right) \iff \Theta_1 \subseteq \Theta_2, \quad \mathfrak{p}_{\Theta_2} \cap \bigotimes_{\theta \in \Theta_1} B_\theta = \mathfrak{p}_{\Theta_1}.$$

Заметим, что $\mathbb{S}$ не пусто, например в нем лежат пары $(B_\alpha, 0)$ для любого элемента α (см. [10; гл. III, § 10, предложение 7, (d)]). Построенное множество удовлетворяет условиям леммы Цорна, для чего нужно перейти к прямому пределу по цепи. Пусть $(\bigotimes_{\theta \in \hat{\Theta}} B_\theta, \mathfrak{p}_{\hat{\Theta}})$ – максимальный элемент множества $\mathbb{S}$. Покажем, что $\bigotimes_{\theta \in \hat{\Theta}} B_\theta$ совпадает со всем кольцом R .

Введем обозначения

$$R_{\hat{\Theta}} = \bigotimes_{\theta \in \hat{\Theta}} B_\theta / \mathfrak{p}_{\hat{\Theta}}, \quad B_{\hat{\Theta}} = \bigotimes_{\theta \in \hat{\Theta}} B_\theta, \quad S = B_{\hat{\Theta}} \setminus \mathfrak{p}_{\hat{\Theta}}.$$

Рассмотрим кольцо $R' = B_{\hat{\Theta}} \otimes B_\alpha$. Определим в нем $\mathfrak{p}'$ как максимальный дифференциальный идеал, сужающийся в $\mathfrak{p}_{\hat{\Theta}}$. Покажем, что $(R', \mathfrak{p}')$ содержится в $\mathbb{S}$, тогда получим противоречие с максимальнойностью. Действительно, $S^{-1}R'/\mathfrak{p}'$ является простой дифференциально конечно порожденной алгеброй над полем $S^{-1}R_{\hat{\Theta}}$, константы которого алгебраичны над полем констант поля K (см. [10; гл. III, § 10, предложение 7, (d)]). А значит, и константы поля вычетов $\mathfrak{p}'$ алгебраичны над C .

В следующем определении предполагается, что на дифференциальных кольцах действует единственное дифференцирование.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Дифференциальная алгебра D над полем K называется универсальным кольцом Пикара–Вессю, если выполняются следующие свойства:

- 1) D является простым дифференциальным кольцом;
- 2) для любого линейного дифференциального уравнения вида $y' = Ay$, где A – матрица из элементов поля K , существует фундаментальная матрица F решений с коэффициентами в D ;

- 3) как K -алгебра D порождено элементами всех фундаментальных матриц F и $\det(F)^{-1}$.

Это определение можно найти в [4; гл. 10, § 1]. Следующее утверждения является следствием теоремы 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Для любого обыкновенного дифференциального поля K с алгебраически замкнутым подполем констант существует универсальное расширение Пикара–Вессю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{B_\alpha\}$ – семейство всех расширений Пикара–Вессю с точностью до изоморфизма. Рассмотрим в кольце $R = \bigotimes_\alpha B_\alpha$ идеал $\mathfrak{p}$ из теоремы 1. Тогда кольцо $R/\mathfrak{p}$ обладает всеми нужными свойствами определения 2, кроме, быть может, 1). Однако поскольку $R/\mathfrak{p}$ не содержит новых констант, то из [4; гл. 1, § 3, определение 1.21 и предложение 1.22] следует, что $R/\mathfrak{p}$ является прямым пределом простых дифференциальных колец, а следовательно, и само просто.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Говорят, что поле *дифференциально замкнуто*, если любая простая дифференциально конечно порожденная алгебра над ним с ним же совпадает.

Это определение можно найти в [1], [5; определение 3.2], [11; с. 4490], [12; § 4, с. 28] или [13]. Чуть более нетривиальным применением теоремы 1 является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть K – дифференциальное поле с подполем констант C . Тогда существует дифференциально замкнутое поле L , содержащее K , такое, что поле констант поля L является алгебраическим замыканием поля C .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $\{B_\alpha\}$ всех простых дифференциально конечно порожденных алгебр над K с точностью до изоморфизма. Рассмотрим идеал $\mathfrak{p}$, как в теореме 1. Пусть L_1 – поле вычетов идеала $\mathfrak{p}$. Проведем ту же процедуру для L_1 , получим L_2 , для L_2 получим L_3 и т.д. В результате получаем цепочку возрастающих дифференциальных полей

$$K = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_n \subseteq \dots$$

Положим $L = \bigcup_k L_k$. Видим, что построенное поле не содержит неалгебраических констант. Отметим, что поле L_{k+1} построено так, что для любого нетривиального дифференциального идеала в кольце дифференциальных многочленов над полем L_k найдется общий нуль в поле L_{k+1} .

Покажем, что L дифференциально замкнуто. Пусть

$$B = L\{y_1, \dots, y_n\}/\mathfrak{m}$$

– простая дифференциально конечно порожденная алгебра. Теорема Ритта–Роденбаша о базисе гласит, что найдется такое конечное множество дифференциальных многочленов F , что $\mathfrak{m} = \{F\}$. Но множество всех коэффициентов элементов из F конечно, а значит, они все определены над каким-то L_k для подходящего номера k . По построению L_{k+1} семейство F имеет в нем общий нуль

$\bar{a} \in L_{k+1} \subseteq L$, а значит, определен дифференциальный гомоморфизм $B \rightarrow L$ по правилу $y_i \mapsto a_i$. Так как B проста и содержит L в качестве подалгебры, то последний гомоморфизм – изоморфизм.

4.2. Локальная простота. Прежде всего введем одно определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Дифференциальное кольцо B будем называть *локально простым*, если существует такой элемент $s \in B$, что кольцо B_s – простое дифференциальное кольцо. Простой дифференциальный идеал $\mathfrak{p}$ дифференциального кольца B будем называть *локально максимальным*, если алгебра $B/\mathfrak{p}$ локально проста.

Такие идеалы – это в точности локально замкнутые точки дифференциального спектра. В терминологии Колчина такие алгебры называются *ограниченными*⁴ (см. [1]).

Для получения более тонких результатов нам требуется более тонкая техника. Главная цель этого пункта – доказать теорему 11. В следующей лемме заключена вся основная техника.

ЛЕММА 7 (о расщеплении). Пусть D – дифференциальная K -алгебра, являющаяся областью целостности, а A и B – такие его дифференциальные K -подалгебры, что $D = A \cdot B$ и B дифференциально конечно порождена. Тогда существуют такие дифференциально конечно порожденная K -подалгебра C в A и элемент $s \in C \cdot B$, что

$$D_s = A \bigotimes_C (C \cdot B)_s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем дифференциальные образующие $b_1, \dots, b_n$ в алгебре B . Тогда алгебра D порождается над A выбранными элементами как дифференциальное кольцо.

Следовательно, D имеет вид $A\{y_1, \dots, y_n\}/\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ – некоторый простой дифференциальный идеал. Пусть $G = \{f_1, \dots, f_m\}$ – характеристическое множество для идеала $\mathfrak{p}$ при некотором фиксированном ранжире и h – произведение инициалов и сепарант элементов из G . Таким образом, имеем

$$D_h = A\{y_1, \dots, y_n\}_h/[f_1, \dots, f_n].$$

Элементы из G зависят от конечного числа коэффициентов; выберем дифференциальную подалгебру C , порожденную ими. Тогда, умножив тензорно над C на A следующую точную тройку:

$$0 \rightarrow [f_1, \dots, f_m] \rightarrow C\{y_1, \dots, y_n\}_h \rightarrow C\{y_1, \dots, y_n\}_h/[f_1, \dots, f_n] \rightarrow 0,$$

получаем требуемое расщепление.

Из леммы о расщеплении непосредственно получаем следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть D – дифференциальная K -алгебра, являющаяся областью целостности, а A и B – такие его дифференциальные K -подалгебры,

⁴В оригинале – constrained.

что $D = A \cdot B$ и B дифференциально конечно порождена. Тогда для любого элемента $h \in D$ существуют такие дифференциально конечно порожденная K -подалгебра C в A и элемент $s \in C \cdot B$, что $h \in C \cdot B$ и верно равенство

$$(A \cdot B)_{sh} = A \bigotimes_C (C \cdot B)_{sh}.$$

Видим, что C можно заменить на любое большее дифференциальное кольцо.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть D – дифференциальная K -алгебра, являющаяся областью целостности, а A и F – такие его дифференциальные K -подалгебры, что $D = A \cdot F$ и F – дифференциально конечно порожденное над K поле. Тогда для любого элемента $h \in D$ существуют такие дифференциально конечно порожденная K -алгебра C в A и элемент $s \in C \cdot F$, что $h \in C \cdot F$ и верно равенство

$$(A \cdot F)_{sh} = A \bigotimes_C (C \cdot F)_{sh}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что существует такая дифференциально конечно порожденная K -алгебра, что F является его полем частных. Применив предыдущее следствие, получим

$$(A \cdot B)_{sh} = A \bigotimes_C (C \cdot B)_{sh}.$$

Если $S = B \setminus \{0\}$, то

$$\begin{aligned} (A \cdot F)_{sh} &= (A \cdot S^{-1}B)_{sh} = S^{-1}((A \cdot B)_{sh}) \\ &= S^{-1} \left(A \bigotimes_C (C \cdot B)_{sh} \right) = A \bigotimes_C (C \cdot S^{-1}B)_{sh} = A \bigotimes_C (C \cdot F)_{sh}. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. Пусть A и B – дифференциальные C -алгебры, где C – простое дифференциальное кольцо. Тогда каноническое отображение

$$\mathrm{Spec}^\Delta A \bigotimes_C B \rightarrow \mathrm{Spec}^\Delta A \times \mathrm{Spec}^\Delta B$$

является сюръективным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – множество ненулевых элементов C . Так как C простое, то для любой дифференциальной C -алгебры D имеет место равенство

$$\mathrm{Spec}^\Delta D = \mathrm{Spec}^\Delta S^{-1}D.$$

Таким образом, утверждение достаточно доказать для случая, когда C – поле. Пусть $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ – произвольная пара простых дифференциальных идеалов из указанного произведения, и пусть $S = A \setminus \mathfrak{p}$ и $T = B \setminus \mathfrak{q}$. Тогда из [9; гл. 3, упражнение 21] и свойств тензорного произведения следует, что прообраз данной пары при указанном отображении естественным образом гомеоморфен

$$\mathrm{Spec}^\Delta S^{-1}(A/\mathfrak{p}) \bigotimes_C T^{-1}(B/\mathfrak{q}).$$

Так как C – поле, то последнее кольцо не нулевое, а значит, и его дифференциальный спектр не пуст.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ – некоторое множество простых дифференциально конечно порожденных K -алгебр. Тогда существует такой простой дифференциальный идеал $\mathfrak{p}$ в кольце $R = \bigotimes_\alpha B_\alpha$, что любая дифференциально конечно порожденная K -подалгебра B в поле вычетов идеала $\mathfrak{p}$ является локально простой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству теоремы 5 рассмотрим множество $\mathbb{S}$, состоящее из $\bigotimes_{\theta \in \Theta} B_\theta$ и простого дифференциального идеала $\mathfrak{p}_\Theta$ в нем, где $\Theta \subseteq \Lambda$ и любая дифференциально конечно порожденная K -подалгебра B в поле вычетов идеала $\mathfrak{p}_\Theta$ является локально простой. Упорядочим его следующим образом:

$$\left(\bigotimes_{\theta \in \Theta_1} B_\theta, \mathfrak{p}_{\Theta_1} \right) \leq \left(\bigotimes_{\theta \in \Theta_2} B_\theta, \mathfrak{p}_{\Theta_2} \right) \iff \Theta_1 \subseteq \Theta_2, \quad \mathfrak{p}_{\Theta_2} \cap \bigotimes_{\theta \in \Theta_1} B_\theta = \mathfrak{p}_{\Theta_1}.$$

Заметим, что $\mathbb{S}$ не пусто, например в нем лежат $(B_\alpha, 0)$ для любого элемента α (см., например, [10; гл. III, § 10, предложение 7, (b)]). Построенное множество удовлетворяет условиям леммы Цорна. Пусть $(\bigotimes_{\theta \in \hat{\Theta}} B_\theta, \mathfrak{p}_{\hat{\Theta}})$ – его максимальный элемент. Покажем, что $\bigotimes_{\theta \in \hat{\Theta}} B_\theta$ совпадает со всем кольцом R . Введем обозначения

$$R_{\hat{\Theta}} = \bigotimes_{\theta \in \hat{\Theta}} B_\theta / \mathfrak{p}_{\hat{\Theta}}, \quad B_{\hat{\Theta}} = \bigotimes_{\theta \in \hat{\Theta}} B_\theta, \quad S = B_{\hat{\Theta}} \setminus \mathfrak{p}_{\hat{\Theta}}, \quad A = S^{-1} B_{\hat{\Theta}}.$$

Рассмотрим кольцо $R' = B_{\hat{\Theta}} \otimes B_\alpha$. Определим в нем $\mathfrak{p}'$ как максимальный дифференциальный идеал, сужающийся в $\mathfrak{p}_{\hat{\Theta}}$. Покажем, что $(R', \mathfrak{p}')$ содержится в $\mathbb{S}$, тогда получим противоречие с максимальнойностью.

Обозначим кольцо $S^{-1}(R'/\mathfrak{p}')$ через D , и пусть B – произвольная дифференциально конечно порожденная K -подалгебра в поле вычетов идеала $\mathfrak{p}'$. Так как B дифференциально конечно порождена, то существует такой $h \in D$, что $B \subseteq D_h$. Положим $B' = B \cdot B_\alpha$. По построению выполнено равенство

$$D_h = (S^{-1} A \cdot B')_h.$$

Применяя следствие 8, получаем

$$D_{sh} = S^{-1} A \bigotimes_C (C \cdot B')_{sh}$$

для подходящих s и C . Но C – дифференциально конечно порожденная K -алгебра в $S^{-1} A$, а значит, C локально проста. Обратив еще один элемент, можно считать, что C проста. Тогда предложение 10 гарантирует, что дифференциально конечно порожденная K -алгебра $(C \cdot B')_{sh}$ проста. Тогда из [10; гл. III, § 10, предложение 7, (b)] следует, что B локально проста. Получено противоречие с максимальнойностью.

Нужно заметить, что идеал, построенный в теореме 11, является специальным случаем идеала из теоремы 1. То есть поле вычетов построенного идеала также не содержит алгебраических констант над полем констант поля K . Покажем применение теоремы 1.

ТЕОРЕМА 12. Пусть K – дифференциальное поле. Тогда существует дифференциально замкнутое поле L , содержащее K , такое, что любая дифференциально конечно порожденная K -подалгебра в L локально проста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 5, рассмотрим множество $\{B_\alpha\}$ всех простых дифференциально конечно порожденных алгебр над K с точностью до изоморфизма. Рассмотрим идеал $\mathfrak{p}$ кольца $R = \bigotimes_\alpha B_\alpha$, как в теореме 11. Считаем L_1 его полем вычетов. Проведем ту же процедуру для L_1 , получим L_2 , для L_2 получим L_3 и т.д. В результате получаем цепочку возрастающих полей

$$K = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_n \subseteq \dots$$

Определим искомое дифференциальное поле: $L = \bigcup_k L_k$. Дифференциальная замкнутость доказывается так же, как в теореме 5, поэтому ее доказательство мы опустим.

Покажем, что полученное поле обладает указанным свойством. Будем вести индукцию по номеру поля. Для L_1 это ясно из построения. Покажем переход от k к $k+1$. Пусть дифференциально конечно порожденная алгебра B над K содержится в L_{k+1} ; тогда алгебра $L_k \cdot B$ локально проста по построению L_{k+1} . Пусть h – элемент такой, что $(L_k \cdot B)_h$ проста. По следствию 8 получаем, что

$$(L_k \cdot B)_{sh} = L_k \bigotimes_C (C \cdot B)_{sh}$$

для некоторых s и C . Как и в теореме 11, C можно считать простой дифференциально конечно порожденной K -алгеброй. Тогда утверждение 10 гарантирует, что $C \cdot B$ локально проста, а значит, предложение 7, (b) из [10; гл. III, § 10] гарантирует локальную простоту алгебры B .

4.3. Универсальные расширения. Поле, построенное в теореме 12, уже почти дифференциальное замыкание. Напомним определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Дифференциально замкнутое поле L , содержащее K , называется его *дифференциальным замыканием*, если для любого дифференциально замкнутого поля D , содержащего K , существует вложение L в D над K .

Ниже мы построим некоторое дифференциальное замыкание весьма специфическим способом. Такое построение является насущной необходимостью на пути построения поля разложения.

Пусть на множестве Λ (напомним: мы рассматриваем кольцо $R = \bigotimes_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$) задано некоторое вполне упорядочивание. Тогда определим вполне упорядоченное семейство дифференциальных подколец $\{R_\alpha\}$ следующим образом:

- 1) $R_0 = B_0$;
- 2) $R_{\alpha+1} = R_\alpha \otimes B_{\alpha+1}$;
- 3) $R_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} R_\beta$ для предельных α .

Если $\mathfrak{p}$ – некоторый идеал кольца R , то через $\mathfrak{p}_\alpha$ будем обозначать его сужение на R_α .

ТЕОРЕМА 14. Пусть $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ – некоторое множество простых дифференциально конечно порожденных K -алгебр, и пусть на множестве Λ задано некоторое вполне упорядочивание. Тогда существует такой простой дифференциальный идеал $\mathfrak{p}$ в $R = \bigotimes_\alpha B_\alpha$, что любой ненулевой дифференциальный идеал кольца $R_{\alpha+1}/\mathfrak{p}_{\alpha+1}$ сужается в ненулевой идеал кольца $R_\alpha/\mathfrak{p}_\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем строить простой дифференциальный идеал $\mathfrak{p}_\alpha$ в кольце R_α по трансфинитной индукции. Положим $\mathfrak{p}_0 = 0$ на предельных ординалах $\mathfrak{p}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{p}_\beta$. Остается разобрать случай не предельных ординалов.

Пусть $\mathfrak{p}_\alpha$ уже построен, построим $\mathfrak{p}_{\alpha+1}$ в $R_{\alpha+1}$ как максимальный дифференциальный идеал, сужающийся в $\mathfrak{p}_\alpha$. Тогда по построению идеал $\mathfrak{p}$ обладает всеми необходимыми свойствами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. Пусть идеал $\mathfrak{p}$ такой же, как в теореме 14. Тогда для любого дифференциально замкнутого поля L , содержащего K , существует вложение поля вычетов идеала $\mathfrak{p}$ в L над K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале сделаем одно простое замечание. Для любого дифференциального подполя F дифференциально замкнутого поля L и любой простой дифференциально конечно порожденной алгебры B над полем F существует вложение B в L над F .

Определим поле K_α как поле вычетов идеала $\mathfrak{p}_\alpha$. Видим, что поле вычетов $\mathfrak{p}$ является объединением полей K_α . Будем строить вложение по трансфинитной индукции. По нашему замечанию существует вложение R_0 в L , а следовательно, и вложение K_0 в L . Пусть K_α уже вложено, тогда

$$K_\alpha \cdot (R_{\alpha+1}/\mathfrak{p}_{\alpha+1}) = S^{-1}(R_{\alpha+1}/\mathfrak{p}_{\alpha+1}),$$

где $S = R_\alpha \setminus \mathfrak{p}_\alpha$, является простой алгеброй в силу определения идеала $\mathfrak{p}$. Следовательно, и $K_{\alpha+1}$ может быть вложено. На предельных ординалах вложение получается автоматически.

СЛЕДСТВИЕ 16. Пусть идеал $\mathfrak{p}$ такой же, как в теореме 14. Тогда в его поле вычетов любая дифференциально конечно порожденная K -подалгебра локально проста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – дифференциально замкнутое поле, содержащее K , такое, как указано в теореме 12. Тогда поле вычетов идеала $\mathfrak{p}$ может быть вложено в L . Следовательно, требуемое свойство выполняется.

Теперь опишем процесс построения дифференциального замыкания. Впоследствии нам очень пригодится его структура.

ТЕОРЕМА 17. Пусть K – дифференциальное поле. Тогда существуют дифференциально замкнутое поле L и такая вполне упорядоченная цепочка его дифференциальных подполей $\{L_\alpha\}$, что:

- 1) $L_0 = K$;
- 2) $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$;
- 3) $L_{\alpha+1}$ дифференциально конечно порождено над L_α ;

- 4) любая дифференциально конечно порожденная над L_α подалгебра в $L_{\alpha+1}$ локально проста.

Причем указанное поле L является дифференциальным замыканием поля K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $\{B_\alpha\}$ всех простых дифференциально конечно порожденных алгебр над K с точностью до изоморфизма. Рассмотрим идеал $\mathfrak{p}$ в кольце $R = \bigotimes_\alpha B_\alpha$, как в теореме 14. Пусть K_1 – поле вычетов идеала $\mathfrak{p}$. Определим $K_{1\alpha}$ как поле вычетов идеала $\mathfrak{p}_\alpha$. Прodelав ту же процедуру для K_1 , получим K_2 , для K_2 получим K_3 и т.д. В результате получаем цепочку возрастающих дифференциальных полей

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n \subseteq \dots$$

Положим $L = \bigcup_k K_k$. Объединяя счетное число вполне упорядоченных множеств, получаем единую нумерацию для всех подполей $K_{k\alpha}$. Эта цепочка удовлетворяет всем необходимым требованиям в силу [10; гл. III, § 10, предложение 7, (b)].

Дифференциальная замкнутость поля L доказывается так же, как в теореме 5. Так как по построению K_{k+1} универсально над K_k в указанном смысле (утверждение 15), то и все поле L обладает тем же свойством над K .

§ 5. Конструируемые поля

Этот параграф посвящен более детальному исследованию дифференциальных полей, построенных в теореме 17. Дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Пусть заданы некоторое дифференциальное поле L , содержащее поле K , и такая вполне упорядоченная цепочка его дифференциальных подполей $\{L_\alpha\}$, что:

- 1) $L_0 = K$;
- 2) $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$;
- 3) $L_{\alpha+1}$ дифференциально конечно порождено над L_α ;
- 4) любая дифференциально конечно порожденная над L_α подалгебра в $L_{\alpha+1}$ локально проста.

Тогда будем говорить, что L *конструируемо над K* , а цепочку дифференциальных полей $\{L_\alpha\}$ будем называть *конструкцией поля L* .

Термин позаимствован из [3; гл. 10, п. d]. Начнем со следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 19. Пусть заданы некоторое дифференциальное поле L , содержащее поле K , и такая вполне упорядоченная цепочка его дифференциальных подполей $\{L_\alpha\}$, что:

- 1) $L_0 = K$;
- 2) $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$;
- 3) $L_{\alpha+1}$ не более чем счетно дифференциально порождено над L_α ;
- 4) любая дифференциально конечно порожденная над L_α подалгебра в $L_{\alpha+1}$ локально проста.

Тогда L конструируемо, более того, цепочку $\{L_\alpha\}$ можно доуплотнить до конструкции поля L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно научиться уплотнять до конструкции один этаж $L_\alpha \subseteq L_{\alpha+1}$. Пусть $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ – система дифференциальных образующих $L_{\alpha+1}$ над L_α . Определим цепочку дифференциальных L_α -алгебр B_n и их полей частных F_n следующим образом:

$$B_n = L_\alpha\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Покажем, что поле F_{n+1} над полем F_n обладает свойством 4) из определения 18 конструируемого поля. Тогда, собрав все такие поля для всех ординалов, мы получим требуемую конструкцию.

Пусть B – дифференциально конечно порожденная F_n -алгебра в F_{n+1} . Тогда она имеет вид

$$B = F_n\{z_1, \dots, z_k\}$$

для некоторых $z_1, \dots, z_k \in F_{n+1}$. Таким образом, B является локализацией алгебры $B_n\{z_1, \dots, z_k\}$. Последняя в силу условия 4) из формулировки утверждения является локально простой. Так как локализация локально простой алгебры локально проста, мы получаем требуемое.

Теперь сформулируем условия, гарантирующие конструируемость над подполем. Введем несколько вспомогательных определений, также заимствованных из [3; гл. 10, п. d].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Пусть L – конструируемое дифференциальное поле над K . Тогда в силу условий 3) и 4) из определения 18 для любого ординала α найдется такая простая дифференциально конечно порожденная K -алгебра $B_\alpha \subseteq L_{\alpha+1}$, что поле $L_{\alpha+1}$ является полем частных алгебры $L_\alpha \cdot B_\alpha$. Семейство дифференциальных K -алгебр $\{B_\alpha\}$ будем называть *порождающим множеством* для конструируемого поля L .

Следует отметить, что, во-первых, порождающее семейство может быть выбрано не единственным способом. Во-вторых, любое кольцо из порождающего семейства является дифференциально конечно порожденной алгеброй над базовым полем K . Заметим, что поле L_α восстанавливается по любому порождающему семейству следующим образом:

$$L_{\alpha+1} = L_\alpha\langle B_\alpha \rangle,$$

а для предельных ординалов

$$L_\alpha = K\langle \{B_\beta\}_{\beta < \alpha} \rangle.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 21. Пусть L – конструируемое дифференциальное поле над K и $\{B_\alpha\}$ – некоторое порождающее семейство. Тогда для любого B_α существуют такое конечное множество $\{B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_t}\}$ с условием $\alpha_i < \alpha$ и такой элемент $s \in F_\alpha \cdot B_\alpha$, что

$$(L_\alpha \cdot B_\alpha)_s = L_\alpha \bigotimes_{F_\alpha} (F_\alpha \cdot B_\alpha)_s,$$

где

$$F_\alpha = K\langle B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_t} \rangle$$

и алгебра $(F_\alpha \cdot B_\alpha)_s$ проста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгебра $L_\alpha \cdot B_\alpha$ локально проста, следовательно, существует такой элемент $h \in L_\alpha \cdot B_\alpha$, что алгебра

$$(L_\alpha \cdot B_\alpha)_h$$

проста. Тогда по следствию 8 из леммы “о расщеплении” существуют такие дифференциально конечно порожденная K -алгебра $C \subseteq L_\alpha \cdot B_\alpha$ и элемент $s' \in C \cdot B_\alpha$, что

$$(L_\alpha \cdot B_\alpha)_{s'h} = L_\alpha \bigotimes_C (C \cdot B_\alpha)_{s'h}.$$

Обозначим произведение $s'h$ через s . Так как алгебра C дифференциально конечно порождена над K , то существует такой конечный набор K -алгебр

$$\{B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_t}\},$$

что C принадлежит полю

$$F_\alpha = K\langle B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_t} \rangle,$$

причем верно разложение

$$(L_\alpha \cdot B_\alpha)_s = L_\alpha \bigotimes_{F_\alpha} (F_\alpha \cdot B_\alpha)_s.$$

Так как правая часть равенства – простое дифференциальное кольцо, то из утверждения 10 следует, что и $(F_\alpha \cdot B_\alpha)_s$ проста.

Предположим, что некоторое порождающее семейство K -алгебр $\{B_\alpha\}$ для дифференциального поля L фиксировано. Определим понятие пакета кольца B_α .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Пусть L – конструируемое дифференциальное поле над K и $\{B_\alpha\}$ – некоторое порождающее семейство. Определение дадим по индукции. *Пакетом* π_0 алгебры B_0 объявляется пустое множество. Пусть пакет определен для B_β при всех $\beta < \alpha$, определим пакет B_α . Пусть $\{B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_t}\}$ – семейство K -алгебр, как в утверждении 21, для алгебры B_α . Тогда его *пакетом* π_α называется следующее объединение:

$$\{B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_t}\} \cup \bigcup_i \pi_{\alpha_i}.$$

По индукции получаем, что пакет любой K -алгебры из порождающего семейства состоит из конечного числа K -алгебр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. *Пакетное поле алгебры* B_α определим как дифференциальное поле, порожденное всеми алгебрами из пакета

$$F_\alpha = K\langle \pi_\alpha \rangle.$$

Заметим, что пакеты определены не однозначно. Из определения пакета и утверждения 21 вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 24 (о пакетном расщеплении). Пусть L – конструируемое дифференциальное поле над K , $\{B_\alpha\}$ – некоторое порождающее семейство и для каждого α фиксирован некоторый пакет π_α . Тогда для любого α существует такой элемент $s \in F_\alpha \cdot B_\alpha$, что

$$(L_\alpha \cdot B_\alpha)_s = L_\alpha \bigotimes_{F_\alpha} (F_\alpha \cdot B_\alpha)_s.$$

При этом алгебра $(F_\alpha \cdot B_\alpha)_s$ проста.

УТВЕРЖДЕНИЕ 25. Пусть L – конструируемое дифференциальное поле над K с некоторым семейством образующих K -алгебр $\{B_\alpha\}$. Пусть для каждого α фиксирован некоторый пакет и для некоторого α подполе F содержит пакетное поле F_α , а элемент s такой же, как в лемме о пакетном расщеплении. Тогда алгебра $(F \cdot B_\alpha)_s$ проста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 24 имеем, что для данного элемента s выполнено

$$(L_\alpha \cdot B_\alpha)_s = L_\alpha \bigotimes_{F_\alpha} (F_\alpha \cdot B_\alpha)_s.$$

Так как поле F содержит F_α , то

$$(L_\alpha \cdot B_\alpha)_s = L_\alpha \bigotimes_F F \bigotimes_{F_\alpha} (F_\alpha \cdot B_\alpha)_s = L_\alpha \bigotimes_F (F \cdot B_\alpha)_s.$$

Из выбора элемента s следует, что алгебра в левой части последнего равенства проста, а значит, по утверждению 10 и алгебра $(F \cdot B_\alpha)_s$ такова же.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. Пусть L – конструируемое дифференциальное поле над K и $\{B_\alpha\}$ – некоторое порождающее семейство. Предположим, что для каждой K -алгебры B_α из порождающего семейства $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ зафиксирован некоторый пакет π_α . Рассмотрим подсемейство K -алгебр $\{B_\beta\}_{\beta \in X}$, $X \subseteq \Lambda$, такое, что с каждой K -алгеброй B_β в нем лежит и весь его пакет. Такое семейство будем называть *пакетно замкнутым* или, проще, *замкнутым*.

Этот термин используется в [3; гл. 10, п. d]. Напомним, что дифференциальная конечная порожденность алгебр из порождающего семейства является частью их определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. Пусть выполнены условия предыдущего определения, и пусть дифференциальное подполе $F \subseteq L$ порождено некоторым замкнутым семейством алгебр $\{B_\beta\}$. Тогда такое поле будем также называть *замкнутым*.

Подмножество X является вполне упорядоченным множеством относительно индуцированного порядка с множества Λ . Тогда можно определить семейство подполей $\{L'_\beta\}$ следующим образом:

$$L'_\beta = K \langle \{B_\theta\}_{\theta < \beta, \theta \in X} \rangle.$$

Важность замкнутых подполей подчеркивают следующие два утверждения (их логические оригиналы см. в [3; гл. 10, утверждения 10.15, 10.17]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 28. Пусть L – конструируемое дифференциальное поле над K с некоторым семейством образующих алгебр $\{B_\alpha\}$. Пусть для каждого α фиксирован некоторый пакет, и пусть некоторое дифференциальное подполе F поля L является замкнутым. Тогда поле F конструируемо над K , причем конструкцией будет цепочка полей $\{L'_\beta\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам необходимо показать выполнение свойства 4) из определения 18 для пары полей $L'_\beta \subseteq L'_{\beta+1}$. По определению $L'_{\beta+1} = L'_\beta \langle B_\gamma \rangle$ для некоторого $\gamma \in X$, причем для любого $\theta \in X$, строго меньшего γ , имеем $B_\theta \subseteq L'_\beta$. В силу предложения 7, (b) из [10; гл. III, § 10] нам достаточно показать, что алгебра $L'_\beta \cdot B_\gamma$ локально проста. Однако поле F замкнуто, а значит, содержит F_γ . По определению пакета F_γ содержится в L'_β , так как порождается кольцами вида B_θ , где $\theta \in X$, и строго меньше γ . Тогда из утверждения 25 следует требуемое.

УТВЕРЖДЕНИЕ 29. Пусть L – конструируемое дифференциальное поле над K с некоторым семейством образующих алгебр $\{B_\alpha\}$. Пусть для каждого α фиксирован некоторый пакет и некоторое дифференциальное подполе F поля L является замкнутым. Тогда поле L конструируемо над F , причем конструкцией будет цепочка полей $\{F\langle L_\alpha \rangle\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам необходимо показать выполнения свойства 4) из определения 18 для пары полей $F\langle L_\alpha \rangle \subseteq F\langle L_{\alpha+1} \rangle$. В силу предложения 7, (b) из [10; гл. III, § 10] нам достаточно показать, что алгебра

$$F\langle L_\alpha \rangle \cdot B_\alpha$$

локально проста. По определению алгебра $L_\alpha \cdot B_\alpha$ локально проста. Пусть s – такой элемент, что алгебра

$$(L_\alpha \cdot B_\alpha)_s$$

проста. Будем доказывать, что алгебра

$$(F\langle L_\alpha \rangle \cdot B_\alpha)_s$$

также проста. Так как по утверждению 28 F конструируемо, то будем индукцией по β показывать, что алгебра

$$(L'_\beta \langle L_\alpha \rangle \cdot B_\alpha)_s$$

проста. Так как предел простых дифференциальных колец является простым дифференциальным кольцом, то достаточно показать требуемое для непрелельных ординалов.

Для начала заметим, что для любого β имеет место равенство

$$L'_\beta \langle L_\alpha \rangle = \text{Qt}(L'_\beta \cdot B_\alpha).$$

Пусть $\tilde{F} = \text{Qt}(L'_\beta \cdot B_\alpha)$. Так как поле $\text{Qt}(\tilde{F} \cdot B_\alpha)$ содержит пакет $B_{\beta+1}$, то по утверждению 25 для некоторого $h \in \tilde{F} \cdot B_{\beta+1}$ алгебра

$$(\text{Qt}(\tilde{F} \cdot B_\alpha) \cdot B_{\beta+1})_h$$

проста. Положим $S = (\tilde{F} \cdot B_\alpha)_s \setminus \{0\}$; тогда

$$\begin{aligned} (\text{Qt}(\tilde{F} \cdot B_\alpha) \cdot B_{\beta+1})_h &= (S^{-1}((\tilde{F} \cdot B_\alpha)_s) \cdot B_{\beta+1})_h \\ &= S^{-1}(((\tilde{F} \cdot B_\alpha)_s \cdot B_{\beta+1})_h) = S^{-1}(((\tilde{F} \cdot B_{\beta+1})_h \cdot B_\alpha)_s). \end{aligned}$$

А значит, алгебра

$$S^{-1}(((\tilde{F} \cdot B_{\beta+1})_h \cdot B_\alpha)_s)$$

проста. Но так как $(\tilde{F} \cdot B_\alpha)_s$ проста по индукции, то множество S не может пересекаться ни с одним дифференциальным идеалом ни в каком дифференциальном кольце. Значит, кольцо

$$((\tilde{F} \cdot B_{\beta+1})_h \cdot B_\alpha)_s$$

также просто, а вместе с ним и

$$(L'_{\beta+1} \langle L_\alpha \rangle \cdot B_\alpha)_s$$

как его локализация.

УТВЕРЖДЕНИЕ 30. Пусть L – конструируемое дифференциальное поле над K . Тогда любая дифференциально конечно порожденная K -подалгебра в L является локально простой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любое конструируемое дифференциальное поле L обладает следующим свойством: для любого дифференциального гомоморфизма поля K в дифференциально замкнутое поле существует его продолжение на L . Значит, наше поле может быть вложено в поле из теоремы 12, откуда и следует желаемое.

УТВЕРЖДЕНИЕ 31. Пусть L – конструируемое дифференциальное поле над K с некоторым семейством образующих K -алгебр $\{B_\alpha\}$. Пусть для каждого α фиксирован некоторый пакет, и пусть F – некоторое дифференциально конечно порожденное над K подполе в L . Тогда существует дифференциально конечно порожденное над K замкнутое подполе F' , содержащее F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как поле F дифференциально конечно порождено, то оно лежит в поле, порожденном некоторыми кольцами $B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_k}$. Рассмотрим в качестве дифференциального поля F' поле, порожденное указанными алгебрами и их пакетами. Теперь мы видим, что оно удовлетворяет нужным свойствам.

УТВЕРЖДЕНИЕ 32. Пусть L – конструируемое дифференциальное поле над K . Тогда оно конструируемо над любым своим дифференциально конечно порожденным над K подполем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – дифференциально конечно порожденное подполе в L . Тогда по утверждению 31 существует замкнутое подполе F' , содержащее F . Следовательно, по утверждению 29 L конструируемо над F' . В свою очередь, из [10; гл. III, § 10, предложение 7, (b)] следует, что F' конструируемо над F , а значит, и L конструируемо над F .

Следующий результат в теории моделей известен как теорема Рессэра (см. [3; гл. 10, теорема 10.18]); мы приведем его алгебраический аналог.

ТЕОРЕМА 33. *Пусть L и F – конструируемые над K дифференциально замкнутые поля. Тогда они изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть конструкциями на полях L и F являются $\{L_\alpha\}$ и $\{F_\beta\}$ соответственно. Также предполагаем, что на них фиксированы некоторые семейства порождающих K -алгебр и определены их пакеты. Тогда рассмотрим следующее множество:

$$\Sigma = \{(L', F', f') \mid L' \subseteq L, F' \subseteq F, f: L' \rightarrow F'\},$$

где L' и F' – замкнутые подполя, а f' – дифференциальный изоморфизм между ними. На данном множестве вводится следующее отношение частичного порядка:

$$(L', F', f') \leq (L'', F'', f'') \iff L' \subseteq L'', F' \subseteq F'', f'|_{L'} = f'.$$

Множество Σ не пусто, так как там лежит элемент (K, K, Id) , и удовлетворяет условию леммы Цорна. Следовательно, существует максимальный элемент $(\hat{L}, \hat{F}, \hat{f})$. Покажем, что $\hat{L} = L$ и $\hat{F} = F$. Допустим противное, например $\hat{L} \neq L$.

Утверждение 29 гарантирует, что поле L конструируемо над $\hat{L}$ (соответственно F над $\hat{F}$), причем порождающее множество колец над $\hat{L}$ будет то же самое, что и над K , а потому и пакеты будут теми же самыми. По предположению существует простое кольцо $B_\alpha \subseteq L$, не лежащее в $\hat{L}$. По определению конструируемости существует такой элемент $s \in \hat{L} \cdot B_\alpha$, что $(\hat{L} \cdot B_\alpha)_s$ – простая алгебра. Тогда в силу дифференциальной замкнутости F дифференциальный гомоморфизм $\hat{f}$ может быть продолжен на поле частных алгебры $\hat{L} \cdot B_\alpha$. Обозначим это поле через $\hat{L}_1$. Из утверждения 31 следует, что существует замкнутое дифференциально конечно порожденное поле $\hat{F}_1$, содержащее образ $\hat{L}_1$. В свою очередь, из утверждения 30 и [10; гл. III, § 10, предложение 7, (b)] получаем, что $\hat{F}_1$ является полем частных простой дифференциально конечно порожденной алгебры над образом $\hat{L}_1$. Тогда в силу дифференциальной замкнутости L существует обратное вложение поля $\hat{F}_1$ в L . Снова по утверждению 31 существует замкнутое дифференциально конечно порожденное поле $\hat{L}_2$, содержащее образ $\hat{F}_1$. Далее применяем эту конструкцию к полю $\hat{L}_2$ и т.д. Схема продолжения изоморфизма $\hat{f}$ представлена на следующей диаграмме:

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{L} & & \hat{L}_1 & & \hat{L}_2 & & \cdots \\ \downarrow \hat{f} & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \cdots \\ \hat{F} & & \hat{F}_1 & & \hat{F}_2 & & \cdots \end{array}$$

В результате получаем две цепочки подполей $\hat{L}_k$ в L и $\hat{F}_k$ в F , причем каждый элемент этой цепочки замкнут. Тогда, определив поля $L' = \bigcup_k \hat{L}_k$ и $F' = \bigcup_k \hat{F}_k$, мы видим, что они замкнуты и на них по построению продолжается дифференциальный гомоморфизм $\hat{f}$. Получено противоречие с максимальностью.

§ 6. Теорема единственности

Напомним, что все дифференциальные кольца предполагаются алгебрами над некоторым дифференциальным полем K . Теорема 35 ниже содержит технику, аналогичную приведенной в [3; гл. 18, предложение 18.1]. Именно на представленной технике будет базироваться весь § 7. Для начала нам требуется некая разновидность леммы о расщеплении. По-видимому, следующая лемма непосредственно связана со следствием 16.7 и теоремой 16.8 из [3; гл. 16]; быть может, она является их алгебраическим аналогом.

ЛЕММА 34. Пусть A и B – произвольные дифференциальные K -алгебры без нильпотентов, и пусть существует такой элемент $h \in A \otimes B$, что $(A \otimes B)_h$ – простая дифференциальная алгебра. Тогда B локально проста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элемент h имеет вид $\sum a_i \otimes b_i$. Можно считать, что элементы a_i линейно независимы над K . Так как $A \otimes B$ локально проста, то для любого ненулевого дифференциального идеала $\mathfrak{a}$ имеем

$$((A \otimes B)/\mathfrak{a})_h = 0.$$

В частности, для любого ненулевого простого дифференциального идеала $\mathfrak{p}$ в B

$$(A \otimes (B/\mathfrak{p}))_h = 0.$$

Так как A и $B/\mathfrak{p}$ – не содержащие нильпотентов алгебры над полем K (характеристики нуль), то $A \otimes (B/\mathfrak{p})$ также не содержит нильпотентов (см. [4; лемма A.16]). Условие равенства нулю кольца означает, что $h^n = 0$ в $A \otimes (B/\mathfrak{p})$, а значит, и $h = 0$, т.е. элементы b_i лежат в $\mathfrak{p}$. Следовательно, дифференциальный спектр кольца B_{b_i} состоит из единственного элемента для любого i . В силу отсутствия нильпотентов это и означает требуемое.

Пусть L – некоторое дифференциальное замыкание поля K , и пусть поле D – конструируемое дифференциальное замыкание (существующее в силу теоремы 17). Тогда видим, что поле L можно вложить в D . Следующая наша задача – найти конструкцию на дифференциальном замыкании, лежащем в конструируемом.

ТЕОРЕМА 35. Пусть L – дифференциальное замыкание поля K . Тогда оно конструируемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения перед формулировкой теоремы показывают, что мы можем считать поле L вложенным в некоторое конструируемое дифференциальное замыкание D с конструкцией D_α . Чтобы построить конструкцию на L , кажется естественным в качестве таковой выбрать соответствующие пересечения $L_\alpha = L \cap D_\alpha$. Однако может так получиться, что поля L_α не будут образовывать конструкцию. Чтобы получить правильный результат, нам надо немного подправить конструкцию на D . А именно нужно построить систему подполей D'_α с условиями:

- 1) $D_\alpha \subseteq D'_\alpha$;
- 2) D'_α замкнуто;

- 3) $D'_{\alpha+1}$ не более чем счетно дифференциально порождено над D'_α ;
- 4) $L \cdot D'_\alpha = L \otimes_{L_\alpha} D'_\alpha$, где $L_\alpha = L \cap D'_\alpha$;
- 5) $L_{\alpha+1}$ не более чем счетно дифференциально порождено над L_α .

Указанные условия сохраняются при переходе к индуктивным пределам, поэтому достаточно построить такие поля для непредельных ординалов. Считаем, что в D выбрано некоторое порождающее множество K -алгебр $\{B_\alpha\}$ и для них определены пакеты. Таким образом, определено понятие замкнутости.

Будем строить цепочку дифференциальных полей $\overline{D}_k$ следующим образом. Положим $\overline{D}_1 = D'_\alpha \langle D_\alpha \rangle$, оно дифференциально конечно порождено над D'_α . По построению $\overline{D}_1$ замкнуто, однако не гарантирована линейная разделенность $\overline{D}_1$ и L , т.е., вообще говоря,

$$L \cdot \overline{D}_1 \neq L \bigotimes_{L \cap \overline{D}_1} \overline{D}_1.$$

По следствию 9 (используя поле $L \cap D'_\alpha$ вместо K) получаем, что существуют такие дифференциально конечно порожденное над $L \cap D'_\alpha$ поле C_1 и элемент $s \in C_1 \cdot \overline{D}_1$, что

$$(L \cdot \overline{D}_1)_s = L \bigotimes_{C_1} (C_1 \cdot \overline{D}_1)_s.$$

В этом случае, положив $\overline{D}_2 = \text{Qt}(C_1 \cdot \overline{D}_1)$, имеем

$$L \cdot \overline{D}_2 = L \bigotimes_{C_1} \overline{D}_2.$$

Тогда по определению тензорного произведения $C_1 = L \cap \overline{D}_2$, и оно дифференциально конечно порождено над $L \cap D'_\alpha$. Но теперь поле $\overline{D}_2$ не замкнуто. Утверждение 31 гарантирует существование дифференциально конечно порожденного над D'_α замкнутого поля $\overline{D}_3$, содержащего $\overline{D}_2$. Повторив для $\overline{D}_3$ процедуру, проведенную с $\overline{D}_1$, получим такое поле $\overline{D}_4$, содержащее $\overline{D}_3$, что

$$L \cdot \overline{D}_4 = L \bigotimes_{C_2} \overline{D}_4,$$

причем $C_2 = L \cap \overline{D}_4$ дифференциально конечно порождено над $L \cap D'_\alpha$. Следовательно, $C_1 \subseteq C_2$. Продолжая аналогично, мы построим цепочки дифференциальных полей $\overline{D}_k$ и C_k со следующими условиями:

- 1) C_k дифференциально конечно порождены над $L \cap D'_\alpha$;
- 2) $\overline{D}_k$ дифференциально конечно порождены над D'_α ;
- 3) $C_n = L \cap \overline{D}_{2n}$;
- 4) $L \cdot \overline{D}_{2n} = L \bigotimes_{C_n} \overline{D}_{2n}$;
- 5) $\overline{D}_{2n+1}$ замкнуто.

Положим $D'_{\alpha+1} = \bigcup_k \overline{D}_k$. Тогда по свойству 5) оно замкнуто. Переходя к прямому пределу (детали см. в [9; гл 2, упражнение 20]), получим

$$L \cdot D'_{\alpha+1} = L \bigotimes_{L_{\alpha+1}} D'_{\alpha+1},$$

где $L_{\alpha+1} = L \cap D'_{\alpha+1}$, и в силу 3) $L_{\alpha+1} = \bigcup_k C_k$. Как мы видим, все требуемые пять свойств удовлетворены.

Покажем, что построенная цепочка подполей $\{L_\alpha\}$ удовлетворяет свойствам из утверждения 19. Для этого нужно проверить лишь свойство 4). Пусть B – произвольная дифференциально конечно порожденная алгебра над L_α ; тогда алгебра $D'_\alpha \cdot B$ будет дифференциально конечно порождена над D'_α . И в силу замкнутости D'_α из утверждений 29 и 30 следует, что $D'_\alpha \cdot B$ локально проста. Теперь рассмотрим следующую цепочку включений:

$$D'_\alpha \bigotimes_{L_\alpha} B \subseteq D'_\alpha \bigotimes_{L_\alpha} L = D'_\alpha \cdot L.$$

Следовательно,

$$D'_\alpha \cdot B = D'_\alpha \bigotimes_{L_\alpha} B.$$

Так как $D'_\alpha \bigotimes_{L_\alpha} B$ локально проста, то из леммы 34 (для L_α вместо K) следует, что и B локально проста.

СЛЕДСТВИЕ 36. *Дифференциальное замыкание единственно с точностью до изоморфизма, и оно является конструируемым.*

§ 7. Поля разложений

7.1. Абстрактное поле разложения. Как и выше, все дифференциальные кольца предполагаются алгебрами над некоторым дифференциальным полем K . Рассмотрим произвольное семейство дифференциально конечно порожденных K -алгебр $\{B_\alpha\}$ (не обязательно простых), и пусть L – некоторое дифференциальное поле. Рассмотрим все возможные дифференциальные гомоморфизмы $B_\alpha \rightarrow L$ для всех возможных α . Тем самым, определено некоторое семейство дифференциальных подколец в L . Если L является наименьшим дифференциальным полем, содержащим это семейство, то будем говорить, что L порождается множеством колец $\{B_\alpha\}$. Для удобства дальнейших обозначений через $\bar{B}_\alpha$ будем обозначать образ B_α в L при некотором дифференциальном гомоморфизме.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 37. Будем говорить, что L является *полем разложения* семейства дифференциально конечно порожденных алгебр $\{B_\alpha\}$ над K , если выполнены следующие условия:

- 1) L достаточно большое: для любого α и для любого локально максимального дифференциального идеала $\mathfrak{m}$ в $L \otimes B_\alpha$ верно $(L \otimes B_\alpha)/\mathfrak{m} = L$ (имеется в виду изоморфизм на первый сомножитель тензорного произведения);
- 2) L не слишком велико: поле L порождается семейством $\{B_\alpha\}$;
- 3) L универсально: для любого дифференциального поля L' , удовлетворяющего свойствам 1) и 2), существует вложение L в L' над K .

Заметим, что дифференциальное замыкание превращается в поле разложения всех дифференциально конечно порожденных алгебр над полем K .

УТВЕРЖДЕНИЕ 38. *Пусть $\{B_\alpha\}$ – некоторое семейство дифференциально конечно порожденных K -алгебр, и пусть дифференциальное поле L обладает следующими свойствами:*

- 1) для любого α и для любого локально максимального дифференциального идеала $\mathfrak{m}$ в $L \otimes B_\alpha$ верно $(L \otimes B_\alpha)/\mathfrak{m} = L$;
- 2) поле L порождается семейством $\{B_\alpha\}$;
- 3) L конструируемо над K .

Тогда L является полем разложения семейства $\{B_\alpha\}$ над K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что из конструируемости следует свойство 3) определения поля разложения. Действительно, пусть L' – произвольное поле со свойствами 1) и 2); тогда через $\bar{L}'$ обозначим его дифференциальное замыкание. Из конструируемости следует, что L вкладывается в $\bar{L}'$. Остается показать, что образ L попадает в L' . Так как L порождается кольцами $\bar{B}_\alpha$, то достаточно показать, что все такие кольца попадают в L' . Алгебра $L' \cdot \bar{B}_\alpha$ локально проста по утверждению 30, но тогда по определению L' она совпадает с L' , что и требовалось.

Покажем, что для любого семейства дифференциально конечно порожденных K -алгебр поля разложения существуют и имеют весьма специальный вид.

УТВЕРЖДЕНИЕ 39. Для любого множества дифференциально конечно порожденных над K алгебр $\{B_\alpha\}$ существует конструируемое поле разложения, причем его дифференциальное замыкание является дифференциальным замыканием поля K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим семейство простых дифференциально конечно порожденных K -алгебр следующего вида:

$$F_1 = \{(B_\alpha/\mathfrak{m})_s\},$$

где $\mathfrak{m}$ – произвольные локально максимальные дифференциальные идеалы в B_α , а s – соответствующий элемент такой, что $(B_\alpha/\mathfrak{m})_s$ – простое кольцо. Вполне упорядочим множество F_1 . Тогда выберем в кольце

$$R_1 = \bigotimes_{B \in F_1} B$$

идеал $\mathfrak{p}_1$, как и в теореме 14. Поле вычетов идеала $\mathfrak{p}_1$ обозначим через L_1 . Далее надо повторить процедуру для семейства алгебр $\{L_1 \otimes B_\alpha\}$ вместо $\{B_\alpha\}$. Получим поле L_2 , содержащее L_1 . Положим $L = \bigcup_k L_k$. Мы утверждаем, что поле L искомое. Сразу заметим, что оно является конструируемым.

Нам нужно показать выполнение условий 1) и 3) определения 37. Покажем свойство 1). Пусть

$$(L \cdot \bar{B}_\alpha)_s = (L \otimes B_\alpha)_s/\mathfrak{m}$$

– некоторая простая алгебра. Тогда по следствию 8 существуют дифференциально конечно порожденная K -алгебра $C \subseteq L$ и элемент $h \in C \cdot \bar{B}_\alpha$ такие, что

$$(L \cdot \bar{B}_\alpha)_{sh} = L \bigotimes_C (C \cdot \bar{B}_\alpha)_{sh}.$$

Так как C дифференциально конечно порождено, то для некоторого k имеем $C \subseteq L_k$. А значит, и

$$(L \cdot \bar{B}_\alpha)_{sh} = L \bigotimes_{L_k} (L_k \cdot \bar{B}_\alpha)_{sh}.$$

Но алгебра $(L_k \cdot \bar{B}_\alpha)_{sh}$ вкладывается в L_{k+1} по построению, а значит, и в L . То есть алгебра $(L \cdot \bar{B}_\alpha)_{sh}$ вкладывается в L , а значит, и изоморфна ей, что и требовалось.

Так как поле L конструируемо над K , то дифференциальное замыкание L является дифференциальным замыканием K . Теперь из утверждения 38 следует, что L и есть искомое поле.

УТВЕРЖДЕНИЕ 40. *Для любого множества дифференциально конечно порожденных над K алгебр $\{B_\alpha\}$ поле разложения единственно, причем любой дифференциальный автоморфизм поля K может быть продолжен до дифференциального автоморфизма поля разложения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L и L' – два поля разложения. Тогда из утверждения 39 и следствия 36 вытекает, что поля

$$\bar{L} = \bar{L}' = \bar{K}$$

можно отождествить посредством следующих отображений:

$$\begin{array}{ccc} \bar{L} & \longrightarrow & \bar{K} \longleftarrow \bar{L}' \\ \cup & & \cup \\ L & \cup & L' \\ \cup & & \cup \\ K & = & K = K \end{array}$$

Остается только проверить, что при таком отождествлении поля L и L' совпадут. Покажем включение $L \subseteq L'$. Так как семейство дифференциальных колец вида $\bar{B}_\alpha$ порождают L над K , то достаточно показать, что любая алгебра B указанного вида попадает в L' . Действительно, рассмотрим алгебру $L' \cdot B$; тогда из равенства $\bar{L} = \bar{K}$ и утверждения 30 следует, что она локально проста, и, следовательно, B лежит в L' по определению. Обратное включение проверяется аналогично.

Заметим, что любой дифференциальный автоморфизм поля K может быть продолжен до дифференциального автоморфизма $\bar{K}$, это и есть теорема единственности дифференциального замыкания. Но тогда, отождествив поля с помощью построенного изоморфизма, мы сводим задачу к проверке единственности поля разложения. Но поскольку она уже доказана, доказано и утверждение.

Из определения поля разложения семейства $\{B_\alpha\}$ следует, что для любого локально максимального дифференциального идеала $\mathfrak{m}$ в B_α кольцо $B_\alpha/\mathfrak{m}$ может быть вложено в поле разложения. Покажем, что верен несколько более общий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 41. *Пусть L – поле разложения над K семейства дифференциально конечно порожденных K -алгебр $\{B_\alpha\}$. Тогда для любого локально максимального дифференциального идеала $\mathfrak{m}$ кольца*

$$L \otimes B_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes B_{\alpha_n}$$

его поле вычетов совпадает с L . И как следствие, любая локально простая дифференциальная алгебра вида

$$(B_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes B_{\alpha_n})/\mathfrak{m}$$

вкладывается в L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем индукцию по числу сомножителей. При $n = 1$ доказываемое условие содержится в определении поля разложения. Теперь считаем, что для n уже все доказано. Рассмотрим равенство

$$(L \otimes B_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes B_{\alpha_{n+1}})/\mathfrak{m} = ((L \otimes B_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes B_{\alpha_n})/\mathfrak{m}^c \otimes B_{\alpha_{n+1}})/\mathfrak{m}.$$

Из [10; гл. III, § 10, предложение 7, (b)] следует, что $\mathfrak{m}^c$ является локально максимальным дифференциальным идеалом, а значит, по индукции последнее кольцо равно

$$(L \otimes B_{\alpha_{n+1}})/\mathfrak{m} = L,$$

что и требовалось.

Обозначим алгебру вида $(B_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes B_{\alpha_n})/\mathfrak{m}$ через B ; тогда для некоторого s из B алгебра B_s проста. А значит, для любого максимального дифференциального идеала $\mathfrak{m}$ имеет место равенство

$$(L \otimes B_s)/\mathfrak{m} = L,$$

которое и обеспечивает вложение B в L .

УТВЕРЖДЕНИЕ 42. Пусть F – дифференциальное подполе поля разложения L семейства дифференциально конечно порожденных K -алгебр $\{B_\alpha\}$ над K такое, что L конструируемо над F . Тогда L – поле разложения над F для семейства $\{F \otimes B_\alpha\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первый пункт определения следует из равенства

$$L \bigotimes_F F \otimes B_\alpha = L \otimes B_\alpha.$$

Так как L порождается образами B_α , то оно тем более порождается образами $F \otimes B_\alpha$. Тогда свойство 3) определения 37 следует из утверждения 38.

Группу дифференциальных автоморфизмов L над K обозначим $\text{Aut}^\Delta(L/K)$. Для произвольной группы H дифференциальных автоморфизмов L над K через L^H обозначим подполе неподвижных элементов относительно H .

УТВЕРЖДЕНИЕ 43. Для любого поля разложения L над K верно равенство

$$K = L^{\text{Aut}^\Delta(L/K)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in L \setminus K$; тогда этот элемент попадает в некоторую подалгебру вида

$$B = \overline{B}_{\alpha_1} \cdots \overline{B}_{\alpha_n}.$$

Так как эта алгебра дифференциально конечно порождена, а L конструируемо, то утверждение 30 гарантирует, что B локально проста, т.е. для некоторого

элемента $s \in B$ алгебра $D = B_s$ проста. Так как D – алгебра Ритта, то в кольце $D \otimes D$ нет нильпотентов (см. [4; лемма A.16]). Пусть $\mathfrak{m}$ – максимальный дифференциальный идеал кольца

$$(D \otimes D)_{1 \otimes x - x \otimes 1}.$$

Обозначим поле вычетов идеала $\mathfrak{m}$ через F , и пусть D_1 – образ первого сомножителя в F , а D_2 – второго. Из утверждения 41 следует, что тождественный гомоморфизм $\text{Qt}(D_1) \rightarrow \text{Qt}(D) \subseteq L$, при котором $x \otimes 1 \mapsto x$, может быть продолжен до вложения F в L . Образ элемента $1 \otimes x$ в L обозначим через x' . Теперь можно считать, что D_1 и D_2 лежат в L . По утверждению 42 L является полем разложения одного и того же семейства алгебр как над $\text{Qt}(D_1)$, так и над $\text{Qt}(D_2)$. По построению D_1 и D_2 между ними существует дифференциальный изоморфизм такой, что $x \mapsto x'$, а значит, и между их полями частных. Из утверждения 40 следует, что этот автоморфизм продолжается до дифференциального автоморфизма L .

Определим следующее преобразование над семействами дифференциально конечно порожденных K -алгебр $\{B_\alpha\}$. Для каждого кольца B_α рассмотрим семейство $X_\alpha = \{B_\alpha/\mathfrak{m}\}$, где $\mathfrak{m}$ – все возможные локально максимальные дифференциальные идеалы кольца B_α . Рассмотрим семейство $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$, оно будет состоять из локально простых дифференциальных алгебр. Теперь для каждого $B \in X$ найдется такое $s \in B$, что B_s проста. Пусть Y состоит из всех B_s указанного вида.

УТВЕРЖДЕНИЕ 44. Пусть $\{B_\alpha\}$ – произвольное семейство дифференциально конечно порожденных K -алгебр и семейства X и Y получены описанным выше способом. Тогда поля разложения всех трех семейств естественным образом совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – поле разложения исходного семейства. Рассмотрим произвольный дифференциальный гомоморфизм $B_\alpha \rightarrow L$. Тогда образ B_α является локально простым кольцом (это следует из конструируемости поля разложения и утверждения 30) и имеет вид $B_\alpha/\mathfrak{m}$ для некоторого локально максимального дифференциального идеала $\mathfrak{m}$. С другой стороны, если задан дифференциальный гомоморфизм из $B_\alpha/\mathfrak{m}$ в L , то из него получается сквозной гомоморфизм из B_α в L . Значит, если заменить исходное семейство на семейство X , то L будет удовлетворять определению поля разложения семейства X . Теперь отметим, что при переходе к кольцу $B_\alpha/\mathfrak{m}$ построенный дифференциальный гомоморфизм является инъективным. Тогда можно обратить соответствующий элемент так, что $(B_\alpha/\mathfrak{m})_s$ будет простым кольцом, а из инъективности будет следовать, что дифференциальный гомоморфизм с $B_\alpha/\mathfrak{m}$ может быть продолжен до всего кольца $(B_\alpha/\mathfrak{m})_s$. Значит, и в этом случае поля разложения совпадают.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 45. Рассмотрим некоторое кольцо дифференциальных многочленов $K\{y_1, \dots, y_n\}$, и пусть $f_1, \dots, f_k$ – дифференциальные многочлены из

решение указанного уравнения. Тогда из определения кольца Пикара–Вессю (см. [4; гл. 1, определение 1.15] и [4; гл. 1, лемма 1.7]) следует, что вектор, составленный из y_i , выражается через базисные решения с константными коэффициентами. А значит, элементы y_i лежат в L . Таким образом, показано выполнение свойства 1) определения 37. Из того же определения следует, что кольцо Пикара–Вессю порождается решениями системы уравнений, а значит, верно свойство 2) определения 37. Из предложения 1.22 в [4; гл. 1] вместе с предложением 1.20, (2) в [4; гл. 1] следует, что любое поле Пикара–Вессю единственно с точностью до изоморфизма и совпадает с полем частных кольца Пикара–Вессю. Таким образом, если какое-то поле содержит фундаментальную матрицу решений линейного дифференциального уравнения, то оно содержит и соответствующее поле Пикара–Вессю.

Параметризованное расширение Пикара–Вессю. Поле разложения системы линейных дифференциальных уравнений (или линейного дифференциального уравнения) с параметрами совпадает с понятием параметризованного расширения Пикара–Вессю (см. [5]).

Мы будем использовать самый общий вид уравнений, рассматриваемых в этом случае (см. [5; п. 9.2]). Пусть

$$\partial_1 Y = A_1 Y, \quad \partial_2 Y = A_2 Y, \quad \dots, \quad \partial_r Y = A_r Y$$

суть некоторые системы уравнений над полем K с дифференцированиями $\Delta = \{\partial_1, \dots, \partial_m\}$, где $k \leq m$. Пусть L – соответствующее параметризованное расширение Пикара–Вессю. Обозначим все уравнения из систем выше через E . Тогда рассмотрим кольцо

$$R = L \otimes K\{y_1, \dots, y_n\}/[E].$$

Пусть $\mathfrak{m}$ – некоторый локально максимальный дифференциальный идеал в кольце R , а элемент $s \in R$ такой, что алгебра $(R/\mathfrak{m})_s$ является простой. Тогда из [5; лемма 9.3] следует, что в кольце $(R/\mathfrak{m})_s$ подкольцо констант по дифференцированиям $\partial_1, \dots, \partial_k$ совпадает с подполем констант поля K по тем же дифференцированиям. Значит, по [5; определение 9.4] это кольцо является соответствующим параметризованным кольцом Пикара–Вессю. А значит, его поле частных есть соответствующее параметризованное расширение Пикара–Вессю. Тогда решение, составленное из образов y_i , выражается через фундаментальную матрицу с элементами из поля L с коэффициентами заведомо из поля K . А значит, $(R/\mathfrak{m})_s$ совпадает с L . Свойство 2) из определения 37 поля разложения выполняется по определению параметризованного расширения Пикара–Вессю (см. [5; определение 9.4, (2b)]). Свойство 3) из определения 37 поля разложения означает, что любое дифференциальное поле, порожденное фундаментальной матрицей решений уравнений из E , изоморфно параметризованному расширению Пикара–Вессю, но это есть предложение 9.5, (1) из [5].

Сильно нормальные расширения. Сильно нормальные расширения в смысле Колчина также являются полями разложения соответствующей дифференциальной алгебры (см. [11]).

Пусть G – сильно нормальное расширение дифференциального поля K в смысле [11; определение 12.1]. Тогда в силу [11; предложение 13.8] существует простая конечно порожденная над K дифференциальная алгебра $R \subseteq G$ такая, что G есть поле частных R . Покажем, что G является полем разложения алгебры R . Покажем выполнение свойства 1) определения 37 поля разложения. Рассмотрим алгебру $G \otimes R$. Мы можем перейти к ее локализации $P = G \otimes R$ без потери простых дифференциальных идеалов (см. [11; следствие 13.6]). Теперь из [11; следствие 14.3] следует, что любой локально максимальный дифференциальный идеал $\mathfrak{m}$ в P является максимальным, более того, в доказательстве этой леммы показывается, что $P/\mathfrak{m} = G$. Свойство 2) определения 37 поля разложения выполняется, так как G есть поле частных R . Если какое-то поле содержит алгебру R , то оно автоматически содержит и его поле частных, т.е. поле G , а это и означает выполнимость свойства 3) определения 37 поля разложения.

7.2. Подполе разложения. Пусть $\{B_\alpha\}$ – некоторое семейство дифференциально конечно порожденных K -алгебр. Напомним, что можно рассмотреть все возможные дифференциальные гомоморфизмы из колец B_α в некоторое дифференциальное поле F . Образы таких гомоморфизмов мы для удобства будем обозначать через $\bar{B}_\alpha$. Пусть $\bar{K}$ – дифференциальное замыкание поля K , а L – некоторое поле разложения над K . Тогда свойство 3) определения 37 поля разложения гарантирует существование вложения L в $\bar{K}$. Однако, вообще говоря, может существовать много таких вложений, в связи с чем выделим следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 46. Пусть L – поле разложения над K семейства дифференциально конечно порожденных K -алгебр $\{B_\alpha\}$. Тогда среди дифференциальных подполей в $\bar{K}$, изоморфных L , существует наибольшее, и оно совпадает с наименьшим подполем, порожденным кольцами вида $\bar{B}_\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в $\bar{K}$ подполе, порожденное всеми дифференциальными подкольцами, изоморфными $\bar{B}_\alpha$. Обозначим указанное поле через L' . Если данное подполе является полем разложения, то оно и будет искомым. Мы знаем из утверждения 39, что поле $\bar{L}$ изоморфно отображается на $\bar{K}$. Покажем, что при этом изоморфизме L переходит в L' . Так как L по определению порождается дифференциальными алгебрами, изоморфными B_α , то его образ лежит в L' . Обратно, для любой алгебры B вида B_α справедливо, что $L \cdot B$ локально проста, а значит, по определению B лежит в L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 47. Наибольшее подполе в $\bar{K}$, изоморфное некоторому полю разложения над K , будем называть *подполем разложения*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 48. Будем называть подполе L поля $\bar{K}$, содержащее K , *хорошим*, если $\bar{K}$ является дифференциальным замыканием поля L . В силу следствия 36 подполе L поля $\bar{K}$ *хорошее* тогда и только тогда, когда поле $\bar{K}$ конструируемо над L .

Отметим, что в случае расширений Пикара–Вессю, параметризованного расширения Пикара–Вессю и сильно нормального расширения полей любое дифференциальное подполе является хорошим. Действительно, каждое из

упомянутых расширений является дифференциально конечно порожденным, а следовательно, любое дифференциальное подполе также является дифференциально конечно порожденным. Тогда утверждение 32 гарантирует, что все они хорошие. Нужно отметить, что в общем случае не все подполя являются хорошими. Однако верно следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 49. *Если L – подполе разложения, то оно хорошее.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как дифференциальное замыкание L совпадает с дифференциальным замыканием K (утверждение 39), то получаем требуемое.

Полной дифференциальной группой Галуа $\text{Gal}^\Delta(\bar{K}/K)$ поля K будем называть группу всех дифференциальных автоморфизмов $\bar{K}$ над K . Так как поле K у нас всюду фиксировано, то указанную группу обозначим через G . Будем говорить, что дифференциальное подполе L инвариантно в $\bar{K}$ над K , если $G(L) \subseteq L$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 50. *Дифференциальное подполе L инвариантно в $\bar{K}$ над K тогда и только тогда, когда оно является подполем разложения некоторого семейства.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подполе инвариантно тогда и только тогда, когда вместе с любой простой дифференциально конечно порожденной алгеброй в нем содержатся все ей изоморфные алгебры. Но из утверждения 46 следует, что это в точности подполя разложения.

СЛЕДСТВИЕ 51. *Если L – инвариантное в $\bar{K}$ над K дифференциальное подполе, то $\bar{K}$ конструируемо над L .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если поле L инвариантно в $\bar{K}$, то по утверждению 50 оно есть подполе разложения в $\bar{K}$. Тогда утверждение 49 завершает доказательство.

7.3. Нормальные расширения. В этом пункте мы имеем дело с дифференциальными полями, лежащими не в дифференциальном замыкании, а в произвольном поле разложения. Будем говорить, что расширение дифференциальных полей $F \subseteq L$ нормально, если L является полем разложения некоторого семейства дифференциально конечно порожденных алгебр над F .

УТВЕРЖДЕНИЕ 52. *Расширение дифференциальных полей $F \subseteq L$ нормально тогда и только тогда, когда L может быть вложено в $\bar{F}$ в качестве инвариантного над F дифференциального подполя.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F \subseteq L$ нормально; тогда по утверждению 39 дифференциальное замыкание L совпадает с $\bar{F}$. Покажем, что L инвариантно в нем. Пусть L – поле разложения семейства $\{B_\alpha\}$, и пусть B – дифференциальная подалгебра в $\bar{F}$, изоморфная $\bar{B}_\alpha$. Мы знаем, что дифференциальное замыкание конструируемо над полем L . Тогда по утверждению 30 алгебра $L \cdot B$ локально проста и, следовательно, совпадает с L . Следовательно, L – это подполе разложения в $\bar{F}$, которое инвариантно по утверждению 50.

Обратно, пусть L вложено в качестве инвариантного подполя в $\bar{F}$. Тогда из утверждения 50 следует, что оно есть подполе разложения и, тем более, поле разложения; следовательно, оно нормально.

Важно, что для нормальных расширений верны все те же утверждения, что и для дифференциального замыкания. В этом случае нет необходимости работать со всем дифференциальным замыканием целиком, можно ограничиться только интересующим нас нормальным расширением.

УТВЕРЖДЕНИЕ 53. Пусть L – некоторое поле разложения над K , и пусть B – простая дифференциально конечно порожденная K -алгебра, лежащая в L . Тогда существует отображение из поля разложения F кольца B в L . Среди дифференциальных подполей в L , изоморфных F , существует наибольшее, и оно совпадает с наименьшим подполем, порожденным всеми дифференциальными кольцами, изоморфными B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно отобразить поле F в L . Вложим L в его дифференциальное замыкание в качестве подполя разложения над базовым полем K . Тогда L устойчиво относительно действия группы G , т.е. вместе с алгеброй B в нем лежит и любая ей изоморфная (утверждение 46). То есть в L попадает наименьшее подполе, натянутое на дифференциальные алгебры, изоморфные B . По утверждению 46 оно изоморфно F . По построению оно и будет наибольшим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 54. Если L – поле разложения над K , а F – наибольшее дифференциальное подполе в L , изоморфное некоторому полю разложения над K , то F будем называть *подполем разложения*.

Из утверждений 52, 53 мы получаем простое следствие.

СЛЕДСТВИЕ 55. Всякое поле разложения нормально над своим подполем разложения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 56. Пусть L – произвольное поле разложения над K , а F – его произвольное подполе разложения над K . Тогда F устойчиво относительно любого дифференциального автоморфизма L над K .

Доказательство немедленно следует из утверждения 53.

Дифференциальной группой Галуа $\text{Gal}^\Delta(L/F)$ нормального расширения $F \subseteq L$ называется группа дифференциальных автоморфизмов L над F .

УТВЕРЖДЕНИЕ 57. Дифференциальное подполе F некоторого поля разложения L над K инвариантно относительно $\text{Gal}^\Delta(L/K)$ тогда и только тогда, когда оно является подполем разложения некоторого семейства дифференциально конечно порожденных K -алгебр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложим L в его дифференциальное замыкание $\bar{L}$. Из утверждения 40 следует, что любой дифференциальный автоморфизм L продолжается до дифференциального автоморфизма $\bar{L}$. Значит, подполе F инвариантно в L тогда и только тогда, когда оно инвариантно в $\bar{L}$. Но по утверждению 50 это равносильно тому, что оно является подполем разложения в $\bar{L}$. Тогда из утверждения 53 следует, что если какая-то простая дифференциально конечно порожденная подалгебра B лежит в поле L , то в L лежат все дифференциальные подалгебры из $\bar{L}$, изоморфные B . Значит, подполе в L является подполем разложения тогда и только тогда, когда оно является подполем разложения в $\bar{L}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 58. Пусть $F \subseteq L$ – некоторое нормальное расширение полей. Тогда $F = L^{\text{Gal}^\Delta(L/F)}$.

Для доказательства нужно применить утверждение 43 с F вместо K .

§ 8. Соответствие Галуа для нормальных расширений

Нужно отметить, что мы строим теорию в предположении, что все дифференциальные кольца являются алгебрами над некоторым дифференциальным полем K нулевой характеристики. В качестве естественного такого поля всегда можно выбрать поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

ТЕОРЕМА 59. Пусть $K \subseteq L$ – некоторое нормальное расширение дифференциальных полей. Тогда для любого подполя разложения F в L , содержащего K , выполнено равенство

$$F = L^{\text{Gal}^\Delta(L/F)}.$$

Более того, для групп дифференциальных автоморфизмов выполнено равенство

$$\text{Gal}^\Delta(F/K) = \text{Gal}^\Delta(L/K) / \text{Gal}^\Delta(L/F).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие 55 гласит, что расширение $F \subseteq L$ является нормальным. Тогда по утверждению 58 получаем, что поле F восстанавливается по своей дифференциальной группе Галуа.

Утверждение 56 гарантирует, что любой дифференциальный автоморфизм группы $\text{Gal}^\Delta(L/K)$ корректно ограничивается на подполе F . Тогда ядром этого гомоморфизма является в точности группа $\text{Gal}^\Delta(L/F)$. Осталось заметить, что любой дифференциальный автоморфизм поля F продолжается до дифференциального автоморфизма поля L . Действительно, это следует из утверждения 40.

Теперь введем следующие обозначения. Пусть $F \subseteq L$ – некоторое нормальное расширение дифференциальных полей; другими словами, L является некоторым полем разложения над F . Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех хороших подполей в L , содержащих F . Через $\mathcal{F}'$ обозначим множество $\{L^H \mid H \subseteq \text{Gal}^\Delta(L/F)\}$. Пусть множество $\mathcal{N}$ обозначает множество инвариантных подполей относительно $\text{Gal}^\Delta(L/F)$.

Отметим, что множество $\mathcal{F}'$, вообще говоря, не содержит все промежуточные подполя между F и L . Из определения хорошего подполя следует включение $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, которое, вообще говоря, является строгим. Также всегда верно включение $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{F}$ (см. утверждение 49).

ПРИМЕР 60. Этот пример позаимствован из работ [14] и [1]. Продемонстрируем, насколько плохим может быть нормальное расширение, а вместе с ним и его группа Галуа.

Ограничимся случаем одного дифференцирования. Пусть поле K является алгебраически замкнутым полем констант. Рассмотрим уравнение $y' = y^3 - y^2$. Тогда из следствия в [14; стр. 532] следует, что его полем разложения является следующее поле:

$$L = K(x_1, \dots, x_n, \dots),$$

где x_k алгебраически независимы над K и $x'_k = x_k^3 - x_k^2$. Как мы видим, его дифференциальной группой Галуа является группа перестановок элементов x_k , т.е. группа перестановок множества натуральных чисел $S_{\mathbb{N}}$. Подполя, порожденные конечным числом x_i , т.е. поля вида $K(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, являются хорошими и лежат в $\mathcal{F}$. Подполе $K(x_2, x_4, \dots, x_{2n}, \dots)$ лежит в $\mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$. Действительно, оно является множеством неподвижных точек для подгруппы, переставляющей только x_k с нечетными индексами. Но оно само уже является полем разложения, и, следовательно, L не может быть конструируемо над ним. Подполе $K(x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ не лежит даже в $\mathcal{F}'$, так как любая перестановка, тождественная на всех элементах, кроме первого, тождественна всюду.

Определим подгруппу $A_{\mathbb{N}}^F$ в $S_{\mathbb{N}}$ следующим образом: перестановка σ лежит в $A_{\mathbb{N}}^F$ тогда и только тогда, когда она переставляет лишь конечное число элементов с помощью четной перестановки. Данная группа является наименьшей нормальной подгруппой в $S_{\mathbb{N}}$. Однако ее поле инвариантов равно K . И, значит, в L нет ни одного собственного подполя разложения. Другими словами, для любого элемента $f \in L$, используя операции сложения, вычитания, умножения, деления, дифференцирования и замены переменных x_i на x_j , можно получить любой другой элемент из L .

§ 9. Связь с дифференциально алгебраическими многообразиями

Пусть B – произвольная дифференциально конечно порожденная алгебра над полем K . Пусть $\overline{K}$ – дифференциальное замыкание поля K . Через $X_{\overline{K}}$ обозначим множество $\overline{K}$ точек алгебры B , т.е. множество дифференциальных гомоморфизмов из B в $\overline{K}$ над K . Через G , как и выше, обозначим группу $\text{Gal}^\Delta(\overline{K}/K)$. Группа G действует на $X_{\overline{K}}$ естественным образом:

$$\xi \mapsto g \circ \xi, \quad g \in G, \quad \xi \in X_{\overline{K}}.$$

Укажем на следующую связь $\text{SMax}^\Delta B$ и $X_{\overline{K}}$.

ТЕОРЕМА 61. *В сформулированных выше условиях верно равенство*

$$\text{SMax}^\Delta B = X_{\overline{K}}/G.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим отображение из $X_{\overline{K}}$ в $\text{SMax}^\Delta B$, а именно каждому ξ сопоставим его ядро $\ker \xi$. Это отображение корректно, так как в силу следствия 36 поле $\overline{K}$ конструируемо над K и, значит, по утверждению 30 образ B локально прост. Так как любая локально простая алгебра вкладывается в дифференциальное замыкание, построенное отображение сюръективно. По определению действия группы G это отображение постоянно на орбитах действия группы, следовательно, имеем отображение

$$X_{\overline{K}}/G \rightarrow \text{SMax}^\Delta B.$$

Осталось показать, что оно инъективно. Действительно, пусть два дифференциальных гомоморфизма $\xi_1, \xi_2: B \rightarrow \overline{K}$ имеют одинаковые ядра. Обозначим

через B_1 и B_2 образы B под действием ξ_1 и ξ_2 соответственно:

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \subseteq & \overline{K} \supseteq B_2 \\ & \nwarrow \xi_1 & \nearrow \xi_2 \\ & B & \end{array}$$

Тогда дифференциальная алгебра B_1 изоморфна B_2 , этот изоморфизм продолжается на их поля частных F_1 и F_2 соответственно. По утверждению 32 поле $\overline{K}$ является конструируемым над F_1 и F_2 и совпадает с их дифференциальным замыканием. Следовательно, по следствию из теоремы единственности 36 этот изоморфизм продолжается до дифференциального автоморфизма g поля $\overline{K}$. По построению он удовлетворяет свойству $\xi_2 = g \circ \xi_1$, что и завершает доказательство.

Теорема 61 указывает на связь между дифференциально алгебраическим многообразием и множеством локально замкнутых точек дифференциального спектра. При изучении алгебраических многообразий методами теории схем очень важно, что свойства спектра в известном смысле связаны со свойствами многообразия. Эта теорема утверждает, что аналогичная связь есть и в случае дифференциально алгебраических многообразий. Тем самым, можно переносить геометрические результаты о дифференциальном спектре на случай дифференциально алгебраических многообразий.

Список литературы

- [1] E. R. Kolchin, “Constrained extensions of differential fields”, *Advances in Math.*, **12**:2 (1974), 141–170.
- [2] S. Shelah, “Uniqueness and characterization of prime models over sets for totally transcendental first-order theories”, *J. Symbolic Logic*, **37**:1 (1972), 107–113.
- [3] Б. Пуаза, *Курс теории моделей*, <http://people.maths.ox.ac.uk/~zilber/poizat/poizat1251.html>; пер. с фр.: B. Poizat, *Cours de théorie des modèles*, Bruno Poizat, Lyon, 1985.
- [4] M. van der Put, M. F. Singer, *Galois theory of linear differential equations*, Grundlehren Math. Wiss., **328**, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [5] Ph. J. Cassidy, M. F. Singer, “Galois theory of parameterized differential equations and linear differential algebraic groups”, *Differential equations and quantum groups*, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., **9**, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, 113–157.
- [6] A. Pillay, “Differential Galois theory. I”, *Illinois J. Math.*, **42**:4 (1998), 678–699.
- [7] A. Pillay, “Differential Galois theory. II”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **88**:2–3 (1997), 181–191.
- [8] D. Marker, A. Pillay, “Differential Galois theory. III: Some inverse problems”, *Illinois J. Math.*, **41**:3 (1997), 453–461.
- [9] М. Атья, И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру*, Факториал Пресс, М., 2003; пер. с англ.: M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Reading, MA–London–Don Mills, ON, 1969.
- [10] E. R. Kolchin, *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press, New York–London, 1973.
- [11] J. J. Kovacic, “The differential Galois theory of strongly normal extensions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:11 (2003), 4475–4522.

- [12] Th. Scanlon, “Model theory and differential algebra”, *Differential algebra and related topics* (Newark, NJ, 2000), World Sci. Publ., Singapore–River Edge, NJ, 2002, 125–150.
- [13] T. McGrail, “The model theory of differential fields with finitely many commuting derivations”, *J. Symbolic Logic*, **65**:2 (2000), 885–913.
- [14] M. Rosenlicht, “The nonminimality of the differential closure”, *Pacific J. Math.*, **52**:2 (1974), 529–537.

Д. В. Трушин (D. V. Trushin)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: trushindima@yandex.ru

Поступила в редакцию

22.05.2009 и 07.01.2010