Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Бекларян, О квазибегущих волнах, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 12, 21–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7583>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 16:15:44

УДК 517.927.4

Л. А. Бекларян

О квазибегущих волнах

Исследуется конечно-разностный аналог волнового уравнения с потенциальным возмущением, моделирующий поведение бесконечного стержня под воздействием внешнего продольного силового поля. Для однородного стержня описание решений типа бегущей волны оказывается эквивалентным описанию всего пространства классических решений индуцированного однопараметрического семейства функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) точечного типа с параметром в виде характеристики бегущей волны. Для неоднородного стержня в силу тривиальности пространства решений типа бегущей волны определяется их “правильное” расширение в форме решений типа “квазибегущей” волны. В отличие от случая однородного стержня, описание решений типа квазибегущей волны для неоднородного стержня оказывается эквивалентным описанию уже всего пространства импульсных решений индуцированного однопараметрического семейства ФДУ точечного типа, факторизованного по отношению эквивалентности, связанного с определением решения типа квазибегущей волны. Стационарные решения исследуются на устойчивость.

Библиография: 9 названий.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, шкала функциональных пространств, импульсные решения, волновое уравнение, бегущие волны.

Введение

Во многих задачах, связанных с приложениями функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ), возникает необходимость описания более широкого класса решений ФДУ точечного типа, чем классические решения из пространства абсолютно непрерывных функций. К таким решениям, в частности, относятся импульсные решения. Это – решения из пространства кусочно абсолютно непрерывных функций, для которых в точках разрыва существуют пределы слева и справа, а величины скачков в точках разрыва конечны (разрывы первого рода). Такая задача возникает, в частности, в линейной теории ФДУ точечного типа (см. [1], [2]), где построение аналога альтернативы Нётера требует расширения классических решений сопряженного уравнения до класса импульсных решений.

Примером другой задачи, приводящей к рассмотрению импульсных решений ФДУ точечного типа, является описание решений типа бегущей волны

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00324-а) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3038.2008.1).

в моделях математической физики, в частности, в модели из теории пластической деформации, касающейся распространения бегущих волн для бесконечно-го стержня (см. [3]). Дискретный аналог такой системы моделируется поведением счетного числа шаров, расположенных в целочисленных точках числовой прямой, соединенных между собой абсолютно упругой нитью. Такая система описывается следующим конечно-разностным аналогом волнового уравнения с нелинейным потенциалом:

$$m_i \ddot{y}_i = \phi(y_i) + y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}, \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad m_i > 0, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (0.1)$$

где потенциал $\phi(\cdot)$ задается гладкой функцией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вектор-функция $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}, t \in \mathbb{R}$, с абсолютно непрерывными координатами называется *решением системы (0.1) типа бегущей волны*, если существует $\tau > 0$, не зависящее от t и i , такое, что при всех $i \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$y_i(t + \tau) = y_{i+1}(t). \quad (0.2)$$

Константа τ называется *характеристикой бегущей волны*.

Одним из методов исследования таких систем является конструктивное построение решений, использующее явный вид потенциала. На этом пути для системы (0.1) в случае шаров с равными массами (случай однородного стержня) и гладкой периодической функцией $\phi(\cdot)$ были построены специальные классы решений типа бегущей волны. Методами теории возмущений было показано существование решения типа бегущей волны и для близких потенциалов. Обзор работ в этой области для бесконечномерных систем с потенциалами Френкеля–Конторовой и Ферми–Паста–Улама приведен в работе [4]. Однако такой подход не позволяет описать пространство всех решений типа бегущей волны, а также их возможный рост.

Другой подход для конструирования решений основан на использовании различных физических соображений относительно такой системы. На этом пути удастся изучить некоторые системы и со специальными типами особенностей для потенциала, что было показано Д. Трещевым в его докладе на международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 2002 г.).

В настоящей работе предлагается подход, при котором решения типа бегущей волны для системы (0.1) могут быть реализованы как решения однопараметрического семейства ФДУ точечного типа (см. [1], [5]). При этом системе (0.1) с потенциалом без особенностей удастся исследовать при более общем ограничении на потенциал $\phi(\cdot)$ в виде условия Липшица. В рамках предложенного формализма удастся описать решения типа бегущей волны, а также их возможный рост, связанный с характеристикой бегущей волны. Стационарные решения исследуются на устойчивость.

В случае шаров с равными массами (случай однородного стержня) описание бегущих волн эквивалентно описанию классических решений для индуцированного однопараметрического семейства ФДУ точечного типа, где параметром

служит характеристика бегущей волны (см. [1], [5]). Для линейного потенциала описание решений индуцированного однопараметрического семейства линейных ФДУ точечного типа может быть дано в рамках теории двойственности (аналог альтернативы Нётера), о которой говорилось выше. В случае шаров с неравными массами (случай неоднородного стержня) решения типа бегущей волны, кроме тривиальных, отсутствуют. Это приводит к необходимости “правильного” расширения решений типа бегущей волны до класса решений типа “квазибегущей” волны (см. [5]). Описание решений типа квазибегущей волны оказывается эквивалентным описанию всего пространства импульсных решений для индуцированного однопараметрического семейства ФДУ точечного типа, факторизованного по отношению эквивалентности, связанного с определением решения типа “квазибегущей” волны.

Исходная система дифференциальных уравнений (0.1) может быть реализована как бесконечномерное дифференциальное уравнение в пространстве бесконечных в обе стороны последовательностей. Принципиальное отличие случаев однородного и неоднородного стержней состоит в том, что в первом случае правая часть такого бесконечномерного уравнения коммутирует с оператором сдвига. Эти вопросы подробно рассматриваются в настоящей статье. Более того, приводится формализм для исследования решений типа бегущей (квазибегущей) волны и для более общих бесконечномерных систем.

Для реализации предлагаемого подхода по изучению приведенного конечно-разностного аналога волнового уравнения в работе исследуются импульсные решения для ФДУ точечного типа общего вида. Изучается начально-краевая задача следующего вида:

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t + n_1), \dots, x(t + n_s)), \quad t \in B_R, \quad n_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, s, \quad (0.3)$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus B_R, \quad \varphi(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad (0.4)$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (0.5)$$

$$x(\bar{t}_i + 0) - x(\bar{t}_i - 0) = \rho_i, \quad \bar{t}_i \in \mathbb{R}, \quad \bar{t}_i < \bar{t}_{i+1}, \quad \rho_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (0.6)$$

для ФДУ (0.3) точечного типа с заданными областью определения B_R , отклонениями n_j , $j = 1, \dots, s$, краевым условием (0.4) с заданной краевой функцией $\varphi(\cdot)$, начальным условием (0.5) с заданным начальным значением $\bar{x}$ и начальным моментом $\bar{t}$, условиями скачков (0.6) с заданными значениями скачков ρ_i и моментами скачков $\bar{t}_i$, $i \in \mathbb{Z}$. Множество B_R является либо конечным интервалом $[t_0, t_1]$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, либо полупрямой $[t_0, +\infty)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, либо прямой $\mathbb{R}$. Множество моментов скачков $\Gamma = \{\bar{t}_i : \bar{t}_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}\}$ состоит из объединения конечного числа орбит группы сдвигов $Q = \langle t + n_1, \dots, t + n_s \rangle$.

Известно, что ФДУ точечного типа не наследуют всех замечательных свойств обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (см. [1], [6]). Метод исследования ФДУ точечного типа, основанный на их групповых особенностях (см. [1]), позволил получить неупрощаемые условия, которые определяют способы регулярного расширения класса ОДУ в классе ФДУ точечного типа. Определяемые расширения сохраняют такие свойства решений ОДУ как существование и единственность в заданном классе функций, непрерывная зависимость решения от начальных условий, точечная полнота решений,

n -параметричность пространства решений, “гладкость” решения, свойство “трудности” уравнения и т.д. В рамках такого подхода классические решения (абсолютно непрерывные решения) ФДУ точечного типа ищутся в однопараметрическом семействе банаховых пространств функций $x(\cdot)$ с весами

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu^n C^{(k)}(\mathbb{R}) &= \{x(\cdot) : x(\cdot) \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \max_{0 \leq r \leq k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x^{(r)}(t) \mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty\}, \\ \mu &\in (0, +\infty), \end{aligned} \quad (0.7)$$

и нормой

$$\|x(\cdot)\|_\mu^{(k)} = \max_{0 \leq r \leq k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x^{(r)}(t) \mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Отмеченные неулучшаемые условия формулируются в терминах правой части ФДУ в виде константы Липшица и параметра μ (см. [1; гл. 1, § 3]).

Формализм, развитый в работе [1], используется для исследования начально-краевой задачи (0.3)–(0.6). Основная сложность изучения такой задачи связана с нелокальностью начально-краевых условий (0.4), (0.5). Полученные результаты применяются для описания решений типа бегущих волн и квазибегущих волн.

Заметим, что при изучении линейных ФДУ точечного типа упомянутый формализм из [1] тесно связан со свойствами хорошо известных операторов взвешенного сдвига. Операторам взвешенного сдвига и порожденных ими алгебр посвящена обширная литература. Среди них наиболее близкими к изучаемой в настоящей статье задаче и наиболее полными являются работы [7], [8], в которых центральным является исследование связей спектральной теории операторов взвешенного сдвига и непрерывных полугрупп таких операторов с теорией бесконечномерных линейных расширений динамических систем.

§ 1. Формулировка основных результатов

Сформулируем систему ограничений на правую часть ФДУ (0.3):

- (I) $g(\cdot) \in C^{(0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times s}, \mathbb{R}^n)$ (в условии (I) функцию $g(\cdot)$ по переменной t можно положить кусочно непрерывной с разрывами первого рода в точках дискретного множества);
- (II) для любых $t, z_j, \bar{z}_j, j = 1, \dots, s$, выполнены неравенства

$$\|g(t, z_1, \dots, z_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M_0(t) + M_1 \sum_{j=1}^s \|z_j\|_{\mathbb{R}^n}, \quad M_0(\cdot) \in C^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

$$\|g(t, z_1, \dots, z_s) - g(t, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M_2 \sum_{j=1}^s \|z_j - \bar{z}_j\|_{\mathbb{R}^n}$$

(в действительности $M_1 \leq M_2$, но константы M_1 и M_2 можно взять равными);

- (III) существует $\mu^* \in \mathbb{R}_+$ такое, что выражение

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} M_0(t + i)(\mu^*)^{|i|}$$

для любого $t \in \mathbb{R}$ имеет конечное значение и как функция аргумента t непрерывна;

(IV) существует $\mu^* \in \mathbb{R}_+$ такое, что семейство функций

$$\tilde{g}_{i,z_1,\dots,z_s}(t) = g(t+i, z_1, \dots, z_s)(\mu^*)^{|i|}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad z_1, \dots, z_s \in \mathbb{R}^n,$$

на любом конечном интервале равномерно непрерывно.

В случае конечного интервала определения $B_R = [t_0, t_1]$ будем предполагать, что функция $g(\cdot)$ удовлетворяет условиям (I)–(II). Если B_R является полупрямой или прямой, будем предполагать, что $g(\cdot)$ удовлетворяет условиям (I)–(IV).

Опишем весьма широкий класс функций $g(\cdot)$, удовлетворяющих ограничениям (I)–(IV).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть функция g имеет следующее представление:

$$g(t, z_1, \dots, z_s) = g_1(z_1, \dots, z_s) + f(t),$$

в котором непрерывная функция $f(\cdot)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(R)$, $\mu^* \in R_+$, а функция g_1 удовлетворяет условию Липшица. Тогда функция g будет удовлетворять условиям (I)–(IV). В частности, если отображение g является линейным по $z_1, \dots, z_s$, т.е.

$$g(t, z_1, \dots, z_s) = \sum_{j=1}^s A_j z_j + f(t),$$

где A_j – постоянные $(n \times n)$ -матрицы, а $f(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(R)$, $\mu^* \in R_+$, то $g(\cdot)$ будет удовлетворять условиям (I)–(IV).

Определим пространство функций

$$V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n) = \{f(\cdot) : f(\cdot) \text{ удовлетворяет условиям (I)–(III)}\}.$$

Для всех функций из $V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$ параметр $\mu^* \in \mathbb{R}_+$ совпадает с соответствующей константой из условия (III). В пространстве $V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$ можно ввести норму

$$\begin{aligned} \|f(\cdot)\|_{\text{Lip}} = & \sup_{t \in R} \|f(t, 0, \dots, 0)(\mu^*)^{|t|}\|_{R^n} \\ & + \sup_{(t, z_1, \dots, z_s, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s) \in \mathbb{R}^{1+2ns}} \frac{\|f(t, z_1, \dots, z_s) - f(t, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s)\|_{R^n}}{\sum_{j=1}^s \|z_j - \bar{z}_j\|_{R^n}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что для функции $f(\cdot) \in V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$ наименьшее значение константы M_2 из условия Липшица (условие (II)) совпадает со значением второго слагаемого в определении нормы $f(\cdot)$. В дальнейшем, говоря об условии Липшица, под константой M_2 будем понимать именно такое ее наименьшее значение. Правую часть функционально-дифференциального уравнения точечного типа мы будем рассматривать как элемент банахового пространства $V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$.

Условия непрерывности, условия роста по фазовым переменным и переменной времени, а также условие Липшица (условия (I)–(II)) являются стандартными условиями в теории дифференциальных уравнений, в том числе и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В действительности, в (II) условие роста по фазовым переменным и переменной времени (первое неравенство) является следствием условия Липшица (второе неравенство). Вместе с тем мы отдельно выписали первое неравенство, чтобы для функции $M_0(\cdot)$ сформулировать условие (III). Условие (III) для функции g связано с изучением решений на полупрямой и прямой, что требует определенных ограничений на рост правой части. Последнее условие (IV) необходимо в случае полупрямой или прямой, чтобы избежать дополнительных технических сложностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Кусочно абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$, определенная на всей прямой $\mathbb{R}$ и имеющая разрывы первого рода в точках $\Gamma = \{\bar{t}_i : \bar{t}_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}\}$, называется *решением (импульсным решением) начально-краевой задачи (0.3)–(0.6)*, если для почти всех $t \in B_{\mathbb{R}}$ она удовлетворяет ФДУ точечного типа (0.3), краевому условию (0.4), а также начальному условию (0.5) и условиям разрыва (0.6).

Для формулировки результатов относительно импульсных решений, помимо однопараметрического семейства пространств (0.7), нам понадобится однопараметрическое семейство несколько более широких банаховых пространств. Для любого $\mu \in R_+$ положим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mu}^n L_{\infty}(\mathbb{R}) &= \{x(\cdot) : x(\cdot) \text{ — измеримая, } \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{vrai} \|x(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty\}, \\ \mathcal{L}_{\mu}^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma) &= \{x(\cdot) : x(\cdot) \text{ — кусочно непрерывная с разрывами первого рода} \\ &\quad \text{в точках множества } \Gamma, \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{vrai} \|x(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty\} \end{aligned}$$

с нормами

$$\|x(\cdot)\|_{\mu} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{vrai} \|x(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \|x(\cdot)\|_{\mu}^{(0)} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{vrai} \|x(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

В работе [1] были получены теоремы существования и единственности, а также непрерывной зависимости от начальных и краевых условий решений начально-краевой задачи (0.3)–(0.5). Развивая результаты работы [1] по изучению классических решений начально-краевой задачи (0.3)–(0.5), сформулируем соответствующие утверждения об импульсных решениях для начально-краевой задачи (0.3)–(0.5) со скачками (0.6).

ТЕОРЕМА А. Если для некоторого $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ выполняется неравенство

$$M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-|n_j|} < \ln \mu^{-1}, \quad (1.1)$$

то для любых фиксированных

$$\varphi(\cdot) \in L_{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \{\rho_i : \rho_i \in \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{Z}\}$$

таких, что

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty,$$

существует решение (кусочно абсолютно непрерывное)

$$x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma)$$

основной начально-краевой задачи (0.3)–(0.6). Такое решение является единственным и как элемент пространства $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma)$ непрерывно зависит от краевой функции $\varphi(\cdot)$, начального состояния $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, значений скачков $\rho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, а также правой части ФДУ – функции $g(\cdot)$.

Непрерывная зависимость решения от правой части уравнения обычно называется свойством *грубости системы*. Здесь функция $g(\cdot)$ понимается как элемент банахова пространства $V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$, а значения скачков $\rho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty}$ понимаются как элементы пространства бесконечных последовательностей с нормой

$$\|\rho\|_{\infty\mu\Gamma} = \sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|}. \quad (1.2)$$

В монографии [9] показано, что для гарантирования существования и единственности абсолютно непрерывного решения краевой задачи (0.3)–(0.5) условие (1.1) является точным (см. [9; гл. 3, § 9]).

В случае ФДУ точечного типа с чистым запаздыванием и при специальных начальных условиях (0.5) теорема А может быть уточнена.

ТЕОРЕМА А'. Пусть ФДУ (0.3) определено на конечном интервале $[t_0, t_1]$ или полупрямой $[t_0, +\infty)$ и имеет запаздывающий тип ($n_j \leq 0, j = 1, \dots, s$), а начальный момент $\bar{t}$ удовлетворяет условию $\bar{t} \in (-\infty, t_0]$. Тогда найдется $\nu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ такое, что для любых фиксированных

$$\varphi(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \{\rho_i : \rho_i \in \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{Z}\}, \quad \mu \in (0, \nu)$$

таких, что

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty,$$

существует решение (кусочно абсолютно непрерывное)

$$x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma)$$

основной начально-краевой задачи (0.3)–(0.6). Такое решение является единственным и как элемент пространства $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma)$ непрерывно зависит от краевой функции $\varphi(\cdot)$, начального состояния $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, значения скачков $\rho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, а также правой части ФДУ – функции $g(\cdot)$.

На основе теоремы А для уравнения (0.1) удастся описать пространство решений типа бегущей (квазибегущей) волны с заданной характеристикой τ , которое также описывается в терминах параметра μ . Для формулировки результатов определим векторное пространство

$$K^n = \overline{\prod_{i \in \mathbb{Z}} R_i^n}, \quad R_i^n = \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z},$$

с элементами $\varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}$ и стандартной топологией полного прямого произведения (метризуемое пространство). В частности, элементами пространства K^2 будут бесконечные последовательности $\varkappa = \{(u_i, v_i)'\}_{-\infty}^{+\infty}$ (штрих означает транспонирование). В пространстве K^n определим семейство гильбертовых подпространств $K_{2\mu}^n$, а также банаховых подпространств $K_{\infty\mu}^n$, $K_{\infty\mu\Gamma}^n$, $\mu \in (0, 1]$, следующим образом:

$$\begin{aligned} K_{2\mu}^n &= \left\{ \varkappa : \varkappa \in K^n, \varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|x_i\|_{R^n}^2 \mu^{2|i|} < +\infty \right\}, \\ K_{\infty\mu}^n &= \left\{ \varkappa : \varkappa \in K^n, \varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}; \sup_{i \in \mathbb{Z}} \|x_i\|_{R^n} \mu^{|i|} < +\infty \right\}, \\ K_{\infty\mu\Gamma}^n &= \left\{ \rho : \rho \in K^n, \rho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty}; \sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{R^n} \mu^{|\bar{i}|} < +\infty \right\} \end{aligned}$$

с нормами

$$\begin{aligned} \|\varkappa\|_{2\mu} &= \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|x_i\|_{R^n}^2 \mu^{2|i|} \right]^{1/2}, \quad \|\varkappa\|_{\infty\mu} = \sup_{i \in \mathbb{Z}} \|x_i\|_{R^n} \mu^{|i|}, \\ \|\rho\|_{\infty\mu\Gamma} &= \sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{R^n} \mu^{|\bar{i}|}. \end{aligned}$$

В пространстве K^n определим оператор сдвига T :

$$(T\varkappa)_i = x_{i+1}, \quad \varkappa \in K^n, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

В случае массы шаров, удовлетворяющих условию

$$\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1,$$

и потенциала $\phi(\cdot)$, удовлетворяющего условию Липшица с константой L , рассмотрим следующее уравнение относительно двух переменных $\tau \in (0, +\infty)$ и $\mu \in (0, 1)$:

$$M_2 \tau [2\mu^{-1} + 1] = \ln \mu^{-1}, \quad (1.3)$$

где

$$M_2 = \max_{i \in \mathbb{Z}} \max \{2m_i^{-1} \sqrt{L^2 + 1}; 1\}. \quad (1.4)$$

Множество решений уравнения (1.3) описывается функциями $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$, заданными на рис. 1.

Имеет место равенство $\hat{\mu} = 2M_2\hat{\tau}$. Так как $0 < \hat{\mu} < 1$, $M_2 \geq 1$, то для величины $\hat{\tau}$ имеется некоторая абсолютная оценка: $\hat{\tau} < 1/2$. В случае равных масс шаров в работах [1], [5] были описаны решения типа бегущей волны. Приведем этот результат в виде теоремы В.

ТЕОРЕМА В. Пусть $m_i = m$, $i \in \mathbb{Z}$, а потенциал $\phi(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L . Тогда при любых $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ и характеристиках $\tau > 0$, удовлетворяющих условию

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

Рис. 1. Графики функций $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$

для исходной системы дифференциальных уравнений (0.1) существует единственное решение $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ типа бегущей волны с характеристикой τ такое, что:

- 1) оно удовлетворяет начальным условиям $y_{\bar{i}}(\bar{t}) = a$, $\dot{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b$;
- 2) для каждого значения параметра $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ вектор-функция $\omega(\cdot) = \{(y_i(\cdot), \dot{y}_i(\cdot))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ принадлежит пространству $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$.

Более того, для такого решения $\omega(\cdot)$ функция $\Upsilon_\mu(\cdot) = \|\omega(\cdot)\|_{2\mu}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_{\sqrt{\mu^2}}^1 C^{(1)}(\mathbb{R})$ и вектор-функция $\omega(\cdot)$ как элемент пространства $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$ непрерывно зависит от начальных данных $a, b \in \mathbb{R}$ и массы m шаров в топологии компактной сходимости на $\mathbb{R}$.

Теорема В не только гарантирует существование решения типа бегущей волны, но и задает ограничение на его возможный рост как по времени t , так и по координатам $i \in \mathbb{Z}$ (по пространству). Более того, существование решения типа бегущей волны гарантируется в более узких пространствах $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$ с $\mu \uparrow \mu_2(\tau)$, а единственность гарантируется в более широких пространствах $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$ с $\mu \downarrow \mu_1(\tau)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть массы шаров таковы, что

$$\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1,$$

а потенциал $\phi(\cdot)$ тождественно равен нулю. При любых начальных данных $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$ и характеристиках $\tau > 0$ существует решение типа бегущей волны $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{bt + b\bar{i}\tau + \delta\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\delta = a - b\bar{t} - b\bar{i}\tau$, описывающее либо прямолинейное равномерное движение, либо стационарное состояние. Если характеристика $\tau > 0$ удовлетворяет условию

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

то решение типа бегущей волны единственное.

Следовательно, и в случае равных, и в случае неравных масс шаров при нулевом потенциале решения типа бегущей волны одни и те же. Они описывают либо прямолинейные равномерные движения, либо стационарные состояния.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть массы шаров таковы, что

$$\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1,$$

среди шаров есть хотя бы два с неравными массами, а потенциал $\phi(\cdot)$ не есть тождественный нуль. Тогда всякое решение типа бегущей волны является стационарным решением $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{\alpha_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\alpha_i = \alpha$, $i = \mathbb{Z}$.

Как видим, при ненулевом потенциале, в отличие от случая равных масс шаров, в случае неравных масс шаров всякое решение типа бегущей волны является стационарным решением, что свидетельствует об узости класса решений типа бегущей волны. Вместе с тем возможны решения, которые по своему профилю близки к бегущей волне, к определению которых мы и приступаем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $(\bar{q}, \bar{p})' = \{(q_i, p_i)'\}_{-\infty}^{+\infty}$. Будем говорить, что решение $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in \mathbb{R}$, системы уравнений (0.1) является решением с начальной невязкой $(\bar{q}, \bar{p})'$, если существует $\tau > 0$, не зависящее от $i \in \mathbb{Z}$, такое, что для любого $i \in \mathbb{Z}$ выполняются условия

$$y_i(\tau) - y_{i+1}(0) = q_i, \quad \dot{y}_i(\tau) - \dot{y}_{i+1}(0) = p_i.$$

Константу τ будем называть характеристикой решения с начальной невязкой $(\bar{q}, \bar{p})'$.

Очевидно, что всякое решение типа бегущей волны является решением с начальной невязкой $(0, 0)'$. В общем случае обратное утверждение неверно. Оно становится верным в случае равных масс. Сформулируем теорему существования решения с начальной невязкой $(\bar{q}, \bar{p})'$.

ТЕОРЕМА С. Пусть массы шаров таковы, что

$$\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1,$$

а потенциал $\phi(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L . Для любых $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, параметре $\bar{\mu} > \mu_1(\tau)$, векторе $(\bar{q}, \bar{p})' \in K_{2\bar{\mu}}^2$ и характеристике $\tau > 0$, удовлетворяющей условию

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

для системы уравнений (0.1) существует единственное решение $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ с начальной невязкой $(\bar{q}, \bar{p})'$ и характеристикой τ такое, что:

- 1) оно удовлетворяет начальным условиям $y_{\bar{i}}(\bar{t}) = a$, $\dot{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b$;
- 2) для каждого значения параметра $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)) \cap (\mu_1(\tau), \bar{\mu})$ вектор-функция $\omega(\cdot) = \{(y_i(\cdot), \dot{y}_i(\cdot))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ принадлежит пространству $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$.

Более того, для такого решения $\omega(\cdot)$ функция $\Upsilon_\mu(\cdot) = \|\omega(\cdot)\|_{2\mu}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_{\sqrt{\mu^2}}^1 C^{(1)}(\mathbb{R})$ и вектор-функция $\omega(\cdot)$ как элемент пространства $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$ непрерывно зависит от начальных данных $a, b \in \mathbb{R}$, вектора начальных невязок $(\bar{q}, \bar{p})' \in K_{2\bar{\mu}}^2$ и вектора масс шаров $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$ в топологии компактной сходимости на $\mathbb{R}$.

Теорема С гарантирует существование решения с заданными начальными невязками в более узких пространствах $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$ с $\mu \uparrow \min\{\mu_2(\tau), \bar{\mu}\}$, а единственность гарантирует в более широких пространствах $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$ с $\mu \downarrow \mu_1(\tau)$.

Из графиков функций $\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)$ видно, что для каждого $0 < \tau < \hat{\tau}$ справедливо включение $\hat{\mu} \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$. Тогда из теоремы С следует, что при каждом $(\bar{q}, \bar{p})' \in K_{21}^2$ для решения $\omega(t) = \{(y_i(t), \dot{y}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ с начальной невязкой $(\bar{q}, \bar{p})'$ и характеристикой $0 < \tau < \hat{\tau}$ справедливо условие

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\omega(t)\|_{2\hat{\mu}} \hat{\mu}^{|2t/\tau|} < +\infty.$$

В силу этого мы можем сформулировать оптимизационную задачу. Пусть заданы $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, характеристика $\tau > 0$, массы шаров $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$ и потенциал $\phi(\cdot)$, удовлетворяющий условию Липшица с константой L .

Задача 1. Требуется минимизировать функционал

$$\inf_{(\bar{q}, \bar{p}), \omega(\cdot)} F(\omega(\cdot)) = \inf_{(\bar{q}, \bar{p}), \omega(\cdot)} \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\omega(t + \tau) - T\omega(t)\|_{2\hat{\mu}} \hat{\mu}^{|2t/\tau|} \right\}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{y}_i &= \phi(y_i) + y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}, & i \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ y_{\bar{i}}(\bar{t}) &= a, \quad \dot{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b, \\ y_i(\tau) - y_{i+1}(0) &= q_i, \quad \dot{y}_i(\tau) - \dot{y}_{i+1}(0) = p_i, & i \in \mathbb{Z}, \\ (\bar{q}, \bar{p})' &= \{(q_i, p_i)'\}_{-\infty}^{+\infty} \in B_{21}^2 - \text{единичный шар в пространстве } K_{21}^2, \\ \omega(\cdot) &= \{(y_i(\cdot), \dot{y}_i(\cdot))'\}_{-\infty}^{+\infty} \in C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\hat{\mu}}^2). \end{aligned}$$

Здесь аргументы $\bar{i}$, $\bar{t}$, a , b , τ , $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}$ являются параметрами.

Рассмотрим счетно-нормированное пространство $\hat{K}_{21}^2 = \bigcap_{\mu \in (0,1)} K_{2\mu}^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть заданы $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, характеристика $\tau > 0$ и массы шаров $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$. Решение $\{\hat{y}_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ системы (0.1) с начальной невязкой $(\hat{q}, \hat{p})' \in \hat{K}_{21}^2$ и характеристикой τ , удовлетворяющее начальным условиям $\hat{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = a$, $\dot{\hat{y}}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b$, называется *решением типа квазибегущей волны с характеристикой τ* , если на нем достигается оптимальное значение функционала F в задаче 1.

Теперь мы можем сформулировать теорему существования решения типа квазибегущей волны, которая для случая равных масс переходит в теорему В о существовании и единственности решения типа бегущей волны

ТЕОРЕМА D. Пусть массы шаров таковы, что

$$\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1,$$

а потенциал $\phi(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L . При любых $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ и характеристиках $\tau > 0$, удовлетворяющих условию

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

существует решение $\{\hat{y}_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ типа квазибегущей волны с характеристикой τ такое, что:

1) оно удовлетворяет начальному условию $\hat{y}_i(\bar{t}) = a$, $\dot{\hat{y}}_i(\bar{t}) = b$;

2) для каждого значения параметра $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ вектор-функция $\hat{\omega}(t) = \{(\hat{y}_i(t), \dot{\hat{y}}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ принадлежит пространству $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$.

При этом для решения $\hat{\omega}(\cdot)$ типа квазибегущей волны функция $\Upsilon_\mu(\cdot) = \|\hat{\omega}(\cdot)\|_{2\mu}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_{\sqrt{\mu^2}}^1 C^{(1)}(\mathbb{R})$, а оптимальное значение функционала F непрерывно зависит от начальных данных $a, b \in \mathbb{R}$ и вектора масс шаров $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$ как от параметров.

Более того, при любых заданных параметрах $(a, b, \{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty})$ с равными массами $m_i = m$, $i \in \mathbb{Z}$, решение типа квазибегущей волны в действительности является решением типа бегущей волны и единственно.

В отличие от теоремы В (случай равных масс шаров), в которой гарантируется существование и единственность решения типа бегущей волны с заданными начальными данными a, b и характеристикой τ , в теореме D (случай неравных масс шаров) отсутствует утверждение о единственности решения типа квазибегущей волны с заданными начальными данными a, b и характеристикой τ . Единственность решения типа квазибегущей волны гарантируется только в случае равных масс, когда решения типа квазибегущей волны становятся решениями типа бегущей волны.

Ограничения $0 < \tau < \hat{\tau}$, $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ из формулировки теоремы являются существенными. Они эквивалентны условию (1.1) для однопараметрического функционально-дифференциального уравнения, индуцированного системой дифференциальных уравнений (0.1). Ранее было отмечено, что для функционально-дифференциального уравнения условие (1.1) является точным. Поэтому условия $0 < \tau < \hat{\tau}$, $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ также являются точными. Всегда можно подобрать такой потенциал, что при нарушении этих условий теоремы о существовании и единственности решений типа бегущей волны либо квазибегущей волны будут неверны.

В случае $\tau = 0$ для системы (0.1) решения типа бегущей волны должны удовлетворять системе уравнений

$$m_i \ddot{y}_i = \phi(y_i), \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad m_i > 0, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Для системы дифференциальных уравнений (1.5) существует единственное решение $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ типа бегущей волны с характеристикой τ такое, что:

1) оно удовлетворяет начальным условиям $y_i(\bar{t}) = a$, $\dot{y}_i(\bar{t}) = b$;

2) для каждого значения параметра $\mu \in (0, 1)$ вектор-функция $\omega(\cdot) = \{(y_i(\cdot), \dot{y}_i(\cdot))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ принадлежит пространству $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$.

Более того, для такого решения $\omega(\cdot)$ функция $\Upsilon_\mu(\cdot) = \|\omega(\cdot)\|_{2\mu}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_{\mu_*}^1 C^{(1)}(\mathbb{R})$, $\mu_* = e^{-M_2}$ и $\omega(\cdot)$ как элемент пространства $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$ непрерывно зависит от начальных данных $a, b \in \mathbb{R}$ и массы m шаров в топологии компактной сходимости на $\mathbb{R}$.

Остается заметить, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \sqrt{\mu_2^2(\tau)} = \mu_*^2. \quad (1.6)$$

Поэтому, доопределив значение $\sqrt{\mu^2}$ при $\tau = 0$, положив его равным μ_*^2 , мы можем в формулировку теорем включить значение $\tau = 0$, т.е. писать $0 \leq \tau < \hat{\tau}$.

Другим важным вопросом для системы (0.1) является вопрос об устойчивости стационарных решений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Стационарное решение $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{a_i\}_{-\infty}^{+\infty}$ для системы (0.1) называется μ -устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого t_0 найдется такое $\delta > 0$, что для всякого другого решения $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, определенного в окрестности точки t_0 и удовлетворяющего условию $\omega(t) = \{(y_i(t), \dot{y}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{2\mu}^2$ для любого t из этой окрестности, из неравенства

$$\|\omega(0) - \{(a_i, 0)'\}_{-\infty}^{+\infty}\|_{2\mu} < \delta$$

следует, что $\varkappa(\cdot)$ определено при всех $t \geq t_0$ и

$$\|\omega(t) - \{(a_i, 0)'\}_{-\infty}^{+\infty}\|_{2\mu} < \varepsilon.$$

Для изучения устойчивости нам потребуются дополнительные условия на потенциал $\phi(\cdot)$.

ТЕОРЕМА Е. Пусть потенциал $\phi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируем с равномерно ограниченными производными. Если массы шаров таковы, что

$$\{m_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1, \quad \{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1,$$

то для системы (0.1) стационарное решение $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{a_i\}_{-\infty}^{+\infty}$ является μ -неустойчивым по Ляпунову для любого $\mu < (2 + \gamma)^{-1}$, где $\gamma = \sup_{i \in \mathbb{Z}} \dot{\phi}(a_i)$.

§ 2. Доказательство теорем существования и единственности импульсных решений

Сначала мы установим сформулированные результаты для случая целочисленных концов области определения уравнения B_R , начального момента $\bar{t}$ и множества $\Gamma = \{\bar{t}_i : \bar{t}_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}\}$ – множества точек разрыва решений. Далее, с помощью замены времени типа квазирастяжения исходная начально-краевая задача сводится к начально-краевой задаче с целочисленными концами интервала B_R , начальным моментом $\bar{t}$ и множеством точек разрыва решений $\Gamma = \{\bar{t}_i : \bar{t}_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}\}$. Это позволяет провести доказательство, основываясь на целочисленном случае.

2.1. Случай целочисленных концов интервала B_R , начального момента $\bar{t}$ и множества Γ – точек разрыва решений. Начально-краевой задаче (0.3)–(0.6) для ФДУ точечного типа поставим в соответствие индуцированную бесконечномерную начально-краевую задачу для индуцированного обыкновенного дифференциального уравнения. Для этого следует дать ряд определений.

Пусть $\mathcal{B}$ – σ -алгебра всех подмножеств множества целых чисел $\mathbb{Z}$. Через $\bar{B}$ обозначим дополнение к $B \in \mathcal{B}$ в $\mathbb{Z}$, т.е. $\bar{B} = \mathbb{Z} \setminus B$. Для всякого $B \in \mathcal{B}$ определим множество

$$B_R = \bigcup_{i \in B} [i, i + 1].$$

Каждому множеству $B \in \mathcal{B}$ поставим в соответствие непрерывный проектор P_B , действующий в пространстве K^n по следующему правилу:

$$(P_B \varkappa)_i = \begin{cases} x_i, & \text{если } i \in B, \\ 0, & \text{если } i \notin B, \end{cases} \quad \varkappa \in K^n, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Ограничения оператора сдвига T и оператора проектирования P_B на подпространство $K_{p\mu}^n$, $p \in \{2, +\infty\}$, $\mu \in (0, 1)$, действующих из $K_{p\mu}^n$ в себя, обозначим через $T_{p\mu}$ и $P_{Bp\mu}$ соответственно. Там, где это не будет вызывать недоразумения, индекс 2μ будем опускать.

По отображению $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$, задающему правую часть ФДУ (0.3) точечного типа, определим оператор

$$G: \mathbb{R} \times K^n \rightarrow K^n$$

по следующему правилу:

$$(G(t, \varkappa))_i = \mathcal{G}_i(t, \varkappa) = g(t + i, x_{i+n_1}, \dots, x_{i+n_s}) \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varkappa \in K^n. \quad (2.1)$$

Отображение G непрерывно и справедливо правило перестановочности:

$$TG(t, \varkappa) = G(t + 1, T\varkappa). \quad (2.2)$$

Ограничение оператора $P_B G$ на подпространство $\mathbb{R} \times K_{p\mu}^n$, $p \in \{2, +\infty\}$, $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$, действует непрерывно в пространство $K_{p\mu}^n$. Обозначим это ограничение через $P_B G_{p\mu}$. Кроме того, оно удовлетворяет условию квазилинейного роста и условию Липшица (см. [1; гл. 2, лемма 3.1]):

$$\|P_B G_{p\mu}(t, \varkappa)\|_{p\mu} \leq M_{0p\mu}(t) + M_{1p\mu}\|\varkappa\|_{p\mu}, \quad (2.3)$$

$$\|P_B G_{p\mu}(t, \varkappa) - P_B G_{p\mu}(t, \bar{\varkappa})\|_{p\mu} \leq M_{2p\mu}\|\varkappa - \bar{\varkappa}\|_{p\mu}, \quad (2.4)$$

где

$$\eta_\mu(B) = \sum_{j=1}^s \max[\mu^{n_j} \gamma(B \cap]-\infty, -n_j]), \mu^{-n_j} \gamma(B \cap [-n_j, +\infty[)], \quad (2.5)$$

$$\gamma(B) = \begin{cases} 1, & \text{если } B \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } B = \emptyset, \end{cases}$$

и для любых $t \in \mathbb{R}$

$$M_{0\infty\mu}(t) = \sup_{i \in \mathbb{Z}} M_0(t + i)\mu^{|i|}, \quad M_{1\infty\mu} = M_1\eta_\mu(B), \quad M_{2\infty\mu} = M_2\eta_\mu(B), \quad (2.6)$$

$$M_{02\mu}(t) = (s + 1)^{1/2} \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} M_0^2(t + i)\mu^{2|i|} \right]^{1/2}, \quad (2.7)$$

$$M_{12\mu} = (s + 1)^{1/2} M_1\eta_\mu(B), \quad M_{22\mu} = s^{1/2} M_2\eta_\mu(B).$$

При заданных $p \in \{2, +\infty\}$, $\mu \in (0, 1)$, $r \in \mathbb{Z}$ определим линейные операторы

$$\widehat{\mathbb{S}}_{rp\mu}: \mathbb{R}^n \rightarrow K_{p\mu}^n, \quad \widetilde{\mathbb{S}}_{p\mu}: \mathbb{R}^n \rightarrow K_{p\mu}^n, \quad \mathbb{S}_{r\infty\mu}: K_{\infty\mu}^n \rightarrow K_{\infty\mu}^n,$$

действующие по правилу: для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеют место представления

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{S}}_{r\mu}x &= \varkappa, & \varkappa &= \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}, & x_r &= x, & x_i &= 0, & i &\in \mathbb{Z} \setminus r, \\ \widetilde{\mathbb{S}}_{p\mu}x &= \varkappa, & \varkappa &= \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}, & x_i &= x, & i &\in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

$\mathbb{S}_{r\infty\mu}$ является линейным сечением к линейному непрерывному оператору $\mathcal{F} = (T_{\infty\mu} - E)$, т.е. это – линейное отображение $\mathbb{S}_{r\infty\mu}: K_{\infty\mu}^n \rightarrow K_{\infty\mu}^n$ со свойством $\mathcal{F} \circ \mathbb{S}_{r\infty\mu} = E$ и для любого $\varkappa \in K_{\infty\mu}^n$ выполняется равенство $(\mathbb{S}_{r\infty\mu}\varkappa)_r = 0$. Как и раньше, там где это не будет вызывать недоразумений, нижние индексы у операторов будут опускаться. Очевидно, что линейные операторы $\widehat{\mathbb{S}}_{r\mu}$ и $\widetilde{\mathbb{S}}_{p\mu}$ являются непрерывными. Установлено (см. [1; гл. 2, лемма 4.1]), что линейный оператор $\mathbb{S}_{r\infty\mu}$ также является непрерывным и для любого подмножества $B \subseteq \mathbb{Z}$ справедлива следующая оценка нормы оператора $\mathbb{S}_{r\infty\mu}P_B$:

$$\|\mathbb{S}_{r\infty\mu}P_B\|_{\infty\mu} \leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(r, B). \quad (2.8)$$

Там же показано, что для выражения $\mathcal{J}_{\infty\mu}(r, B)$ имеет место оценка

$$\mathcal{J}_{\infty\mu}(r, B) \leq [1 - \mu]^{-1}. \quad (2.9)$$

В случае, когда множество B ограничено снизу и $r \leq \inf\{i : i \in B\}$, эта оценка может быть уточнена, а именно,

$$\mathcal{J}_{\infty\mu}(r, B) \leq \mu[1 - \mu]^{-1}. \quad (2.10)$$

При заданных

$$p \in \{2, +\infty\}, \quad \mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1), \quad \bar{t} \in \mathbb{Z}, \quad \rho_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z}$$

определим бесконечномерную начально-краевую задачу, индуцированную основной начально-краевой задачей (0.3)–(0.6):

$$\frac{d}{dt}\varkappa(t) = P_B G_{p\mu}(t, \varkappa) + P_{\bar{B}} v(t), \quad t \in [0, 1], \quad (2.11)$$

$$\varkappa(1) = T_{p\mu}\varkappa(0) - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathbb{S}}_{t_i p\mu} \rho_i, \quad (2.12)$$

$$(\varkappa(0))_{\bar{t}} = \bar{x}. \quad (2.13)$$

Здесь множество B такое, что соответствующее ему множество B_R совпадает с одноименным множеством из основной начально-краевой задачи. Вектор-функция

$$v(t) = \{\varphi_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad \varphi_i(t) = \varphi(t + i), \quad t \in [0, 1], \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (2.14)$$

построенная по краевой функции $\varphi(\cdot)$ из краевого условия (0.4), принадлежит пространству $L_\infty([0, 1], K_{p\mu}^n)$ и интегрируема по Бохнеру (см. [1; гл. 2, предложения 2.3, 2.4]).

В бесконечномерной начально-краевой задаче рассматриваются два случая значения $p \in \{2, +\infty\}$. Это связано с тем, что при доказательстве теорем существования решений, где используются теоремы о неподвижной точке, более

удобным пространством является пространство при $p = +\infty$. При исследовании бегущих волн и их устойчивости более удобным является пространство при $p = 2$, когда $K_{2\mu}^n$ является гильбертовым пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Отображение $\varkappa: \mathbb{R} \mapsto K_{p\mu}^n$, $p \in \{2, \infty\}$, $\mu \in (0, 1)$, называется *сильно абсолютно непрерывной вектор-функцией*, если оно почти всюду дифференцируемо по Фреше, на каждом конечном интервале производная $\dot{\varkappa}(\cdot)$ интегрируема по Бохнеру и вектор-функция $\varkappa(\cdot)$ восстанавливается по производной $\dot{\varkappa}(\cdot)$ с точностью до постоянной (см. [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $v(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, K_{p\mu}^n)$, $p \in \{2, \infty\}$, $\mu \in (0, 1)$, и интегрируема по Бохнеру. Сильно абсолютно непрерывная вектор-функция $\varkappa(t)$, $t \in \mathbb{R}$, со значениями в пространстве $K_{p\mu}^n$ называется *решением обыкновенного дифференциального уравнения (2.11)*, если для почти всех $t \in \mathbb{R}$ она удовлетворяет этому уравнению.

Решения основной начально-краевой задачи (0.3)–(0.6) и бесконечномерной начально-краевой задачи (2.11)–(2.13) связаны между собой определенным образом. Установим эту связь.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть заданы

$$\varphi(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad p \in \{2, \infty\}, \quad \bar{t} \in \mathbb{Z}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K^n.$$

Если функция $x(\cdot)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma)$ при $\tilde{\mu} \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ и является кусочно абсолютно непрерывным решением основной начально-краевой задачи (0.3)–(0.6), то справедливо условие

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \tilde{\mu}^{|\bar{t}_i|} < +\infty,$$

т.е. $\{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty\tilde{\mu}\Gamma}^n$, и для любого $\mu \in (0, \tilde{\mu})$ вектор-функция $\varkappa(t) = \{x_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0, 1]$, где

$$x_i(t) = x(t+i), \quad t \in (0, 1), \quad x_i(0) = x(i+0), \quad x_i(1) = x(1+i-0), \quad i \in \mathbb{Z},$$

является решением бесконечномерной начально-краевой задачи (2.11)–(2.13). В случае $p = \infty$ утверждение справедливо для любого $\mu \in (0, \tilde{\mu}]$.

Если вектор-функция $\varkappa(t) = \{x_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0, 1]$, является решением бесконечномерной начально-краевой задачи (2.11)–(2.13), в которой

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty, \quad \mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1),$$

т.е. $\{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty\mu\Gamma}^n$, то функция $x(t) = x_{[t]}(t - [t])$, $t \in \mathbb{R}$ ($[\cdot]$ – целая часть числа), принадлежит пространству $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma)$ и является кусочно абсолютно непрерывным решением основной начально-краевой задачи (0.3)–(0.6).

Доказательство предложения 1 может быть получено непосредственной проверкой его справедливости.

В силу предложения 1 нам достаточно установить теорему существования для бесконечномерной начально-краевой задачи (2.11)–(2.13), в которой $p = \infty$.

Для этого построим бесконечномерное интегральное уравнение, эквивалентное бесконечномерной начально-краевой задаче (2.11)–(2.13). При фиксированных

$$\begin{aligned}\varphi(\cdot) &\in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), & \bar{t} &\in \mathbb{Z}, & \bar{x} &\in \mathbb{R}^n, \\ \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty} &\in K_{\infty\mu\Gamma}^n, & \mu &\in (0, \mu^*) \cap (0, 1),\end{aligned}$$

вектор-функция $v(\cdot)$ из (2.14) будет интегрируемой по Бохнеру и поэтому мы можем определить бесконечномерное интегральное уравнение

$$\begin{aligned}\varkappa(t) = & \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} \left\{ \int_0^1 [P_B G(\tau, \varkappa(\tau)) + P_{\bar{B}} v(\tau)] d\tau + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu} \rho_i \right\} + \widetilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu} \bar{x} \quad (2.15) \\ & + \int_0^t [P_B G(\tau, \varkappa(\tau)) + P_{\bar{B}} v(\tau)] d\tau, \quad t \in [0, 1].\end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Решением интегрального уравнения (2.15) будем называть всякую функцию $\varkappa(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{\infty\mu}^n)$, удовлетворяющую данному уравнению.

Установим соответствие между решениями бесконечномерной начально-краевой задачи (2.11)–(2.13) и интегрального уравнения (2.15).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $(v(\cdot), \bar{x}, \bar{t}) \in L_\infty([0, 1], K_{\infty\mu}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}$, $\{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty\mu\Gamma}^n$, $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ и вектор-функция $v(\cdot)$ интегрируема по Бохнеру.

Если вектор-функция $\varkappa(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{\infty\mu}^n)$ является решением бесконечномерной начально-краевой задачи (2.11)–(2.13), в которой $p = \infty$, то она будет решением интегрального уравнения (2.15).

Если вектор-функция $\varkappa(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{\infty\mu}^n)$ является решением интегрального уравнения (2.15), то она будет решением бесконечномерной начально-краевой задачи (2.11)–(2.13), в которой $p = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующее обозначение:

$$\bar{\varkappa} = \int_0^1 [P_B G_{\infty\mu}(\tau, \varkappa(\tau)) + P_{\bar{B}} v(\tau)] d\tau. \quad (2.16)$$

Пусть $\varkappa(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{\infty\mu}^n)$ является решением бесконечномерной начально-краевой задачи (2.11)–(2.13). Используя обозначение (2.16), из интегрального уравнения

$$\varkappa(t) = \varkappa(0) + \int_0^t [P_B G_{\infty\mu}(\tau, \varkappa(\tau)) + P_{\bar{B}} v(\tau)] d\tau, \quad t \in [0, 1], \quad (2.17)$$

эквивалентного бесконечномерному дифференциальному уравнению (2.11), получим, что $\varkappa(1) = \varkappa(0) + \bar{\varkappa}$. Подставив это выражение в краевое условие (2.12), получим равенство

$$(T_{\infty\mu} - E)\varkappa(0) = \bar{\varkappa} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu} \rho_i. \quad (2.18)$$

Из равенства (2.18), используя определения сечения $\mathbb{S}_{i\infty\mu}$, оператора $\tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}$ и начальное условие (2.13), получим, что

$$\varkappa(0) = \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} \left[\bar{x} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu} \rho_i \right] + \tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu} \bar{x}. \quad (2.19)$$

Подставив значение $\varkappa(0)$ из (2.19) в уравнение (2.17), мы и получим бесконечномерное интегральное уравнение (2.15).

Пусть теперь $\varkappa(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{\infty\mu}^n)$ удовлетворяет бесконечномерному интегральному уравнению (2.15). В этом случае $\varkappa(\cdot)$ является сильно абсолютно непрерывной вектор-функцией и удовлетворяет бесконечномерному дифференциальному уравнению (2.11).

С другой стороны, из того же бесконечномерного интегрального уравнения (2.15) следуют равенства

$$\varkappa(1) = \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} \left[\bar{x} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu} \rho_i \right] + \tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu} \bar{x} + \bar{x}, \quad (2.20)$$

$$\varkappa(0) = \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} \left[\bar{x} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu} \rho_i \right] + \tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu} \bar{x}. \quad (2.21)$$

Используя операторные равенства $(T_{\infty\mu} - E) \circ \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} = E$, $T_{\infty\mu} \tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu} = \tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}$, перепишем равенство (2.20) в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \varkappa(1) = & \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} \left[\bar{x} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu} \rho_i \right] + T_{\infty\mu} \circ \tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu} \bar{x} \\ & + (T_{\infty\mu} - E) \circ \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} \left[\bar{x} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu} \rho_i \right] - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu} \rho_i. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Сократив одинаковые члены с разными знаками и еще раз воспользовавшись первым из приведенных операторных равенств, получим равенство

$$\varkappa(1) = T_{\infty\mu} \circ \left\{ \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} \left[\bar{x} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu} \rho_i \right] + \tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu} \bar{x} \right\} - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu} \rho_i. \quad (2.23)$$

Используя представление (2.21) для $\varkappa(0)$ и равенство (2.23), получим краевое условие (2.12). Далее, пользуясь представлением (2.21) для $\varkappa(0)$ и определением сечения $\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}$, получим начальное условие $(\varkappa(0))_{\bar{t}} = \bar{x}$. Следовательно, вектор-функция $\varkappa(\cdot)$ является решением краевой задачи (2.11)–(2.13).

После того, как мы установили цепочку утверждений в виде предложений 1 и 2, нам осталось сформулировать теорему существования и единственности для бесконечномерного интегрального уравнения (2.15). Доказательство такой теоремы основано на методе сжимающих отображений.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для заданных $B \in \mathcal{B}$, $\bar{t} \in \mathbb{Z}$, $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ справедливо неравенство

$$M_2 \eta_\mu(B) [\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) + 1] < 1. \quad (2.24)$$

Тогда при любых фиксированных вектор-функции $v(\cdot) \in L_\infty([0, 1], K_{\infty\mu}^n)$, интегрируемой по Бохнеру, векторе $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty\mu\Gamma}^n$, т.е. такой, что

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty,$$

существует решение $\kappa(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{\infty\mu}^n)$ бесконечномерного интегрального уравнения (2.15). Это решение является единственным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При фиксированных $v(\cdot)$ и $\bar{x}$ определим операторы

$$A: \kappa(\cdot) \rightarrow \int_0^t [P_B G_{\infty\mu}(\tau, \kappa(\tau)) + P_{\bar{B}} v(\tau)] d\tau, \quad (2.25)$$

$$\hat{A}: \kappa(\cdot) \rightarrow \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} \left[(A[\kappa(\cdot)])(1) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu} \rho_i \right] + \widetilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu} \bar{x} + (A[\kappa(\cdot)])(t), \quad (2.26)$$

действующие из $C^{(0)}([0, 1], K_{\infty\mu}^n)$ в $C^{(0)}([0, 1], K_{\infty\mu}^n)$. Интегральное уравнение (2.15) можно записать в виде

$$\kappa(t) \equiv (\hat{A}[\kappa(\cdot)])(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (2.27)$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что оператор $\hat{A}$ – сжимающий в пространстве $C^{(0)}([0, 1], K_{\infty\mu}^n)$, норму в котором мы обозначили через $\|\cdot\|_{\infty\mu C^{(0)}}$. Пользуясь представлениями (2.25), (2.26), а также тем, что вектор-функция $v(\cdot)$ и вектор $\bar{x}$ фиксированы, для любого $t \in [0, 1]$ получим оценку

$$\begin{aligned} & \|(\hat{A}[\kappa(\cdot)])(t) - (\hat{A}[\tilde{\kappa}(\cdot)])(t)\|_{\infty\mu} \leq \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} \{(A[\kappa(\cdot)])(1) - (A[\tilde{\kappa}(\cdot)])(1)\}\|_{\infty\mu} \\ & \quad + \|(A[\kappa(\cdot)])(t) - (A[\tilde{\kappa}(\cdot)])(t)\|_{\infty\mu} \\ & = \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} P_B \{(A[\kappa(\cdot)])(1) - (A[\tilde{\kappa}(\cdot)])(1)\}\|_{\infty\mu} \\ & \quad + \|(A[\kappa(\cdot)])(t) - (A[\tilde{\kappa}(\cdot)])(t)\|_{\infty\mu}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

В силу оценки (2.8) для оператора $\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} P_B$ и условия Липшица (2.4) для отображения $P_B G_{\infty\mu}$ первое слагаемое оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} P_B \{(A[\kappa(\cdot)])(1) - (A[\tilde{\kappa}(\cdot)])(1)\}\|_{\infty\mu} \\ & \leq \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} P_B\|_{\infty\mu} \|(A[\kappa(\cdot)])(1) - (A[\tilde{\kappa}(\cdot)])(1)\|_{\infty\mu} \\ & \leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) \int_0^1 \|P_B G_{\infty\mu}(\tau, \kappa(\tau)) - P_B G_{\infty\mu}(\tau, \tilde{\kappa}(\tau))\|_{\infty\mu} d\tau \\ & \leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) M_2 \eta_\mu(B) \int_0^1 \|\kappa(\tau) - \tilde{\kappa}(\tau)\|_{\infty\mu} d\tau \\ & \leq M_2 \eta_\mu(B) \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) \|\kappa(\cdot) - \tilde{\kappa}(\cdot)\|_{\infty\mu C^{(0)}}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

По аналогии с этой же оценкой получим оценку и для второго слагаемого:

$$\begin{aligned} \|(A[\varkappa(\cdot)])(t) - (A[\tilde{\varkappa}(\cdot)])(t)\|_{\infty\mu} &\leq \int_0^t \|P_B G_{\infty\mu}(\tau, \varkappa(\tau)) - P_B G_{\infty\mu}(\tau, \tilde{\varkappa}(\tau))\|_{\infty\mu} d\tau \\ &\leq M_2 \eta_\mu(B) \int_0^t \|\varkappa(\tau) - \tilde{\varkappa}(\tau)\|_{\infty\mu} d\tau \leq M_2 \eta_\mu(B) \|\varkappa(\cdot) - \tilde{\varkappa}(\cdot)\|_{\infty\mu C^{(0)}} t \\ &\leq M_2 \eta_\mu(B) \|\varkappa(\cdot) - \tilde{\varkappa}(\cdot)\|_{\infty\mu C^{(0)}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Окончательно, для оператора $\hat{A}$ при любом $t \in [0, 1]$ имеем следующую оценку:

$$\|(\hat{A}[\varkappa(\cdot)])(t) - (\hat{A}[\tilde{\varkappa}(\cdot)])(t)\|_{\infty\mu} \leq M_2 \eta_\mu(B) [\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) + 1] \|\varkappa(\cdot) - \tilde{\varkappa}(\cdot)\|_{\infty\mu C^{(0)}}, \quad (2.31)$$

из которой и следует, что

$$\|\hat{A}[\varkappa(\cdot)] - \hat{A}[\tilde{\varkappa}(\cdot)]\|_{\infty\mu C^{(0)}} \leq M_2 \eta_\mu(B) [\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) + 1] \|\varkappa(\cdot) - \tilde{\varkappa}(\cdot)\|_{\infty\mu C^{(0)}}. \quad (2.32)$$

В силу неравенства (2.24) оператор $\hat{A}$ является сжимающим. Следовательно, решение бесконечномерного интегрального уравнения (2.15) существует и оно единственное.

Установим непрерывную зависимость решения от начальных данных, краевых условий и скачков, а также грубость системы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для заданных $B \in \mathcal{B}$, $\bar{t} \in \mathbb{Z}$, $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ справедливо неравенство

$$M_2 \eta_\mu(B) [\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) + 1] < 1. \quad (2.33)$$

Тогда решение $\varkappa(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{\infty\mu}^n)$ бесконечномерного интегрального уравнения (2.15) непрерывно зависит от вектор-функции $v(\cdot) \in L_\infty([0, 1], K_{\infty\mu}^n)$, интегрируемой по Бохнеру, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty\mu\Gamma}^n$, а также функции $g(\cdot) \in V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$, индуцирующей оператор $G_{\infty\mu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем непрерывную зависимость решения от $\bar{x}$, $v(\cdot)$, $\rho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty}$. Пусть заданы $v(\cdot), v_1(\cdot) \in L_\infty([0, 1], K_{\infty\mu}^n)$, интегрируемые по Бохнеру, $\bar{x}, \bar{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ и

$$\rho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty\mu\Gamma}^n, \quad \rho_1 = \{\rho_{1i}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty\mu\Gamma}^n,$$

т.е. удовлетворяющие условиям

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty, \quad \sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_{1i}\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty.$$

По теореме 1 существуют вектор-функции $\varkappa(\cdot), \varkappa_1(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{\infty\mu}^n)$, удовлетворяющие тождествам

$$\varkappa(t) \equiv (\hat{A}[\varkappa(\cdot); v(\cdot), \bar{x}, \rho])(t), \quad \varkappa_1(t) \equiv (\hat{A}[\varkappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (2.34)$$

Пользуясь тождествами (2.34) и представлениями (2.25), (2.26), получим, что для любого $t \in [0, 1]$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|\varkappa(t) - \varkappa_1(t)\|_{\infty\mu} &= \|(\hat{A}[\varkappa(\cdot); v(\cdot), \bar{x}, \rho])(t) - (\hat{A}[\varkappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t)\|_{\infty\mu} \\ &\leq \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} \{(A[\varkappa(\cdot); v(\cdot), \bar{x}, \rho])(1) - (A[\varkappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathbb{S}}_{\bar{t}\infty\mu} \rho_i - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathbb{S}}_{\bar{t}\infty\mu} \rho_{1i} \right\} \right\|_{\infty\mu} + \|\widetilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}(\bar{x} - \bar{x}_1)\|_{\infty\mu} \\
& + \|(A[\kappa(\cdot); v(\cdot), \bar{x}, \rho])(t) - (A[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t)\|_{\infty\mu} \\
\leq & \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} P_B \{(A[\kappa(\cdot); v(\cdot), \bar{x}, \rho])(1) - (A[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \\
& + \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} P_{\bar{B}} \{(A[\kappa(\cdot); v(\cdot), \bar{x}, \rho])(1) - (A[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \\
& + \left\| \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathbb{S}}_{\bar{t}\infty\mu} \rho_i - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathbb{S}}_{\bar{t}\infty\mu} \rho_{1i} \right\} \right\|_{\infty\mu} + \|\widetilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}(\bar{x} - \bar{x}_1)\|_{\infty\mu} \\
& + \|(A[\kappa(\cdot); v(\cdot), \bar{x}, \rho])(t) - (A[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t)\|_{\infty\mu}. \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Используя представление (2.25), оценку (2.8) для оператора $S_{i\infty\mu} P_B$, условие Липшица (2.4) для отображения $P_B G_{\infty\mu}$ и свойства

$$P_B^2 = P_B, \quad P_{\bar{B}}^2 = P_{\bar{B}}$$

для операторов проектирования, первое, второе и третье слагаемые в правой части неравенства (2.35) оценим следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} P_B \{(A[\kappa(\cdot); v(\cdot), \bar{x}, \rho])(1) - (A[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \\
& \leq \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} P_B\|_{\infty\mu} \|P_B \{(A[\kappa(\cdot); v(\cdot), \bar{x}, \rho])(1) - (A[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \\
& \leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) \int_0^1 \|P_B G_{\infty\mu}(\tau, \kappa(\tau)) - P_B G_{\infty\mu}(\tau, \kappa_1(\tau))\|_{\infty\mu} d\tau \\
& \leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) M_2 \eta_\mu(B) \int_0^1 \|\kappa(\tau) - \kappa_1(\tau)\|_{\infty\mu} d\tau \\
& \leq M_2 \eta_\mu(B) \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) \|\kappa(\cdot) - \kappa_1(\cdot)\|_{\infty\mu C(0)}, \quad (2.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} P_{\bar{B}} \{(A[\kappa(\cdot); v(\cdot), \bar{x}, \rho])(1) - (A[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \\
& \leq \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} P_{\bar{B}}\|_{\infty\mu} \|P_{\bar{B}} \{(A[\kappa(\cdot); v(\cdot), \bar{x}, \rho])(1) - (A[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \\
& \leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \bar{B}) \int_0^1 \|P_{\bar{B}} v(\tau) - P_{\bar{B}} v_1(\tau)\|_{\infty\mu} d\tau \\
& \leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \bar{B}) \sup_{t \in [0,1]} \|v(t) - v_1(t)\|_{\infty\mu} \leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \bar{B}) \|v(\cdot) - v_1(\cdot)\|_{\infty\mu L_\infty}, \quad (2.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathbb{S}}_{\bar{t}\infty\mu} \rho_i - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathbb{S}}_{\bar{t}\infty\mu} \rho_{1i} \right\} \right\|_{\infty\mu} \leq \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}\|_{\infty\mu} \|\rho - \rho_1\|_{\infty\mu\Gamma} \\
& \leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \mathbb{Z}) \|\rho - \rho_1\|_{\infty\mu\Gamma} \quad (2.38)
\end{aligned}$$

Так как $\|\widetilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}\|_{\infty\mu} = 1$, то четвертое слагаемое в правой части неравенства (2.35) можно оценить следующим образом:

$$\|\widetilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}(\bar{x} - \bar{x}_1)\|_{\infty\mu} \leq \|\widetilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}\|_{\infty\mu} \|\bar{x} - \bar{x}_1\|_{R^n} = \|\bar{x} - \bar{x}_1\|_{R^n}. \quad (2.39)$$

По аналогии с предыдущими оценками для любого $t \in [0, 1]$ получим, что

$$\begin{aligned}
& \|(A[\varkappa(\cdot); v(\cdot), \bar{x}, \rho])(t) - (A[\varkappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t)\|_{\infty\mu} \\
& \leq \int_0^t \|P_B G_{\infty\mu}(\tau, \varkappa(\tau)) - P_B G_{\infty\mu}(\tau, \varkappa_1(\tau))\|_{\infty\mu} d\tau \\
& \quad + \int_0^t \|P_{\bar{B}} v(\tau) - P_{\bar{B}} v_1(\tau)\|_{\infty\mu} d\tau \\
& \leq M_2 \eta_\mu(B) \int_0^t \|\varkappa(\tau) - \varkappa_1(\tau)\|_{\infty\mu} d\tau + \sup_{\tau \in [0, 1]} \|v(\tau) - v_1(\tau)\|_{\infty\mu} t \\
& \leq M_2 \eta_\mu(B) \|\varkappa(\cdot) - \varkappa_1(\cdot)\|_{\infty\mu C^{(0)}} t + \sup_{\tau \in [0, 1]} \|v(\tau) - v_1(\tau)\|_{\infty\mu} t \\
& \leq M_2 \eta_\mu(B) \|\varkappa(\cdot) - \varkappa_1(\cdot)\|_{\infty\mu C^{(0)}} + \|v(\cdot) - v_1(\cdot)\|_{\infty\mu L_\infty}. \tag{2.40}
\end{aligned}$$

Используя (2.36)–(2.40), из неравенства (2.35) получим, что для любого $t \in [0, 1]$ верны оценки:

$$\begin{aligned}
\|\varkappa(t) - \varkappa_1(t)\|_{\infty\mu} & \leq M_2 \eta_\mu(B) [\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) + 1] \|\varkappa(\cdot) - \varkappa_1(\cdot)\|_{\infty\mu C^{(0)}} \\
& \quad + [\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \bar{B}) + 1] \|v(\cdot) - v_1(\cdot)\|_{\infty\mu L_\infty} \\
& \quad + \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \mathbb{Z}) \|\rho - \rho_1\|_{\infty\mu\Gamma} + \|\bar{x} - \bar{x}_1\|_{R^n}. \tag{2.41}
\end{aligned}$$

В неравенстве (2.41) взяв максимум левой части по $t \in [0, 1]$ и сгруппировав однородные члены, получим окончательную оценку, а именно,

$$\begin{aligned}
& \{1 - M_2 \eta_\mu(B) [\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) + 1]\} \|\varkappa(\cdot) - \varkappa_1(\cdot)\|_{\infty\mu C^{(0)}} \\
& \leq [\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \bar{B}) + 1] \|v(\cdot) - v_1(\cdot)\|_{\infty\mu L_\infty} \\
& \quad + \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \mathbb{Z}) \|\rho - \rho_1\|_{\infty\mu\Gamma} + \|\bar{x} - \bar{x}_1\|_{R^n}. \tag{2.42}
\end{aligned}$$

В силу неравенства (2.33) коэффициент $\{1 - M_2 \eta_\mu(B) [\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) + 1]\}$ является положительным числом. Поэтому утверждение теоремы и будет следовать из неравенства (2.42).

Перейдем к доказательству непрерывной зависимости решения от $\bar{x}$, $v(\cdot)$, $\rho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty}$ и $g(\cdot)$. Операторы A и $\hat{A}$ определялись по формулам (2.25), (2.26) через отображения $P_B G_{\infty\mu}$, которые, в свою очередь, определялись функцией $g(\cdot)$. Чтобы указать зависимость операторов A , $\hat{A}$ от функции $g(\cdot)$, будем писать их с индексами, т.е. A_g , $\hat{A}_g$. Пусть заданы $v(\cdot), v_1(\cdot) \in L_\infty([0, 1], K_{\infty\mu}^n)$, интегрируемые по Бохнеру, векторы

$$\bar{x}, \bar{x}_1 \in R^n, \quad \rho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad \rho_1 = \{\rho_{1i}\}_{-\infty}^{+\infty},$$

удовлетворяющие условиям

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty, \quad \sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_{1i}\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty,$$

и функции $g(\cdot), \tilde{g}(\cdot) \in V_{\mu^*}(R \times R^{ns}, R^n)$. По теореме 1 существуют вектор-функции $\varkappa(\cdot), \varkappa_1(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{\infty\mu}^n)$, удовлетворяющие тождествам

$$\begin{aligned}
\varkappa(t) & \equiv (\hat{A}_g[\varkappa(\cdot); v(\cdot), \bar{x}, \rho])(t), & \varkappa_1(t) & \equiv (\hat{A}_{\tilde{g}}[\varkappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t), \\
& t \in [0, 1]. \tag{2.43}
\end{aligned}$$

Для любого $t \in [0, 1]$ из тождеств (2.43) следует очевидное неравенство

$$\begin{aligned} \|\kappa(t) - \kappa_1(t)\|_{\infty\mu} &= \|(\widehat{A}_g[\kappa(\cdot); v(\cdot), \bar{x}, \rho])(t) - (\widehat{A}_{\bar{g}}[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t)\|_{\infty\mu} \\ &\leq \|(\widehat{A}_g[\kappa(\cdot); v(\cdot), \bar{x}, \rho])(t) - (\widehat{A}_g[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t)\|_{\infty\mu} \\ &\quad + \|(\widehat{A}_g[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t) - (\widehat{A}_{\bar{g}}[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t)\|_{\infty\mu}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

В силу неравенств (2.35)–(2.41) первое слагаемое в правой части неравенства (2.44) оценивается правой частью неравенства (2.41).

Используя представления (2.25), (2.26), оценим второе слагаемое в правой части неравенства (2.44). Имеем

$$\begin{aligned} &\|(\widehat{A}_g[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t) - (\widehat{A}_{\bar{g}}[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t)\|_{\infty\mu} \\ &\leq \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}\{(A_g[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1) - (A_{\bar{g}}[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \\ &\quad + \|(A_g[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t) - (A_{\bar{g}}[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t)\|_{\infty\mu} \\ &\leq \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}P_B\{(A_g[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1) - (A_{\bar{g}}[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \\ &\quad + \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}P_{\bar{B}}\{(A_g[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1) - (A_{\bar{g}}[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \\ &\quad + \|(A_g[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t) - (A_{\bar{g}}[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t)\|_{\infty\mu}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Второе слагаемое в правой части неравенства (2.45) равно нулю. Пользуясь представлением (2.25), оценкой (2.8) для оператора $S_{i\infty\mu}P_B$, оценкой (2.4) для отображения $P_BG_{\infty\mu}$ и свойствами

$$P_B^2 = P_B, \quad P_{\bar{B}}^2 = P_{\bar{B}}$$

для операторов проектирования, первое и третье слагаемые в правой части неравенства (2.45) оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} &\|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}P_B\{(A_g[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1) - (A_{\bar{g}}[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \\ &\leq \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}P_B\|_{\infty\mu} \\ &\quad \times \|P_B\{(A_g[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1) - (A_{\bar{g}}[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \\ &\leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) \int_0^1 \|P_BG_{\infty\mu}(\tau, \kappa_1(\tau)) - P_B\tilde{G}_{\infty\mu}(\tau, \kappa_1(\tau))\|_{\infty\mu} d\tau \\ &\leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{\text{Lip}} \{\max[(\mu^*)^{-1}, (\mu^*)] + \eta_\mu(B) \|\kappa_1(\cdot)\|_{\infty\mu C^{(0)}}\}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} &\|(A_g[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t) - (A_{\bar{g}}[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t)\|_{\infty\mu} \\ &= \|P_B\{(A_g[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t) - (A_{\bar{g}}[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t)\}\|_{\infty\mu} \\ &\leq \int_0^t \|P_BG_{\infty\mu}(\tau, \kappa_1(\tau)) - P_B\tilde{G}_{\infty\mu}(\tau, \kappa_1(\tau))\|_{\infty\mu} d\tau \\ &\leq \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{\text{Lip}} \{\max[(\mu^*)^{-1}, (\mu^*)] + \eta_\mu(B) \|\kappa_1(\cdot)\|_{\infty\mu C^{(0)}}\}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

В силу приведенных оценок окончательно получим, что для любого $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \|\varkappa(t) - \varkappa_1(t)\|_{\infty\mu} &\leq M_2\eta_\mu(B)[\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) + 1]\|\varkappa(\cdot) - \varkappa_1(\cdot)\|_{\infty\mu C^{(0)}} \\ &+ [\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \bar{B}) + 1]\|v(\cdot) - v_1(\cdot)\|_{\infty\mu L_\infty} + \|\bar{x} - \bar{x}_1\|_{R^n} \\ &+ [\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) + 1]\{\max[(\mu^*)^{-1}, (\mu^*)] + \eta_\mu(B)\|\varkappa_1(\cdot)\|_{\infty\mu C^{(0)}}\}\|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{\text{Lip}}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

В неравенстве (2.48), взяв максимум левой части по $t \in [0, 1]$ и сгруппировав однородные члены, получим

$$\begin{aligned} &\{1 - M_2\eta_\mu(B)[\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) + 1]\}\|\varkappa(\cdot) - \varkappa_1(\cdot)\|_{\infty\mu C^{(0)}} \\ &\leq [\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \bar{B}) + 1]\|v(\cdot) - v_1(\cdot)\|_{\infty\mu L_\infty} + \|\bar{x} - \bar{x}_1\|_{R^n} \\ &+ [\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) + 1]\{\max[(\mu^*)^{-1}, (\mu^*)] \\ &+ \eta_\mu(B)\|\varkappa_1(\cdot)\|_{\infty\mu C^{(0)}}\}\|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{\text{Lip}}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

В силу неравенства (2.33) коэффициент $\{1 - M_2\eta_\mu(B)[\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) + 1]\}$ является положительным числом. Поэтому утверждение теоремы и будет следовать из неравенства (2.49), если мы покажем, что для $(v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1, \tilde{g}(\cdot))$, принадлежащих достаточно малой окрестности точки $(v(\cdot), \bar{x}, \rho, \tilde{g}(\cdot))$, соответствующие решения $\varkappa_1(\cdot)$ в норме $\|\cdot\|_{\infty\mu C^{(0)}}$ будут равномерно ограничены.

Из второго тождества (2.43) следует, что для любого $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \|\varkappa_1(t)\|_{\infty\mu} &= \|(\hat{A}_{\tilde{g}}[\varkappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t)\|_{\infty\mu} \\ &\leq \|\mathbb{S}_{t\infty\mu} P_B \{(A_{\tilde{g}}[\varkappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \\ &+ \|\mathbb{S}_{t\infty\mu} P_{\bar{B}} \{(A_{\tilde{g}}[\varkappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \\ &+ \left\| \mathbb{S}_{t\infty\mu} \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{t_i\infty\mu} \rho_{1i} \right\} \right\|_{\infty\mu} + \|\tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu} \bar{x}_1\|_{\infty\mu} \\ &+ \|(A_{\tilde{g}}[\varkappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t)\|_{\infty\mu}. \end{aligned}$$

Пользуясь представлением (2.25), оценкой (2.8) для нормы оператора $S_{i\infty\mu} P_B$, оценками (2.3), (2.4) для отображения $P_B G_{\infty\mu}$ и свойствами $P_B^2 = P_B$, $P_{\bar{B}}^2 = P_{\bar{B}}$ для операторов проектирования, первое и пятое слагаемые в правой части неравенства оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} &\|\mathbb{S}_{t\infty\mu} P_B \{(A_{\tilde{g}}[\varkappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \\ &\leq \|\mathbb{S}_{t\infty\mu} P_B\| \|P_B \{(A_{\tilde{g}}[\varkappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \\ &\leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) \int_0^1 \|P_B \tilde{G}_{\infty\mu}(\tau, \varkappa_1(\tau))\|_{\infty\mu} d\tau \\ &\leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) \left[\int_0^1 \|P_B \tilde{G}_{\infty\mu}(\tau, \varkappa_1(\tau)) - P_B \tilde{G}_{\infty\mu}(\tau, 0)\|_{\infty\mu} d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \|P_B \tilde{G}_{\infty\mu}(\tau, 0)\|_{\infty\mu} d\tau \right] \\ &\leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) [\widetilde{M}_2\eta_\mu(B)\|\varkappa_1(\cdot)\|_{\infty\mu C^{(0)}} + \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \widetilde{M}_{0\infty\mu}(\tau)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \| (A_{\tilde{g}}[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(t) \|_{\infty\mu} \\
& \leq \int_0^t \| P_B \tilde{G}_{\infty\mu}(\tau, \kappa_1(\tau)) \|_{\infty\mu} d\tau + \int_0^t \| P_{\bar{B}} v_1(\tau) \|_{\infty\mu} d\tau \\
& \leq [\widetilde{M}_2 \eta_\mu(B) \| \kappa_1(\cdot) \|_{\infty\mu C^{(0)}} + \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \widetilde{M}_{0\infty\mu}(\tau)] + \| v_1(\cdot) \|_{\infty\mu L_\infty}.
\end{aligned}$$

Второе, третье и четвертое слагаемые оцениваются так:

$$\begin{aligned}
& \| \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} P_{\bar{B}} \{ (A_{\tilde{g}}[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1) \} \|_{\infty\mu} \\
& \leq \| \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} P_{\bar{B}} \| \| P_{\bar{B}} \{ (A_{\tilde{g}}[\kappa_1(\cdot); v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1])(1) \} \|_{\infty\mu} \\
& \leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \bar{B}) \int_0^1 \| P_{\bar{B}} v_1(\tau) \|_{\infty\mu} d\tau \leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \bar{B}) \| v_1(\cdot) \|_{\infty\mu L_\infty}, \\
& \left\| \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}i\infty\mu} \rho_{1i} \right\} \right\|_{\infty\mu} \leq \| \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} \| \| \rho_1 \|_{\infty\mu\Gamma} \leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \mathbb{Z}) \| \rho_1 \|_{\infty\mu\Gamma}, \\
& \| \tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu} \bar{x}_1 \|_{\infty\mu} \leq \| \tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu} \| \| \bar{x}_1 \|_{\mathbb{R}^n} \leq \| \bar{x}_1 \|_{\mathbb{R}^n}.
\end{aligned}$$

Используя полученные оценки, выпишем следующую оценку для вектор-функции $\kappa_1(\cdot)$:

$$\begin{aligned}
\| \kappa_1(t) \|_{\infty\mu} & \leq [\mathcal{J}_{\infty\mu}(i, B) + 1] \widetilde{M}_2 \eta_\mu(B) \| \kappa_1(\cdot) \|_{\infty\mu C^{(0)}} \\
& + [\mathcal{J}_{\infty\mu}(i, B) + 1] \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \widetilde{M}_{0\infty\mu}(\tau) + [\mathcal{J}_{\infty\mu}(i, \bar{B}) + 1] \| v_1(\cdot) \|_{\infty\mu L_\infty} \\
& + \| \bar{x}_1 \|_{\mathbb{R}^n} + \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \mathbb{Z}) \| \rho_1 \|_{\infty\mu\Gamma}.
\end{aligned}$$

Взяв максимум левой части по $t \in [0, 1]$ и сгруппировав однородные члены, получим

$$\begin{aligned}
& \{ 1 - \widetilde{M}_2 \eta_\mu(B) [\mathcal{J}_{\infty\mu}(i, B) + 1] \} \| \kappa_1(\cdot) \|_{\infty\mu C^{(0)}} \leq [\mathcal{J}_{\infty\mu}(i, B) + 1] \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \widetilde{M}_{0\infty\mu}(\tau) \\
& + [\mathcal{J}_{\infty\mu}(i, \bar{B}) + 1] \| v_1(\cdot) \|_{\infty\mu L_\infty} + \| \bar{x}_1 \|_{\mathbb{R}^n} + \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \mathbb{Z}) \| \rho_1 \|_{\infty\mu\Gamma}.
\end{aligned}$$

Так как $(v_1(\cdot), \bar{x}_1, \rho_1, \tilde{g}(\cdot))$ из малой окрестности точки $(v(\cdot), \bar{x}, \rho, g(\cdot))$, то коэффициент

$$\{ 1 - \widetilde{M}_2 \eta_\mu(B) [\mathcal{J}_{\infty\mu}(i, B) + 1] \}$$

будет положительным и равномерно ограниченным снизу некоторой положительной величиной, а положительные величины

$$\sup_{0 \leq \tau \leq 1} \widetilde{M}_{0\infty\mu}(\tau), \quad \| v_1(\cdot) \|_{\infty\mu L_\infty}, \quad \| \bar{x}_1 \|_{\mathbb{R}^n}, \quad \| \rho_1 \|_{\infty\mu\Gamma}$$

также будут равномерно ограниченными сверху. Поэтому положительные величины $\| \kappa_1(\cdot) \|_{\infty\mu C^{(0)}}$ также будут равномерно ограниченными сверху.

2.2. Случай произвольных концов интервала B_R , начального момента $\bar{t}$ и множества точек разрыва решений Γ . Как отмечалось в начале этого параграфа, мы должны с помощью замены времени свести этот случай к случаю с целочисленными концами интервала B_R . Для этого докажем ряд утверждений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Гомеоморфизмы прямой $q_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, s$, называются k -сопряженными, $k = 0, 1, \dots$, гомеоморфизмам $*q_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, s$, если найдется диффеоморфизм $\sigma_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ класса $C^{(k)}$ такой, что для всякого $j = 1, \dots, s$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{*q_j} & \mathbb{R} \\ \uparrow \sigma_k & & \uparrow \sigma_k \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{q_j} & \mathbb{R} \end{array}$$

коммутативна, т.е. $\sigma_k \circ q_j = *q_j \circ \sigma_k$, $j = 1, \dots, s$.

Приведем лемму о замене времени типа “квазирастяжение”, которая была доказана в работе [1; гл. 3, лемма 2.1].

ЛЕММА 1. Пусть заданы семейство сдвигов $q_j(t) = t + n_j$, $q_{jk}(t) = t + kn_j$, $n_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, s$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $t_0, t_1, \bar{t} \in \mathbb{R}$, а также множество $\Gamma = \{\bar{t}_i : \bar{t}_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}\}$, состоящее из объединения конечного числа орбит группы сдвигов $Q = \langle t + n_1, \dots, t + n_s \rangle$. Для каждого k , начиная с некоторого достаточно большого натурального числа, найдется сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\sigma_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ класса $C^{(1)}$ такой, что сдвиги $q_{jk}(\cdot)$, $j = 1, \dots, s$, будут 1-сопряжены сдвигам $q_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, s$, значения $\sigma_k^{-1}(t_0)$, $\sigma_k^{-1}(t_1)$, $\sigma_k^{-1}(\bar{t})$, $\sigma_k^{-1}(\bar{t}_i)$, $\bar{t}_i \in \Gamma$, $i \in \mathbb{Z}$, — целые, а последовательность $k\bar{\nu}_k$, $k\nu_k$, где $\bar{\nu}_k = \sup_{t \in \mathbb{R}} \dot{\sigma}_k(t)$, $\nu_k = \inf_{t \in \mathbb{R}} \dot{\sigma}_k(t)$, при $k \rightarrow \infty$ стремится к единице. При этом диффеоморфизм $\sigma_k(\cdot)$ перестановочен со сдвигом

$$\bar{q}_k(t) = t + k\bar{n}, \quad \bar{n} = \text{НОД}\{n_1, \dots, n_s\},$$

т.е. $\sigma_k \circ \bar{q}_k = \bar{q}_k \circ \sigma_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как множество Γ состоит из объединения конечного числа орбит, то выполнение условия целочисленности точек $\sigma_k^{-1}(\bar{t}_i)$, $\bar{t}_i \in \Gamma$, $i \in \mathbb{Z}$ достаточно потребовать лишь для конечного числа точек, по одной из каждой орбиты. Тогда все утверждения, кроме последнего, совпадают с утверждениями, полученными в работе [1; гл. 3, лемма 2.1]. Последнее утверждение о перестановочности следует из построения диффеоморфизма σ_k , приведенного там же.

Наряду с основной начально-краевой задачей (0.3)–(0.6) при каждом $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим следующую вспомогательную начально-краевую задачу, полученную с помощью замены времени типа “квазирастяжения” из предыдущей леммы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(\xi) &= \dot{\sigma}_k(\xi)g_k(\xi, x(\xi + kn_1), \dots, x(\xi + kn_s)), \\ \xi &\in B_{kR}, \quad n_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, s, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\dot{x}_k(\xi) = \dot{\sigma}_k(\xi)\varphi_k(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus B_{kR}, \quad \varphi_k(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad (2.51)$$

$$x_k(\bar{\xi}_k) = \bar{x}, \quad \bar{\xi}_k \in \mathbb{Z}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.52)$$

$$x_k(\xi_{ki} + 0) - x_k(\xi_{ki} - 0) = \rho_i, \quad \xi_{ki} \in \mathbb{Z}, \quad \xi_{ki} < \xi_{k(i+1)}, \quad \rho_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (2.53)$$

При каждом $k = 1, 2, \dots$ будем использовать обозначение

$$\Gamma_k = \{\xi_{ki} : \xi_{ki} \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{Z}\}.$$

При каждом достаточно большом $k \in \mathbb{Z}$ установим связь между решениями основной начально-краевой задачи (0.3)–(0.6) и вспомогательной начально-краевой задачи (2.50)–(2.53).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть заданы

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot) &\in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), & \bar{x} &\in \mathbb{R}^n, & \bar{t} &\in \mathbb{R}, \\ \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty} &\in K_{\infty\mu\Gamma}^n, & \mu &\in (0, \mu^*) \cap (0, 1) \end{aligned}$$

и $k \in \mathbb{Z}$ достаточно большое. Если $x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma)$ – решение основной начально-краевой задачи (0.3)–(0.6), то функция $x_k(\xi) = x(\sigma_k(\xi))$, $\xi \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству $\mathcal{L}_{\mu_k}^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma_k)$, $\Gamma_k = \sigma_k^{-1}(\Gamma)$, $\mu_k = \sqrt[k]{\mu}$, и является решением вспомогательной начально-краевой задачи (2.50)–(2.53), в которой

$$\begin{aligned} \varphi_k(\xi) &= \varphi(\sigma_k(\xi)), & \xi &\in \mathbb{R}, & \varphi_k(\cdot) &\in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \\ B_{kR} &= \sigma_k^{-1}(B_R), & \bar{\xi}_k &= \sigma_k^{-1}(\bar{t}), & \bar{\xi}_k &\in \mathbb{Z}, \\ \Gamma_k &= \{\xi_{ki} : \xi_{ki} = \sigma_k^{-1}(\bar{t}_i), \bar{t}_i \in \Gamma, \xi_{ki} \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{Z}\}, & \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty} &\in K_{\infty\mu_k\Gamma_k}^n \end{aligned}$$

и граница B_{kR} целочисленная.

Пусть при достаточно большом $k \in \mathbb{Z}_+$ заданы

$$\begin{aligned} \varphi_k(\cdot) &\in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), & \bar{x} &\in \mathbb{R}^n, & \bar{\xi}_k &= \sigma_k^{-1}(\bar{t}), \\ \bar{\xi}_k &\in \mathbb{Z}, & B_{kR} &= \sigma_k^{-1}(B_R), & \mu_k &\in (0, \sqrt[k]{\mu^*}) \cap (0, 1), \\ \Gamma_k &= \{\xi_{ki} : \xi_{ki} = \sigma_k^{-1}(\bar{t}_i), \bar{t}_i \in \Gamma, \xi_{ki} \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{Z}\}, & \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty} &\in K_{\infty\mu_k\Gamma_k}^n \end{aligned}$$

и граница B_{kR} целочисленная. Если $x_k(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu_k}^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma_k)$ – решение вспомогательной начально-краевой задачи (2.50)–(2.53), то функция $x(t) = x_k(\sigma_k^{-1}(t))$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma)$, $\Gamma = \sigma_k(\Gamma_k)$, $\mu = (\mu_k)^k$, и является решением основной начально-краевой задачи (0.3)–(0.6), в которой

$$\varphi(t) = \varphi_k(\sigma_k^{-1}(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty\mu\Gamma}^n.$$

Для того чтобы доказать предложение 3, достаточно в основной начально-краевой задаче (0.3)–(0.6) произвести замену времени $t = \sigma_k(\xi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ А. В силу предложения 3 для существования решения $x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma)$, $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$, основной начально-краевой задачи (0.3)–(0.6) достаточно показать, что при каком-либо достаточно большом $k \in \mathbb{Z}$ существует решение $x_k(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu_k}^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma_k)$, $\mu_k = \sqrt[k]{\mu}$, вспомогательной начально-краевой задачи (2.50)–(2.53).

По теоремам 1 и 2 для этого достаточно, чтобы при заданном достаточно большом $k \in \mathbb{Z}$ для вспомогательной начально-краевой задачи (2.50)–(2.53) выполнялось неравенство

$$M_{k2}\eta_{k\mu_k}(B_k)[\mathcal{J}_{\infty\mu_k}(\bar{\xi}_k, B_k) + 1] < 1. \quad (2.54)$$

Очевидно, что для такой вспомогательной начально-краевой задачи $M_{k2} = \bar{\nu}_k M_2$, множество B_k определяется множеством B_{kR} по процедуре, описанном в начале данного параграфа. В силу формулы (2.5) выражение для $\eta_{k\mu_k}(B_k)$ имеет следующий вид:

$$\eta_{k\mu_k}(B_k) = \sum_{j=1}^s \max[\mu_k^{kn_j} \gamma(B_k \cap (-\infty, -kn_j)), \mu_k^{-kn_j} \gamma(B_k \cap [-kn_j, +\infty))]. \quad (2.55)$$

В силу формулы (2.9) имеет место оценка

$$\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{\tau}_k, B_k) \leq [1 - \mu]^{-1}.$$

Тогда для справедливости неравенства (2.54) достаточно выполнения следующего неравенства:

$$\bar{\nu}_k M_2 \left\{ \sum_{j=1}^s \mu_k^{k|n_j|} \right\} \{[1 - \mu_k]^{-1} + 1\} < 1.$$

Подставив значение $\mu_k = (\mu)^{1/k}$ в последнее неравенство, получим

$$\bar{\nu}_k M_2 \left\{ \sum_{j=1}^s \mu^{k|n_j|} \right\} \{[1 - (\mu)^{1/k}]^{-1} + 1\} < 1. \quad (2.56)$$

Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\nu}_k k^{-1} = 1$, а по правилу Лопиталя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \{[1 - (\mu)^{1/k}]^{-1} + 1\} = [\ln \mu^{-1}]^{-1},$$

то неравенство

$$M_2 \left\{ \sum_{j=1}^s \mu^{k|n_j|} \right\} < \ln \mu^{-1}$$

гарантирует справедливость неравенства (2.54), начиная с некоторого достаточно большого k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАМЕЧАНИЯ 2. Пусть правая часть ФДУ имеет разрывы первого рода в дискретном множестве точек. Очевидно, что дискретное множество содержится в объединении орбит группы $Q = \langle t + n_1, \dots, t + n_s \rangle$ для конечного числа точек. Тогда по лемме 1 можно найти такую замену времени, что точки разрыва правой части будут целочисленными. Для такого уравнения весь формализм, который мы используем, остается справедливым (см. [1; гл. 2, замечание 3.3]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ A'. Без ограничения общности можно считать, что $B_k \cap (-\infty, -kn_j) = \emptyset$ (достаточно провести замену времени типа “сдвиг”). Тогда из (2.55) следует, что

$$\eta_{k\mu_k}(B_k) = \sum_{j=1}^s \mu_k^{-kn_j}.$$

в силу неравенства (2.10) имеем

$$\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{\xi}_k, B_k) \leq \mu_k[1 - \mu_k]^{-1}.$$

Комбинируя последнее неравенство и неравенство (2.54) и используя подстановку $\mu_k = (\mu)^{1/k}$, получим

$$\bar{\nu}_k M_2 \left\{ \sum_{j=1}^s \mu^{-n_j} \right\} [1 - (\mu)^{1/k}]^{-1} < 1.$$

Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\nu}_k k^{-1} = 1$, а по правилу Лопиталя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} [1 - (\mu)^{1/k}]^{-1} = [\ln \mu^{-1}]^{-1},$$

то неравенство

$$M_2 \left\{ \sum_{j=1}^s \mu^{-n_j} \right\} < \ln \mu^{-1}$$

гарантирует справедливость неравенства (2.54), начиная с некоторого достаточно большого k , что и доказывает теорему.

§ 3. О соответствиях между решениями типа бегущей волны бесконечномерных динамических систем и классическими решениями функционально-дифференциальных уравнений точечного типа

Мы будем изучать бесконечномерную динамическую систему

$$\dot{\varkappa} = \mathbb{G}(t, \varkappa), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Здесь оператор $\mathbb{G}: \mathbb{R} \times K^n \rightarrow K^n$ непрерывен по совокупности аргументов, хотя допускается кусочная непрерывность по переменной t с разрывами первого рода на дискретном множестве точек. Дифференциальное уравнение понимается в слабом смысле и в уравнении производная понимается как покоординатное дифференцирование. Очевидно, что бесконечномерная система дифференциальных уравнений (0.1) может быть записана в виде бесконечномерного уравнения (3.1). Для этого следует рассмотреть пространство K^2 с элементами $\varkappa = \{(u_i, v_i)'\}_{-\infty}^{+\infty}$ (где штрих означает транспонирование), провести переобозначение $y_i = u_i$, $\dot{y}_i = v_i$, $i \in \mathbb{Z}$, и определить оператор $\mathbb{G}$ по следующему правилу: для любого вектора $\varkappa \in K^2$ и любой координаты $i \in \mathbb{Z}$ координата $(\mathbb{G}(\varkappa))_i$ образа оператора $\mathbb{G}$ имеет представление

$$(\mathbb{G}(\varkappa))_i = (v_i, m_i^{-1}[\phi(u_i) + u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}])'. \quad (3.2)$$

Мы видим, что изучение решений бесконечномерной системы (0.1) эквивалентно изучению задачи Коши для уравнения (3.1), а решения $\varkappa(\cdot)$ бесконечномерной системы (0.1) типа бегущей волны с характеристикой τ – это те решения, которые удовлетворяют линейному нелокальному ограничению

$$\varkappa(t + \tau) = T\varkappa(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

В дальнейшем изучение решений типа бегущей волны с характеристикой τ для бесконечномерного дифференциального уравнения (3.1) с помощью замены времени сведем к изучению решений типа бегущей волны с характеристикой $\tau = 1$ для однопараметрического семейства бесконечномерных дифференциальных уравнений

$$\dot{\varkappa}_\tau = \tau \mathbb{G}_\tau(t, \varkappa_\tau), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

удовлетворяющих линейному нелокальному ограничению

$$\varkappa_\tau(t+1) = T\varkappa_\tau(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Правые части уравнений (3.1) и (3.4), а также их решения связаны соотношениями

$$\mathbb{G}_\tau(t, \varkappa) = \mathbb{G}(\tau t, \varkappa), \quad \varkappa \in K^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

$$\varkappa_\tau(t) = \varkappa(\tau t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Так как исходное пространство $\varkappa \in K^n$ всего лишь метризуемо, то возможности изучения бесконечномерного уравнения (3.4) ограничены. Следует отказаться от изучения всего пространства решений уравнения (3.4) и перейти к изучению более узкого и очень важного класса решений, которые в каждый момент t принадлежат фазовому пространству $K_{2\mu}^n$, $\mu \in (0, 1)$, являющемуся однопараметрическим семейством гильбертовых подпространств.

В дальнейшем ограничение оператора $\mathbb{G}(\mathbb{G}_\tau)$ на подпространство $\mathbb{R} \times K_{2\mu}^n$ и оператора T на подпространство $K_{2\mu}^n$ будем обозначать с индексом 2μ .

Мы будем изучать в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R} \times K_{2\mu}^n$ решения системы

$$\dot{\varkappa}_\tau = \tau \mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t, \varkappa_\tau), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

$$\varkappa_\tau(t+1) = T_{2\mu}\varkappa_\tau(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

т.е. решения бесконечномерного дифференциального уравнения (3.8) типа бегущей волны с характеристикой $\tau = 1$. В дифференциальном уравнении (3.8) в левой части под производной понимается производная по Фреше. Будем полагать, что оператор $\tau \mathbb{G}_{\tau 2\mu}$ непрерывен по совокупности переменных $(t, \varkappa)$ и удовлетворяет условию квазилинейного роста и условию Липшица по второй переменной, т.е. для любых $\varkappa, \bar{\varkappa} \in K^n$, $t \in \mathbb{R}$ выполнены следующие неравенства:

$$\|\tau \mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t, \varkappa)\|_{p\mu} \leq M_{\tau 0 2\mu}(t) + M_{\tau 1 2\mu}\|\varkappa\|_{2\mu}, \quad (3.10)$$

$$\|\tau \mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t, \varkappa) - \tau \mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t, \bar{\varkappa})\|_{p\mu} \leq M_{\tau 2 2\mu}\|\varkappa - \bar{\varkappa}\|_{2\mu}, \quad (3.11)$$

где $M_{\tau 0 2\mu}(t)$ – непрерывная функция, а $M_{\tau 1 2\mu}$ и $M_{\tau 2 2\mu}$ – константы. В действительности отображение $\tau \mathbb{G}_{\tau 2\mu}$ по переменной t может быть и кусочно непрерывным, с разрывами первого рода в дискретном множестве точек. Решением уравнения (3.8) является сильно абсолютно непрерывная функция (см. определения 6, 7).

Наряду с бесконечномерным дифференциальным уравнением (3.8) и линейным нелокальным ограничением (3.9) рассмотрим их ограничения на интервал

$[0, 1]$ в виде следующей краевой задачи:

$$\dot{\varkappa}_\tau = \tau \mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t, \varkappa_\tau), \quad t \in [0, 1], \quad (3.12)$$

$$\varkappa_\tau(1) = T_{2\mu} \varkappa_\tau(0). \quad (3.13)$$

Установим связь между решениями системы (3.8), (3.9) и краевой задачи (3.12), (3.13).

ЛЕММА 2. *Кривая $\varkappa_\tau(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является решением типа бегущей волны с характеристикой $\tau = 1$ (решением системы (3.8), (3.9)) тогда и только тогда, когда она:*

- 1) является решением краевой задачи (3.12), (3.13);
- 2) для любого $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет нелокальному ограничению

$$\varkappa_\tau(t+1) = T_{2\mu} \varkappa_\tau(t); \quad (3.14)$$

- 3) для любого $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет перестановочному соотношению

$$\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t+1, T_{2\mu} \varkappa_\tau(t)) = T_{2\mu} \mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t, \varkappa_\tau(t)). \quad (3.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть кривая $\varkappa_\tau(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является решением системы (3.8), (3.9). Очевидно, что такая кривая является решением краевой задачи (3.12), (3.13) и удовлетворяет ограничению (3.14). Если продифференцировать левую и правую части тождества (3.14), использовать дифференциальное уравнение (3.8), которому удовлетворяет кривая $\varkappa_\tau(t)$, $t \in \mathbb{R}$, а также тождество (3.14), то мы и получим перестановочное соотношение (3.15).

Пусть теперь кривая $\varkappa_\tau(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является решением краевой задачи (3.12), (3.13), удовлетворяет тождеству (3.14) и перестановочному соотношению (3.15). Очевидно, что тождества (3.14) и (3.9) совпадают. Для $t \in [0, 1]$ продифференцировав левую и правую части тождества (3.14), используя уравнение (3.12) и тождество (3.14), получим следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \dot{\varkappa}_\tau(t+1) &= T_{2\mu} \dot{\varkappa}_\tau(t) = \tau T_{2\mu} \mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t, \varkappa_\tau(t)) = \tau \mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t+1, T_{2\mu} \varkappa_\tau(t)) \\ &= \tau \mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t+1, \varkappa_\tau(t+1)), \end{aligned}$$

из которых и следует, что кривая $\varkappa_\tau(t)$ на интервале $[1, 2]$ также удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.8). Далее по индукции доказывается, что такая кривая удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.8) при всех $t \in \mathbb{R}$.

Очевидно, что ограничение на интервал $[0, 1]$ всякого решения уравнения (3.8) типа бегущей волны с характеристикой $\tau = 1$ (решения системы (3.8), (3.9)) является решением краевой задачи (3.12), (3.13). С другой стороны, из леммы 2 следует, что не всякое решение краевой задачи (3.12), (3.13) является ограничением на интервал $[0, 1]$ решения уравнения (3.8) типа бегущей волны с характеристикой $\tau = 1$ (решения системы (3.8), (3.9)). Для этого нужно, чтобы решение краевой задачи (3.12), (3.13), продолженное на все $\mathbb{R}$ в силу тождества (3.14), удовлетворяло перестановочному соотношению (3.15). Сформулируем одно простое предположение, в силу которого гарантируется взаимно однозначное соответствие между решениями уравнения (3.8) типа бегущей

волны с характеристикой $\tau = 1$ (условие (3.9)) и решениями краевой задачи (3.12), (3.13).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть оператор $\mathbb{G}_{\tau 2\mu}$ удовлетворяет перестановочному соотношению

$$\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t+1, T_{2\mu}\varkappa_\tau) = T_{2\mu}\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t, \varkappa_\tau), \quad \varkappa_\tau \in K_{2\mu}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.16)$$

Тогда между решениями бесконечномерного дифференциального уравнения (3.8) типа бегущей волны с характеристикой $\tau = 1$ (решениями системы (3.8), (3.9)) и решениями краевой задачи (3.12), (3.13) существует взаимно однозначное соответствие, т.е. каждое решение краевой задачи (3.12), (3.13) на основе соотношения (3.14) может быть построено до решения типа бегущей волны с характеристикой $\tau = 1$.

Доказательство предложения 4 непосредственно следует из леммы 2.

Далее мы установим соответствие между решениями бесконечномерного дифференциального уравнения (3.12) и индуцированного им функционально-дифференциального уравнения. Для этого потребуем выполнения следующих дополнительных условий для оператора $\mathbb{G}$:

- 1) существуют целые числа $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}$ такие, что для любых $\varkappa \in K^n$, $\varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$, координата $(\mathbb{G}(t, \varkappa))_i$ имеет представление

$$(\mathbb{G}(t, \varkappa))_i = \bar{\partial}_i(t, \varkappa) = g_i(t, x_{i+n_1}, \dots, x_{i+n_s});$$

- 2) функции $g_i(\cdot)$, $i \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют условиям (I)–(IV) из § 1 с одними и теми же константами μ^* , M_1 , M_2 , а при каждом $i \in \mathbb{Z}$ функция $M_0(t)$ заменена функцией $M_0(t+i)$.

Для любого $\tau > 0$ в силу равенства (3.6) по оператору $\mathbb{G}$ определяется оператор $\mathbb{G}_\tau$. Для оператора $\tau\mathbb{G}_\tau$ также выполнены условия 1), 2), в которых константы μ^* , M_1 , M_2 следует заменить на константы $(\mu^*)^\tau$, τM_1 , τM_2 , а функцию $M_0(t)$ – на функцию $M_{0\tau}(t) = M_0(\tau t)$. При таких условиях ограничение оператора $\tau\mathbb{G}_\tau$ на подпространство $\mathbb{R} \times K_{2\mu}^n$, $\mu \in (0, (\mu^*)^\tau) \cap (0, 1)$, действует непрерывно в пространство $K_{2\mu}^n$. Обозначим его через $\tau\mathbb{G}_{\tau 2\mu}$. Более того, такой оператор удовлетворяет условию квазилинейного роста (2.3) и условию Липшица (2.4). Для такого оператора функции $M_{02\mu}(t)$ и константы $M_{12\mu}$, $M_{22\mu}$ также определяются по формулам (2.7) и обозначаются с дополнительным индексом τ , т.е. мы пишем

$$M_{\tau 02\mu}(t), \quad M_{\tau 12\mu}, \quad M_{\tau 22\mu}. \quad (3.17)$$

Условие квазилинейного роста (2.3), а также условие Липшица (2.4) остаются справедливыми и в случае кусочной непрерывности функций $g_i(\cdot)$, $i \in \mathbb{Z}$, по переменной t в точках дискретного множества с разрывами первого рода. При этом оператор $\tau\mathbb{G}_{\tau 2\mu}$ будет кусочно непрерывным по переменной t в точках дискретного множества с разрывами первого рода.

Для любого $\tau > 0$ по оператору $\mathbb{G}$ определим индуцированную функцию $g_\tau: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ по следующему правилу:

$$g_\tau(t, z_1, \dots, z_s) = g_i(\tau(t-i), z_1, \dots, z_s), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in [i, (i+1)). \quad (3.18)$$

Очевидно, что функция τg_τ также будет кусочно непрерывной по переменной t в точках дискретного множества с разрывами первого рода и будет удовлетворять условиям (I)–(IV) из § 1 с константами $(\mu^*)^\tau$, τM_1 , τM_2 вместо констант μ^* , M_1 , M_2 и функцией $M_{0\tau}(t) = M_0(\tau t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Определим пространства

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathbb{R} \times K^n, K^n) &= \{\mathbb{G} : \text{оператор } \mathbb{G} \text{ удовлетворяет условиям (1), (2)}\}, \\ \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) &= \{g : \text{функция } g \text{ удовлетворяет условиям (I)–(IV)}\}.\end{aligned}$$

При заданном $\tau > 0$ определим отображение

$$\Omega_\tau : \mathcal{D}(\mathbb{R} \times K^n, K^n) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

где $\Omega_\tau(\mathbb{G}) = g_\tau$ и оператору $\mathbb{G}$ ставится в соответствие индуцированная функция g_τ , построенная по формуле (3.18).

Теперь определим отображение в обратном направлении:

$$\Psi : \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R} \times K^n, K^n),$$

где $\Psi(g) = G$ и по функции g по формуле (2.1) каноническим образом определяется оператор G . Там же было показано (формула (2.2)), что таким образом построенный оператор G удовлетворяет перестановочному соотношению

$$TG(t, \varkappa) = G(t + 1, T\varkappa). \quad (3.19)$$

Для каждого $\tau > 0$ введем отображение

$$\Pi_\tau : \mathcal{D}(\mathbb{R} \times K^n, K^n) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R} \times K^n, K^n),$$

где $\Pi_\tau(\mathbb{G}) = \mathbb{G}_\tau$ и определяется по формуле (3.6).

Всякому оператору $\mathbb{G}$ из пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R} \times K^n, K^n)$ при каждом $\tau > 0$ соответствует оператор

$$G_\tau = \Psi \circ \Omega_\tau(\mathbb{G}) \quad (3.20)$$

этого же пространства, при этом

$$\Omega_\tau(\mathbb{G}) = \Omega_1(G_\tau) = g_\tau \quad (3.21)$$

и в силу (3.19) выполняется перестановочное соотношение

$$TG_\tau(t, \varkappa) = G_\tau(t + 1, T\varkappa), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varkappa \in K^n. \quad (3.22)$$

Для отображений Ω_τ , Ψ , Π_τ имеют место следующие утверждения.

ЛЕММА 3. *Для любой функции $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ справедливо равенство $\Omega_1 \circ \Psi(g) = g$. Для любого оператора $\mathbb{G} \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times K^n, K^n)$ при каждом $\tau > 0$ имеет место тождество*

$$\mathbb{G}_\tau(t, \varkappa) = G_\tau(t, \varkappa) \quad (\text{т.е. } \Pi_\tau(\mathbb{G})(t, \varkappa) = \Psi \circ \Omega_\tau(\mathbb{G})(t, \varkappa)), \quad t \in [0, 1], \quad \varkappa \in K^n.$$

Более сильное равенство $\mathbb{G}_\tau = G_\tau$ (т.е. $\Pi_\tau(\mathbb{G}) = \Psi \circ \Omega_\tau(\mathbb{G})$), т.е. тождество

$$\mathbb{G}_\tau(t, \varkappa) = G_\tau(t, \varkappa) \quad (\text{т.е. } \Pi_\tau(\mathbb{G})(t, \varkappa) = \Psi \circ \Omega_\tau(\mathbb{G})(t, \varkappa)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varkappa \in K^n,$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполняется перестановочное соотношение

$$TG_\tau(t, \varkappa) = G_\tau(t + 1, T\varkappa) \quad (\text{т.е. } T\Pi_\tau(G)(t, \varkappa) = \Pi_\tau(G)(t + 1, T\varkappa)), \quad (3.23)$$

$$t \in \mathbb{R}, \quad \varkappa \in K^n.$$

Доказательство леммы 3 непосредственно следует из определения соответствующих отображений и может быть получено прямой проверкой.

Из леммы 3 следует, что для оператора G_τ перестановочное соотношение (3.23) выполняется тогда и только тогда, когда он принадлежит образу отображения Ψ , т.е. индуцируется некоторой функцией $g(\cdot)$ по правилу (2.1).

При каждом $\tau > 0$ бесконечномерное дифференциальное уравнение (3.12) на интервале $[0, 1]$, определенное с помощью оператора G_τ , индуцирует функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}_\tau(t) = \tau g_\tau(t, x_\tau(t + n_1), \dots, x_\tau(t + n_s)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.24)$$

где функция g_τ определяется по правилу (3.18). Решением функционально-дифференциального уравнения (3.24) называется всякая абсолютно непрерывная функция, почти всюду удовлетворяющая данному уравнению.

Установим связь между решениями краевой задачи (3.12), (3.13) и функционально-дифференциального уравнения (3.24). Далее будем полагать, что оператор G удовлетворяет условиям 1), 2), приведенным выше.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\tau > 0$. Если вектор-функция $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0, 1]$, $\varkappa_\tau(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu}^n)$, $\mu \in (0, (\mu^*)^\tau) \cap (0, 1)$ является решением бесконечномерной краевой задачи (3.12), (3.13), то функция $x_\tau(t) = x_{\tau[t]}(t - [t])$, $t \in \mathbb{R}$, будет решением функционально-дифференциального уравнения (3.24), при этом $x_\tau(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$. Описанное отображение из пространства $C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu}^n)$ в пространство $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ является непрерывным.

Если $x_\tau(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu'}^n C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu' \in (0, (\mu^*)^\tau) \cap (0, 1)$, – решение функционально-дифференциального уравнения (3.24), то вектор-функция $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0, 1]$, $x_{\tau i}(t) = x_\tau(t + i)$, $i \in \mathbb{Z}$, будет решением краевой задачи (3.12), (3.13) для любого заданного $\mu < \mu'$ и, соответственно, $\varkappa_\tau(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu}^n)$. Отображение из пространства $\mathcal{L}_{\mu'}^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ в пространство $C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu}^n)$, описанное выше, является непрерывным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения функции $x_\tau(\cdot)$ и утверждения, полученного в работе [1] (см. гл. 2, лемма 2.4) следует, что эта функция является абсолютно непрерывной на $\mathbb{R}$. В силу уравнения (3.12) такая функция будет удовлетворять функционально-дифференциальному уравнению (3.24). Из утверждений, полученных в работе [1] (см. гл. 2 лемма 2.4, предложение 2.3), следует, что $x_\tau(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$. Последнее утверждение очевидно.

Докажем теперь вторую часть предложения 5. Так как $x_\tau(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu'}^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ и является решением функционально-дифференциального уравнения (3.24), то семейство функций $(\mu')^{|i|} x_\tau(t + i)$, $t \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{Z}$, равномерно ограничено и равномерно непрерывно и для почти всех $t \in [0, 1]$ семейство функций

$(\mu')^{|i|}\dot{x}_\tau(t+i)$, $t \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{Z}$, равномерно ограничено. Тогда (см. [1; гл. 2, лемма 2.4]) вектор-функция $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $x_{\tau i}(t) = x_\tau(t+i)$, $i \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, 1]$, сильно абсолютно непрерывна, ее значения принадлежат пространству $K_{2\mu}^n$ и для производной $\varkappa(\cdot)$ имеет место представление

$$\dot{\varkappa}(t) = \{\dot{x}_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}.$$

В таком случае из функционально-дифференциального уравнения (3.24) следует, что вектор-функция $\varkappa_\tau(\cdot)$ будет удовлетворять бесконечномерному уравнению (3.12), а из определения самой $\varkappa_\tau(\cdot)$ следует краевое условие (3.13). Последнее утверждение очевидно.

Перейдем к изучению бесконечномерной динамической системы (0.1), которая может быть переписана в виде уравнения (3.1), где оператор $\mathbb{G}$ определен в (3.2) и удовлетворяет условиям 1), 2) (см. доказательство предложения 4), в которых константу μ^* можно положить равной единице. При этом для любого $i \in \mathbb{Z}$ функция $g_i(\cdot)$ действует из пространства $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ в пространство $\mathbb{R}^2$ и определяется по следующему правилу:

$$\begin{aligned} g_i(z_1, z_2, z_3) &= (z_2^{(2)}, m_i^{-1}\{\phi(z_2^{(1)}) + [z_1^{(1)} - 2z_2^{(1)} + z_3^{(1)}]\})', \\ z_r &\in \mathbb{R}^2, \quad z_r = (z_r^{(1)}, z_r^{(2)})', \quad r = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Для такой функции константа Липшица имеет следующий вид (см. [1; приложение А, лемма 1.2]):

$$M_{2i} = \max\{2m_i^{-1}\sqrt{L^2 + 1}; 1\}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

В силу предположения $\{m_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$ величина

$$M_2 = \max_{i \in \mathbb{Z}} M_{2i}$$

конечна и совпадает с ранее определенной величиной (1.4).

Очевидно, что такой оператор от времени не зависит, поэтому соответствующий ему оператор $\mathbb{G}_\tau = \Pi_\tau(\mathbb{G})$ совпадает с исходным оператором $\mathbb{G}$, т.е. $\mathbb{G}_\tau = \mathbb{G}$. Учитывая, что $M_1 \leq M_2$, для оператора $\tau\mathbb{G}_{\tau 2\mu}$, $\mu \in (0, 1)$, действующего из пространства $K_{2\mu}^2$ в себя, условие квазилинейного роста (2.3) и условие Липшица (2.4) для любых $\varkappa, \bar{\varkappa} \in K_{2\mu}^n$ будут иметь следующий вид (см. (2.7), (3.17)):

$$\|\tau\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(\varkappa)\|_{2\mu} \leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} m_i^{-1} \tau \phi(0) \sqrt{\frac{3(1 + \mu^2)}{1 - \mu^2}} + 2\tau M_2(2\mu^{-1} + 1) \|\varkappa\|_{2\mu}, \quad (3.25)$$

$$\|\tau\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(\varkappa) - \tau\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(\bar{\varkappa})\|_{2\mu} \leq \sqrt{3}\tau M_2(2\mu^{-1} + 1) \|\varkappa - \bar{\varkappa}\|_{2\mu}. \quad (3.26)$$

Для рассматриваемого оператора $\mathbb{G}$ функция $g_\tau(\cdot)$ из индуцированного уравнения (3.24) действует из пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2 \times 3}$ в пространство $\mathbb{R}^2$ и определена по правилу

$$\begin{aligned} g_\tau(t, z_1, z_2, z_3) &= (z_2^{(2)}, l(t)\{\phi(z_2^{(1)}) + [z_1^{(1)} - 2z_2^{(1)} + z_3^{(1)}]\})', \\ t &\in [i, i+1), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad l(t) = m_i^{-1}. \end{aligned}$$

Очевидно, что для такой функции константой Липшица служит M_2 .

Теперь мы можем приступить к доказательству существования решения типа бегущей волны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ В. Если вектор-функция $\{(y_i(\cdot))\}_{-\infty}^{+\infty}$ является решением исходной системы дифференциальных уравнений (0.1) и

$$\omega(\cdot) \in C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2), \quad \omega(\cdot) = \{(y_i(\cdot), \dot{y}_i(\cdot))'\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad \mu \in (0, 1),$$

то вектор-функция $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{(u_{\tau i}(t), v_{\tau i}(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in \mathbb{R}$, определенная по правилу $\varkappa_\tau(t) = \omega(\tau t)$, $t \in \mathbb{R}$, является сильно абсолютно непрерывной и удовлетворяет уравнению (3.8). Обратное утверждение очевидно. Поэтому нам следует изучать те решения $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ исходной системы дифференциальных уравнений (0.1), для которых вектор-функция $\varkappa_\tau(t) = \omega(\tau t)$, $t \in \mathbb{R}$, является решением дифференциального уравнения (3.8).

Без ограничения общности положим $\bar{t} = 0$. Заметим, что в случае шаров с равными массами, т.е. $m_i = m$, $i \in \mathbb{Z}$, для соответствующего оператора $\mathbb{G}_{2\mu}(\mathbb{G}_{\tau 2\mu})$, $\mu \in (0, 1)$ (см. (3.2)), справедливо перестановочное соотношение (3.16) (для рассматриваемого оператора константа μ^* равна единице). Тогда по предложению 4 каждое решение краевой задачи (3.12), (3.13) может быть построено до решения типа бегущей волны с помощью соотношения (3.14). Поэтому вопрос о существовании решения типа бегущей волны эквивалентен вопросу о существовании решения краевой задачи (3.12), (3.13). По предложению 5 для существования решения $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0, 1]$, $\varkappa_\tau(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu}^2)$, $\mu \in (0, 1)$, краевой задачи (3.12), (3.13) достаточно, чтобы функция $x_\tau(t) = x_{\tau[t]}(t - [t])$, $t \in \mathbb{R}$, являлась решением функционально-дифференциального уравнения (3.24) и принадлежала пространству $\mathcal{L}_{\mu'}^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu' \in (0, 1)$, $\mu < \mu'$. При этом если решение $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{(u_{\tau i}(t), v_{\tau i}(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0, 1]$, краевой задачи (3.12), (3.13) удовлетворяет начальному условию $(\varkappa_\tau(0))_{\bar{i}} = (a, b)'$, то соответствующее ей решение $x_\tau(t) = x_{\tau[t]}(t - [t])$, $t \in \mathbb{R}$, функционально-дифференциального уравнения (3.24) будет удовлетворять начальному условию $x_\tau(\bar{i}) = (a, b)'$. По теореме А при любых $\tau > 0$, $\mu \in (0, 1)$, удовлетворяющих условию

$$\tau M_2(2\mu^{-1} + 1) < \ln \mu^{-1}, \quad (3.27)$$

начальных условиях $i \in \mathbb{Z}$, $(a, b)' \in \mathbb{R}^2$ для уравнения (3.24) существует решение $x_\tau(\cdot)$, принадлежащее пространству $\mathcal{L}_{\mu}^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$ и удовлетворяющее начальному условию $x_\tau(\bar{i}) = (a, b)'$. Такое решение единственное. Заметим, что неравенство (3.27) эквивалентно системе условий $0 < \tau < \hat{\tau}$, $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$. Следовательно, при фиксированном $0 < \tau < \hat{\tau}$ решение $x_\tau(\cdot)$ функционально-дифференциального уравнения (3.24) с начальным условием $x_\tau(\bar{i}) = (a, b)'$ существует, единственно и принадлежит каждому из пространств $\mathcal{L}_{\mu}^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$. По предложению 5 соответствующая ему вектор-функция

$$\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad t \in [0, 1], \quad x_{\tau i}(t) = x_\tau(t + i), \quad i \in \mathbb{Z},$$

будет единственным решением краевой задачи (3.12), (3.13) с начальным условием $(\varkappa_\tau(0))_{\bar{i}} = (a, b)'$ и будет принадлежать каждому из пространств

$$C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu}^2), \quad \mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)).$$

Более того, по тому же предложению 5 такое соответствие является непрерывным. Мы уже отмечали, что по предложению 4 каждое решение краевой задачи (3.12), (3.13), продолженное в силу уравнения (3.8), является решением типа бегущей волны. Оценим рост такого решения. Правая часть уравнения (3.8) удовлетворяет условиям роста (3.25). Сравнивая второе слагаемое из (3.25) с левой частью неравенства (3.27), мы и получим включение $\|\varkappa_\tau(\cdot)\|_{2\mu} \in \mathcal{L}_{\mu^2}^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$. Из оценки (3.26) следует непрерывность отображения, порожденного процедурой продолжения решения краевой задачи (3.12), (3.13) в силу уравнения (3.8) на любой конечный интервал времени, т.е. непрерывность отображения в пространство $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$ с топологией компактной сходимости на $\mathbb{R}$. Остается с помощью обратной замены времени перейти к исходной переменной $\varkappa = \{(u_i, v_i)'\}_{-\infty}^{+\infty}$ и затем положить $y_i = u_i$, $\dot{y}_i = v_i$, $i \in \mathbb{Z}$. В результате получаем начальное условие $(\varkappa(0))_{\bar{i}} = (y_{\bar{i}}(0), \dot{y}_{\bar{i}}(0))' = (a, b)'$, а также следующие включения: для каждого $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ вектор $\omega(t) = \{(y_i(t), \dot{y}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{2\mu}^2$ при любом $t \in \mathbb{R}$, функция $\Upsilon_\mu(\cdot) = \|\omega(\cdot)\|_{2\mu} \in \mathcal{L}_{\sqrt{\mu^2}}^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$.

Утверждение о непрерывной зависимости решения следует из соответствующего утверждения теоремы A, непрерывности всех процедур, приведенных при доказательстве теоремы B, а также непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения (3.8) от начальных данных и параметров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1. В случае нулевого потенциала прямая проверка показывает, что любая вектор-функция $\{(y_i(t))\}_{-\infty}^{+\infty} = \{bt + b\tau + \alpha\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in \mathbb{R}$, задающая прямолинейное равномерное движение, является решением типа бегущей волны. В случае фиксированной координаты $\bar{i}$, начального момента $\bar{t}$ и начальных значений a, b следует положить $\alpha = a - b\bar{t} - b\bar{t}\tau$. Если $0 < \tau < \hat{\tau}$, то по теореме В других решений типа бегущей волны не существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2. Пусть потенциал тождественно не равен нулю. Если вектор-функция $\varkappa_\tau(\cdot) = \{(u_{\tau i}(\cdot), v_{\tau i}(\cdot))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ является решением типа бегущей волны, то для нее будет выполняться перестановочное соотношение (3.15), которое для рассматриваемого оператора имеет вид $\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(T_{2\mu}\varkappa_\tau(t)) = T_{2\mu}\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(\varkappa_\tau(t))$. Из полученного перестановочного соотношения и того, что хотя бы два шара имеют разные массы, получаем систему условий

$$\phi(u_{\tau i}(t)) + u_{\tau(i+1)}(t) - 2u_{\tau i}(t) + u_{\tau(i-1)}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому из уравнения (3.8) следует, что функции $v_{\tau i}(\cdot)$, $i \in \mathbb{Z}$, являются константами, а функции $u_{\tau i}(\cdot)$, $i \in \mathbb{Z}$, являются линейными. Так как такое решение является решением типа бегущей волны, то из условия бегущей волны следует, что

$$u_{\tau(i+1)}(t) - 2u_{\tau i}(t) + u_{\tau(i-1)}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда в силу предыдущего равенства

$$\phi(u_{\tau i}(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Так как потенциал ненулевой, то это возможно лишь в случае, если линейные функции $u_{\tau i}(\cdot)$, $i \in \mathbb{Z}$, также являются константами. Следовательно, решение типа бегущей волны является стационарным решением.

**§ 4. О соответствиях между решениями с начальной невязкой
бесконечномерных динамических систем
и импульсными решениями
функционально-дифференциальных уравнений точечного типа**

Мы уже отмечали, что в случае существования хотя бы двух шаров с различными массами всякое решение типа бегущей волны является стационарным, т.е. класс решений типа бегущей волны чрезвычайно узок. Вместе с тем могут быть решения, близкие по своей структуре к решениям типа бегущей волны и переходящие в них в случае шаров с равными массами. К определению таких решений, называемых решениями типа квазибегущих волн, мы и приступим. При заданных $\tau > 0, \mu \in (0, 1)$ в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R} \times K_{2\mu}^n$ вместо краевой задачи (3.12), (3.13) рассмотрим краевую задачу

$$\dot{\varkappa}_\tau = \tau \mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t, \varkappa_\tau), \quad t \in [0, 1], \quad (4.1)$$

$$\varkappa_\tau(1) - T_{2\mu}\varkappa_\tau(0) = \rho, \quad \rho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{2\mu}^n. \quad (4.2)$$

Очевидно, что ограничение решения $\varkappa_\tau(\cdot)$ бесконечномерного уравнения (3.8) является решением краевой задачи (4.1), (4.2) с $\rho = \varkappa_\tau(1) - T_{2\mu}\varkappa_\tau(0)$. Верно и обратное. Всякое решение краевой задачи (4.1), (4.2) может быть продолжено до решения уравнения (3.8). Поэтому решения краевой задачи (4.1), (4.2) определяют все пространство решений уравнения (3.8) с начальными невязками $\rho \in K_{2\mu}^n$. Справедлив следующий аналог предложения 5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\tau > 0$. Если вектор-функция

$$\begin{aligned} \varkappa_\tau(t) &= \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad t \in [0, 1], \\ \varkappa_\tau(\cdot) &\in C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu}^n), \quad \mu \in (0, (\mu^*)^\tau) \cap (0, 1), \end{aligned}$$

является решением бесконечномерной краевой задачи (4.1), (4.2), то для скачков справедливо очевидное включение $\rho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty\mu\Gamma}^n$, т.е. выполняется условие

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty.$$

Функция $x_\tau(t) = x_{\tau[t]}(t - [t])$, $t \in \mathbb{R}$, будет импульсным решением функционально-дифференциального уравнения (3.24) со скачками

$$x_\tau(\bar{t}_i + 0) - x_\tau(\bar{t}_i - 0) = \rho_i, \quad \bar{t}_i = i + 1, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (4.3)$$

и при этом

$$x_\tau(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma), \quad \Gamma = \{\bar{t}_i : i \in \mathbb{Z}\}.$$

Описанное отображение из пространства $C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu}^n)$ в пространство $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \mathbb{Z})$ является непрерывным.

Если $x_\tau(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu'}^n C^{(0)}(\mathbb{R}, \Gamma)$, $\Gamma = \{\bar{t}_i : \bar{t}_i = i + 1, i \in \mathbb{Z}\}$, $\mu' \in (0, (\mu^*)^\tau) \cap (0, 1)$, — импульсное решение функционально-дифференциального уравнения (3.24) со скачками

$$x_\tau(i + 1 + 0) - x_\tau(i + 1 - 0) = \rho_i, \quad i \in \mathbb{Z},$$

где $\rho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty\mu'}^n$, т.е. выполняется условие

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} (\mu')^{|i|} < +\infty,$$

то для любого заданного $\mu < \mu'$ вектор-функция

$$\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad t \in [0, 1], \quad x_{\tau i}(t) = x_\tau(t + i), \quad i \in \mathbb{Z},$$

будет решением краевой задачи (4.1), (4.2) и $\varkappa_\tau(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu}^n)$. Описанное отображение из $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ в $C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu}^n)$ является непрерывным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения функции $x_\tau(\cdot)$ и утверждения, полученного в работе [1] (см. гл. 2, лемма 2.4) следует, что эта функция является кусочно абсолютно непрерывной на $\mathbb{R}$. В силу уравнения (4.1) такая функция будет удовлетворять функционально-дифференциальному уравнению (3.24) и условиям скачков (4.3). Из утверждений, полученных в работе [1] (см. гл. 2, лемма 2.4, предложение 2.3), следует, что $x_\tau(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma)$. Последнее утверждение (о непрерывности отображения) очевидно.

Докажем теперь вторую часть предложения 6. Так как функция $x_\tau(\cdot)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma)$ и является импульсным решением функционально-дифференциального уравнения (3.24), то семейство функций $(\mu')^{|i|} x_\tau(t + i)$, $t \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{Z}$, равномерно ограничено и равностепенно непрерывно и для почти всех $t \in [0, 1]$ семейство функций $(\mu')^{|i|} \dot{x}_\tau(t + i)$, $t \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{Z}$, равномерно ограничено. Тогда (см. [1; гл. 2, лемма 2.4]) вектор-функция $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $x_{\tau i}(t) = x_\tau(t + i)$, $i \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, 1]$, сильно абсолютно непрерывна со значениями в пространстве $K_{2\mu}^n$ и для производной $\dot{\varkappa}(\cdot)$ имеет место представление

$$\dot{\varkappa}(t) = \{\dot{x}_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}.$$

В таком случае из функционально-дифференциального уравнения (3.24) следует, что вектор-функция $\varkappa_\tau(\cdot)$ будет удовлетворять бесконечномерному уравнению (4.1), а из определения самой $\varkappa_\tau(\cdot)$ и условия скачков (4.3) следует краевое условие (4.2). Последнее утверждение (о непрерывности отображения) очевидно.

Теперь мы можем приступить к доказательству существования решения с начальной невязкой $(\bar{q}, \bar{p})'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ С. Если вектор-функция $\{(y_i(\cdot))\}_{-\infty}^{+\infty}$ является решением исходной системы дифференциальных уравнений (0.1) и $\omega(\cdot) \in C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$, $\omega(\cdot) = \{(y_i(\cdot), \dot{y}_i(\cdot))'\}_{-\infty}^{+\infty}$, то вектор-функция

$$\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{(u_{\tau i}(t), v_{\tau i}(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad t \in \mathbb{R},$$

определенная по правилу $\varkappa_\tau(t) = \omega(\tau t)$, $t \in \mathbb{R}$, является сильно абсолютно непрерывной и удовлетворяет уравнению (3.8). Обратное утверждение очевидно. Поэтому нам следует изучать те решения $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ исходной системы дифференциальных уравнений (0.1), для которых вектор-функция $\varkappa_\tau(t) = \omega(\tau t)$, $t \in \mathbb{R}$, является решением дифференциального уравнения (3.8).

Не нарушая общности, положим $\bar{t} = 0$. Заметим, что для рассматриваемого оператора $\mathbb{G}_{2\mu}$, $\mu \in (0, 1)$, константа μ^* равна единице. Каждое решение краевой задачи (4.1), (4.2), в которой $n = 2$, в силу уравнения (3.8) может быть построено до решения с начальной невязкой $\rho = (\bar{q}, \bar{p})' = \{(q_i, p_i)'\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{2\mu}^2$. Поэтому вопрос о существовании решения с начальной невязкой эквивалентен вопросу о существовании решения краевой задачи (4.1), (4.2). По предложению 6 для существования решения $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0, 1]$, $\varkappa_\tau(\cdot) \in C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu}^2)$, краевой задачи (4.1), (4.2) достаточно, чтобы функция $x_\tau(t) = x_{\tau[t]}(t - [t])$, $t \in \mathbb{R}$, являлась импульсным решением функционально-дифференциального уравнения (3.24) со скачками (4.3) и принадлежала пространству $\mathcal{L}_{\mu'}^2 C^{(0)}(\mathbb{R}; \mathbb{Z})$, $\mu' \in (0, 1)$, $\mu' > \mu$. При этом если решение $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{(u_{\tau i}(t), v_{\tau i}(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0, 1]$, краевой задачи (4.1), (4.2) удовлетворяет начальному условию $(\varkappa_\tau(0))_{\bar{i}} = (a, b)'$, то соответствующее ему решение $x_\tau(t) = x_{\tau[t]}(t - [t])$, $t \in \mathbb{R}$, функционально-дифференциального уравнения (3.24) будет удовлетворять начальному условию $x_\tau(\bar{i}) = (a, b)'$. По теореме А при любых заданных $\tau > 0$, $\tilde{\mu} \in (0, 1)$, удовлетворяющих условию

$$\tau M_2(2\tilde{\mu}^{-1} + 1) < \ln \tilde{\mu}^{-1}, \quad (4.4)$$

а также заданных $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{R}^1$, $\Gamma = \{\bar{t}_i : \bar{t}_i = i + 1, i \in \mathbb{Z}\}$ и величинах скачков

$$\rho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty\bar{\mu}\Gamma}^2 \quad (4.5)$$

для уравнения (3.24) существует решение $x_\tau(\cdot)$, принадлежащее пространству $\mathcal{L}_{\bar{\mu}}^2 C^{(0)}(\mathbb{R}, \Gamma)$ и удовлетворяющее начальному условию $x_\tau(\bar{i}) = (a, b)'$, а также условию на скачки $\rho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty\bar{\mu}\Gamma}^2$, т.е.

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \tilde{\mu}^{|\bar{t}_i|} < +\infty.$$

Такое решение единственное. Заметим, что неравенство (4.4) эквивалентно системе условий $0 < \tau < \hat{\tau}$, $\tilde{\mu} \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$.

Поэтому при фиксированном $0 < \tau < \hat{\tau}$ решение $x_\tau(\cdot)$ функционально-дифференциального уравнения (3.24) с начальным условием $x_\tau(\bar{i}) = (a, b)'$ и величинами скачков

$$\rho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty\bar{\mu}\Gamma}^2, \quad \bar{\mu} > \mu_1(\tau),$$

т.е. удовлетворяющих условию

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^2} (\bar{\mu})^{|\bar{t}_i|} < +\infty,$$

существует, единственно и принадлежит каждому из пространств $\mathcal{L}_{\bar{\mu}}^2 C^{(0)}(\mathbb{R}, \Gamma)$, $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)) \cap (\mu_1(\tau), \bar{\mu}]$. По предложению 6 соответствующая ему вектор-функция $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0, 1]$, $x_{\tau i}(t) = x_\tau(t + i)$, $i \in \mathbb{Z}$, при каждом $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)) \cap (\mu_1(\tau), \bar{\mu})$ будет единственным решением краевой задачи

(4.1), (4.2) с начальным условием $(\varkappa_\tau(0))_{\bar{i}} = (a, b)'$ и будет принадлежать пространству $C^{(0)}([0, 1], K_{2\mu}^2)$. Более того, по тому же предложению 6 такое соответствие является непрерывным. Мы уже отмечали, что каждое решение краевой задачи (4.1), (4.2) может быть продолжено в силу уравнения (3.8). Оценим рост такого решения. Правая часть уравнения (3.8) удовлетворяет условиям роста (3.25). Учитывая неравенство (3.27), мы и получим включение $\|\varkappa_\tau(\cdot)\|_{2\mu} \in \mathcal{L}_{\mu^2}^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$ при каждом $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)) \cap (\mu_1(\tau), \bar{\mu})$. Из оценки (3.26) следует непрерывность отображения, порожденного процедурой продолжения решения краевой задачи (4.1), (4.2) в силу уравнения (3.8) на любой конечный интервал времени, т.е. непрерывность отображения в пространство $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$ с топологией компактной сходимости на $\mathbb{R}$. Остается с помощью обратной замены времени перейти к исходной переменной $\varkappa = \{(u_i, v_i)\}_{-\infty}^{+\infty}$ и затем положить $y_i = u_i, \dot{y}_i = v_i, i \in \mathbb{Z}$. В результате получаем начальное условие $(\varkappa(0))_{\bar{i}} = (y_{\bar{i}}(0), \dot{y}_{\bar{i}}(0))' = (a, b)'$, а также следующие включения: для каждого параметра $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)) \cap (\mu_1(\tau), \bar{\mu})$ вектор $\omega(t) = \{(y_i(t), \dot{y}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{2\mu}^2$ при любом $t \in \mathbb{R}$; функция $\Upsilon_\mu(\cdot) = \|\omega(\cdot)\|_{2\mu} \in \mathcal{L}_{\sqrt{\mu^2}}^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$. Утверждение о непрерывной зависимости решения следует из соответствующего утверждения теоремы A, непрерывности всех процедур, приведенных при доказательстве теоремы C, а также непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения (3.8) от начальных данных и параметров.

§ 5. Доказательство существования решений типа квазибегающей волны

Имея теорему существования решения с начальной невязкой $(\bar{q}, \bar{p})'$, мы можем приступить к доказательству существования решения типа квазибегающей волны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ D. Пусть фиксированы $\bar{i} \in \mathbb{Z}, \bar{t} \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}^1$, массы шаров $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$ и характеристика $0 < \tau < \hat{\tau}$. Рассмотрим минимизирующую последовательность $(\bar{q}_k, \bar{p}_k)' \in B_{21}^2, \omega_k(\cdot) \in C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\bar{\mu}}^2), k = 1, 2, \dots$, в оптимизационной задаче 1, т.е. решения $\omega_k(\cdot)$ с начальными невязками $(\bar{q}_k, \bar{p}_k)', k = 1, 2, \dots$, для которых

$$\inf_{(\bar{q}, \bar{p}), \omega(\cdot)} F(\omega(\cdot)) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(\omega_k(\cdot)). \quad (5.1)$$

Так как для любого $\tilde{\mu} \in (0, 1)$ вложение $K_{21}^2 \subseteq K_{2\tilde{\mu}}^2$ является вполне непрерывным, то найдется точка $(\hat{q}, \hat{p})'$, являющаяся предельной точкой для множества точек $(\bar{q}_k, \bar{p}_k)', k = 1, 2, \dots$, в пространстве $K_{2\tilde{\mu}}^2$ при каждом $\tilde{\mu} \in (0, 1)$, т.е. точка $(\hat{q}, \hat{p})'$, принадлежащая счетно-нормированному пространству $\hat{K}_{21}^2 = \bigcap_{\tilde{\mu} \in (0, 1)} K_{2\tilde{\mu}}^2$. Для заданного $0 < \tau < \hat{\tau}$ выберем $\bar{\mu} \in (\mu_2(\tau), 1)$. Очевидно, что $(\bar{q}_k, \bar{p}_k)', (\hat{q}, \hat{p})' \in K_{2\bar{\mu}}^2, k = 1, 2, \dots$. Тогда для $(\hat{q}, \hat{p})' \in K_{2\bar{\mu}}^2$ по теореме C существует единственное решение $\hat{\omega}(\cdot) = \{(\hat{y}_i(\cdot), \dot{\hat{y}}_i(\cdot))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ с начальной невязкой $(\hat{q}, \hat{p})'$ такое, что для всякого $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ вектор-функция $\hat{\omega}(\cdot)$ принадлежит пространству $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$ и, в частности, пространству $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\bar{\mu}}^2)$. Так как $(\bar{q}_k, \bar{p}_k)' \in K_{2\bar{\mu}}^2, k = 1, 2, \dots$, то точно так же для всякого $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$

вектор-функции $\widehat{\omega}_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots$, принадлежат пространству $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$. По той же теореме **C** всякое решение $\omega(\cdot)$ с начальной невязкой $(q, p)' \in K_{2\mu}^2$ как элемент пространства $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$ непрерывно зависит от точки $(q, p)'$ в топологии компактной сходимости на $\mathbb{R}$. Сама точка $(\widehat{q}, \widehat{p})'$ по построению является предельной точкой последовательности точек $(\bar{q}_k, \bar{p}_k)'$, $k = 1, 2, \dots$, в пространстве $K_{2\mu}^2$. В таком случае без ограничения общности можем считать, что для всякого $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ в пространстве $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$ последовательность решений $\omega_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots$, с начальными невязками $(\bar{q}_k, \bar{p}_k)' \in K_{2\mu}^2$ стремится к решению $\widehat{\omega}(\cdot)$ с начальной невязкой $(\widehat{q}, \widehat{p})' \in K_{2\mu}^2$ в топологии компактной сходимости на $\mathbb{R}$. С другой стороны, из той же теоремы **C** следует, что для всякого $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ для решений $\widehat{\omega}(\cdot)$, $\omega_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots$, справедливы условия

$$\|\widehat{\omega}(\cdot)\|_{2\mu}, \quad \|\omega_k(\cdot)\|_{2\mu} \in \mathcal{L}^1_{\sqrt{\mu^2}} C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Однако можно сказать больше. При каждом $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ для последовательности решений $\omega_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots$, с начальными невязками $(\bar{q}_k, \bar{p}_k)' \in K_{2\mu}^2$ соответствующая последовательность функций $\|\omega_k(\cdot)\|_{2\mu}$, $k = 1, 2, \dots$, в пространстве $\mathcal{L}^1_{\sqrt{\mu^2}} C^{(0)}(\mathbb{R})$ по норме ограничена некоторой константой Υ . Покажем это. Очевидно, что при каждом $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ последовательность начальных невязок $(\bar{q}_k, \bar{p}_k)'$, $k = 1, 2, \dots$, принадлежит также и пространству $K_{2\mu}^2$ и является ограниченной. По предложению **6** вектор-функции $\varkappa_{\tau k}(t) = \{x_{\tau ki}(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0, 1]$, $x_{\tau ki}(t) = x_{\tau k}(t + i)$, $i \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \dots$, соответствующие решениям $\omega_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяют дифференциальному уравнению (3.8), для которого задача Коши корректно разрешима. Тогда из ограниченности начальных невязок $(\bar{q}_k, \bar{p}_k)'$, $k = 1, 2, \dots$, в пространстве $K_{2\mu}^2$, фиксированности начального момента $\bar{t}$, начальных значений a , b , координаты с номером $\bar{i}$ и будет следовать ограниченность начальных значений $\omega_k(\bar{t})$, $k = 1, 2, \dots$, в пространстве $K_{2\mu}^2$. Так как правая часть уравнения (3.8) удовлетворяет условиям роста (3.25), то, учитывая неравенство

$$\tau M_2(2\mu^{-1} + 1) < \ln \mu^{-1}, \quad (5.2)$$

мы и получим ограниченность последовательности функций $\|\omega_k(\cdot)\|_{2\mu}$, $k = 1, 2, \dots$, по норме пространства $\mathcal{L}^1_{\sqrt{\mu^2}} C^{(0)}(\mathbb{R})$. В силу того, что в пространстве $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\mu}^2)$ последовательность решений $\omega_k(\cdot)$ с начальными невязками $(\bar{q}_k, \bar{p}_k)' \in K_{2\mu}^2$, $k = 1, 2, \dots$, стремится к решению $\widehat{\omega}(\cdot)$ с начальной невязкой $(\widehat{q}, \widehat{p})' \in K_{2\mu}^2$ в топологии компактной сходимости на $\mathbb{R}$, для функции $\|\widehat{\omega}(\cdot)\|_{2\mu}$ ее норма в пространстве $\mathcal{L}^1_{\sqrt{\mu^2}} C^{(0)}(\mathbb{R})$ также ограничена числом Υ .

Полученная вектор-функция $\widehat{\omega}(\cdot)$ будет решением типа квазибегущей волны, если покажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(\omega_k(\cdot)) = F(\widehat{\omega}(\cdot)). \quad (5.3)$$

Для этого выберем $\mu' \in (\widehat{\mu}, \mu_2(\tau))$. Ранее мы отмечали, что там, где необходимо, действие оператора сдвига T в пространстве $K_{p\mu}^n$ будем обозначать с индексами

(т.е. через $T_{p\mu}$). Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
& |F(\widehat{\omega}(\cdot)) - F(\omega_k(\cdot))| \leq F(\widehat{\omega}(\cdot) - \omega_k(\cdot)) \\
& = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| [\widehat{\omega}(t + \tau) - T_{2\widehat{\mu}}\widehat{\omega}(t)] - [\omega_k(t + \tau) - T_{2\widehat{\mu}}\omega_k(t)] \right\|_{2\widehat{\mu}} \widehat{\mu}^{|2t/\tau|} \\
& \leq \max \left\{ \sup_{t \in [-N, N]} \left\| [\widehat{\omega}(t + \tau) - \omega_k(t + \tau)] - T_{2\widehat{\mu}}[\widehat{\omega}(t) - \omega_k(t)] \right\|_{2\widehat{\mu}} \widehat{\mu}^{|2t/\tau|}, \right. \\
& \quad \left. \sup_{t \in (-\infty, N) \cup (N, +\infty)} \left\| [\widehat{\omega}(t + \tau) - T_{2\widehat{\mu}}\widehat{\omega}(t)] - [\omega_k(t + \tau) - T_{2\widehat{\mu}}\omega_k(t)] \right\|_{2\widehat{\mu}} \widehat{\mu}^{|2t/\tau|} \right\} \\
& \leq [\|T_{2\widehat{\mu}}\| + 1] \max \left\{ \sup_{t \in [-(N+\tau), (N+\tau)]} \|\widehat{\omega}(t) - \omega_k(t)\|_{2\widehat{\mu}} \widehat{\mu}^{|2t/\tau|}, \right. \\
& \quad \sup_{t \in (-\infty, -(N-\tau)) \cup ((N-\tau), +\infty)} \|\widehat{\omega}(t)\|_{2\widehat{\mu}} \widehat{\mu}^{|2t/\tau|}, \\
& \quad \left. \sup_{t \in (-\infty, -(N-\tau)) \cup ((N-\tau), +\infty)} \|\omega_k(t)\|_{2\widehat{\mu}} \widehat{\mu}^{|2t/\tau|} \right\} \\
& \leq [\|T_{2\widehat{\mu}}\| + 1] \max \left\{ \sup_{t \in [-(N+\tau), (N+\tau)]} \|\widehat{\omega}(t) - \omega_k(t)\|_{2\widehat{\mu}} \widehat{\mu}^{|2t/\tau|}, \right. \\
& \quad \sup_{t \in (-\infty, -(N-\tau)) \cup ((N-\tau), +\infty)} \|\widehat{\omega}(t)\|_{2\mu'} (\mu')^{|2t/\tau|} \left(\frac{\widehat{\mu}}{\mu'} \right)^{|2t/\tau|}, \\
& \quad \left. \sup_{t \in (-\infty, -(N-\tau)) \cup ((N-\tau), +\infty)} \|\omega_k(t)\|_{2\mu'} (\mu')^{|2t/\tau|} \left(\frac{\widehat{\mu}}{\mu'} \right)^{|2t/\tau|} \right\} \\
& \leq [\|T_{2\widehat{\mu}}\| + 1] \max \left\{ \sup_{t \in [-(N+\tau), (N+\tau)]} \|\widehat{\omega}(t) - \omega_k(t)\|_{2\widehat{\mu}} \widehat{\mu}^{|2t/\tau|}, \right. \\
& \quad \Upsilon \sup_{t \in (-\infty, -(N-\tau)) \cup ((N-\tau), +\infty)} \left(\frac{\widehat{\mu}}{\mu'} \right)^{|2t/\tau|}, \\
& \quad \left. \Upsilon \sup_{t \in (-\infty, -(N-\tau)) \cup ((N-\tau), +\infty)} \left(\frac{\widehat{\mu}}{\mu'} \right)^{|2t/\tau|} \right\} \\
& \leq [\|T_{2\widehat{\mu}}\| + 1] \max \left\{ \sup_{t \in [-(N+\tau), (N+\tau)]} \|\widehat{\omega}(t) - \omega_k(t)\|_{2\widehat{\mu}} \widehat{\mu}^{|2t/\tau|}, \right. \\
& \quad \left. \Upsilon \sup_{t \in (-\infty, -(N-\tau)) \cup ((N-\tau), +\infty)} \left(\frac{\widehat{\mu}}{\mu'} \right)^{|2t/\tau|} \right\}. \tag{5.4}
\end{aligned}$$

Так как $\widehat{\mu}/\mu' < 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать столь большое N , что второе выражение под знаком максимума станет меньше ε . Зафиксируем такое N . Так как в пространстве $C^{(0)}(\mathbb{R}, K_{2\widehat{\mu}}^2)$ последовательность решений $\omega_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots$, с начальными невязками $(\bar{q}_k, \bar{p}_k)' \in K_{2\widehat{\mu}}^2$ стремится к решению $\widehat{\omega}(\cdot)$ с начальной невязкой $(\widehat{q}, \widehat{p})' \in K_{2\widehat{\mu}}^2$ в топологии компактной сходимости на $\mathbb{R}$, то можно подобрать такое $\bar{N}$, что при $k > \bar{N}$ первое выражение под знаком максимума также станет меньше ε . Тогда предельный переход в (5.3) справедлив и, следовательно, вектор-функция $\widehat{\omega}(\cdot)$ является квазирешением.

Покажем, что оптимальное значение функционала F (его значение на квазирешениях) непрерывно зависит от начальных данных $a, b \in \mathbb{R}$ и вектора масс

шаров $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$ как от параметров. Пусть фиксированы

$$\bar{i} \in \mathbb{Z}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1, \quad 0 < \tau < \hat{\tau}.$$

Выберем $\bar{\mu} \in (\mu_2(\tau), 1)$. Вложение $B_{21}^2 \subset K_{2\bar{\mu}}^2$ является вполне непрерывным. По теореме С для любых $(\tilde{a}, \tilde{b})' \in \mathbb{R}^2$, $\{\tilde{m}_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$ из малой окрестности точки $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}$ и начальных невязок $(\bar{q}, \bar{p})' \in K_{2\bar{\mu}}^2$ существует, причем единственная, вектор-функция $\tilde{\omega}(\cdot)$, удовлетворяющая ограничениям оптимизационной задачи 1, кроме ограничения $(\bar{q}, \bar{p})' \in B_{21}^2$. Более того, такая вектор-функция непрерывно зависит от начальных данных $(\tilde{a}, \tilde{b})' \in \mathbb{R}^2$, массы шаров $\{\tilde{m}_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$ и начальных невязок $(\bar{q}, \bar{p})' \in K_{2\bar{\mu}}^2$. Для уже фиксированных начальных значений $(a, b)' \in \mathbb{R}^2$ и масс шаров $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$ при любых начальных невязках $(\bar{q}, \bar{p})' \in K_{2\bar{\mu}}^2$ соответствующую вектор-функцию будем обозначать через $\omega(\cdot)$.

Обозначим

$$\tilde{\nu} = ((\tilde{a}, \tilde{b})', \{\tilde{m}_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}) \in R^2 \times K_{\infty 1}^1$$

и $\nu = ((a, b)', \{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty})$ для фиксированных начальных данных и масс шаров соответственно. Через $V(\nu)$ обозначим окрестность фиксированной точки ν в пространстве $R^2 \times K_{\infty 1}^1$, а через $\Theta(\bar{q}, \bar{p})$ – окрестность произвольной точки $(\bar{q}, \bar{p})'$ в пространстве $K_{2\bar{\mu}}^2$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. В силу сказанного выше о теореме С для произвольной начальной невязки $(\bar{q}, \bar{p})' \in B_{21}^2 \subset K_{2\bar{\mu}}^2$ найдутся окрестности $V(\nu)$ и $\Theta(\bar{q}, \bar{p})$ такие, что для любой точки $\tilde{\nu}$ из окрестности $V(\nu)$ и любой начальной невязки из окрестности $\Theta(\bar{q}, \bar{p})$ выполнено следующее условие:

$$|F(\tilde{\omega}(\cdot)) - F(\omega(\cdot))| < \varepsilon.$$

Очевидно, что семейство окрестностей $\{\Theta(\bar{q}, \bar{p}) : (\bar{q}, \bar{p})' \in B_{21}^2\}$ пространства $K_{2\bar{\mu}}^2$ покрывает B_{21}^2 . Так как вложение $B_{21}^2 \subset K_{2\bar{\mu}}^2$ вполне непрерывно, то найдется конечный набор окрестностей $\Theta(\bar{q}_k, \bar{p}_k)$, $k = 1, \dots, N$, которые покрывают B_{21}^2 . Каждой окрестности $\Theta(\bar{q}_k, \bar{p}_k)$, $k = 1, \dots, N$, соответствует окрестность $V_k(\nu)$, $k = 1, \dots, N$, в пространстве $R^2 \times K_{\infty 1}^1$. Определим

$$W(\nu) = \bigcap_{k=1}^N V_k(\nu).$$

Тогда для любых $\tilde{\nu} = ((\tilde{a}, \tilde{b})', \{\tilde{m}_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}) \in W(\nu)$ и любой начальной невязки $(\bar{q}, \bar{p})' \in B_{21}^2$ справедлива оценка

$$|F(\tilde{\omega}(\cdot)) - F(\omega(\cdot))| < \varepsilon,$$

из которой и следует, что оптимальное значение функционала F непрерывно зависит от начальных данных и масс шаров.

Последнее утверждение следует из теоремы В.

§ 6. О μ -неустойчивости стационарных решений

Очевидно, что для системы (0.1) стационарные состояния имеют вид $\overline{x} = \{(a_i, 0)'\}_{-\infty}^{+\infty}$ и для любого заданного $\mu \in (0, 1)$ совпадают с точками поверхности в пространстве $K_{2\mu}^2$, описываемой уравнением

$$\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(\overline{x}) = 0. \quad (6.1)$$

Для исследования решений на устойчивость следует в уравнении (3.8) правую часть линеаризовать в окрестности стационарной точки. Для линеаризации потребуется наложить дополнительное ограничение на потенциал $\phi(\cdot)$ в виде условия непрерывной дифференцируемости с равномерно ограниченной производной. Так как мы будем проверять стационарную точку на неустойчивость, то потребуется дополнительное условие на потенциал $\phi(\cdot)$ в виде наличия второй производной, непрерывной и равномерно ограниченной.

ЛЕММА 4. Пусть функция $\phi(\cdot)$ является дважды непрерывно дифференцируемой с равномерно ограниченными первой и второй производными, а массы шаров таковы, что $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$. Тогда для любого $\mu \in (0, 1)$ оператор $\mathbb{G}_{\tau 2\mu}$ дважды непрерывно дифференцируем по Фреше.

Доказательство леммы заключается в непосредственной проверке справедливости ее утверждений.

Если $\mathbb{G}'_{\tau 2\mu}(\overline{x})$, $\mu \in (0, 1)$, – производная по Фреше оператора $\mathbb{G}_{\tau 2\mu}$ в стационарной точке $\overline{x} = \{(a_i, 0)'\}_{-\infty}^{+\infty}$, которую будем обозначать через $\mathcal{A}_{2\mu}$ (индекс τ мы опускаем, так как операторы $\mathbb{G}_{\tau 2\mu}$ и $\mathcal{A}_{2\mu}$ от него не зависят), то линеаризованное уравнение для уравнения (3.8) имеет вид

$$\dot{x} = \tau \mathcal{A}_{2\mu} x, \quad (6.2)$$

где

$$(\mathcal{A}_{2\mu} x)_i = (v_i, m_i^{-1}[u_{i+1} - (2 + \gamma_i)u_i + u_{i-1}])', \quad x = \{(u_i, v_i)'\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{2\mu}^2, \quad i \in \mathbb{Z},$$

и $\gamma_i = \dot{\phi}(a_i)$.

Пространство $K_{2\mu}^2$, $\mu \in (0, 1)$, представим в виде прямого произведения $K_{2\mu}^2 = K_{2\mu}^1 \times K_{2\mu}^1$ с элементами $x = (\chi_1, \chi_2)$. В пространстве $K_{2\mu}^1$ определим тождественный оператор E и линейный непрерывный оператор $C_{2\mu}$ по следующему правилу:

$$(C_{2\mu} \chi)_i = m_i^{-1}[u_{i+1} - (2 + \gamma_i)u_i + u_{i-1}], \quad \chi = \{u_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{2\mu}^1, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Используя вид операторов $\mathcal{A}_{2\mu}$ и $C_{2\mu}$, можно установить связь между их спектрами. Изучение спектральных свойств и собственных подпространств следует проводить в пространстве

$$\mathbb{K}_{2\mu}^n = K_{2\mu}^n + iK_{2\mu}^n, \quad \mu \in (0, 1),$$

полученном как комплексификация действительного пространства $K_{2\mu}^n$.

ЛЕММА 5. Если массы шаров таковы, что $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$, то для любого $\mu \in (0, 1)$ спектры операторов $\mathcal{A}_{2\mu}$ и $C_{2\mu}$ связаны соотношением

$$\sigma(\mathcal{A}_{2\mu}) = [\sigma(C_{2\mu})]^{1/2}. \quad (6.3)$$

Более того, такое же соответствие имеется и между точечными спектрами

$$\sigma_p(\mathcal{A}_{2\mu}) = [\sigma_p(C_{2\mu})]^{1/2}. \quad (6.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\varkappa = (\chi_1, \chi_2) \in K_{2\mu}^1 \times K_{2\mu}^1$ действие оператора $\mathcal{A}_{2\mu}$ можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{A}_{2\mu}\varkappa = (E\chi_2, C_{2\mu}\chi_1). \quad (6.5)$$

Рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{A}_{2\mu} - \lambda E)\varkappa = \tilde{\varkappa}, \quad (6.6)$$

которое можно записать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \chi_2 - \lambda\chi_1 = \tilde{\chi}_1, \\ C_{2\mu}\chi_1 - \lambda\chi_2 = \tilde{\chi}_2. \end{cases} \quad (6.7)$$

Подставив значение χ_2 из первого уравнения системы (6.7) во второе уравнение, получим эквивалентную ей систему

$$\begin{cases} \chi_2 = \tilde{\chi}_1 + \lambda\chi_1, \\ (C_{2\mu} - \lambda^2 E)\chi_1 = \lambda\tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2. \end{cases} \quad (6.8)$$

Если оператор $(C_{2\mu} - \lambda^2 E)$ обратим, т.е. $\lambda^2 \notin \sigma(C_{2\mu})$, то из эквивалентности уравнения (6.6) и системы (6.8) следует обратимость оператора $(\mathcal{A}_{2\mu} - \lambda E)$, т.е. $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_{2\mu})$.

Докажем теперь обратное утверждение. Если оператор $(\mathcal{A}_{2\mu} - \lambda E)$ обратим, т.е. $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_{2\mu})$, то оператор $(C_{2\mu} - \lambda^2 E)$ сюръективный. Покажем, что он также и инъективный.

Для этого нам следует изучить точечный спектр оператора $(C_{2\mu} - \lambda^2 E)$. Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{A}_{2\mu}\varkappa = \lambda_1\varkappa, \quad \varkappa \neq 0, \quad (6.9)$$

которое можно записать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \chi_2 = \lambda_1\chi_1, & \chi_1 \neq 0, \\ C_{2\mu}\chi_1 = \lambda_1\chi_2. \end{cases} \quad (6.10)$$

Система (6.10) эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \chi_2 = \lambda_1\chi_1, & \chi_1 \neq 0, \\ C_{2\mu}\chi_1 = \lambda_1^2\chi_1. \end{cases} \quad (6.11)$$

Из системы (6.11) следует, что $\lambda_1 \in \sigma_p(A_{2\mu})$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1^2 \in \sigma_p(C_{2\mu})$, что и доказывает равенство (6.4). Так как оператор $(\mathcal{A}_{2\mu} - \lambda E)$ обратим, то оператор $(C_{2\mu} - \lambda^2 E)$ будет инъективным и поэтому обратимым.

Мы показали, что $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_{2\mu})$ тогда и только тогда, когда $\lambda^2 \notin \sigma(C_{2\mu})$. Но это эквивалентно тому, что $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_{2\mu})$ тогда и только тогда, когда $\lambda^2 \in \sigma(C_{2\mu})$, откуда и следует равенство (6.3).

Теперь мы можем доказать теорему Е о μ -неустойчивости стационарного состояния $\overline{x} = \{(a_i, 0)\}'_{-\infty}^{+\infty}$. Так как для функции $\phi(\cdot)$ производная равномерно ограничена, то модули $\gamma_i = |\dot{\phi}(a_i)|$, $i \in \mathbb{Z}$, равномерно ограничены. Верхнюю грань таких чисел обозначим через γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ Е. В стационарной точке $\overline{x}$ линеаризованное уравнение для уравнения (3.8) задается уравнением (6.2). Так как оператор $\mathbb{G}_{\tau 2\mu}$ дважды непрерывно дифференцируем по Фреше, то имеет место оценка

$$\|\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(x) - \mathbb{G}_{\tau 2\mu}(\overline{x}) - \mathbb{G}'_{\tau 2\mu}(\overline{x})(x - \overline{x})\|_{2\mu} \leq N \|x - \overline{x}\|_{2\mu}^2,$$

что гарантирует выполнение условия теоремы о неустойчивости (см. [9; гл. 7, теорема 2.3]). По той же теореме для завершения доказательства теоремы Е достаточно, чтобы спектру оператора $\mathcal{A}_{2\mu} = \mathbb{G}'_{\tau 2\mu}(\overline{x})$ принадлежала точка с положительной действительной частью. Так как выполняется неравенство $\mu < (2 + \gamma)^{-1}$, то найдется достаточно малое $\varepsilon > 0$, для которого будет выполняться неравенство $\mu < (2 + \gamma + \varepsilon)^{-1}$.

Используя вид оператора $C_{2\mu}$, можно непосредственной проверкой установить, что открытый интервал $(0, \varepsilon)$ на действительной прямой принадлежит точечному спектру оператора $C_{2\mu}$. Тогда в силу представления (6.3) спектру оператора $\mathcal{A}_{2\mu}$ будет принадлежать положительное действительное число.

Автор признателен всем участникам семинара “Динамические системы и эргодическая теория” и его руководителям Д. В. Аносову и А. М. Степину за полезные советы и внимание к работе.

Список литературы

- [1] Л. А. Бекларян, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход*, Факториал Пресс, М., 2007.
- [2] Л. А. Бекларян, М. В. Крученов, “О разрешимости линейных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа”, *Дифференц. уравнения*, **44:4** (2008), 435–445; англ. пер.: L. A. Beklaryan, M. V. Kruchenov, “On the solvability of a linear homogeneous functional-differential equation of point type”, *Differ. Equ.*, **44:4** (2008), 453–463.
- [3] Я. И. Френкель, Т. А. Конторова, “О теории пластической деформации”, *ЖЭТФ*, **8** (1938), 89–97; англ. пер.: J. Frenkel, T. Kontorova, “On the theory of plastic deformation and twinning”, *Acad. Sci. U.S.S.R. J. Phys.*, **1** (1939), 137–149.
- [4] Л. Д. Пустыльников, “Бесконечномерные нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и теория КАМ”, *УМН*, **52:3** (1997), 105–160; англ. пер.: L. D. Pustyl'nikov, “Infinite-dimensional non-linear ordinary differential equations and the KAM theory”, *Russian Math. Surveys*, **52:3** (1997), 551–604.
- [5] Л. А. Бекларян, “Уравнения опережающе-запаздывающего типа и решения типа бегущей волны для бесконечномерных динамических систем”, *Труды международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. Часть 1* (Москва, МАИ, 2002), СМФН, **1**, МАИ, М.,

- 2003, 18–29; англ. пер.: L. A. Beklaryan, “Equations of advanced-retarded type and solutions of traveling-wave type for infinite-dimensional dynamic systems”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **124**:4 (2004), 5098–5109.
- [6] J. K. Hale, S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Appl. Math. Sci., **99**, Springer-Verlag, New York, NY, 1993.
- [7] Ю. Д. Латушкин, А. М. Степин, “Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем”, *УМН*, **46**:2 (1991), 85–143; англ. пер.: Yu. D. Latushkin, A. M. Stëpin, “Weighted translation operators and linear extensions of dynamical systems”, *Russian Math. Surveys*, **46**:2 (1991), 95–165.
- [8] A. Antonevich, A. Lebedev, *Functional-differential equations. I. C^* -theory*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **70**, Longman, Harlow, 1994.
- [9] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970; англ. пер.: Ju. L. Dalec’kii, M. G. Krein, *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974.

Л. А. Бекларян (L. A. Beklaryan)

Центральный экономико-математический
институт РАН, г. Москва

E-mail: beklar@cemi.rssi.ru

Поступила в редакцию

08.06.2009 и 02.06.2010