Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д'Амброзио, Э. Митидиери, Неотрицательные решения некоторых квазилинейных эллиптических неравенств и их приложения, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 6, 75–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7585>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:05:17

УДК 517.956.25

Л. Д'Амброзио, Э. Митидиери

Неотрицательные решения некоторых квазилинейных эллиптических неравенств и их приложения

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Доказано, что при некоторых условиях на f и $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ слабые $\mathcal{C}^1$ -решения дифференциального неравенства $-\operatorname{div}(A(|\nabla u|)\nabla u) \geq f(u)$ в $\mathbb{R}^N$ неотрицательны. Рассмотрены также некоторые обобщения этого результата в рамках теории субэллиптических операторов на группах Карно.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: дифференциальные неравенства, p -лапласиан, неотрицательные решения, субэллиптические операторы, группы Карно.

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматривается следующая задача. Пусть L – дифференциальный оператор второго порядка, а $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Требуется найти дополнительные условия на (L, f) , обеспечивающие положительность возможных решений дифференциального неравенства

$$L(u) \geq f(u) \quad \text{в } \mathbb{R}^N. \quad (1.1)$$

Решение этой проблемы в частных случаях было получено в [1], [2]. В этих работах исследовались эллиптические неравенства вида (1.1) в случае, когда L – оператор Лапласа или полигармонический оператор $(-\Delta)^k$ в евклидовом пространстве, или в более общем случае, когда L – субэллиптический лапласиан на группе Карно, а функция f неотрицательна. Метод доказательства результатов о положительности решений в [1], [2] основывался прежде всего на интегральных представлениях. Одной из существенных трудностей при использовании этого подхода было отсутствие известных условий на поведение решений на бесконечности. Типичным примером такого рода является неравенство

$$-\Delta u \geq |u|^q \quad \text{в } \mathbb{R}^N, \quad (1.2)$$

где $N \geq 3$ и $q > 1$.

Имеет место следующий результат (см. [1]).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $N \geq 3$ и $q > 1$. Пусть $u(x) \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^N)$ – решение (1.2) в смысле распределений, а $\operatorname{Leb}(u)$ – множество его точек Лебега. Если $x \in \operatorname{Leb}(u)$, то

$$u(x) \geq C_N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(y)|^q}{|x-y|^{N-2}} dy,$$

где C_N – положительная константа, вычисляемая в явном виде.

Из этого результата следует, что если $u(x)$ – решение (1.2), то либо $u(x) = 0$, либо $u(x) > 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^N$.

Очевидно, подход, основанный на интегральных представлениях, не применим к квазилинейным задачам. В настоящей работе мы рассмотрим класс квазилинейных модельных задач, для которых выполняется свойство положительности, упомянутое в начале введения. Точнее, рассмотрим случай, когда L – оператор p -Лапласа $\Delta_p(\cdot) = \operatorname{div}(|\nabla(\cdot)|^{p-2}\nabla(\cdot))$ или оператор средней кривизны $-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla(\cdot)}{\sqrt{1+|\nabla(\cdot)|^2}}\right)$. В этих случаях некоторые результаты о неотрицательности решений (1.1) доказываются при помощи подходящей леммы о сравнении (см. лемму 2.13 ниже). Мы применим эти результаты для получения априорных оценок решений и доказательств теорем об отсутствии решений.

Статья имеет следующую структуру. В §2 сформулированы и доказаны основные результаты статьи в евклидовой постановке для p -лапласиана и оператора средней кривизны. Кроме того, указаны некоторые следствия и кратко обсуждена точность некоторых результатов.

В §3 кратко отмечены некоторые обобщения полученных результатов на другие квазилинейные операторы и на дифференциальные неравенства на группах Карно. Статья завершается дополнением, содержащим некоторые известные факты о группах Карно.

Сокращенный вариант этой работы появился в [3]. После сдачи настоящей работы в печать (в мае 2009 г.) мы узнали от профессора Дж. Серрина, что результаты, близкие к лемме 2.13 в евклидовой постановке, содержатся в [4] (см., в частности, п. 2.2 и 2.4, а также гл. 3). Представляется вероятным, что подходящие версии принципов сравнения, приведенных в [4], остаются справедливыми и в случае групп Карно. Этот вопрос будет исследован в одной из наших следующих работ.

§ 2. Основные результаты

Далее мы всюду будем предполагать, что $N \geq 2$ и рассматриваются слабые $\mathcal{C}^1$ -решения сформулированных выше задач (см. детали в определении 2.12 ниже). Основные результаты работы заключаются в следующем.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $p > 1$ и $N > 1$. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что

$$f(t) > 0 \text{ при } t < 0, \quad f \text{ не возрастает на } (-\infty, 0), \quad (2.1)$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \left(\int_t^{-1} f(s) ds \right)^{-1/p} dt < +\infty. \quad (2.2)$$

Если $u(x)$ – решение неравенства

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \geq f(u) \text{ в } \mathbb{R}^N, \quad (2.3)$$

то $u(x) \geq 0$ в $\mathbb{R}^N$. Более того, если $f(t) \geq 0$ при $t \geq 0$, то либо $u(x) \equiv 0$, либо $u(x) > 0$ в $\mathbb{R}^N$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $p > 1$. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что $f(t) \geq C|t|^q$ при $t < 0$. Пусть $u(x)$ – решение неравенства

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \geq f(u) \quad \text{в } \mathbb{R}^N. \quad (2.4)$$

Если $q > p - 1$, то $u(x) \geq 0$ в $\mathbb{R}^N$. Более того, если $f(t) \geq 0$ при $t \geq 0$, то либо $u(x) \equiv 0$, либо $u(x) > 0$ в $\mathbb{R}^N$.

В случае оператора средней кривизны предыдущие результаты можно усилить. Действительно, утверждение справедливо и без условия (2.2) на f .

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, удовлетворяющая (2.1). Пусть $u(x)$ – решение задачи

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) \geq f(u) \quad \text{в } \mathbb{R}^N. \quad (2.5)$$

Тогда $u(x) \geq 0$ в $\mathbb{R}^N$.

Из предыдущих результатов сразу получаем следующую априорную оценку.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $p > 1$ и $N > 1$. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что существуют $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$, такие, что

$$\begin{aligned} f_{(-\infty, \alpha)} & \text{положительна и не возрастает,} \\ f_{(\beta, +\infty)} & \text{отрицательна и не возрастает,} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\alpha} \left(\int_t^{\alpha} f(s) ds \right)^{-1/p} dt < +\infty, \quad \int_{\beta}^{\infty} \left(\int_{\beta}^t -f(s) ds \right)^{-1/p} dt < +\infty. \quad (2.7)$$

Если $u(x)$ – решение уравнения

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(u) \quad \text{в } \mathbb{R}^N, \quad (2.8)$$

то функция $u(x)$ ограничена и, кроме того, $\alpha \leq u(x) \leq \beta$ для любого $x \in \mathbb{R}^N$.

В случае оператора средней кривизны мы можем также наложить более общие ограничения на f .

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что

$$\liminf_{t \rightarrow -\infty} f(t) > 0.$$

Если $u(x)$ – решение (2.5), то f имеет хотя бы один нуль. Обозначим через α первый нуль f (т.е. $\alpha := \min S$, где $S := f^{-1}(0)$). Тогда $u(x) \geq \alpha$. В частности, если $f > 0$, то (2.5) не имеет решений. Более того, если

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} f(t) < 0$$

и функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = f(u) \quad \text{в } \mathbb{R}^N, \quad (2.9)$$

то функция $u(x)$ ограничена и, кроме того, $\alpha \leq u(x) \leq \beta$, $x \in \mathbb{R}^N$, где β – наибольший нуль f (т.е. $\beta := \max S$).

Прямыми следствиями теорем 2.3–2.5 являются следующие теоремы Ливилля.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Пусть $p > 1$ и $N > 1$. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – невозрастающая непрерывная функция такая, что

$$f(t) > 0 \text{ при } t < 0, \quad f(t) < 0 \text{ при } t > 0, \quad (2.10)$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \left(\int_t^{-1} f(s) ds \right)^{-1/p} dt < +\infty, \quad \int_1^{\infty} \left(\int_1^t -f(s) ds \right)^{-1/p} dt < +\infty. \quad (2.11)$$

Если $u(x)$ – решение уравнения

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f(u) \text{ в } \mathbb{R}^N, \quad (2.12)$$

то $u(x) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^N$. В частности, если $q > p - 1$ и функция $u(x)$ – решение уравнения

$$\Delta_p u = |u|^{q-1} u \text{ в } \mathbb{R}^N, \quad (2.13)$$

то $u(x) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^N$.

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть $p > 1$ и $N > 1$. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – положительная невозрастающая непрерывная функция, удовлетворяющая (2.2). Тогда неравенство (2.3) не имеет решений.

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть $N > 1$. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – невозрастающая непрерывная функция и $f \not\equiv 0$. Если $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^N)$ – решение уравнения

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = f(u) \text{ в } \mathbb{R}^N, \quad (2.14)$$

то функция $u(x)$ постоянна, т.е. $u(x) \equiv \alpha$ и $f(\alpha) = 0$. В частности, если $f(t) \neq 0$ для любого t , то (2.14) не имеет решений. Кроме того, если f положительна, то неравенство

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \geq f(u) \text{ в } \mathbb{R}^N \quad (2.15)$$

не имеет решений.

Следующие результаты легко следуют из того, что все неотрицательные функции $u(x)$ такие, что $-\Delta_p u \geq 0$ в $\mathbb{R}^N$, $N \leq p$ или

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \geq 0 \text{ в } \mathbb{R}^2$$

суть константы (см. [5]).

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Пусть $p \geq N > 1$ и $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая (2.1) и (2.2). Если $u(x)$ – решение (2.3), то $u(x)$ постоянна в $\mathbb{R}^N$. Точнее, $u(x) \equiv \alpha \geq 0$ и $f(\alpha) = 0$. Более того, если $f(t) > 0$, $t \geq 0$, то (2.3) не имеет решений.

СЛЕДСТВИЕ 2.10. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая (2.1). Пусть $u(x)$ – решение неравенства

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) \geq f(u) \quad \text{в } \mathbb{R}^2. \quad (2.16)$$

Тогда $u(x)$ постоянна в $\mathbb{R}^2$. Точнее, $u(x) \equiv \alpha \geq 0$ и $f(\alpha) = 0$.

Более того, если $f(t) > 0$ при $t \geq 0$, то (2.16) не имеет решений.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.11. Предыдущие условия на f точны в следующем смысле. Если $p = 2$ и $q = 1 = p - 1$, то сформулированный выше результат неверен. Действительно, уравнение

$$-\Delta u = |u| \quad \text{в } \mathbb{R}^N$$

допускает отрицательное решение в явном виде

$$u(x) := -\exp(x_1), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

или знакопеременные решения (см. [1]).

В общем случае $q = p - 1$ уравнение

$$\Delta_p u = u^{p-1} \quad \text{в } \mathbb{R}^N$$

допускает положительное решение (см., например, [6]). Поэтому уравнение

$$-\Delta_p u = |u|^{p-1} \quad \text{в } \mathbb{R}^N$$

имеет отрицательное решение.

Опишем кратко идею доказательства нашего основного результата. Пусть $u(x)$ – решение (2.3). Без ограничения общности покажем, что $u(0) \geq 0$. Функция $U := -u(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{div}(|\nabla U|^{p-2} \nabla U) \geq f(-U) \quad \text{в } \mathbb{R}^N.$$

Пусть $v(x)$ – положительное решение уравнения

$$\operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2} \nabla v) = f(-v) \quad \text{в } B_R$$

такое, что $v(0) = a > 0$ и $v(x) \rightarrow +\infty$ при $|x| \rightarrow R$. Из условий на f следует существование $v(x)$. Так как $U(x) \leq v(x)$ при $|x|$ вблизи R , то в силу леммы сравнения (см. лемму 2.13 ниже) получаем, что $U(x) \leq v(x)$ при любом $|x| < R$. В частности, $U(0) \leq v(0) = a$. Переходя к пределу при $a \rightarrow 0$, получаем $U(0) \leq 0$. Поэтому $u(0) \geq 0$. Окончательно, если $f(t) \geq 0$ при $t \geq 0$, то в силу слабого неравенства Харнака либо $u(x) \equiv 0$, либо $u(x) > 0$ в $\mathbb{R}^N$.

2.1. Лемма о сравнении. В этом пункте мы докажем лемму о сравнении. Эта лемма будет использоваться при работе с операторами более общего вида, чем p -лапласиан и оператор средней кривизны, поэтому приведем ее в общей формулировке. Для этого введем некоторые обозначения. Пусть $\mu = (\mu(x)_{i,j})$ –

матрица из N столбцов и l , $l \leq N$, строк с элементами, принадлежащими для простоты $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$. Обозначим $\nabla_L := \mu \nabla$ и $\operatorname{div}_L = -\nabla_L^* = \operatorname{div}(\mu^T(\cdot))$. Изотропный евклидов случай соответствует выбору $\mu = I_N$ единичной матрицы порядка N .

Будем предполагать, что если $\nabla_L u = 0$ в связной области Ω , то $u(x) \equiv \operatorname{const}$ в этой области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – открытое множество, $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывные функции. Будем называть $u(x)$ *решением неравенства*

$$\operatorname{div}_L(A(|\nabla_L u|)\nabla_L u) \geq h \quad \text{на } \Omega,$$

если $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ и для любой неотрицательной функции $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ выполнено

$$-\int_{\Omega} A(|\nabla_L u|)\nabla_L u \cdot \nabla_L \phi \geq \int_{\Omega} h\phi.$$

Аналогично можно определить решения неравенств

$$-\operatorname{div}_L(A(|\nabla_L u|)\nabla_L u) \geq h, \quad \operatorname{div}_L(A(|\nabla_L u|)\nabla_L u) \leq h.$$

Следующая лемма полезна при рассмотрении решений неравенств вида

$$\operatorname{div}_L(A(|\nabla_L u|)\nabla_L u) \geq g_1(x, u) \quad \text{на } \Omega, \quad (2.17)$$

$$\operatorname{div}_L(A(|\nabla_L v|)\nabla_L v) \leq g_2(x, v) \quad \text{на } \Omega, \quad (2.18)$$

где A – непрерывная функция такая, что $A(t) > 0$, $t > 0$, и при $i = 1, 2$ функции $g_i: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны.

ЛЕММА 2.13. Пусть Ω – ограниченное открытое множество, и пусть $u(x)$ и $v(x)$ – решения (2.17) и (2.18) соответственно. Предположим, что

- 1) (а) для любых $x \in \Omega$, $t \geq s \geq 0$ выполнено $g_1(x, t) \geq g_2(x, s)$, функция $g_1(x, \cdot)$ не убывает на $(0, +\infty)$ и $v \geq 0$, или (б) для любых $x \in \Omega$, $t \geq s$ выполнено $g_1(x, t) \geq g_2(x, s)$ и функция $g_1(x, \cdot)$ не убывает;
- 2) функция $tA(t)$ – возрастающая и положительная при $t > 0$;
- 3) $u \leq v$ на $\partial\Omega$.

Тогда $u \leq v$ на Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – решения (2.17) и (2.18) соответственно. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $v_\varepsilon := v + \varepsilon$. Легко проверить, что функция v_ε удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{div}_L(A(|\nabla_L w|)\nabla_L w) \leq g_1(x, w) \quad \text{на } \Omega.$$

Поэтому для любой неотрицательной функции $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ имеем

$$-\int_{\Omega} (A(|\nabla_L u|)\nabla_L u - A(|\nabla_L v_\varepsilon|)\nabla_L v_\varepsilon) \cdot \nabla_L \phi \geq \int_{\Omega} (g_1(x, u) - g_1(x, v_\varepsilon))\phi. \quad (2.19)$$

Далее выберем ϕ следующим образом: $\phi := ((u - v_\varepsilon)_+)^2$. Очевидно, что ϕ неотрицательно и $\phi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Более того, так как $v_\varepsilon - u \geq \varepsilon > 0$ на $\partial\Omega$, то ϕ имеет компактный носитель. Подставляя ϕ в (2.19), получим

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} (A(|\nabla_L u|) \nabla_L u - A(|\nabla_L v|) \nabla_L v) \cdot (\nabla_L u - \nabla_L v) 2(u - v_\varepsilon)_+ \\ & \geq \int_{\Omega} (g_1(x, u) - g_1(x, v_\varepsilon)) \phi. \end{aligned}$$

Мы утверждаем, что

$$(A(|\nabla_L u|) \nabla_L u - A(|\nabla_L v|) \nabla_L v) \cdot (\nabla_L u - \nabla_L v) \geq 0. \quad (2.20)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & (A(|\nabla_L u|) \nabla_L u - A(|\nabla_L v|) \nabla_L v) \cdot (\nabla_L u - \nabla_L v) \\ & = A(|\nabla_L u|) |\nabla_L u|^2 + A(|\nabla_L v|) |\nabla_L v|^2 - (A(|\nabla_L u|) + A(|\nabla_L v|)) (\nabla_L u \cdot \nabla_L v) \\ & = (A(|\nabla_L u|) |\nabla_L u| - A(|\nabla_L v|) |\nabla_L v|) (|\nabla_L u| - |\nabla_L v|) \\ & \quad + (A(|\nabla_L u|) + A(|\nabla_L v|)) (|\nabla_L u| |\nabla_L v| - \nabla_L u \cdot \nabla_L v) =: I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Так как $A \geq 0$, то $I_2 \geq 0$. Из монотонности $tA(t)$ следует, что

$$I_1 = (A(|\nabla_L u|) |\nabla_L u| - A(|\nabla_L v|) |\nabla_L v|) (|\nabla_L u| - |\nabla_L v|) \geq 0.$$

Предположим сначала, что $g_1(x, \cdot)$ строго возрастает. Поэтому неравенство

$$(g_1(x, u) - g_1(x, v_\varepsilon)) ((u - v_\varepsilon)_+)^2 \geq 0$$

выполняется для любого $x \in \Omega$. Следовательно,

$$(g_1(x, u) - g_1(x, v_\varepsilon)) ((u - v_\varepsilon)_+)^2 = 0 \quad \text{в } \Omega$$

и поэтому $u \leq v_\varepsilon$.

Это завершает доказательство в случае строгого возрастания $g_1(x, \cdot)$. В общем случае требуются дополнительные рассуждения. Действительно, из (2.20) и (2.21) имеем

$$\int_{\Omega} (I_1 + I_2) (u - v_\varepsilon)_+ = 0.$$

Пусть $x \in \Omega$ таково, что $u(x) \geq v_\varepsilon(x)$. Так как $I_1 \geq 0$ и $I_2 \geq 0$, то $I_1(x) = 0 = I_2(x)$.

Мы утверждаем, что $\nabla_L u(x) = \nabla_L v(x)$. Действительно, если $\nabla_L u(x) \neq \nabla_L v(x)$, то из $I_2(x) = 0$ получаем $|\nabla_L u(x)| \neq |\nabla_L v(x)|^1$. Таким образом, из $I_1(x) = 0$ и инъективности $tA(t)$ следует, что

$$0 = A(|\nabla_L u|) |\nabla_L u| - A(|\nabla_L v|) |\nabla_L v| \neq 0.$$

Это влечет $\nabla_L ((u - v_\varepsilon)_+)^2 = 0$ на Ω , т.е. $((u - v_\varepsilon)_+)^2 = \phi = 0$. Поэтому, устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$ в неравенстве $u \leq v + \varepsilon$, получаем утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.14. Предыдущий результат обобщается на случай функции A , зависящей от x , а именно, если $A: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и для любого $x \in \Omega$ функция $t \in (0, +\infty) \rightarrow tA(x, t)$ является возрастающей и строго положительной.

¹Если t, s – два различных вектора в гильбертовом пространстве такие, что $(s \cdot t) = |t| |s|$, то $0 < |t - s| = |t|^2 + |s|^2 - 2(s \cdot t) = |t|^2 + |s|^2 - 2|s| |t| = (|s| - |t|)^2$.

2.2. Доказательства основных результатов. Доказательство теоремы 2.1 основано на следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 2.15. Пусть $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что $g(t) > 0$ при $t < 0$, g не убывает на $(0, +\infty)$ и

$$\int_1^{+\infty} \left(\int_1^t g(s) ds \right)^{-1/p} dt < +\infty. \quad (2.22)$$

Для любых $p > 1$, $a > 0$, $D > 1$ существуют функция φ и $R > 0$ такие, что φ является решением задачи

$$(r^{D-1} |\varphi'(r)|^{p-2} \varphi'(r))' = r^{D-1} g(\varphi(r)), \quad \varphi(0) = a, \quad \varphi'(0) = 0, \quad (2.23)$$

φ возрастает на $(0, R)$ и $\varphi(r) \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow R$.

Доказательство теоремы см. в [7] для случая $p = 2$ и в [6] для квазилинейного случая $p \neq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Пусть $u(x)$ – решение неравенства (2.3). Так как это неравенство инвариантно относительно сдвигов, достаточно доказать, что $u(0) \geq 0$.

Пусть $g(t) := f(-t)$. Функция g удовлетворяет условиям теоремы 2.15. Пусть $D = N > 1$, $a > 0$, и пусть φ – решение (2.23) такое, что $\varphi(r) \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow R$. Положим $v(x) := \varphi(|x|)$. Тогда функция $v(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2} \nabla v) = g(v) \quad \text{в } \Omega_R,$$

где $\Omega_R := \{x \mid |x| < R\}$. С другой стороны, функция $U := -u(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{div}(|\nabla U|^{p-2} \nabla U) \geq g_1(U) := g(U) \quad \text{в } \mathbb{R}^N.$$

Так как $U(x) \leq v(x)$ при $|x|$, близких к R , то мы можем применить лемму 2.13 о сравнении. Следовательно, $U(x) \leq v(x)$, $x \in \Omega_R$. В частности, $U(0) \leq v(0) = a$. Переходя к пределу при $a \rightarrow 0$, получаем $U(0) \leq 0$. Отсюда $u(0) \geq 0$.

Далее, если $f \geq 0$, то $u(x)$ – неотрицательное решение неравенства

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \geq 0$$

в $\mathbb{R}^N$. Отсюда в силу слабого неравенства Харнака (см. [8]) получаем, что либо $u(x) \equiv 0$, либо $u(x) > 0$ в $\mathbb{R}^N$.

Теорема 2.3 доказывается при помощи таких же рассуждений, какие мы использовали при доказательстве теоремы 2.1, поэтому повторим их вкратце.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Пусть $g(t) := f(-t)$. При условиях теоремы 2.3 существует радиальное решение $v(x)$ неравенства

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right) \geq g(v)$$

такое, что $v(0) = a > 0$ и $v(r) \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow R$ (см. [6]). Применяя лемму 2.13, получаем $u(0) \geq -a$. Переходя к пределу при $a \rightarrow 0$, приходим к утверждению теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4. Пусть $u(x)$ – решение (2.8). Функция $v := u - \alpha$ является решением уравнения

$$-\Delta_p(v) = f(u - \alpha + \alpha) = f(v + \alpha) =: g(v).$$

Применяя теорему 2.1 к последнему уравнению, получаем $v \geq 0$, т.е. $u \geq \alpha$.

Далее, функция $v := \beta - u$ – решение уравнения

$$-\Delta_p(v) = -f(u) = -f(-v + \beta) =: g(v).$$

Мы вновь можем применить теорему 2.1, из которой следует, что $v \geq 0$, т.е. $u \leq \beta$. Доказательство теоремы завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.5. Шаг 1. Рассмотрим сначала случай, когда f имеет хотя бы один нуль. Пусть α – первый нуль f , а $u(x)$ – решение (2.5). Положим

$$g(t) := \inf_{s \leq t} f(s), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

Функция g – непрерывная, невозрастающая, $g(t) > 0$ при $t < \alpha$ и $g(\alpha) = 0$.

Функция $u(x)$ удовлетворяет неравенству

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right) \geq f(u) \geq g(u) \quad \text{в } \mathbb{R}^N.$$

Делая замену переменной $v := u - \alpha$ и рассуждая, как и в доказательстве теоремы 2.4, получаем, что $u \geq \alpha$. Утверждение доказано.

Шаг 2. Далее предположим, что f не имеет нулей. Пусть $u(x)$ – решение (2.5). Пусть g – функция, определенная в (2.24). Зафиксируем число $c > 0$ и определим

$$g_c(t) := \min\{g(t), c - t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Функция g_c – непрерывная, невозрастающая, $g_c(t) > 0$ при $t < c$ и $g_c(c) = 0$. Так как $u(x)$ удовлетворяет неравенству

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right) \geq f(u) \geq g_c(u) \quad \text{в } \mathbb{R}^N,$$

то из результатов шага 1 следует, что $u \geq c$. Так как неравенство $u \geq c$ выполнено для всех c , получаем противоречие.

Шаг 3. Пусть $u(x)$ – решение (2.9). В силу результатов шага 1 имеем $u \geq \alpha$. Для доказательства оценки $u \leq \beta$ рассмотрим функцию $v := -u$ и повторим рассуждения шага 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.7. Будем рассуждать от противного. Пусть $u(x)$ – решение (2.3). Зафиксируем $\alpha \in \mathbb{R}$ и положим $v := u - \alpha$. Функция $v(x)$ является решением неравенства $-\Delta_p v \geq f(u) = f(v + \alpha)$. Так как функция

$f(\cdot + \alpha)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1, то $v \geq 0$, т.е. $u \geq \alpha$. Так как неравенство $u \geq \alpha$ верно для всех α , то $u = +\infty$. Это противоречие завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.8. Пусть

$$l_1 := \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t), \quad l_2 := \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t).$$

Проведем доказательство за пять шагов.

1. Рассмотрим сначала случай $f > 0$ и неравенство (2.15). В этом случае $l_1 > 0$ и утверждение теоремы 2.8 следует из теоремы 2.5.

2. Далее предположим, что $f < 0$, и пусть $u(x)$ – решение уравнения (2.14). Тогда $v = -u$ удовлетворяет уравнению $-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1+|\nabla v|^2}}\right) = g(v)$, где $g(t) := -f(-t)$ – невозрастающая положительная функция. Это противоречит шагу 1.

Поэтому предположим, что функция f имеет хотя бы один нуль. Пусть $u(x)$ – решение уравнения (2.14). Из условий на f следует, что множество ее нулей S есть полубесконечный интервал.

3. Предположим сначала, что $S = [\alpha_1, +\infty)$. В этом случае $l_1 > 0$ и из теоремы 2.5 следует, что $u \geq \alpha_1$. Отсюда $f(u(x)) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^N$, т.е. $u(x)$ – односторонне ограниченная функция, являющаяся решением уравнения

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^N. \quad (2.25)$$

Отсюда по теореме Бомбьери–Де Джорджи–Миранды (см. [9], [10]) следует, что $u(x) \equiv \alpha \geq 0$.

4. Далее предположим, что $S = (-\infty, \alpha_2]$. Делая замену переменных $v = -u$ и повторяя рассуждения шага 3, получаем $u \leq \alpha_2$. Отсюда $u(x)$ – односторонне ограниченная функция, являющаяся решением (2.25). Поэтому $u(x)$ – константа.

5. Проанализируем случай $S = [\alpha_1, \alpha_2]$. В этом случае $l_1 > 0$ и $l_2 < 0$. По теореме 2.5 имеем $\alpha_1 \leq u \leq \alpha_2$, т.е. $u(x)$ принимает значения в S . Поэтому $u(x)$ – ограниченная функция, являющаяся решением (2.25). Следовательно, $u(x)$ – константа.

§ 3. Некоторые обобщения основных результатов

Мы обобщим наши основные результаты на более широкий класс квазилинейных операторов в п. 3.1. В п. 3.2 мы обобщим теорему 2.1 на случай групп Карно. Заключительный п. 3.3 посвящен квазилинейному неравенству, связанному с уравнением пористой среды.

3.1. Один класс дифференциальных неравенств. В этом пункте мы рассмотрим неравенства типа

$$-\operatorname{div}(A(|\nabla u|)\nabla u) \geq f(u) \quad \text{в } \mathbb{R}^N. \quad (3.1)$$

Предположим, что

$$\begin{cases} A \in \mathcal{C}((0, +\infty)), & A(t) > 0 \text{ при } t > 0, \\ tA(|t|) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1((0, \infty)), & (tA(t))' > 0 \text{ при } t > 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Будем различать два следующих случая в зависимости от асимптотического поведения функции $tA(t)$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} tA(t) < +\infty$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} tA(t) = +\infty$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть A имеет вид (3.2), причем $\lim_{t \rightarrow +\infty} tA(t) < +\infty$. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, удовлетворяющая (2.1). Если $u(x)$ – решение (3.1), то $u \geq 0$ в $\mathbb{R}^N$.

Заметим, что теорема 2.3 – частный случай предыдущей теоремы.

В случае $\lim_{t \rightarrow +\infty} tA(t) = +\infty$ в соответствии с [11], [12] можно построить следующие функции G и H . Определим G формулой

$$G(t) := t^2 A(t) - \int_0^t s A(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Функция G непрерывна, строго возрастает, $G(0) = 0$ и $G(+\infty) = +\infty$ (см. [11], [12], [6]). Пусть H – обратная функция к G ; функция H возрастающая и $H(+\infty) = +\infty$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть A имеет вид (3.2), причем $\lim_{t \rightarrow +\infty} tA(t) = +\infty$. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, удовлетворяющая (2.1), и

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{H\left(\int_t^{-1} f(s) ds\right)} dt < +\infty. \quad (3.3)$$

Если $u(x)$ – решение (3.1), то $u \geq 0$ в $\mathbb{R}^N$.

Если $A(t) = t^{p-2}$, то

$$H(t) = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} t^{1/p}$$

и предыдущая теорема переходит в теорему 2.1.

Мы оставим доказательство предыдущих результатов заинтересованному читателю, так как оно основано на идее, изложенной выше, с учетом теоремы 1 и теоремы 2 об отсутствии решений из [6].

Условие (3.3) является точным в следующем смысле. Если интеграл в (3.3) расходится, то (3.1) допускает отрицательное решение. Действительно, из теоремы 3 в [6] следует, что уравнение (2.23) с $g(t) = f(-t)$ имеет положительное решение. Отсюда следует сформулированное выше утверждение.

ПРИМЕР 3.3. Пусть $A(t) := \ln(1+t)/t$ и $f(s) \geq c|s|^q$ при $s < 0$. Мы утверждаем, что если $q > 0$, то решения неравенства

$$-\operatorname{div}\left(\ln(1+|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \geq f(u) \text{ в } \mathbb{R}^N \quad (3.4)$$

неотрицательны. Применим теорему 3.2. В этом случае $G(t) = t - \ln(1+t)$. Для доказательства утверждения достаточно показать, что функция $H(T)$ ведет себя на бесконечности как T . Так как $H(T)$ – решение уравнения $t - \ln(1+t) = T$, то замена переменных $z = (1+T)^{-1}$ и $x = (1+t)^{-1}$ переводит это уравнение в $z = x/(1+x \ln x)$, и остается рассмотреть неявно заданный нуль функции $x(z)$. Легко заметить, что $x(z) = z + o(z)$, откуда следует сформулированное нами утверждение.

Рассуждая так же, как выше, можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что существуют $c > 0$ и $q > 1$ такие, что $f(s) \geq c(\ln(1+|s|))^q$ при $s < 0$. Тогда решения (3.4) неотрицательны.

Аналоги теорем 2.4–2.8 имеют следующий вид.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть A удовлетворяет условиям (3.2) и $\lim_{t \rightarrow +\infty} tA(t) = +\infty$. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что существуют $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$, такие, что

$$\begin{aligned} f_{(-\infty, \alpha)} & \text{положительная и невозрастающая,} \\ f_{(\beta, +\infty)} & \text{отрицательная и невозрастающая,} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{H\left(\int_t^{\alpha} f(s) ds\right)} dt < +\infty, \quad \int_{\beta}^{\infty} \frac{1}{H\left(\int_{\beta}^t -f(s) ds\right)} dt < +\infty. \quad (3.6)$$

Пусть $u(x)$ – решение уравнения

$$-\operatorname{div}(A(|\nabla u|)\nabla u) = f(u) \quad \text{в } \mathbb{R}^N. \quad (3.7)$$

Тогда функция $u(x)$ ограничена и, кроме того, $\alpha \leq u(x) \leq \beta$, $x \in \mathbb{R}^N$.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть A удовлетворяет условиям (3.2) и $\lim_{t \rightarrow +\infty} tA(t) < +\infty$. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что

$$\liminf_{t \rightarrow -\infty} f(t) > 0.$$

Если $u(x)$ – решение (3.1), то f имеет хотя бы один нуль. Обозначим через α первый нуль f (т.е. $\alpha := \min S$, где $S := f^{-1}(0)$). Тогда $u(x) \geq \alpha$. В частности, если $f > 0$, неравенство (3.1) не имеет решения. Более того, если

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} f(t) < 0$$

и функция $u(x)$ является решением (3.7), то $u(x)$ ограничена и $\alpha \leq u(x) \leq \beta$, $x \in \mathbb{R}^N$, где β – последний нуль f (т.е. $\beta := \max S$).

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть A удовлетворяет условиям (3.2) и $\lim_{t \rightarrow +\infty} tA(t) = +\infty$. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – невозрастающая непрерывная функция такая, что

$$f(t) > 0 \quad \text{при } t < 0, \quad f(t) < 0 \quad \text{при } t > 0, \quad (3.8)$$

и (3.6) выполнено с $\alpha = -1$ и $\beta = 1$.

Если $u(x)$ – решение (3.7), то $u(x) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^N$.

ТЕОРЕМА 3.8. Пусть A удовлетворяет условиям (3.2) и $\lim_{t \rightarrow +\infty} tA(t) = +\infty$. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – положительная невозрастающая непрерывная функция, удовлетворяющая (3.3). Тогда неравенство (3.1) не имеет решений.

ТЕОРЕМА 3.9. Пусть A удовлетворяет условиям (3.2) и $\lim_{t \rightarrow +\infty} tA(t) < +\infty$. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – невозрастающая непрерывная функция. Если $u(x)$ – решение (3.7), то $u(x)$ является также решением однородной задачи

$$-\operatorname{div}(A(|\nabla u|)\nabla u) = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^N \quad (3.9)$$

и для всех $x \in \mathbb{R}^N$ функция $u(x) \in S$, где $S := f^{-1}(0)$. В частности, если $f(t) \neq 0$ для любого t , то (3.7) не имеет решений.

Кроме того, если f положительно, то неравенство (3.1) не имеет решений.

Другие новые результаты по антикоэрцитивным задачам будут опубликованы в нашей работе [13].

3.2. Неравенства на группах Карно. Пусть $\mathbb{R}^N \equiv \mathbb{G}$ – группа Карно, ∇_L – горизонтальный градиент на G и $Q > 1$ – однородная размерность (см. подробности об этих структурах в § 4 и [14]). Пусть Γ_p – фундаментальное решение квазилинейного оператора $\Delta_{L,p}u = \operatorname{div}_L(|\nabla_L u|^{p-2}\nabla_L u)$ в начале координат. Положим

$$N_p := \begin{cases} \Gamma_p^{(p-1)/(p-Q)}, & p > 1, p \neq Q, \\ \exp(-\Gamma_p), & p = Q. \end{cases}$$

Известно, что N_p – однородная норма на $\mathbb{G}$. Из [15], [16] известно также, что N_p непрерывна по Гёльдеру. Далее будем предполагать, что N_p является гладкой. Это условие выполняется, например, для групп “типа Гейзенберга” (см. [16]).

В этих обозначениях имеем, что если $\zeta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция, то радиальная функция $v := \zeta \circ N_p: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{G,p}v := \operatorname{div}_L(|\nabla_L v|^{p-2}\nabla_L v) = (p-1)\psi|\zeta'|^{p-2} \left(\zeta''(r) + \frac{Q-1}{p-1} \frac{\zeta'(r)}{r} \right)_{r=N_p},$$

где $\psi := |\nabla_L N_p|$ – ограниченная функция (см. [17]). Поэтому можно получить аналог теоремы 2.1 в этой более общей постановке, повторяя рассуждения из § 2.

ТЕОРЕМА 3.10. Пусть $p > 1$, а $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, удовлетворяющая (2.1) и (2.2). Пусть $u(x)$ – решение неравенства

$$-\operatorname{div}_L(|\nabla_L u|^{p-2}\nabla_L u) \geq f(u) \quad \text{в } \mathbb{R}^N. \quad (3.10)$$

Тогда $u(x) \geq 0$ в $\mathbb{R}^N$. Более того, если $f(t) \geq 0$ для $t \geq 0$, то либо $u(x) \equiv 0$, либо $u(x) > 0$ в $\mathbb{R}^N$.

Из теоремы 3.10 непосредственно вытекают следующие теоремы типа теорем Лиувилля.

ТЕОРЕМА 3.11. Пусть $p > 1$. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что существуют $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$, такие, что выполняются условия (2.6) и (2.7). Если $u(x)$ – решение уравнения

$$-\operatorname{div}_L(|\nabla_L u|^{p-2} \nabla_L u) = f(u) \quad \text{в } \mathbb{R}^N, \quad (3.11)$$

то функция $u(x)$ ограничена и $\alpha \leq u(x) \leq \beta$, $x \in \mathbb{R}^N$. В частности, если $q > p - 1$ и функция $u(x)$ – решение уравнения

$$\Delta_{G,p} u = |u|^{q-1} u \quad \text{в } \mathbb{R}^N, \quad (3.12)$$

то $u(x) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^N$.

ТЕОРЕМА 3.12. Пусть $p > 1$. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – положительная невозрастающая непрерывная функция, удовлетворяющая (2.2). Тогда неравенство (3.10) не имеет решений.

СЛЕДСТВИЕ 3.13. Пусть $p \geq Q > 1$ и $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая (2.1) и (2.2). Если $u(x)$ – решение (2.3), то функция $u(x)$ постоянна в $\mathbb{R}^N$. Точнее, $u(x) \equiv \alpha \geq 0$ и $f(\alpha) = 0$.

Более того, если $f(t) > 0$ при $t \geq 0$, то (2.3) не имеет решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.10. Пусть $u(x)$ – решение (2.3). Так как неравенство инвариантно относительно сдвигов, то достаточно доказать, что $u(0) \geq 0$.

Пусть $C > 0$ – константа такая, что $\psi^p \leq C$. Положим $g(t) := f(-t)/C$. Функция g удовлетворяет условиям теоремы 2.15. Пусть $D = Q > 1$ – однородная размерность. Пусть $a > 0$ и φ – решение (2.23) такое, что $\varphi(r) \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow R$. Положим $v(x) := \varphi(N_p(x))$. Вычисления дают

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_L(|\nabla_L v|^{p-2} \nabla_L v) &= (p-1)\psi^p |v'|^{p-2} \left(v''(r) + \frac{Q-1}{p-1} \frac{v'(r)}{r} \right)_{r=N_p} \\ &= \psi^p N_p^{1-Q} (r^{Q-1} |v'(r)|^{p-2} v'(r))'_{r=N_p}. \end{aligned}$$

Поэтому функция $v(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\operatorname{div}_L(|\nabla_L v|^{p-2} \nabla_L v) = g_2(x, v) := \psi^p g(v) \leq Cg(v)$$

в $\Omega_R := \{x \mid N_p(x) < R\}$. С другой стороны, функция $U := -u$ удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{div}_L(|\nabla_L U|^{p-2} \nabla_L U) \geq f(-U) = Cg(U) =: g_1(U) \quad \text{в } \mathbb{R}^N.$$

Так как $g_1 \geq g_2$ и $U(x) \leq v(x)$ при $N_p(x)$, близких к R , то мы можем применить лемму 2.13 о сравнении. Следовательно, $U(x) \leq v(x)$, $x \in \Omega_R$. В частности, $U(0) \leq v(0) = a$. Переходя к пределу при $a \rightarrow 0$, получаем $U(0) \leq 0$. Отсюда $u(0) \geq 0$.

Далее, если $f \geq 0$, то $u(x)$ – неотрицательное решение неравенства

$$-\operatorname{div}_L(|\nabla_L u|^{p-2} \nabla_L u) \geq 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^N.$$

Отсюда в силу слабого неравенства Харнака (см. [15]) либо $u(x) \equiv 0$, либо $u(x) > 0$ в $\mathbb{R}^N$.

Доказательства предыдущих теорем Лиувилля очень похожи на приведенные в § 2, поэтому мы их опустим. Доказательство следствия 3.13 основано на том, что все неотрицательные функции $u(x)$ такие, что $-\Delta_{G,p}u \geq 0$ в $\mathbb{R}^N$ с $Q \leq p$, являются константами (см. [18]).

3.3. Неравенство типа пористой среды. В заключение настоящей работы приведем следующую небольшую модификацию теоремы 2.1.

ТЕОРЕМА 3.14. Пусть $\gamma \geq 1$. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, удовлетворяющая (2.1), для которой

$$\int_{-\infty}^{-1} |t|^{\gamma-1} \left(\int_t^{-1} f(s) |s|^{\gamma-1} ds \right)^{-1/2} dt < +\infty. \quad (3.13)$$

Пусть $u(x)$ – решение неравенства

$$-\Delta(|u|^{\gamma-1}u) \geq f(u) \quad \text{в } \mathbb{R}^N.$$

Тогда $u(x) \geq 0$ в $\mathbb{R}^N$. В частности, если $u(x)$ – решение и $f(t) \geq C|t|^q$ при $t < 0$ с $q > \gamma$, то либо $u(x) \equiv 0$, либо $u(x) > 0$ в $\mathbb{R}^N$.

§ 4. Дополнение

Приведем некоторые факты о группах Карно. Заинтересованный читатель сможет найти более полную информацию на эту тему в [14], [19].

Группа Карно – связная односвязная нильпотентная группа Ли $\mathbb{G}$ размерности N с градуированной алгеброй Ли $\mathcal{G} = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ такая, что

$$[V_1, V_i] = V_{i+1}, \quad i = 1, \dots, r-1, \quad [V_1, V_r] = 0.$$

Такое целое число r называется *шагом* группы. Положим $l = n_1 = \dim V_1$, $n_2 = \dim V_2$, ..., $n_r = \dim V_r$. Группу Карно $\mathbb{G}$ размерности N можно отождествить с точностью до изоморфизма со структурой однородной группы Карно $(\mathbb{R}^N, \circ, \delta_R)$, определенной следующим образом: мы отождествляем $\mathbb{G}$ с $\mathbb{R}^N$, на котором действует групповая операция Ли $\circ$. Рассмотрим $\mathbb{R}^N$, разбитое на r подпространств $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_r}$ с $n_1 + n_2 + \dots + n_r = N$ и $\xi = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(r)})$ с $\xi^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i}$. Будем предполагать, что для любого $R > 0$ растяжение $\delta_R(\xi) = (R\xi^{(1)}, R^2\xi^{(2)}, \dots, R^r\xi^{(r)})$ является автоморфизмом группы Ли. Алгебру Ли левоинвариантных векторных полей на $(\mathbb{R}^N, \circ)$ обозначим через $\mathcal{G}$. Для $i = 1, \dots, n_1 = l$ обозначим через X_i единственное векторное поле в $\mathcal{G}$, совпадающее с $\partial/\partial\xi_i^{(1)}$ в начале координат. Потребуем, чтобы алгебра Ли, порожденная $X_1, \dots, X_l$, совпадала со всем $\mathcal{G}$.

Обозначим через ∇_L векторное поле $\nabla_L := (X_1, \dots, X_l)^T$ и назовем его *горизонтальным векторным полем*. Более того, векторные поля $X_1, \dots, X_l$ однородны степени один относительно δ_R и в этом случае

$$Q = \sum_{i=1}^r i n_i = \sum_{i=1}^r i \dim V_i$$

называется *однородной размерностью* $\mathbb{G}$. *Канонический сублапласиан* на $\mathbb{G}$ – это дифференциальный оператор второго порядка, определенный как $\Delta_G = \sum_{i=1}^l X_i^2$, а для $p > 1$ p -сублапласиан есть $\sum_{i=1}^l X_i(|\nabla_L u|^{p-2} X_i u)$. Так как $X_1, \dots, X_l$ порождают все $\mathcal{G}$, сублапласиан Δ_G удовлетворяет условию гипотезы Хёрмандера.

Неотрицательная непрерывная функция $N(\xi): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *однородной нормой* на $\mathbb{G}$, если $N(\xi^{-1}) = N(\xi)$, $N(\xi) = 0$, если и только если $\xi = 0$, и $N(\xi)$ однородна степени один относительно δ_R (т.е. $N(\delta_R(\xi)) = RN(\xi)$). Однородная норма $N(\xi)$ определяет на $\mathbb{G}$ *псевдометрику* как $d(\xi, \eta) := N(\xi^{-1}\eta)$, которая, вообще говоря, не является метрикой. Если $N(\xi)$ и $\tilde{N}(\xi)$ – две однородных нормы, то они эквивалентны, т.е. существует константа $C > 0$ такая, что $C^{-1}N(\xi) \leq \tilde{N}(\xi) \leq CN(\xi)$. Пусть $N(\xi)$ – однородная норма, тогда существует константа $C > 0$ такая, что $C^{-1}|\xi| \leq N(\xi) \leq C|\xi|^{1/r}$ при $N(\xi) \leq 1$. Примером однородной нормы является

$$N(\xi) := \left(\sum_{i=1}^r |\xi_i|^{2r!/i} \right)^{1/(2r!)}.$$

Отметим, что если $N(\xi)$ – однородная норма, дифференцируемая почти всюду, то функция $|\nabla_L N(\xi)|$ однородна степени нуль относительно δ_R , поэтому $|\nabla_L N(\xi)|$ ограничена.

Частными случаями групп Карно являются евклидовы пространства $\mathbb{R}^Q$. Более того, если $Q \leq 3$, то любая группа Карно представляет собой обычное евклидово пространство $\mathbb{R}^Q$.

Простейший нетривиальный пример группы Карно – группа Гейзенберга $\mathbb{H}^1 = \mathbb{R}^3$. Для целого $n \geq 1$ группа Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ определяется так: пусть $\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$, где $\xi^{(1)} := (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ и $\xi^{(2)} := t$. Введем на $\mathbb{R}^{2n+1}$ групповую операцию

$$\hat{\xi} \circ \tilde{\xi} := \left(\hat{x} + \tilde{x}, \hat{y} + \tilde{y}, \hat{t} + \tilde{t} + 2 \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i \hat{y}_i - \hat{x}_i \tilde{y}_i) \right).$$

Рассмотрим векторные поля

$$X_i := \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_i := \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i \frac{\partial}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и ассоциированный градиент Гейзенберга $\nabla_H := (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)^T$. Тогда оператор Кона–Лапласа Δ_H определяется как $\Delta_H := \sum_{i=1}^n X_i^2 + Y_i^2$. Соответствующее семейство растяжений имеет вид $\delta_R(\xi) := (Rx, Ry, R^2t)$ с однородной размерностью $Q = 2n + 2$. В $\mathbb{H}^n$ определена каноническая однородная норма как

$$|\xi_H| := \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 \right)^2 + t^2 \right)^{1/4}.$$

Список литературы

- [1] L. D'Ambrosio, E. Mitidieri, S. I. Pohozaev, "Representation formulae and inequalities for solutions of a class of second order partial differential equations", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **358**:2, (2006), 893–910.
- [2] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, "Свойство положительности решений некоторых нелинейных эллиптических неравенств в $\mathbb{R}^n$ ", *Докл. РАН*, **393**:2, (2003), 159–164; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pohozaev, "Positivity Property of Solutions of Some Nonlinear Elliptic Inequalities on $\mathbb{R}^n$ ", *Dokl. Math.*, **68**:3, (2003), 339–344.
- [3] L. D'Ambrosio, E. Mitidieri, "Positivity property of solutions of some quasilinear elliptic inequalities", *Functional analysis and evolution equations*, Birkhäuser, Basel, 2008, 147–155.
- [4] P. Pucci, J. Serrin, *The maximum principle*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **73**, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2007.
- [5] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, "Некоторые обобщения теоремы Бернштейна", *Дифференциальные уравнения*, **38**:3, (2002), 373–378; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev, "Some generalizations of the Bernstein theorem", *Differ. Equ.*, **38**:3, (2002), 392–397.
- [6] Y. Naito, H. Usami, "Entire solutions of the inequality $\operatorname{div}(A(|Du|)Du) \geq f(u)$ ", *Math. Z.*, **225**:1, (1997), 167–175.
- [7] R. Osserman, "On the inequality $\Delta u \geq f(u)$ ", *Pacific J. Math.*, **7**:4, (1957), 1641–1647.
- [8] J. Serrin, "Local behavior of solutions of quasi-linear equations", *Acta Math.*, **111**:1, (1964), 247–302.
- [9] E. Bombieri, E. De Giorgi, M. Miranda, "Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche", *Arch. Rational Mech. Anal.*, **32**:4, (1969), 255–267.
- [10] E. De Giorgi, "Maggiorazioni a priori relative ad ipersuperfici minimali", *Analisi funzionale* (Marzo 1968), Academic Press, 1969, 283–285.
- [11] W.-M. Ni, J. Serrin, "Nonexistence theorems for quasilinear partial differential equations", *Proceedings of the conference commemorating the 1st centennial of the Circolo Matematico di Palermo* (Palermo, 1984), Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl., **8**, Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 1985, 171–185.
- [12] W.-M. Ni, J. Serrin, "Existence and non-existence theorems for ground states of quasilinear partial differential equations. The anomalous case", *Acc. Naz. dei Lincei, Atti dei Convegni*, **77**, (1986), 231–257.
- [13] L. D'Ambrosio, E. Mitidieri, "A priori estimates, positivity results, and nonexistence theorems for quasilinear degenerate elliptic inequalities", *Adv. Math.*, **224**:3, (2010), 967–1020.
- [14] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians*, Springer Monogr. Math., **26**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2007.
- [15] L. Capogna, D. Danielli, N. Garofalo, "An embedding theorem and the Harnack inequality for nonlinear subelliptic equations", *Comm. Partial Differential Equations*, **18**:9–10, (1993), 1765–1794.
- [16] L. Capogna, D. Danielli, N. Garofalo, "Capacitary estimates and the local behavior of solutions of nonlinear subelliptic equations", *Amer. J. Math.*, **118**:6, (1996), 1153–1196.
- [17] L. D'Ambrosio, "Hardy-type inequalities related to degenerate elliptic differential operators", *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, **4**:3, (2005), 451–486.

- [18] L. D'Ambrosio, "Liouville theorems for anisotropic quasilinear inequalities", *Nonlinear Anal.*, **70**:8, (2009), 2855–2869.
- [19] G. B. Folland, E. M. Stein, *Hardy spaces on homogeneous groups*, Math. Notes, **28**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Tokyo, Univ. of Tokyo Press, 1982.

Л. Д'Амброзио (L. D'Ambrosio)

Department of Mathematics, University of Bari, Italy

E-mail: dambros@dm.uniba.it

Поступила в редакцию

07.05.2009

Э. Митидиери (E. Mitidieri)

Department of Mathematics and Informatics,

University of Trieste, Italy

E-mail: mitidier@units.it

Перевод с английского Е. И. Галахова.