Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, Приближение гладких функций алгебро-тригонометрическими полиномами, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 11, 137–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7586>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:00:22

УДК 517.518

И. И. Шарапудинов

Приближение гладких функций алгебро-тригонометрическими полиномами

В статье рассмотрена задача о приближении классов гладких функций алгебро-тригонометрическими полиномами вида $p_n(t) + \tau_m(t)$, где $p_n(t)$ – алгебраический полином степени n , $\tau_m(t) = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \cos k\pi t + b_k \sin k\pi t$ – тригонометрический полином порядка m . Установлены точный порядок приближения такими полиномами в классах $W_\infty(M)$ и верхняя оценка приближения ими в классах $W_p^r(M)$ при $\frac{4}{3} < p < 4$. Доказательство этой оценки опирается на использование смешанных рядов по полиномам Лежандра, введенных и исследованных автором ранее.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: классы гладких функций, алгебро-тригонометрические полиномы, одновременное приближение функций и производных, смешанные ряды по полиномам Лежандра.

§ 1. Введение

Пусть $f(t)$ – достаточно гладкая функция, заданная на $[-1, 1]$. В настоящей статье рассмотрена задача о приближении $f(t)$ комбинациями вида $p_n(t) + \tau_m(t)$, где $p_n(t)$ – алгебраический полином степени n ,

$$\tau_m(t) = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \cos k\pi t + b_k \sin k\pi t \quad (1.1)$$

– тригонометрический полином порядка m . Подобные задачи часто встречаются в различных областях приложений, в которых для заданного временного ряда наблюдений $f(t)$ требуется найти так называемый тренд $p_n(t)$ и периодическую составляющую $\tau_m(t)$.

Обозначим через X некоторое нормированное с нормой $\|f\|_X$ пространство функций $f = f(t)$, заданных на $[-1, 1]$. Если X содержит все алгебраические и тригонометрические полиномы, то мы можем определить величину

$$E_{n,m}(f)_X = \inf_{p_n, \tau_m} \|f - p_n - \tau_m\|_X, \quad (1.2)$$

представляющую собой наилучшее приближение функции $f \in X$ алгебро-тригонометрическими полиномами $p_n(x) + \tau_m(x)$ порядка (n, m) . Если $\mathscr{Y}$ – некоторый подкласс из X , то положим

$$\mathcal{E}_{n,m}(\mathscr{Y})_X = \sup_{f \in \mathscr{Y}} E_{n,m}(f)_X. \quad (1.3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00191а).

Ставится задача об исследовании поведения величины $\mathcal{E}_{n,m}(\mathcal{Y})_X$ для различных нормированных пространств X и классов $\mathcal{Y} \subset X$. В настоящей работе основное внимание будет уделено случаю, когда $X = C[-1, 1]$ – пространство функций $f = f(x)$, заданных и непрерывных на $[-1, 1]$, для которых норма определяется обычным образом:

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

Через $L^p(-1, 1)$ мы обозначим лебегово пространство функций $f = f(x)$ с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

В пространстве $C[-1, 1]$ мы будем выделять классы Соболева $W_p^r(M)$, состоящие из $r - 1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, а $f^{(r)}(x) \in L^p(-1, 1)$ и $\|f^{(r)}\|_p \leq M$. Положим $W_p^r = \bigcup_{M>0} W_p^r(M)$. Через $\widetilde{W}_p^r(M)$ мы обозначим подкласс функций $f \in W_p^r(M)$, которые допускают 2-периодическое продолжение на всю числовую ось с сохранением гладкости, другими словами, если $f \in \widetilde{W}_p^r(M)$, то $f^{(\nu)}(-1) = f^{(\nu)}(1)$, $\nu = 0, 1, \dots, r - 1$. При $p = \infty$ будем считать, что $W_\infty^r(M)$ состоит из r раз непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, заданных на $[-1, 1]$, и, соответственно, $\widetilde{W}_\infty^r(M) \subset W_\infty^r(M)$.

Основная идея, которая позволяет успешно решить поставленную задачу для классов $W_p^r(M)$, заключается в следующем. Для заданной функции $f \in W_p^r(M)$ подбирается алгебраический полином $p_n(x) = p_n(f, x)$, удовлетворяющий условиям

$$p_n^{(\nu)}(\pm 1) = f^{(\nu)}(\pm 1), \quad \nu = 0, 1, \dots, r - 1, \quad (1.4)$$

который доставляет для функции $f(x)$ и ее производных $f^{(\nu)}(x)$ одновременное равномерное на $[-1, 1]$ приближение порядка $n^{\nu-r}$. Затем разность $g_n(x) = f(x) - p_n(x)$ продолжается 2-периодически на всю числовую ось с сохранением гладкости. После этого функцию $g_n(x)$ приближаем тригонометрическими полиномами. Этим методом в случае $p = \infty$ получены (теорема 4.1) неуклучшаемые порядковые оценки для величины $\mathcal{E}_{n,m}(W_p^r(M))_{C[-1,1]}$ при $n + m \rightarrow \infty$, а именно

$$\mathcal{E}_{n,m}(W_\infty^r(M))_{C[-1,1]} \asymp (n + m)^{-r}.$$

В случае $\frac{4}{3} < p < 4$ показано (теорема 6.4), что

$$\mathcal{E}_{n,m}(W_p^r(M))_{C[-1,1]} = O((n + m)^{-r+1/p}).$$

При решении этой задачи основную роль играет теорема 6.3, в которой установлены новые аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра и Якоби, введенных и исследованных в работах автора [1]–[6].

§ 2. Некоторые сведения о полиномах Якоби

Для удобства ссылок мы соберем здесь необходимые для дальнейшего свойства полиномов Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$, которые могут быть определены (см. [7]) с помощью формулы Родрига

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{\varkappa(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{ \varkappa(x) \sigma^n(x) \}, \quad (2.1)$$

где α, β – произвольные действительные числа, $\varkappa(x) = \varkappa(x; \alpha, \beta) = (1-x)^\alpha \times (1+x)^\beta$, $\sigma(x) = 1-x^2$. Если $\alpha, \beta > -1$, то полиномы Якоби образуют ортонормированную систему с весом $\varkappa(x)$, т.е.

$$\int_{-1}^1 P_n^{\alpha, \beta}(x) P_m^{\alpha, \beta}(x) \varkappa(x) dx = h_n^{\alpha, \beta} \delta_{nm}, \quad (2.2)$$

где

$$h_n^{\alpha, \beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}, \quad (2.3)$$

и имеет место формула Кристоффеля–Дарбу

$$\begin{aligned} K_n^{\alpha, \beta}(x, y) &= \sum_{k=0}^n \frac{P_k^{\alpha, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta}(y)}{h_k^{\alpha, \beta}} \\ &= \frac{2^{-\alpha-\beta}}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \frac{P_{n+1}^{\alpha, \beta}(x) P_n^{\alpha, \beta}(y) - P_n^{\alpha, \beta}(x) P_{n+1}^{\alpha, \beta}(y)}{x-y}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ниже нам понадобятся еще сведения о полиномах Якоби (см. [7]):
производные

$$\frac{d}{dx} P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1) P_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(x), \quad (2.5)$$

$$\frac{d^r}{dx^r} P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_r}{2^r} P_{n-r}^{\alpha+r, \beta+r}(x), \quad (2.6)$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_\nu = a(a+1)\cdots(a+\nu-1)$, $a^{[0]} = 1$;
равенства

$$P_n^{\alpha, \beta}(t) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{k! (\alpha+1)_k} \left(\frac{1-t}{2}\right)^k, \quad (2.7)$$

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m n^{[m]}} \frac{d^m}{dx^m} \{(1-x)^{m+\alpha} (1+x)^{m+\beta} P_{n-m}^{m+\alpha, m+\beta}(x)\}, \quad (2.8)$$

$$P_n(x) = P_n^{0,0}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m n^{[m]}} \frac{d^m}{dx^m} \{(1-x^2)^m P_{n-m}^{m,m}(x)\},$$

где $k^{[0]} = 1$, $k^{[r]} = k(k-1)\cdots(k-r+1)$,

$$(1+x) P_n^{\alpha, \beta+1}(x) = \frac{2}{2n+\alpha+\beta+2} [(n+\beta+1) P_n^{\alpha, \beta}(x) + (n+1) P_{n+1}^{\alpha, \beta}(x)]; \quad (2.9)$$

симметрия

$$P_n^{\alpha, \beta}(-x) = (-1)^n P_n^{\beta, \alpha}(x); \quad (2.10)$$

весовая оценка ($1 \leq x \leq 1$)

$$\sqrt{n} |P_n^{\alpha, \beta}(x)| \leq c(\alpha, \beta) \left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\sqrt{1+x} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-1/2}, \quad (2.11)$$

где (и всюду далее) $c(\alpha)$, $c(\alpha, \beta)$, $c(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$ обозначают положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах;

оценка интеграла, содержащего полином Якоби,

$$\int_0^1 (1-x)^\gamma |P_n^{\alpha,\beta}(x)| dx \asymp \begin{cases} n^{\alpha-2\gamma-2}, & 2\gamma < \alpha - \frac{3}{2}, \\ n^{-1/2} \ln n, & 2\gamma = \alpha - \frac{3}{2}, \\ n^{-1/2}, & 2\gamma > \alpha - \frac{3}{2}; \end{cases} \quad (2.12)$$

рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} P_{-1}^{\alpha,\beta}(x) &= 0, \quad P_0^{\alpha,\beta}(x) = 1, \quad P_1^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta), \\ 2n(n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)P_n^{\alpha,\beta}(x) &= (2n + \alpha + \beta - 1)\{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)x + \alpha^2 - \beta^2\}P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) \\ &\quad - 2(n + \alpha - 1)(n + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)P_{n-2}^{\alpha,\beta}(x), \quad n = 2, 3, 4, \dots; \end{aligned} \quad (2.13)$$

асимптотическая формула

$$P_n^{\alpha,\beta}(\cos \theta) = n^{-1/2} \varkappa(\theta) \left\{ \cos(\lambda\theta + \gamma) + \frac{r_n(\theta)}{n \sin \theta} \right\}, \quad (2.14)$$

где α, β – произвольные действительные числа,

$$\begin{aligned} \varkappa(\theta) &= \varkappa^{\alpha,\beta}(\theta) = \pi^{-1/2} = \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{-\beta-1/2}, \\ \lambda &= \lambda_n^{\alpha,\beta} = n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \quad \gamma = \gamma_\alpha = -\left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

а для остаточного члена $r_n(\theta) = r_n^{\alpha,\beta}(\theta)$ имеет место оценка

$$|r_n(\theta)| \leq c(\alpha, \beta, \delta), \quad 0 < \frac{\delta}{n} \leq \theta \leq \pi - \frac{\delta}{n}. \quad (2.15)$$

§ 3. Некоторые вспомогательные утверждения

Пусть $r \geq 1$, $f \in W_1^r(M)$. Тогда мы можем определить коэффициенты Фурье–Лежандра функции $f^{(r)}(x)$ следующим образом:

$$f_{r,k} = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f^{(r)}(t) P_k(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.1)$$

где $P_k(x)$ – полином Лежандра, нормированный условием $P_k(1) = 1$. Смешанный ряд по полиномам Лежандра имеет (см. [1]–[4]) следующий вид:

$$f(x) \sim D_{2r-1}(x) + \mathcal{F}_r(x), \quad (3.2)$$

где

$$D_{2r-1}(x) = \sum_{l=0}^{r-1} \frac{f^{(\nu)}(-1)}{\nu!} (x+1)^\nu + \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} f_{r,k} P_k(t) dt \quad (3.3)$$

– алгебраический полином степени $2r - 1$, а функция $\mathcal{F}_r(x)$ определяется равенством

$$\mathcal{F}_r(x) = \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{f_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x). \quad (3.4)$$

Из результатов, полученных в [1]–[4], в частности, вытекает, что если $f \in W_2^r(M)$, то ряд (3.4) сходится равномерно относительно $x \in [-1, 1]$ и имеет место равенство

$$f(x) = D_{2r-1}(x) + \mathcal{F}_r(x). \quad (3.5)$$

Сопоставляя равенства (3.4) и (3.5), нетрудно заметить, что $D_{2r-1}(x)$ представляет собой интерполяционный полином Эрмита, интерполирующий функцию $f(x)$ и ее производные $f^{(\nu)}(x)$ при $0 \leq \nu \leq r - 1$ в узлах ± 1 , т.е.

$$D_{2r-1}(x) = \frac{(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1}{\nu!} \sum_{s=0}^{r-1-\nu} \frac{(r)_s}{2^s s!} \left[\frac{f^{(\nu)}(-1)}{(1+x)^{r-\nu-s}} + \frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(1)}{(1-x)^{r-\nu-s}} \right]. \quad (3.6)$$

Смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам возникли недавно в связи с задачей одновременного приближения дифференцируемой функции и ее нескольких производных. Рассмотрим частичные суммы смешанного ряда (3.2) следующего вида:

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x) = D_{2r-1}(x) + \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=r}^{n+r} \frac{f_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x). \quad (3.7)$$

В работах [1]–[6] было показано, что они успешно могут быть использованы в задаче одновременного приближения функции f ее производными $f^{(\nu)}(x)$, $0 \leq \nu \leq r - 1$. В частности, если $f \in W_\infty^r$, то из результатов, полученных в [5], непосредственно вытекает оценка

$$\frac{|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4}} \leq \frac{c(r)}{n^{r-\nu}} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) [(1-x^2)^{1/4} \ln(n\sqrt{1-x^2}+1)+1], \quad (3.8)$$

где $n \geq 2r$, $0 \leq \nu \leq r - 1$,

$$\omega(g, \delta) = \sup_{x, y: |x-y| \leq \delta} |g(x) - g(y)|$$

– модуль непрерывности функции $g \in C[-1, 1]$.

Еще более удовлетворительный результат получается, если вместо операторов $\mathcal{Y}_{k+2r} = \mathcal{Y}_{k+2r}(f, x)$, $n \leq k \leq n + m$, мы возьмем их средние типа Валле Пуассена вида

$$\mathcal{V}_N(f, x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} \mathcal{Y}_{k+2r}(f, x), \quad (3.9)$$

где $N = n + m + 2r$. А именно, в работе автора [6] показано, что если $f \in W_\infty^r$, то при $0 < a \leq \frac{m}{n} \leq b$ имеют место оценки

$$\frac{|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{V}_N^{(\nu)}(x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2}} \leq \frac{c(r, a, b)}{N^{r-\nu}} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{N}\right), \quad x \in (-1, 1), \quad 0 \leq \nu \leq r. \quad (3.10)$$

Оценки (3.8) и (3.10) в сочетании с обратными теоремами теории приближений дифференцируемых функций алгебраическими полиномами дают ($0 \leq \nu \leq r-1$)

$$\sup_{f \in W_\infty^r} \sup_{-1 < x < 1} \frac{|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Z}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4}} \asymp \frac{\ln n}{n^{r-\nu}}, \quad (3.11)$$

$$\sup_{f \in W_\infty^r} \sup_{-1 < x < 1} \frac{|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{V}_N^{(\nu)}(f, x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2}} \asymp \frac{1}{N^{r-\nu}}. \quad (3.12)$$

В дальнейшем при рассмотрении задачи о приближении классов $W_p^r(M)$ алгебро-тригонометрическими полиномами нам понадобятся оценки, аналогичные (3.11) и (3.12), в которых вместо $W_\infty^r(M)$ будут фигурировать классы $W_p^r(M)$. При получении таких оценок нам потребуются ряд свойств некоторых представляющих ядер операторов $\mathcal{Z}_{n+2r}(f)$ и $\mathcal{V}_{n+2r}(f)$, рассматриваемых ниже в этом параграфе.

Исходя из равенств (3.5) и (3.7), мы можем записать

$$R_{r,n}(f, x) = f(x) - \mathcal{Z}_{n+2r}(f, x) = \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{f_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x), \quad (3.13)$$

а отсюда и из (2.6) в свою очередь имеем

$$\begin{aligned} R_{r,n}^{(\nu)}(f, x) &= f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Z}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x) \\ &= \frac{(-1)^{r-\nu}(1-x^2)^{r-\nu}}{2^{r-\nu}} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{f_{r,k}}{k^{[r-\nu]}} P_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(x) \\ &= f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Z}_{n+\nu+2(r-\nu)}(f^{(\nu)}, x) = R_{r-\nu, n+\nu}(f^{(\nu)}, x). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Подставим в равенство (3.13) вместо $f_{r,k}$ его представление в виде интеграла (3.1) и перепишем (3.13) следующим образом:

$$R_{r,n}(f, x) = \frac{(-1)^r(1-x^2)^{r/2-1/4}}{2^{r+1}} \int_{-1}^1 f^{(r)}(t) Q_{r,n}(x, t) dt, \quad (3.15)$$

где

$$Q_{r,n}(x, t) = (1-x^2)^{r/2+1/4} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x) P_k(t). \quad (3.16)$$

Сразу заметим, что при переходе от (3.13) к (3.15) мы формально переставили знаки интегрирования и суммирования. Законность этого действия мы покажем ниже. Это зависит в том числе от того, какие условия мы будем накладывать на функцию $f^{(r)}(t)$.

Положим

$$Q(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k} P_{k-1}^{1,1}(x) P_k(t) \quad (3.17)$$

и исследуем поведение частичных сумм этого ряда вида

$$Q_m(x, t) = \sum_{k=1}^m \frac{2k+1}{k} P_{k-1}^{1,1}(x) P_k(t) \quad (3.18)$$

при $x \in (-1, 1)$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $-1 < x < 1$, $\frac{x-1}{2} \leq t \leq \frac{x+1}{2}$, $m \geq 1$. Тогда имеет место оценка

$$|Q_m(x, t)| \leq q(x), \quad (3.19)$$

где $0 \leq q(x) < \infty$, причем для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $c(\varepsilon) > 0$, что $q(x) \leq c(\varepsilon)$ при $-1 + \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = \cos \varphi$, $t = \cos \theta$. Тогда, пользуясь асимптотической формулой (2.14), мы можем записать

$$\begin{aligned} P_{k-1}^{1,1}(x)P_k(t) &= \frac{\varkappa^{1,1}(\varphi)\varkappa^{0,0}(\theta)}{\sqrt{(k-1)k}} \left\{ \cos(\lambda_{k-1}^{1,1}\varphi + \gamma_1) + \frac{r_{k-1}^{1,1}(\varphi)}{(k-1)\sin\varphi} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \cos(\lambda_k^{0,0}\theta + \gamma_0) + \frac{r_k^{0,0}(\theta)}{k\sin\theta} \right\} \\ &= \frac{\varkappa^{1,1}(\varphi)\varkappa^{0,0}(\theta)}{\sqrt{(k-1)k}} \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \varphi - \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] + q_k(\varphi, \theta), \end{aligned} \quad (3.20)$$

где при $0 < \varepsilon_1 \leq \theta$, $\varphi \leq \pi - \varepsilon_1$ справедлива оценка

$$|q_k(\varphi, \theta)| \leq \frac{c(\varepsilon_1)}{k^2}. \quad (3.21)$$

Из (3.18), (3.20) и (3.21) получаем

$$\begin{aligned} Q_m(x, t) &= t + \varkappa^{1,1}(\varphi)\varkappa^{0,0}(\theta) \sum_{k=2}^m \frac{2k+1}{k\sqrt{k(k-1)}} \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \varphi - \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \\ &\quad \times \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] + \bar{q}_m(\varphi, \theta), \end{aligned} \quad (3.22)$$

причем

$$|\bar{q}_m(\varphi, \theta)| = \left| \sum_{k=1}^m \frac{2k+1}{k} q_k(\varphi, \theta) \right| \leq c(\varepsilon_1). \quad (3.23)$$

Далее, так как

$$\begin{aligned} &\cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \varphi - \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) (\varphi + \theta) - \pi \right] + \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) (\varphi - \theta) - \frac{\pi}{2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -\cos \left(k + \frac{1}{2} \right) (\varphi + \theta) + \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) (\varphi - \theta) \right\}, \end{aligned}$$

то из (3.22) получаем

$$\begin{aligned} Q_m(x, t) &= t + \frac{4}{\pi(\sin\varphi)^{3/2}(\sin\theta)^{1/2}} \\ &\quad \times \sum_{k=2}^m \frac{(2k+1)^2}{k\sqrt{k(k-1)}} \left[\frac{\sin(2k+1)\frac{\varphi-\theta}{2}}{2k+1} - \frac{\cos(2k+1)\frac{\varphi+\theta}{2}}{2k+1} \right] + \bar{q}_m(\varphi, \theta). \end{aligned} \quad (3.24)$$

С другой стороны,

$$\frac{(2k+1)^2}{k\sqrt{k(k-1)}} = 4 + O(k^{-1}),$$

поэтому из (3.23) и (3.24) выводим

$$\begin{aligned} Q_m(x, t) &= \overline{Q}_m(\varphi, \theta) \\ &+ \frac{16}{\pi(1-x^2)^{3/4}(1-t^2)^{1/4}} \left[\sum_{k=0}^m \frac{\sin(2k+1)\frac{\varphi-\theta}{2}}{2k+1} - \sum_{k=0}^m \frac{\cos(2k+1)\frac{\varphi+\theta}{2}}{2k+1} \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $|\overline{Q}_m(\varphi, \theta)| \leq c(\varepsilon_1)$ при $0 < \varepsilon_1 \leq \theta, \varphi \leq \pi - \varepsilon_1$.

Далее, если $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \frac{\sin(2k+1)u}{2k+1} &= \int_0^u \sum_{k=0}^m \cos(2k+1)\tau \, d\tau = \int_0^u \frac{\sin(2m+1)\tau}{2\sin\tau} \, d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^u \frac{\sin(2m+1)\tau}{\tau} \, d\tau + \frac{1}{2} \int_0^u \sin(2m+1)\tau \left(\frac{1}{\sin\tau} - \frac{1}{\tau} \right) \, d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{(2m+1)u} \frac{\sin\tau}{\tau} \, d\tau + O\left(\frac{1}{m}\right) = O(1). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Кроме того,

$$\left| \sum_{k=0}^m \frac{\cos(2k+1)v}{2k+1} \right| = \left| \int_v^{\pi/2} \sum_{k=0}^m \sin(2k+1)\tau \, d\tau \right| = \left| \int_v^{\pi/2} \frac{\sin^2(m+1)\tau}{\sin\tau} \, d\tau \right|. \quad (3.27)$$

Пусть $x \in (-1, 1)$ фиксировано,

$$\frac{x-1}{2} \leq t \leq \frac{x+1}{2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{2} \left[\arccos x + \min \left\{ \arccos \frac{x+1}{2}, \pi - \arccos \frac{x-1}{2} \right\} \right].$$

Тогда

$$\varepsilon_1 \leq \arccos x < \pi - \varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_1 \leq \arccos \frac{x+1}{2} \leq \theta = \arccos t \leq \arccos \frac{x-1}{2} \leq \pi - \varepsilon_1.$$

Поэтому мы можем воспользоваться асимптотической формулой (2.14), и, как следствие, для $u = \frac{\varphi-\theta}{2}$, $v = \frac{\varphi+\theta}{2}$ справедливо равенство (3.25). Сопоставляя между собой равенства (3.25)–(3.27), мы замечаем, что если $x \in (-1, 1)$, $\frac{x-1}{2} \leq t \leq \frac{x+1}{2}$, то $|Q_m(x, t)| \leq q(x)$, причем если $-1 + \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$, то найдется такое число $c(\varepsilon) > 0$, что $|q(x)| < c(\varepsilon)$. Лемма 3.1 доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть $-1 < x < 1$, $t \in [-1, \frac{x-1}{2}] \cup [\frac{x+1}{2}, 1]$, $m \geq 1$. Тогда имеет место оценка $|Q_m(x, t)| \leq q(x)$, где $0 \leq q(x) < \infty$, причем для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $c(\varepsilon) > 0$, что $q(x) \leq c(\varepsilon)$ при $-1 + \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\mathcal{K}_n(x, t) = \sum_{k=1}^n (2k+1) P_{k-1}^{1,1}(x) P_k(t) \quad (3.28)$$

и произведем преобразование Абеля в правой части равенства (3.18). Это дает

$$Q_m(x, t) = \sum_{n=1}^{m-1} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] \mathcal{K}_n(x, t) + \frac{1}{m} \mathcal{K}_m(x, t). \quad (3.29)$$

С другой стороны, в [5; лемма 4.3] доказано, что

$$\begin{aligned} (x-t)\mathcal{K}_m(x, t) &= -P_0(t) - \frac{(m+1)^2(1-x)}{m} P_{m-1}^{1,0}(x) P_m(t) \\ &\quad + (m+1)(1-t) P_{m-1}^{1,1}(x) P_m^{1,0}(t) + \frac{m+1}{m} P_{m-1}^{1,1}(x) P_m(t) \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k+1} P_k^{1,1}(x) P_k(t). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Для определенности мы можем считать, что $t \in [\frac{1+x}{2}, 1]$; тогда

$$|x-t| \geq \left| x - \frac{1+x}{2} \right| = \frac{1-x}{2}.$$

Поэтому утверждение леммы 3.2 непосредственно вытекает из (3.29) и (3.30) с учетом весовой оценки (2.11).

ЛЕММА 3.3. Пусть $-1 < x < 1$, $-1 \leq t \leq 1$. Тогда ряд (3.17) сходится, а его сумма при каждом фиксированном x представляет собой ограниченную на $[-1, 1]$ функцию $Q_x(t) = Q(x, t)$ переменной t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $-1 < x < 1$, $\frac{x-1}{2} \leq t \leq \frac{x+1}{2}$, то сходимость ряда (3.17) вытекает из того, что его частичные суммы $Q_m(x, t)$ допускают представление (3.24), в котором

$$\bar{q}_m(\varphi, \theta) = \sum_{k=1}^m \frac{2k+1}{k} q_k(\varphi, \theta)$$

при $m \rightarrow \infty$ сходится в силу оценки (3.21). Если же $-1 < x < 1$ и $t \in [-1, \frac{x-1}{2}] \cup [\frac{x+1}{2}, 1]$, то сходимость ряда (3.17) вытекает из (3.29) и (3.30) и весовой оценки (2.11). Ограниченность на $[-1, 1]$ функции $Q_x(t) = Q(x, t)$ по t при фиксированном $x \in (-1, 1)$ вытекает из лемм 3.1 и 3.2.

ЛЕММА 3.4. Пусть $1 \leq r$ целое, $p \geq 1$, $f \in W_p^r$, $x \in [-1, 1]$. Тогда если справедливо равенство (3.13), то его можно переписать в виде (3.15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $x \in (-1, 1)$ и $r = 1$ справедливость утверждения леммы 3.4 следует из лемм 3.1–3.3 и теоремы Лебега о возможности почленного интегрирования функционального ряда, частичные суммы которого мажорируются по модулю интегрируемой функцией. При $x = \pm 1$ утверждение леммы 3.4 следует из того, что обе части равенства (3.15) обращаются в нуль. Если же $r \geq 2$, то справедливость равенства (3.15) следует из того, что в силу весовой оценки (2.12) ряд (3.16) сходится равномерно относительно $t \in [-1, 1]$ при каждом фиксированном $x \in [-1, 1]$.

ЛЕММА 3.5. *Функции $1, x, \dots, x^n, \cos \pi x, \sin \pi x, \dots, \cos m\pi x, \sin m\pi x$ образуют на полуинтервале $[-1, 1)$ систему Чебышёва, т.е. произвольный нетривиальный полином вида*

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + a_{n+1}\cos \pi x + a_{n+2}\sin \pi x + \dots + a_{n+2m-1}\cos m\pi x + a_{n+2m}\sin m\pi x$$

обращается в нуль на $[-1, 1)$ не более чем в $n + 2m$ различных точках.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая в общности, мы можем считать, что “тригонометрическая часть” полинома $p(x)$ не обращается в нуль тождественно на $[-1, 1)$. Предположим, что на полуинтервале $[-1, 1)$ найдутся не менее $n + 2m + 1$ различных нулей полинома $p(x)$. Тогда по теореме Роля тригонометрический полином $p^{(n)}(x)$ порядка m обращается в нуль на $[-1, 1)$ не менее чем в $2m + 1$ различных точках полуинтервала $[-1, 1)$, чего быть не может. Лемма 3.5 доказана.

§ 4. Приближение классов $W_\infty^r(M)$ алгебро-тригонометрическими полиномами

Если $f \in W_\infty^r(M)$, то в силу известной теоремы Теляковского–Гопенгауза (см. [8] и [9]) найдется такая последовательность алгебраических полиномов $\{P_n(x)\}_{n=2r+1}^\infty$, что для каждого $0 \leq \nu \leq r$

$$|f^{(\nu)}(x) - P_n^{(\nu)}(x)| \leq C_r \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^{r-\nu} \omega \left(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right), \quad (4.1)$$

где C_r – положительное число, зависящее только от r . Из (4.1) следует, в частности, что

$$f^{(\nu)}(\pm 1) = P_n^{(\nu)}(\pm 1) \quad \text{при } \nu = 0, 1, \dots, r, \quad (4.2)$$

а для функции $g_n(x) = f(x) - P_n(x)$ справедлива оценка

$$\|g_n^{(\nu)}\| \leq \frac{C_r}{n^{r-\nu}} \omega \left(f^{(r)}, \frac{1}{n} \right). \quad (4.3)$$

Из (4.2) и (4.3) непосредственно вытекает, что функция $g_n(x)$ может быть продолжена на всю числовую ось 2-периодически с сохранением гладкости, т.е. так, чтобы

$$g_n(x) \in \widetilde{W}_\infty^\nu \left(\frac{C_r}{n^{r-\nu}} \omega \left(f^{(r)}, \frac{1}{n} \right) \right), \quad (4.4)$$

где через $\widetilde{W}_\infty^\nu(M)$ мы обозначаем класс 2-периодических ν раз непрерывно дифференцируемых функций $g(x)$, для которых норма определяется равенством

$$\|g\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |g(x)|.$$

Из (4.4) в силу известных теорем Фавара о приближении классов $\widetilde{W}_\infty^\nu(M)$ тригонометрическими полиномами имеем

$$E_m^T(g_n) \leq \frac{C_r}{\pi^\nu m^\nu} \frac{\omega(f^{(r)}, \frac{1}{n})}{n^{r-\nu}}, \quad 0 \leq \nu \leq r, \quad (4.5)$$

где $E_m^T(g_n)$ – наилучшее приближение функции $g(x)$ тригонометрическими полиномами вида (1.1). Выберем ν следующим образом: если $n \geq m$, то положим $\nu = 0$, а если $m > n$, то возьмем $\nu = r$. Тогда из (4.5) выводим

$$E_m^T(g_n) \leq \frac{C_r}{(\max\{n, m\})^r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) \leq \frac{C_r}{(n+m)^r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right). \quad (4.6)$$

С другой стороны, очевидно, что $E_{n,m}(f) \leq E_m^T(g_n)$, поэтому из (4.6) выводим

$$E_{n,m}(f) \leq \frac{C_r}{(n+m)^r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right). \quad (4.7)$$

В качестве следствия этой оценки мы можем сформулировать следующее утверждение. Положим

$$\mathcal{E}_{n,m}(W_\infty^r(1)) = \sup_{f \in W_\infty^r(1)} E_{n,m}(f). \quad (4.8)$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $r \geq 1$, $f \in W_\infty^r(1)$, $n \geq 2r+1$, $m \geq 0$. Тогда имеет место оценка

$$\mathcal{E}_{n,m}(W_\infty^r(1)) \asymp (n+m)^{-r}, \quad (4.9)$$

другими словами, найдутся такие положительные числа $c_1(r)$, $c_2(r)$, зависящие лишь от r , что

$$\frac{c_1(r)}{(n+m)^r} \leq \mathcal{E}_{n,m}(W_\infty^r(1)) \leq \frac{c_2(r)}{(n+m)^r}. \quad (4.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правая из оценок (4.10) непосредственно вытекает из (4.7), поэтому нам остается доказать левую из этих оценок. Рассмотрим функцию

$$f_0(x) = \frac{1}{(\pi(n+2m+1))^r} \cos \pi(n+2m+1)x.$$

Очевидно, что $f_0 \in W_\infty^r(1)$. Обозначим через $\tau_{n,m}^*(x) = p_n^*(x) + T_m^*(x)$ алгебро-тригонометрический полином наилучшего приближения к функции f порядка (n, m) . Поскольку в силу леммы 3.5 функции

$$1, x, \dots, x^n, \cos \pi x, \sin \pi x, \dots, \cos m\pi x, \sin m\pi x$$

образуют систему Чебышёва, то в силу теоремы Чебышёва об альтернансе $\tau_{n,m}^*(x)$ тождественно совпадает с нулем, стало быть, $g_n(x) = f(x) - p_n^*(x) - T_m^*(x) = f_0(x)$. Отсюда получаем

$$E_{n,m}(f_0) = \|f_0 - p_n^* - T_m^*\| = \frac{1}{(\pi(n+2m+1))^r}.$$

Тем самым, нижняя из оценок (4.10) и вместе с ней теорема 4.1 доказаны.

§ 5. Приближение классов $W_\infty^r(M)$ некоторыми алгебро-тригонометрическими операторами

Если функция f принадлежит $W_\infty^r(M)$, то мы можем приближать ее операторами $\mathcal{U}_{n+2r}(f, x)$ (см. (3.7)), причем если $0 \leq \nu \leq r-1$, то справедлива

оценка (3.8), из которой в свою очередь следует, что $f^{(\nu)}(\pm 1) = \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, \pm 1)$, $0 \leq \nu \leq r-1$. Поэтому мы можем продолжить функцию

$$g(x) = f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x) \quad (5.1)$$

2-периодически на всю числовую ось с сохранением $(r-1)$ -кратной гладкости, т.е. продолженная функция g принадлежит $\widetilde{W}_{\infty}^{r-1}(M)$. Пусть

$$S_m(g) = S_m(g, x) = \sum_{k=-m}^m c_k(g) e^{-ik\pi x} \quad (5.2)$$

— частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $g(x)$. Положим

$$\Lambda_{n,m}(f) = \Lambda_{n,m}(f, x) = \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x) + S_m(g, x). \quad (5.3)$$

Будем приближать функцию $f \in W^r(1)$ оператором $\Lambda_{n,m}(f)$. Чтобы оценить разность $|f(x) - \Lambda_{n,m}(f, x)|$, заметим, что в силу (3.11)

$$g \in \widetilde{W}^{r-1} \left(\frac{c(r) \ln n}{n^{r-\nu}} \right), \quad 0 \leq \nu \leq r-1.$$

Но тогда, воспользовавшись неравенством Лебега для частичных сумм тригонометрического ряда и теоремой Джексона, мы можем записать $(-1 \leq x \leq 1)$

$$|g(x) - S_m(g, x)| \leq c(r) \frac{\ln m \ln n}{m^{\nu} n^{r-\nu}}, \quad 0 \leq \nu \leq r-1. \quad (5.4)$$

Совершенно аналогично тому, как из (4.5) была выведена оценка (4.8), из (5.4) получаем $(-1 \leq x \leq 1)$

$$|f(x) - \Lambda_{n,m}(f, x)| \leq c(r) \frac{\ln m \ln n}{(m+n)^{r-1} n}. \quad (5.5)$$

Как следствие этой оценки мы выводим

$$\sup_{f \in W_{\infty}^r(1)} \|f - \Lambda_{n,m}(f)\| \leq c(r) \frac{\ln m \ln n}{(m+n)^{r-1} n}. \quad (5.6)$$

Введем другой линейный оператор, действующий в $W_{\infty}^r(M)$. Пусть

$$g(x) = f(x) - \mathcal{V}_N(f, x), \quad (5.7)$$

$$V_m(g, x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=m}^{2m} S_k(g, x), \quad (5.8)$$

где $N = 2(n+r)$, а $\mathcal{V}_N(f, x)$ определен равенством (3.9). Положим

$$\Gamma_{n,m}(f) = \Gamma_{n,m}(f, x) = \mathcal{V}_{2n+2r}(f, x) + V_m(g, x). \quad (5.9)$$

Воспользовавшись оценкой (3.12) и неравенством Лебега

$$|g(x) - V_m(g, x)| \leq c(r) E_m^T(g) \leq \frac{c(r)}{m^{\nu}}, \quad (5.10)$$

где

$$g(x) = f(x) - \mathcal{V}_{2n+2r}(f, x) \in \widetilde{W}^{\nu} \left(\frac{c(r)}{n^{r-\nu}} \right),$$

$E_m^T(g)$ – наилучшее приближение функции $g(x)$ тригонометрическими полиномами порядка m , мы приходим к следующему результату:

$$|f(x) - \Gamma_{n,m}(f, x)| \leq \frac{c(r)}{(m+n)^{r-1}n}, \quad (5.11)$$

и как следствие получаем

$$\sup_{f \in W^r(1)} \|f - \Gamma_{n,m}(f)\| \leq \frac{c(r)}{(m+n)^{r-1}n}. \quad (5.12)$$

Комбинируя операторы $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$, $S_n(f)$, $\mathcal{V}_N(f)$ и $V_m(f)$, можно конструировать другие различные линейные методы приближения функций $f \in W_\infty^r(M)$ алгебро-тригонометрическими полиномами и исследовать их аппроксимативные свойства, но мы этого делать не будем.

§ 6. Приближение классов $W_p^r(M)$ операторами $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$

В § 4 при решении задачи о приближении классов $W_\infty^r(M)$ алгебро-тригонометрическими полиномами одну из основных ролей играла теорема Теляковского–Гопенгауза, согласно которой для $f \in W_\infty^r(M)$ найдется последовательность алгебраических полиномов $\{p = p_n(f, x)\}_{n=2r+1}^\infty$, каждый из которых осуществляет одновременное приближение функции $f \in W_\infty^r(M)$ и всех ее производных $f^{(\nu)}(x)$, $\nu = 1, \dots, r$ (см. оценку (4.1)). При решении задачи об оценке $\mathcal{E}_{n,m}(W_p^r)$ нам потребуется предварительно доказать существование для $f \in W_p^r(M)$ последовательности алгебраических полиномов $\{p = p_n(f, x)\}_{n_0}^\infty$, осуществляющих одновременное приближение функции $f(x)$ и ее производных $f'(x), \dots, f^{(r-1)}(x)$ при каждом заданном $x \in [-1, 1]$, при этом $p_n^{(r)}(f, x)$ приближает производную $f^{(r)}(x)$ в метрике пространства $L^p(-1, 1)$. Важно, чтобы выполнялись равенство

$$p_n^{(\nu)}(\pm 1) = f^{(\nu)}(\pm 1), \quad \nu = 0, 1, \dots, r-1,$$

так как это позволяет функцию $f(x) - p_n(f, x)$ продолжить 2-периодически на всю числовую ось с сохранением гладкости порядка r , т.е. так, чтобы было $f(x) - p_n(f, x) \in \widetilde{W}_p^r(M)$, где $\widetilde{W}_p^r(M)$ – класс 2-периодических функций $g(x)$, для которых $g^{r-1}(x)$ абсолютно непрерывна на $[-1, 1]$ и $\|g^{(r)}\|_p \leq M$. Кроме того, требуется, чтобы приближение $f^{(\nu)} \in W_p^r$, доставляемое полиномом $p_n^{(\nu)}(x)$ в метрике $C[-1, 1]$ при $0 \leq \nu \leq r-1$, имело порядок $n^{-r+\nu}$, а $f^{(r)}(x)$ приближало $p_n^{(r)}(x)$ в $L^p(-1, 1)$ со скоростью $\omega(f^{(r)}, 1/n)_p$, где

$$\omega(g, \delta)_p = \sup_{0 \leq h < 1-\delta} \left(\int_{-1}^{1-h} |g(x+h) - g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

– модуль непрерывности функции $g \in L^p(-1, 1)$. Иными словами, чтобы величина $\|f^{(r)} - p_n^{(r)}\|_p$ при $n \rightarrow \infty$ стремилась к нулю со скоростью наилучшего приближения функции $f^{(r)} \in L^p(-1, 1)$ алгебраическими полиномами $g_{n-r}(x)$ степени $n-r$. Важное значение имеет также то, с какой скоростью разность $|f^{(\nu)}(x) - p_n^{(\nu)}(x)|$ для $0 \leq \nu \leq r-1$ сходится к нулю при $x \rightarrow \pm 1$. Мы будем

стремиться к тому, чтобы эта скорость обеспечивала ограниченность в окрестностях точек ± 1 следующих величин:

$$\frac{|f^{(\nu)}(x) - p_n^{(\nu)}(x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2-\varepsilon}}, \quad 0 \leq \nu \leq r-1,$$

где $\varepsilon > 0$ – некоторое число. Мы построим последовательность $\{p_n(f, x)\}_{n=n_0}^\infty$, соответствующую случаю $\varepsilon = 1/4$. А именно, при $\varepsilon = 1/4$ всем указанным выше требованиям удовлетворяет последовательность $\{\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)\}_{n=r}^\infty$, где $\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)$ – частичная сумма смешанного ряда функции $f \in W_p^r$ по полиномам Лежандра.

Заметим, что если $f \in W_p^r \setminus W_\infty^r$, то для решения поставленной здесь задачи невозможно использовать теорему Теляковского–Гопенгауза. В самом деле, в этом случае мы можем утверждать лишь, что $f \in W_\infty^{r-1}$, и тогда согласно указанной теореме существует последовательность полиномов $\{p_n(x)\}_{n=n_0}^\infty$, для которой

$$\frac{|f^{(\nu)}(x) - p_n^{(\nu)}(x)|}{(1-x^2)^{(r-1-\nu)/2}} \leq c(r)\omega\left(f^{(r-1)}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right), \quad 0 \leq \nu \leq r-1.$$

Но эта оценка не учитывает информацию о том, что $f^{(r)} \in L^p(-1, 1)$. В связи с этим возникла задача об одновременном приближении функции $f \in W_p^r$ и ее производных, учитывающая принадлежность $f^{(r)}$ пространству $L^p(-1, 1)$; эту задачу нам удалось решить посредством использования операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$. Прежде всего, мы установим следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $p > 4/3$, $r \geq 1$, $f \in W_p^r(M)$. Тогда смешанный ряд (3.2) сходится равномерно относительно $x \in [-1, 1]$ и имеет место равенство (3.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$S_{n+r}(f^{(r)}, t) = \sum_{k=0}^{n+r} f_{r,k} P_k(t)$$

– частичная сумма ряда Фурье по полиномам Лежандра функции $f^{(r)}(t)$. Выберем число q так, чтобы было $q \leq p$ и $4/3 < q < 4$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt - \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} S_{n+r}(f^{(r)}, t) dt \right| \\ & \leq \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} |f^{(r)}(t) - S_{n+r}(f^{(r)}, t)| dt \leq 2^{r-1} \int_{-1}^1 |f^{(r)}(t) - S_{n+r}(f^{(r)}, t)| dt \\ & \leq 2^{r-1+1/q} \|f^{(r)} - S_{n+r}(f^{(r)})\|_q. \end{aligned} \quad (6.1)$$

С другой стороны, по условию теоремы $f \in W_p^r(M)$, поэтому $f^{(r)} \in L^p(-1, 1)$. Тогда в силу теоремы Поларда (см. [10]–[12]) о том, что при $4/3 < q < 4$ система полиномов Лежандра образует базис в $L^q(-1, 1)$, имеем

$$\|f^{(r)} - S_{n+r}(f^{(r)})\|_q \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6.2)$$

Из (6.1) и (6.2) следует, что при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $x \in [-1, 1]$

$$\left| \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt - \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} S_{n+r}(f^{(r)}, t) dt \right| \rightarrow 0. \quad (6.3)$$

С другой стороны, по формуле Тейлора

$$\frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt = f(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{(\nu)}(-1)}{\nu!} (x+1)^\nu, \quad (6.4)$$

а в силу равенства (2.8) и формулы Тейлора для функции

$$\frac{(-1)^r (1-x^2)^r}{2^r k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x)$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} S_{n+r}(f^{(r)}, t) dt \\ &= \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} f_{r,k} P_k(t) dt + \frac{(-1)^r (1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=r}^{n+r} \frac{f_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Сопоставляя (6.3)–(6.5) с (3.7) и (3.3), находим, что

$$|f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (6.6)$$

равномерно относительно $x \in [-1, 1]$. Теорема 6.1 доказана.

В качестве одного из следствий теоремы 6.1 мы отметим следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $r \geq 1$, $0 \leq \nu \leq r-1$, $p > 4/3$, $x \in [-1, 1]$. Тогда

$$\sup_{f \in W_p^r(M)} \frac{|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4}} = M \left(\int_{-1}^1 |Q_{r-\nu, n+\nu}(x, t)|^q dt \right)^{1/q},$$

где $1/p + 1/q = 1$, ядро $Q_{r,n}(x, t)$ определено равенством (3.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 6.1 следует, что если $p > 4/3$, то для $f \in W_p^r(M)$ имеет место равенство (3.13). Но тогда в силу леммы 3.4 справедливо равенство (3.15), в котором $f^{(r)} \in L^p(-1, 1)$. Воспользуемся равенством (3.15) для функции $f^{(\nu)}(x)$, $0 \leq \nu \leq r-1$. Тогда с учетом (3.14) получим $(f^{(\nu)} \in W_p^{r-\nu}(M))$

$$f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x) = \frac{(-1)^{r-\nu}}{2^{r-\nu+1}} (1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4} \int_{-1}^1 f^{(r)}(t) Q_{r-\nu, n+\nu}(x, t) dt, \quad (6.7)$$

где

$$Q_{r-\nu, n+\nu}(x, t) = (1-x^2)^{(r-\nu)/2+1/4} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^{[r-\nu]}} P_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(x) P_k(t) \quad (6.8)$$

для каждого фиксированного $x \in [-1, 1]$ представляет собой ограниченную функцию переменной $t \in [-1, 1]$ (см. лемму 3.3). Утверждение теоремы 6.2 непосредственно вытекает из (6.7) и неравенства Гёльдера.

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения. Положим для $r \geq 1$, $n < m$

$$\mathcal{K}_{r,m}(x, t) = \sum_{k=r}^m (2k+1) P_{k-r}^{r,r}(x) P_k(t),$$

$$\mathcal{K}_{r,m,n}(x, t) = \mathcal{K}_{r,m}(x, t) - \mathcal{K}_{r,n}(x, t) = \sum_{k=n+1}^m (2k+1) P_{k-r}^{r,r}(x) P_k(t). \quad (6.9)$$

ЛЕММА 6.1. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned} (x-t)\mathcal{K}_{r,m}(x, t) &= -rP_{r-1}(t) - \frac{(m+1)^2}{m-r+1}(1-x)P_{m-r}^{r+1,r}(x)P_m(t) \\ &\quad - (m+1)(1-t)P_{m-r}^{r,r}(x)P_m^{1,0}(t) + \frac{(m+1)r}{m-r+1}P_{m-r}^{r,r}(x)P_m(t) \\ &\quad + \sum_{k=r}^m \frac{r^2}{k+1} P_{k-r+1}^{r,r}(x)P_k(t). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Эта лемма доказана в [5; лемма 4.3]. Из нее вытекает следующее равенство:

$$(x-t)\mathcal{K}_{r,m,n}(x, t) = X_1 + X_2 + X_3 + X_4, \quad (6.11)$$

где

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{(m+1)^2}{m-r+1}(1-x)P_{m-r}^{r+1,r}(x)P_m(t) + \frac{(n+1)^2}{n-r+1}(1-x)P_{n-r}^{r+1,r}(x)P_n(t), \\ X_2 &= -(m+1)(1-t)P_{m-r}^{r,r}(x)P_m^{1,0}(t) + (n+1)(1-t)P_{n-r}^{r,r}(x)P_n^{1,0}(t), \\ X_3 &= \frac{(m+1)r}{m-r+1}P_{m-r}^{r,r}(x)P_m(t) - \frac{(n+1)r}{n-r+1}P_{n-r}^{r,r}(x)P_n(t), \\ X_4 &= \sum_{k=n+1}^m \frac{r^2}{k+1} P_{k-r+1}^{r,r}(x)P_k(t). \end{aligned}$$

ЛЕММА 6.2. *Пусть $r \geq 1$, $\frac{4}{3} < q < 4$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x \in [-1, 1]$, $n < m$. Тогда*

$$(1-x^2)^{r/2+1/(2p)} \left(\int_{-1}^1 |\mathcal{K}_{r,m,n}(x, t)|^q dt \right)^{1/q} \leq c(r, q) m^{1/p} \left(1 + \ln \frac{m}{n} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в силу симметрии (2.11)

$$\int_{-1}^1 |\mathcal{K}_{r,m,n}(x, t)|^q dt = \int_{-1}^1 |\mathcal{K}_{r,m,n}(-x, t)|^q dt,$$

то мы можем ограничиться рассмотрением случая $0 \leq x \leq 1$. Пусть сначала $0 \leq x \leq 1 - 4/n^2$. Имеем

$$\left(\int_{-1}^1 |\mathcal{K}_{r,m,n}(x, t)|^q dt \right)^{1/q} \leq J_1 + J_2 + J_3 + J_4, \quad (6.12)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \left(\int_{-1}^{-1/2} \right)^{1/q}, & J_2 &= \left(\int_{-1/2}^{x-\sqrt{1-x^2}/m} \right)^{1/q}, \\ J_3 &= \left(\int_{x-\sqrt{1-x^2}/m}^{x+\sqrt{1-x^2}/m} \right)^{1/q}, & J_4 &= \left(\int_{x+\sqrt{1-x^2}/m}^1 \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Оценим выражения $(1 - x^2)^{r/2+1/4} J_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. Воспользовавшись равенством (6.11) и неравенством (2.12), имеем

$$(1 - x^2)^{r/2+1/4} J_1 \leq J_{11} + J_{12} + J_{13} + J_{14}, \quad (6.13)$$

где

$$\begin{aligned} J_{11} &= (1 - x^2)^{r/2+1/4} \left(\int_{-1}^{-1/2} \left| \frac{X_1}{x-t} \right|^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_{-1}^{-1/2} \left| \frac{\sqrt{m+1} P_m(t)}{x-t} \right|^q dt \right)^{1/q} \frac{(m+1)^{3/2}(1-x)}{m-r+1} |P_{m-r}^{r+1,r}(x)| (1-x^2)^{r/2+1/4} \\ &\quad + \left(\int_{-1}^{-1/2} \left| \frac{\sqrt{n+1} P_n(t)}{x-t} \right|^q dt \right)^{1/q} \frac{(n+1)^{3/2}(1-x)}{n-r+1} |P_{n-r}^{r+1,r}(x)| (1-x^2)^{r/2+1/4} \\ &\leq c(r)(1-x)^{1/2} \left(\int_{-1}^{-1/2} \left| \frac{(1-t)^{-1/4}}{x-t} \right|^q dt \right)^{1/q} \leq \frac{c(r)}{(1-q/4)^{1/q}} (1-x)^{1/2}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} J_{12} &= (1 - x^2)^{r/2+1/4} \left(\int_{-1}^{-1/2} \left| \frac{X_2}{x-t} \right|^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_{-1}^{-1/2} \left| \frac{(1-t)P_m^{1,0}(t)}{x-t} \right|^q dt \right)^{1/q} (m+1) |P_{m-r}^{r,r}(x)| (1-x^2)^{r/2+1/4} \\ &\quad + \left(\int_{-1}^{-1/2} \left| \frac{(1-t)P_n^{1,0}(t)}{x-t} \right|^q dt \right)^{1/q} (n+1) |P_{n-r}^{r,r}(x)| (1-x^2)^{r/2+1/4} \\ &\leq \frac{c(r)}{(1-q/4)^{1/q}}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} J_{13} &= (1 - x^2)^{r/2+1/4} \left(\int_{-1}^{-1/2} \left| \frac{X_3}{x-t} \right|^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_{-1}^{-1/2} \left| \frac{P_m(t)}{x-t} \right|^q dt \right)^{1/q} \frac{(m+1)r}{m-r+1} |P_{m-r}^{r,r}(x)| (1-x^2)^{r/2+1/4} \\ &\quad + \left(\int_{-1}^{-1/2} \left| \frac{P_n(t)}{x-t} \right|^q dt \right)^{1/q} \frac{(n+1)r}{n-r+1} |P_{n-r}^{r,r}(x)| (1-x^2)^{r/2+1/4} \\ &\leq \frac{c(r)}{(1-q/4)^{1/q}} (1-x)^{1/4}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} J_{14} &= (1 - x^2)^{r/2+1/4} \left(\int_{-1}^{-1/2} \left| \frac{r^2}{x-t} \sum_{k=n+1}^m \frac{P_{k-r+1}^{r,r}(x) P_k(t)}{k+1} \right|^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq c(r) \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k+1} (1-x^2)^{1/4} \left(\int_{-1}^{-1/2} \frac{dt}{(x-t)^q} \right)^{1/q} \\ &\leq c(r) (1-x^2)^{1/4} \ln \frac{m}{n}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Из (6.13)–(6.17) находим

$$(1 - x^2)^{r/2+1/4} J_1 \leq \frac{c(r)}{(1-q/4)^{1/q}} \left(1 + (1-x)^{1/4} \ln \frac{m}{n} \right). \quad (6.18)$$

Оценим $(1 - x^2)^{r/2+1/4} J_2$. Имеем

$$\begin{aligned} (1 - x^2)^{r/2+1/4} J_2 &= (1 - x^2)^{r/2+1/4} \left(\int_{-1/2}^{x-\sqrt{1-x^2}/m} |\mathcal{K}_{r,m,n}(x, t)|^q \right)^{1/q} \\ &\leq J_{21} + J_{22} + J_{23} + J_{24}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

где

$$\begin{aligned} J_{21} &= (1 - x^2)^{r/2+1/4} \left(\int_{-1/2}^{x-\sqrt{1-x^2}/m} \left| \frac{X_1}{x-t} \right|^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq c(r)(1-x)^{1/2} \left(\int_{-1/2}^{x-\sqrt{1-x^2}/m} \frac{dt}{[(1-t)^{1/4}(x-t)]^q} \right)^{1/q} \\ &\leq c(r)(1-x)^{1/4} \left(\int_{-1/2}^{x-\sqrt{1-x^2}/m} \frac{dt}{(x-t)^q} \right)^{1/q} \\ &\leq \frac{c(r)}{(q-1)^{1/q}} (1-x^2)^{1/4} \left(\left(\frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{q-1} \right)^{1/q} \\ &\leq c(r, q) m^{1/p} (1-x^2)^{1/4+1/(2q)-1/2} = c(r, q) m^{1/p} (1-x^2)^{1/4-1/(2p)}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} J_{22} &= (1 - x^2)^{r/2+1/4} \left(\int_{-1/2}^{x-\sqrt{1-x^2}/m} \left| \frac{X_2}{x-t} \right|^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq c(r) \left(\int_{-1/2}^{x-\sqrt{1-x^2}/m} \left(\frac{(1-t)^{1/4}}{x-t} \right)^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq c(r) \left(\int_{-1/2}^{x-\sqrt{1-x^2}/m} \left(\frac{(1-x)^{1/4}}{x-t} \right)^q dt \right)^{1/q} \\ &\quad + c(r) \left(\int_{-1/2}^{x-\sqrt{1-x^2}/m} (x-t)^{-3q/4} dt \right)^{1/q} \\ &\leq \frac{c(r) m^{1/p}}{(q-1)^{1/q}} (1-x)^{1/(2q)-1/4} + \frac{c(r) m^{3/4-1/q}}{(3q/4-1)^{1/q}} (1-x)^{1/(2q)-3/8} \\ &\leq \frac{c(r) m^{1/p}}{(3q/4-1)^{1/q}} (1-x)^{1/4-1/(2p)} \left(1 + \frac{1}{(m\sqrt{1-x})^{1/4}} \right) \\ &\leq c(r, q) m^{1/p} (1-x)^{1/4-1/(2p)}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} J_{23} &= (1 - x^2)^{r/2+1/4} \left(\int_{-1/2}^{x-\sqrt{1-x^2}/m} \left| \frac{X_3}{x-t} \right|^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_{-1/2}^{x-\sqrt{1-x^2}/m} \left| \frac{P_m(t)}{x-t} \right|^q dt \right)^{1/q} \frac{(m+1)r}{m-r+1} |P_{m-r}^{r,r}(x)| (1-x^2)^{r/2+1/4} \\ &\quad + \left(\int_{-1/2}^{x-\sqrt{1-x^2}/m} \left| \frac{P_n(t)}{x-t} \right|^q dt \right)^{1/q} \frac{(n+1)r}{n-r+1} |P_{n-r}^{r,r}(x)| (1-x^2)^{r/2+1/4} \\ &\leq c(r) \left(\int_{-1/2}^{x-\sqrt{1-x^2}/m} \frac{dt}{(x-t)^q} \right)^{1/q} (1-x^2)^{1/4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c(r)(1-x^2)^{1/4} \left(\left(\frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{q-1} \right)^{1/q} \\
&\leq c(r)m^{1/p}(1-x)^{1/(2q)-1/4} = c(r)m^{1/p}(1-x)^{1/4-1/(2p)}, \tag{6.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{24} &= (1-x^2)^{r/2+1/4} \left(\int_{-1/2}^{x-\sqrt{1-x^2}/m} \left| \frac{X_4}{x-t} \right|^q dt \right)^{1/q} \\
&\leq c(r)(1-x^2)^{1/4} \left(\int_{-1/2}^{x-\sqrt{1-x^2}/m} \frac{dt}{(x-t)^q} \right)^{1/q} \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k+1} \\
&\leq c(r)m^{1/p}(1-x)^{1/4-1/(2p)} \ln \frac{m}{n}. \tag{6.23}
\end{aligned}$$

Из (6.19)–(6.23) выводим

$$(1-x^2)^{r/2+1/4} J_2 \leq c(r)m^{1/p}(1-x)^{1/4-1/(2p)} \left(1 + \ln \frac{m}{n} \right). \tag{6.24}$$

Оценим $(1-x^2)^{r/2+1/4} J_3$. Согласно (6.9) и (6.12) и весовой оценке (2.12) имеем

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)^{r/2+1/4} J_3 \\
&= (1-x^2)^{r/2+1/4} \left(\int_{x-\sqrt{1-x^2}/m}^{x+\sqrt{1-x^2}/m} \left| \sum_{k=n+1}^m (2k+1) P_{k-r}^{r,r}(x) P_k(t) \right|^q dt \right)^{1/q} \\
&\leq c(r) \left((m-n)^q \int_{x-\sqrt{1-x^2}/m}^{x+\sqrt{1-x^2}/m} (1-t)^{-q/4} dt \right)^{1/q} \\
&= c(r)(m-n) \left(\int_{x-\sqrt{1-x^2}/m}^{x+\sqrt{1-x^2}/m} (1-t)^{-q/4} dt \right)^{1/q} \\
&\leq c(r, q)(m-n) \left[\left(1-x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{m} \right)^{1-q/4} - \left(1-x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{m} \right)^{1-q/4} \right]^{1/q} \\
&= c(r)(m-n) \left[\left(1-x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{m} \right)^{1-q/4} \left(1 - \left(\frac{1-x - \sqrt{1-x^2}/m}{1-x + \sqrt{1-x^2}/m} \right)^{1-q/4} \right) \right]^{1/q} \\
&= c(r)(m-n) \left[\left(1-x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{m} \right)^{1-q/4} \right. \\
&\quad \times \left. \left(1 - \left(1 - \frac{2\sqrt{1-x^2}/m}{1-x + \sqrt{1-x^2}/m} \right)^{1-q/4} \right) \right]^{1/q} \\
&\leq c(r)(m-n) \left[\left(1-x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{m} \right)^{1-q/4} \frac{2\sqrt{1-x^2}/m}{1-x + \sqrt{1-x^2}/m} \right]^{1/q} \\
&\leq c(r)(m-n)^{1/p} \left[\left(1-x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{m} \right)^{-q/4} \sqrt{1-x^2} \right]^{1/q} \\
&\leq c(r)(m-n)^{1/p} \left[(1-x)^{-q/4} \sqrt{1-x^2} \right]^{1/q} \\
&\leq c(r)(m-n)^{1/p}(1-x)^{1/(2q)-1/4} = c(r)(m-n)^{1/p}(1-x)^{1/4-1/(2p)}. \tag{6.25}
\end{aligned}$$

Прежде чем приступить к рассмотрению $(1 - x^2)^{r/2+1/4} J_4$, оценим некоторые вспомогательные интегралы. Имеем

$$\int_{x+\sqrt{1-x^2}/m}^1 \frac{dt}{[(1-t)^{1/4}(t-x)]^q} = H_1 + H_2, \quad (6.26)$$

где

$$\begin{aligned} H_1 &= \int_{x+\sqrt{1-x^2}/m}^{(1+x)/2} \frac{dt}{[(1-t)^{1/4}(t-x)]^q} \\ &\leq \frac{2^{q/4}}{(q-1)(1-x)^{q/4}} \left[\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{m} \right)^{1-q} - \left(\frac{1-x}{2} \right)^{1-q} \right] \\ &\leq \frac{2^{q/4}}{q-1} m^{q-1} (1-x)^{1/2-3q/4}, \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} H_2 &= \int_{(1+x)/2}^1 \frac{dt}{[(1-t)^{1/4}(t-x)]^q} \\ &\leq \frac{2^q}{(1-x)^q} \int_{(1+x)/2}^1 \frac{dt}{(1-t)^{q/4}} = \frac{-2^q}{(1-x)^q(1-q/4)} (1-t)^{1-q/4} \Big|_{(1+x)/2}^1 \\ &= \frac{2^q}{(1-x)^q(1-q/4)} \left(\frac{1-x}{2} \right)^{1-q/4} = \frac{2^{5q/4-1}}{1-q/4} (1-x)^{1-5q/4}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Кроме того, отметим, что

$$\begin{aligned} &\int_{x+\sqrt{1-x^2}/m}^1 \frac{dt}{(t-x)^q} \\ &= \frac{1}{q-1} \left[\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{m} \right)^{1-q} - (1-x)^{1-q} \right] < \frac{m^{q-1}}{q-1} (1-x)^{1/2-q/2}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Вернемся теперь к оценке выражения $(1 - x^2)^{r/2+1/4} J_4$. В силу (6.11)

$$(1 - x^2)^{r/2+1/4} J_4 = (1 - x^2)^{r/2+1/4} \left(\int_{x+\sqrt{1-x^2}/m}^1 \left| \sum_{k=1}^4 \frac{X_k}{t-x} \right|^q dt \right)^{1/q} \leq \sum_{k=1}^4 J_{4k},$$

где $(1 \leq k \leq 4)$

$$J_{4k} = (1 - x^2)^{r/2+1/4} \left(\int_{x+\sqrt{1-x^2}/m}^1 \left| \frac{X_k}{t-x} \right|^q dt \right)^{1/q}. \quad (6.30)$$

Воспользовавшись весовой оценкой (2.12) и оценками (6.26)–(6.28), получаем

$$\begin{aligned} J_{41} &= (1 - x^2)^{r/2+1/4} \left(\int_{x+\sqrt{1-x^2}/m}^1 \left| \frac{X_1}{t-x} \right|^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq c(r)(1-x)^{1/2} \left(\int_{x+\sqrt{1-x^2}/m}^1 \frac{dt}{[(1-t)^{1/4}(t-x)]^q} \right)^{1/q} \\ &\leq c(r, q) m^{1/p} (1-x^2)^{1/2} [(1-x)^{1/2-3q/4} + m^{1-q} (1-x)^{1-5q/4}]^{1/q} \\ &\leq c(r, q) m^{1/p} (1-x^2)^{1/(2q)-1/4} \left[1 + \frac{1}{(m\sqrt{1-x})^{1/p}} \right] \\ &\leq c(r, q) m^{1/p} (1-x^2)^{1/(2q)-1/4}, \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned}
J_{42} &= (1-x^2)^{r/2+1/4} \left(\int_{x+\sqrt{1-x^2}/m}^1 \left| \frac{X_2}{t-x} \right|^q dt \right)^{1/q} \\
&\leq c(r) \left(\int_{x+\sqrt{1-x^2}/m}^1 \left(\frac{(1-t)^{1/4}}{t-x} \right)^q dt \right)^{1/q} \\
&\leq c(r) \left(\int_{x+\sqrt{1-x^2}/m}^1 \left(\frac{(1-x)^{1/4}}{t-x} \right)^q dt \right)^{1/q} \\
&\leq c(r)(1-x)^{1/4} m^{1/p} (1-x)^{1/(2q)-1/4} \leq c(r) m^{1/p} (1-x)^{1/4-1/(2p)}, \quad (6.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{43} &= (1-x^2)^{r/2+1/4} \left(\int_{x+\sqrt{1-x^2}/m}^1 \left| \frac{X_3}{t-x} \right|^q dt \right)^{1/q} \\
&\leq c(r)(1-x^2)^{1/4} \left(\int_{x+\sqrt{1-x^2}/m}^1 \frac{dt}{(t-x)^q} dt \right)^{1/q} \\
&\leq c(r, q) m^{1/p} (1-x^2)^{1/4-1/(2p)}, \quad (6.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{44} &= (1-x^2)^{r/2+1/4} \left(\int_{x+\sqrt{1-x^2}/m}^1 \left| \frac{r^2}{t-x} \sum_{k=n+1}^m \frac{P_{k-r+1}^{r,r}(x) P_k(t)}{k+1} \right|^q dt \right)^{1/q} \\
&\leq c(r)(1-x^2)^{1/4} \left(\int_{x+\sqrt{1-x^2}/m}^1 \frac{dt}{(t-x)^q} dt \right)^{1/q} \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k+1} \\
&\leq c(r, q)(1-x)^{1/4-1/(2p)} \ln \frac{m}{n}. \quad (6.34)
\end{aligned}$$

Из (6.31)–(6.34) находим

$$(1-x^2)^{r/2+1/4} J_4 \leq c(r, q)(1-x)^{1/4-1/(2p)} \left(1 + \ln \frac{m}{n} \right). \quad (6.35)$$

Утверждение леммы 6.2, относящееся к случаю $0 \leq x \leq 1 - 4/m^2$, вытекает из (6.12), (6.18), (6.24), (6.25) и (6.35).

Перейдем к случаю $1 - 4/m^2 \leq x < 1$. Тогда мы можем записать

$$\left(\int_{-1}^1 |\mathcal{K}_{r,m,n}(x, t)|^q dt \right)^{1/q} \leq I_1 + I_2 + I_3, \quad (6.36)$$

где

$$I_1 = \left(\int_{-1}^{-1/2} \right)^{1/q}, \quad I_2 = \left(\int_{-1/2}^{x-1/m^2} \right)^{1/q}, \quad I_3 = \left(\int_{x-1/m^2}^1 \right)^{1/q}.$$

Почти дословно повторяя рассуждения, которые привели нас к оценкам (6.18), (6.24) и (6.25), будем иметь соответственно

$$(1-x^2)^{r/2} I_1 \leq c(r, q) \left(1 + \ln \frac{m}{n} \right), \quad (6.37)$$

$$(1-x^2)^{r/2} I_2 \leq c(r, q) m^{1/p} (1-x)^{-1/(2p)} \left(1 + \ln \frac{m}{n} \right), \quad (6.38)$$

$$(1-x^2)^{r/2} I_3 \leq c(r, q) (m-n+1)^{1/p} (1-x)^{-1/(2p)}. \quad (6.39)$$

Из (6.36)–(6.39) выводим утверждение леммы, относящееся к случаю $1 - 4/m^2 \leq x \leq 1$. Лемма 6.2 полностью доказана.

ЛЕММА 6.3. Пусть $r \geq 1$, $4/3 < q < 4$, $1/p + 1/q = 1$, $x \in [-1, 1]$. Тогда

$$\left(\int_{-1}^1 |Q_{r,n}(x, t)|^q dt \right)^{1/q} \leq c(r, q) n^{-r+1/p} (1-x^2)^{1/4-1/(2p)},$$

где ядро $Q_{r,n}(x, t)$ определено равенством (3.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в силу (2.11)

$$\int_{-1}^1 |Q_{r,n}(x, t)|^q dt = \int_{-1}^1 |Q_{r,n}(-x, t)|^q dt,$$

то нам достаточно ограничиться рассмотрением случая $0 \leq x \leq 1$. С этой целью в правой части равенства (3.16) произведем преобразование Абеля, в результате чего получаем

$$Q_{r,n}(x, t) = \sum_{m=n+r+1}^{\infty} \left[\frac{1}{m^{[r]}} - \frac{1}{(m+1)^{[r]}} \right] \mathcal{K}_{r,m,n+r}(x, t) (1-x^2)^{r/2+1/4}, \quad (6.40)$$

где ядра $\mathcal{K}_{r,m,n+r}(x, t)$ определены равенством (6.9). Законность перехода от (3.16) к (6.40) при $r = 1$ следует, например, из леммы 3.1, а при $r \geq 2$ это вытекает непосредственно из равенства (6.9) и весовой оценки (2.12). Поскольку

$$\frac{1}{m^{[r]}} - \frac{1}{(m+1)^{[r]}} = \frac{r}{(m+1)m^{[r]}},$$

то (6.3) можно записать так:

$$Q_{r,n}(x, t) = \sum_{m=n+r+1}^{\infty} \frac{r}{(m+1)m^{[r]}} \mathcal{K}_{r,m,n+r}(x, t) (1-x^2)^{r/2+1/4}. \quad (6.41)$$

Из (6.41) получаем

$$\left(\int_{-1}^1 |Q_{r,n}(x, t)|^q dt \right)^{1/q} \leq \sum_{m=n+r+1}^{\infty} \frac{r(1-x^2)^{r/2+1/4}}{(m+1)m^{[r]}} \left(\int_{-1}^1 |\mathcal{K}_{r,m,n+r}(x, t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

Воспользовавшись леммой 6.2, получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_{-1}^1 |Q_{r,n}(x, t)|^q dt \right)^{1/q} &\leq c(r, q) \sum_{m=n+r+1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^{1/4-1/(2p)} m^{1/p}}{(m+1)m^{[r]}} \left(1 + \ln \frac{m}{n+r} \right), \\ c(r, q) (1-x^2)^{1/4-1/(2p)} &\sum_{m=n+r+1}^{\infty} m^{-r-1+1/p} \left(1 + \ln \frac{m}{n+r} \right) \\ &\leq c(r, q) (1-x^2)^{1/4-1/(2p)} n^{-r-1+1/p} \sum_{m=n+r+1}^{\infty} \left(\frac{m}{n+r} \right)^{-r-1+1/p} \left(1 + \ln \frac{m}{n+r} \right) \\ &\leq c(r, q) (1-x^2)^{1/4-1/(2p)} n^{-r+1/p} \int_1^{\infty} t^{-r-1+1/p} (1 + \ln t) dt \\ &\leq c(r, q) (1-x^2)^{1/4-1/(2p)} n^{-r+1/p}. \end{aligned}$$

Лемма 6.3 доказана.

ЛЕММА 6.4. Пусть $r \geq 1$, $0 \leq \nu \leq r-1$, $4/3 < q < 4$, $1/p + 1/q = 1$, $x \in [-1, 1]$. Тогда

$$\left(\int_{-1}^1 |Q_{r-\nu, n+\nu}(x, t)|^q dt \right)^{1/q} \leq c(r, q) n^{-r+\nu+1/p} (1-x^2)^{1/4-1/(2p)}.$$

Доказательство этой леммы непосредственно вытекает из леммы 6.3, если в ней заменить r на $r-\nu$, а n на $n+\nu$ и учесть равенство (6.8).

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $r \geq 1$, $0 \leq \nu \leq r-1$, $4/3 < p < 4$, $x \in [-1, 1]$, $f \in W_p^r(1)$. Тогда

$$|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)| \leq c(r, p) \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^{r-\nu-1/p}, \quad (6.42)$$

причем

$$\left(\int_{-1}^1 |f^{(r)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(r)}(f, x)|^p dx \right)^{1/p} \leq c(p) E_{n+r}(f^{(r)})_p, \quad (6.43)$$

где $E_{n+r}(g)_p$ — наилучшее приближение функции $g \in L^p(-1, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теоремой 6.2; тогда

$$|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)| \leq c(r, p) (1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4} \left(\int_{-1}^1 |Q_{r-\nu, n+\nu}(x, t)|^q dt \right)^{1/q},$$

где $1/p + 1/q = 1$. Теперь обратимся к лемме 6.4. Это дает

$$\begin{aligned} & |f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)| \\ & \leq c(r, p) M n^{-r+\nu+1/p} (1-x^2)^{(r-\nu-1/p)/2} \leq c(r, p) \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^{r-\nu-1/p}. \end{aligned}$$

Тем самым, доказано утверждение теоремы 6.3, относящееся к случаю $0 \leq \nu \leq r-1$. Что же касается оценки (6.43), относящейся к случаю $\nu = r$, то она вытекает из того, что $\mathcal{Y}_{n+2r}^{(r)}(f, x) = S_{n+r}(f^{(r)}, x)$ — сумма Фурье–Лежандра функции $f^{(r)}(x) \in L^p(-1, 1)$ порядка $n+r$, которая в силу свойства базисности системы Лежандра в $L^p(-1, 1)$ при $4/3 < p < 4$ доставляет функции $f^{(r)}(x)$ наилучший порядок приближения в метрике $L^p(-1, 1)$ среди алгебраических полиномов степени $n+r$.

В качестве следствия теоремы 6.3 отметим следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть $r \geq 1$, $4/3 < p < 4$, $n \geq 2r+1$, $m \geq 0$. Тогда имеет место оценка

$$\mathcal{E}_{n,m}(W_p^r(1)) \leq c(r, p) (n+m)^{-r+1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in W_p^r(1)$. Рассмотрим два случая: $m \leq n$ и $n < m$. В первом из этих случаев положим $p_{n+2r}(x) = \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)$, $\tau_m(x) \equiv 0$ и будем приближать функцию $f(x)$ алгебро-тригонометрическим полиномом $p_{n+2r}(x) + \tau_m(x)$. Из теоремы 6.3 непосредственно вытекает оценка

$$|f(x) - p_{n+2r}(x) - \tau_m(x)| \leq c(r, p) (n+m)^{-r+1/p}. \quad (6.44)$$

Во втором случае рассмотрим функцию $g_n(x) = f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)$. Обозначим через $S_m(g_n, x) = \sum_{k=-m}^m \hat{g}_{n,k} e^{i\pi k x}$ частичную сумму порядка m тригонометрического ряда Фурье функции $g = g(x)$. Из теоремы 6.3 следует,

что $g \in \widetilde{W}_p^r(c(r, p)E_{n+r}(f^{(r)})_p)$. Поэтому (см. [13])

$$\|f - \mathcal{Y}_{n+2r}(f) - S_m(g_n)\|_{C[-1,1]} \leq c(r, p)m^{-r+1/p} \leq c(r, p)(m+n)^{-r+1/p}. \quad (6.45)$$

Утверждение теоремы 6.4 вытекает из (6.44) и (6.45).

Список литературы

- [1] И. И. Шарапудинов, “Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье–Лежандра”, *Матем. сб.*, **191**:5 (2000), 143–160; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “Approximation of functions of variable smoothness by Fourier–Legendre sums”, *Sb. Math.*, **191**:5 (2000), 759–777.
- [2] И. И. Шарапудинов, “Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства”, *Матем. сб.*, **194**:3 (2003), 115–148; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “Mixed series in ultraspherical polynomials and their approximation properties”, *Sb. Math.*, **194**:3 (2003), 423–456.
- [3] И. И. Шарапудинов, “Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов”, *Матем. заметки*, **72**:5 (2002), 765–795; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “Approximation properties of the operators $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ and of their discrete analogs”, *Math. Notes*, **72**:5–6 (2002), 705–732.
- [4] И. И. Шарапудинов, *Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения*, Даг. науч. центр РАН, Махачкала, 2004.
- [5] И. И. Шарапудинов, “Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r ”, *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 135–154; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “Approximation properties of mixed series in terms of Legendre polynomials on the classes W^r ”, *Sb. Math.*, **197**:3 (2006), 433–452.
- [6] И. И. Шарапудинов, “Аппроксимативные свойства средних типа Валье Пуссена частичных сумм смешанного ряда по полиномам Лежандра”, *Матем. заметки*, **84**:3 (2008), 452–471; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “Approximation properties of the Vallée-Poussin means of partial sums of a mixed series of Legendre polynomials”, *Math. Notes*, **84**:3–4 (2008), 417–434.
- [7] Г. Церё, *Ортогональные многочлены*, Физматлит, М., 1962; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959.
- [8] С. А. Теляковский, “Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами”, *Матем. сб.*, **70**(112):2 (1966), 252–265.
- [9] И. З. Гопенгауз, “К теореме А. Ф. Тимана о приближении функций многочленами на конечном отрезке”, *Матем. заметки*, **1**:2 (1967), 163–172; англ. пер.: I. E. Gopengauz, “A theorem of A. F. Timan on the approximation of functions by polynomials on a finite segment”, *Math. Notes*, **1**:2 (1967), 110–116.
- [10] Н. Pollard, “The mean convergence of orthogonal series. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **62**:3 (1947), 387–403.
- [11] Н. Pollard, “The mean convergence of orthogonal series. II”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63**:2 (1948), 355–367.
- [12] Н. Pollard, “The mean convergence of orthogonal series. III”, *Duke. Math. J.*, **16**:1 (1949), 189–191.
- [13] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближения функций*, Изд-во МГУ, М., 1976.

И. И. Шарапудинов (I. I. Sharapudinov)
 Дагестанский научный центр РАН, г. Махачкала
 E-mail: sharapud@iwt.ru

Поступила в редакцию
 09.06.2009 и 06.05.2010