Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Своровска, Восстановление функции по ее тригонометрическому интегралу, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 7, 121–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7588>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:10:48

УДК 517.52

Т. А. Своровска

Восстановление функции по ее тригонометрическому интегралу

В работе показано, что аппроксимативный симметрический интеграл Хенстока–Курцвейля решает задачу восстановления функции по ее тригонометрическому интегралу. Тем самым обобщена теорема Оффорда, представляющая собой аналог теоремы Валле Пуссена для тригонометрических рядов. Получено новое условие для представимости функции сингулярным интегралом Фурье.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: тригонометрический интеграл, аппроксимативный симметрический интеграл, теорема Прейсса–Томсона, теорема Оффорда, сингулярный интеграл Фурье.

Теорема Валле Пуссена утверждает: если тригонометрический ряд всюду вне некоторого счетного множества сходится к конечной интегрируемой по Лебегу функции f , то он является ее рядом Фурье–Лебега. Но поскольку сумма всюду сходящегося тригонометрического ряда может не быть интегрируемой по Лебегу (см. [1]), то для восстановления коэффициентов сходящегося тригонометрического ряда с помощью формул Фурье необходим более общий процесс интегрирования. Первое такое обобщение было сделано А. Данжуа. В заметке [2] он описал интеграл второго порядка, названный тотализацией T_{2s} , который восстанавливает функцию по ее второй симметрической производной Римана. Позднее рядом авторов были построены другие интегралы второго порядка, решающие поставленную задачу. Последним шагом в данном направлении стало введение в 1989 г. в работе [3] интеграла уже первого порядка, относительно которого любой сходящийся всюду тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы. Построение данного интеграла, названного аппроксимативным симметрическим интегралом Хенстока–Курцвейля, опиралось на факт, доказанный А. Зигмундом в [1; т. 1, гл. IX, теорема (2.22)]: если тригонометрический ряд сходится всюду к конечной функции f , то ряд, полученный из исходного формальным интегрированием, сходится почти всюду к некоторой функции F и f является аппроксимативной симметрической производной функции F . Аппроксимативный симметрический интеграл Хенстока–Курцвейля восстанавливает измеримую функцию по ее аппроксимативной симметрической производной.

В настоящей работе мы покажем, что аппроксимативный симметрический интеграл Хенстока–Курцвейля также решает задачу восстановления функции

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00669) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2787.2008.1).

по ее тригонометрическому интегралу. Отметим, что полученный нами результат является обобщением теоремы Оффорда, являющейся аналогом теоремы Валле Пуссена для тригонометрических интегралов.

ТЕОРЕМА А (см. [1; т. 2, гл. XVI, теорема (10.3)]). Пусть функция $c(\lambda)$ интегрируема по Лебегу на каждом конечном отрезке и интеграл

$$(L) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} c(\lambda) d\lambda \quad (1)$$

сходится всюду к конечной интегрируемой по Лебегу на каждом конечном отрезке функции $f(x)$.

Тогда

$$c(\mu) = (C, 1) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\mu x} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{\omega} \left(\int_{-t}^t f(x) e^{-i\mu x} dx \right) dt$$

для почти всех μ .

Введем необходимые определения.

Пусть $\mathcal{I}$ – множество всех невырожденных отрезков на $\mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [3; определение 1.1]). Множество $\beta \subset \mathcal{I} \times \mathbb{R}$ называется измеримым аппроксимативным симметрическим элементом, если:

- (i) в каждой паре $(I, x) \in \beta$ отрезок I симметричен относительно точки x , т.е. $I = [x-t, x+t]$, и $T = \{(x, t) : ([x-t, x+t], x) \in \beta\}$ образует измеримое множество на $\mathbb{R} \times (0, \infty)$;
- (ii) для всех $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \searrow 0} \mu(\{t \in (0, h) : (x, t) \notin T\})/h = 0,$$

т.е. концы отрезков I , $(I, x) \in \beta$, образуют множество, для которого точка x является точкой плотности.

Отмеченным отрезком называется пара (I, x) такая, что $x \in I$. Отмеченным подразбиением прямой будем называть конечный набор отмеченных отрезков $\{(I_i, x_i)\}_{i=1}^n$ такой, что для любых различных пар (I_i, x_i) и (I_j, x_j) отрезки I_i и I_j не перекрываются. Если при этом $\bigcup_{i=1}^n I_i = [a, b]$, то набор $\{(I_i, x_i)\}_{i=1}^n$ называем отмеченным разбиением отрезка $[a, b]$.

ТЕОРЕМА В (о покрытии; см. [3; теорема 2.1]). Для любого измеримого аппроксимативного симметрического элемента β существует множество $B \subset \mathbb{R}$ полной меры такое, что для каждого отрезка с концами из множества B существует отмеченное разбиение этого отрезка, все элементы которого принадлежат β .

Совокупность всех измеримых аппроксимативных симметрических элементов, содержащих хотя бы по одному разбиению каждого отрезка с концами в B , будем обозначать AS_B .

В силу теоремы о покрытии имеет смысл следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [3; определение 8.1]). Функция f , определенная всюду на $\mathbb{R}$, называется *ASH-интегрируемой*, если существуют множество B полной меры и функция F на B такие, что для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $\beta \in AS_B$ такой, что для любого отмеченного подразбиения $\pi = \{([y_i, z_i], (y_i + z_i)/2)\} \subset \beta$ прямой с $y_i, z_i \in B$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{\pi} \left(f\left(\frac{y_i + z_i}{2}\right) (z_i - y_i) - (F(z_i) - F(y_i)) \right) \right| < \varepsilon.$$

Для каждой пары точек $a, b \in B$ число $F(b) - F(a)$ называется *ASH-интегралом* функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначается

$$(ASH) \int_a^b f(x) dx.$$

Функция $F(x)$, определенная на множестве B , называется *неопределенным ASH-интегралом* функции f .

Это определение обобщает определение обычного интеграла Хенстока–Курцвейля на отрезке и прямой (см. [4]), а тем самым и определение интеграла Лебега.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если заданы функция $F(h)$ на измеримом множестве E и точка x , то говорят, что $F(h)$ имеет *аппроксимативный предел* при $h \rightarrow x$

$$\text{ap-}\lim_{h \rightarrow x} F(h) = s,$$

если $F(h)$ стремится к s при h , стремящемся к x по множеству $E' \subset E$, имеющему x своей точкой плотности. Так как два множества с точкой плотности x имеют общие точки в любой окрестности x , то существует не более одного аппроксимативного предела.

Функция $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *аппроксимативно непрерывной в точке x* , если существует конечный предел

$$\text{ap-}\lim_{h \rightarrow x} F(h) = F(x).$$

Функция $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *аппроксимативно симметрически непрерывной в точке x* , если

$$\text{ap-}\lim_{h \searrow 0} (F(x + h) - F(x - h)) = 0.$$

Функция $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *аппроксимативно симметрически дифференцируемой в точке x* , если существует конечный предел

$$\text{ap-}\lim_{h \searrow 0} \frac{F(x + h) - F(x - h)}{2h} = F'_{\text{sap}}(x).$$

Если для функции $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x существует конечный предел

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{F(x + h) - 2F(x) + F(x - h)}{h^2} = D^2 F(x),$$

то он называется *второй симметрической производной функции F в точке x* .

Укажем основное свойство введенного интеграла, которое мы будем использовать ниже.

ТЕОРЕМА С (теорема Прейсса–Томсона; см. [3; следствие 8.9]). (i) Если функция F измерима и всюду существует ее аппроксимативная симметрическая производная, равная f , то функция $f = F'_{\text{sap}}$ является ASH -интегрируемой с неопределенным интегралом F .

(ii) Если функция F измерима, аппроксимативно симметрически непрерывна в каждой точке и всюду вне некоторого счетного множества существует ее аппроксимативная симметрическая производная, равная f , то функция $f = F'_{\text{sap}}$ является ASH -интегрируемой с неопределенным интегралом F .

Следующая теорема уточняет связь между введенным интегралом и интегралом Лебега.

ТЕОРЕМА D (см. [3; теорема 8.11]). Если функция f является ASH -интегрируемой и неотрицательной, то f интегрируема по Лебегу на каждом конечном отрезке и соответствующие интегралы согласованы.

Напомним ряд фактов из лебеговской теории общих тригонометрических рядов.

Если имеется ряд $\sum_n c_n e^{inx}$ и $c_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то можно рассмотреть ряд

$$c_0 x + \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx},$$

получающийся из исходного ряда формальным однократным интегрированием. Согласно теореме Карлесона этот ряд как ряд Фурье функции из $\mathcal{L}_2$ сходится почти всюду, его сумму в точках сходимости обозначим l . Функция l называется функцией Лебега.

ТЕОРЕМА E (теорема Райхмана–Зигмунда; см. [5; теорема 9.63]). Функция l всюду аппроксимативно симметрически непрерывна и аппроксимативно непрерывна в каждой точке, где l конечна.

ТЕОРЕМА F (теорема Зигмунда; см. [1; т. 1, гл. IX, теорема (2.22)]). Если $c_n \rightarrow 0$ и ряд $\sum_n c_n e^{inx}$ сходится в точке x_0 к конечной сумме s , то $l'_{\text{sap}}(x_0)$ существует и равна s .

Перейдем к основным результатам работы.

Рассмотрим тригонометрический интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\chi(\lambda), \quad (2)$$

где $\chi(x)$ имеет ограниченную вариацию на каждом конечном интервале, а сам интеграл понимается как

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\chi(\lambda) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\omega}^{\omega} e^{i\lambda x} d\chi(\lambda).$$

Согласно теореме (8.4) из [1; т. 2, гл. XVI] – аналогу теоремы Кантора–Лебега для тригонометрических интегралов, если интеграл (2) сходится на множестве положительной меры, то χ удовлетворяет условию $\mathcal{M}_0$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \sup_{0 \leq h \leq 1} |\chi(\lambda + h) - \chi(\lambda)| = 0 \quad (3)$$

(для рядов это условие в теореме Кантора–Лебега имеет вид $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$).

Далее для всех интегралов вида (2) мы предполагаем, что функция $\chi(\lambda)$ удовлетворяет условию $\mathcal{N}_0$.

Интегрируя (2) формально, можно определить функцию, являющуюся аналогом функции Лебега из теории тригонометрических рядов. При этом к подынтегральной функции добавится множитель λ^{-1} , неограниченный около нуля. Он может сделать новый интеграл расходящимся. Чтобы этого избежать, определим аналог функции Лебега следующим образом:

$$L(x) = \int_{|\lambda| < 1} \frac{e^{i\lambda x} - 1}{i\lambda} d\chi(\lambda) + \int_{|\lambda| \geq 1} \frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda} d\chi(\lambda). \quad (4)$$

Нетрудно проверить, что формальное дифференцирование (4) приводит к (2).

Далее мы покажем, что введенная функция обладает теми же свойствами, что и функция Лебега в теории тригонометрических рядов. Полезным инструментом для проверки этих свойств является следующая теорема, позволяющая переносить результаты, известные для тригонометрических рядов, на тригонометрические интегралы.

ТЕОРЕМА G (первая теорема равносходимости; см. [1; т. 2, гл. XVI, теорема (9.19)]). *Если функция χ удовлетворяет условию $\mathcal{N}_0$, то для любого интервала J длины, меньшей 2π , существует такой тригонометрический ряд $\sum_n c_n e^{inx}$ с коэффициентами, стремящимися к нулю, что*

$$\int_{-\omega}^{\omega} e^{i\lambda x} d\chi(\lambda) - \sum_{|n| \leq \omega} c_n e^{inx} \rightrightarrows 0, \quad x \in J, \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Нам также понадобится уточнение этой теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Если функция χ постоянна в единичной окрестности нуля и удовлетворяет условию $\mathcal{N}_0$, то для любого интервала J длины, меньшей 2π , существует такой тригонометрический ряд $\sum_n c_n e^{inx}$ с коэффициентами $c_n = o(1/n)$, $n \rightarrow \infty$, что имеет место (5).*

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы G.

ЛЕММА 1. *Функция $L(x)$ определена для почти всех x .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Обозначим

$$I_1(x) = \int_{|\lambda| < 1} \frac{e^{i\lambda x} - 1}{i\lambda} d\chi(\lambda).$$

Если $x = 0$, то $I_1(x) = 0$.

Если $x \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \left| \int_{|\lambda| < 1} \frac{e^{i\lambda x} - 1}{i\lambda} d\chi(\lambda) \right| &\leq \int_{|\lambda| < 1} \left| \frac{e^{i\lambda x} - 1}{i\lambda} \right| |d\chi(\lambda)| \\ &= \int_{|\lambda| < 1} |e^{i\lambda x/2}| \left| \frac{e^{i\lambda x/2} - e^{-i\lambda x/2}}{i\lambda x} \right| |x| |d\chi(\lambda)| \\ &= |x| \int_{|\lambda| < 1} \left| \frac{\sin(\lambda x/2)}{\lambda x/2} \right| |d\chi(\lambda)| \leq |x| \operatorname{Var}_{[-1,1]} \chi < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл $I_1(x)$ сходится в каждой точке x .

II. В силу п. I можно предполагать, что функция χ постоянна на $(-1, 1)$, и изучать только сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{\lambda} d\chi(\lambda), \quad \text{где } \chi \equiv \text{const на } (-1, 1).$$

Применим к интегралу $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{\lambda} d\chi(\lambda)$ теорему 1. Возьмем произвольный интервал J длины, меньшей 2π , и найдем тригонометрический ряд $\sum_n c_n e^{inx}$ с $c_n = o(1/n)$, $n \rightarrow \infty$, такой, что

$$\int_{-\omega}^{\omega} \frac{e^{i\lambda x}}{\lambda} d\chi(\lambda) - \sum_{|n| \leq \omega} c_n e^{inx} \Rightarrow 0, \quad x \in J, \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Найденный ряд $\sum_n c_n e^{inx}$ согласно теореме Рисса–Фишера является рядом Фурье функции из $\mathcal{L}_2$, поэтому по теореме Карлесона он сходится почти всюду. Значит, почти всюду на J сходится и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{\lambda} d\chi(\lambda)$. Покрывая всю ось $\mathbb{R}$ интервалами J , $|J| < 2\pi$, и повторяя проведенные рассуждения, получаем сходимость рассматриваемого интеграла почти всюду на $\mathbb{R}$.

Таким образом, функция $L(x)$ определена почти всюду на $\mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 2. *Функция L всюду аппроксимативно симметрически непрерывна и аппроксимативно непрерывна в каждой точке, где L конечна. Если интеграл (2) сходится в точке x_0 к числу s , то существует $L'_{\text{sap}}(x_0) = s$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольный отрезок $J = [a, b]$ длины, меньшей 2π . Согласно первой теореме равносходимости для J существует ряд $\sum_n c_n e^{inx}$ с коэффициентами $c_n \rightarrow 0$ такой, что

$$H_{\omega}(t) = \int_{-\omega}^{\omega} e^{i\lambda t} d\chi(\lambda) - \sum_{|n| \leq \omega} c_n e^{int} \Rightarrow 0, \quad t \in J, \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Справа сколь угодно близко от точки a можно найти точку a' , в которой существуют

$$L(a') = \int_{|\lambda| < 1} \frac{e^{i\lambda a'} - 1}{i\lambda} d\chi(\lambda) + \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{1 \leq |\lambda| \leq \omega} \frac{e^{i\lambda a'}}{i\lambda} d\chi(\lambda),$$

$$l(a') = c_0 a' + \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq \omega, n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{ina'}.$$

Проинтегрируем функцию $H_{\omega}(t)$ по $[a', x]$, $x \in [a', b]$:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\omega}(x) &= \int_{a'}^x H_{\omega}(t) dt \\ &= \int_{|\lambda| < 1} \frac{e^{i\lambda x} - 1}{i\lambda} d\chi(\lambda) + \int_{1 \leq |\lambda| \leq \omega} \frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda} d\chi(\lambda) - c_0 x - \sum_{|n| \leq \omega, n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx} \\ &\quad - \left(\int_{|\lambda| < 1} \frac{e^{i\lambda a'} - 1}{i\lambda} d\chi(\lambda) + \int_{1 \leq |\lambda| \leq \omega} \frac{e^{i\lambda a'}}{i\lambda} d\chi(\lambda) - c_0 a' - \sum_{|n| \leq \omega, n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{ina'} \right). \end{aligned}$$

Изменение порядка интегрирования законно в силу теоремы Фубини, примененной к ограниченным множествам $[a', x] \times [-1, 1]$, $[a', x] \times ([-\omega, -1] \cup [1, \omega])$ и ограниченным на этих множествах функциям, а изменение порядка интегрирования и суммирования законно в силу конечного числа слагаемых в сумме.

Обозначим

$$A_\omega = \int_{|\lambda| < 1} \frac{e^{i\lambda a'} - 1}{i\lambda} d\chi(\lambda) + \int_{1 \leq |\lambda| \leq \omega} \frac{e^{i\lambda a'} - 1}{i\lambda} d\chi(\lambda) - c_0 a' - \sum_{|n| \leq \omega, n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{ina'}.$$

Согласно выбору точки a' конечен предел $\lim_{\omega \rightarrow \infty} A_\omega = L(a') - l(a') =: A$. По лемме 1 и теореме Карлесона почти всюду на $[a', b]$ существует

$$\begin{aligned} & \int_{|\lambda| < 1} \frac{e^{i\lambda x} - 1}{i\lambda} d\chi(\lambda) + \int_{|\lambda| \geq 1} \frac{e^{i\lambda x} - 1}{i\lambda} d\chi(\lambda) - c_0 x - \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx} - A \\ &= L(x) - l(x) - A = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \tilde{H}_\omega(x). \end{aligned}$$

Учитывая, что $H_\omega(x) \rightrightarrows 0$ на J при $\omega \rightarrow \infty$, получаем, что $\tilde{H}_\omega(x) \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \infty$. Отсюда $L(x) = l(x) + A$ почти всюду на $[a', b]$.

Значит, L на отрезке $[a', b]$ почти всюду совпадает с функцией l , которая по теореме Райхмана–Зигмунда аппроксимативно симметрически непрерывна и аппроксимативно непрерывна в каждой точке, где L конечна. Покрывая прямую отрезками длины, меньшей 2π , и повторяя рассуждения, получим, что L всюду аппроксимативно симметрически непрерывна и аппроксимативно непрерывна в каждой точке, где L конечна.

Пусть теперь интеграл (2) сходится в точке x_0 к числу s . Фиксируем отрезок $J = [a, b]$, содержащий внутри точку x_0 . Рассмотрим соответствующий ему ряд $\sum_n c_n e^{inx}$, удовлетворяющий первой теореме равносходимости, и определяемую им функцию l . Найдем точку a' по описанной выше схеме так, чтобы $x_0 \in (a', b)$. Тогда $\sum_n c_n e^{inx_0} = s$ и $L(x) - l(x) = \text{const}$ почти всюду на $[a', b]$. Согласно теореме Зигмунда $l'_{\text{sap}}(x_0) = s$, поэтому существует $L'_{\text{sap}}(x_0) = l'_{\text{sap}}(x_0) = s$. Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА Н (теорема Лебега; см. [1; т. 1, гл. II, теорема (1.11)]). *Если функция $c(t)$ интегрируема по Лебегу на отрезке, то для почти всех точек этого отрезка*

$$\Phi_x(h) = \int_0^h |c(x+t) - c(x)| dt = o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

Всякая точка x , в которой имеет место это равенство, называется *точкой Лебега* для функции c .

ЛЕММА 2. *Пусть функция $c(t)$ интегрируема по Лебегу на каждом конечном отрезке и $\int_0^\lambda c(t) dt$ удовлетворяет свойству $\mathcal{N}_0$. Тогда*

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(x+t) \frac{2 \sin^2(\omega t/2)}{\omega t^2} dt = c(x)$$

для почти всех x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся идеями из доказательства теоремы 1 в работе Г. Г. Геворкяна [6]. Пусть точка x является точкой Лебега для функции c . Обозначим $F(t) = \int_0^t c(u) du$; a_j — нуль функции $(\frac{\sin^2(\omega t/2)}{\omega t^2})'$ на интервале $(\frac{2\pi}{\omega}j, \frac{2\pi}{\omega}(j+1))$. Легко видеть, что на отрезках $[\frac{2\pi}{\omega}j, a_j]$, $[a_j, \frac{2\pi}{\omega}(j+1)]$, $j = 1, 2, \dots$, функция $(\frac{\sin^2(\omega t/2)}{\omega t^2})'$ не меняет свой знак. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{2\pi}^{\infty} c(x+t) \frac{\sin^2(\omega t/2)}{\omega t^2} dt \right| &= \left| \int_{2\pi}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega t/2)}{\omega t^2} dF(x+t) \right| \\ &\leq \sum_{j=[\omega]}^{\infty} \left(\left| \int_{2\pi j/\omega}^{a_j} \frac{\sin^2(\omega t/2)}{\omega t^2} dF(x+t) \right| + \left| \int_{a_j}^{2\pi(j+1)/\omega} \frac{\sin^2(\omega t/2)}{\omega t^2} dF(x+t) \right| \right) \\ &\leq \sum_{j=[\omega]}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega a_j/2)}{\omega a_j^2} \{ |F(x+a_j) - F(x+\xi_j)| + |F(x+a_j) - F(x+\xi'_j)| \}, \end{aligned}$$

где ξ_j и ξ'_j — некоторые точки из отрезков $[\frac{2\pi}{\omega}j, a_j]$ и $[a_j, \frac{2\pi}{\omega}(j+1)]$ соответственно.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \int_{2\pi}^{\infty} c(x+t) \frac{\sin^2(\omega t/2)}{\omega t^2} dt \right| &\leq 2 \sum_{j=[\omega]}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega a_j/2)}{\omega a_j^2} \sup_{2\pi j/\omega \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi(j+1)/\omega} |F(x+t_1) - F(x+t_2)|. \end{aligned}$$

Оценим правую часть неравенства. Точки a_j принадлежат интервалу $(\frac{2\pi}{\omega}j, \frac{2\pi}{\omega}(j+1))$, поэтому справедлива следующая оценка:

$$2 \sum_{j=[\omega]}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega a_j/2)}{\omega a_j^2} < \sum_{j=[\omega]}^{\infty} \frac{\omega}{2\pi^2 j^2} < \frac{\omega}{2\pi^2 [\omega]} < 1.$$

По условию леммы функция F удовлетворяет условию $\mathcal{N}_0$. Значит, и функция $F(x+t)$ как функция переменной t удовлетворяет условию $\mathcal{N}_0$, т.е. для произвольного фиксированного числа $\varepsilon > 0$ существует число $U > 0$ такое, что при всех $|t_1|, |t_2| > U$ выполняется неравенство

$$\sup_{0 \leq |t_1 - t_2| \leq 1} |F(x+t_1) - F(x+t_2)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

Функция F как неопределенный интеграл локально интегрируемой по Лебегу функции c равномерно непрерывна на отрезке $[x, x+U]$. Значит, существует $\delta > 0$ такое, что при всех $t_1, t_2 \in [x, x+U]$

$$|t_1 - t_2| < \delta, \quad |F(t_1) - F(t_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Фиксируем $W > 0$ такое, что $W^{-1} < \delta$. Возьмем произвольное $\omega > W$.

Найдем номер J такой, что $\frac{2\pi}{\omega}J > U$. Тогда при всех $j > J$ в силу (6) выполняется оценка

$$\sup_{2\pi j/\omega \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi(j+1)/\omega} |F(x+t_1) - F(x+t_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Объединяя все полученные оценки, при $\omega > W$ имеем

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{j=[\omega]}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega a_j/2)}{\omega a_j^2} \sup_{2\pi j/\omega \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi(j+1)/\omega} |F(x+t_1) - F(x+t_2)| \\ &= 2 \sum_{j=[\omega]}^J \frac{\sin^2(\omega a_j/2)}{\omega a_j^2} \sup_{2\pi j/\omega \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi(j+1)/\omega} |F(x+t_1) - F(x+t_2)| \\ &+ 2 \sum_{j=J+1}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega a_j/2)}{\omega a_j^2} \sup_{2\pi j/\omega \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi(j+1)/\omega} |F(x+t_1) - F(x+t_2)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left| \int_{2\pi}^{\infty} c(x+t) \frac{\sin^2(\omega t/2)}{\omega t^2} dt \right| = o(1)$$

при $\omega \rightarrow \infty$.

Точно так же можно получить

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{-2\pi} c(x+t) \frac{\sin^2(\omega t/2)}{\omega t^2} dt \right| \leq 2 \sum_{j=[\omega]}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega a_j/2)}{\omega a_j^2} \\ & \times \sup_{2\pi j/\omega \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi(j+1)/\omega} |F(x-t_1) - F(x-t_2)| = o(1), \quad \omega \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Из последних двух оценок получаем

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} c(x+t) \frac{\sin^2(\omega t/2)}{\omega t^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} c(x+t) \frac{\sin^2(\omega t/2)}{\omega t^2} dt + o(1).$$

Из последнего равенства и теоремы Лебега (см. [1; т. 1, гл. III, теорема (3.9)]) для тригонометрических рядов Фурье следует, что в точке x , так как она является точкой Лебега для c , выполняется утверждение леммы 2.

В силу теоремы Н утверждение леммы 2 выполняется для почти всех точек x .

Докажем следующее утверждение, относящееся к теории сингулярного интеграла Фурье (см. [1; т. 2, гл. XVI, § 1] и [7]–[9]).

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если тригонометрический интеграл (1) сходится к конечной функции $f(x)$ всюду вне некоторого не более чем счетного множества E , то

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega \pi} \int_0^{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda dt = c(\mu)$$

для почти всех μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольное μ . Формально умножим интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} c(\lambda) d\lambda$ на $e^{-i\mu x}$. Получим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} c(\lambda + \mu) d\lambda, \quad (7)$$

сходящийся вне множества E к конечной функции $f(x)e^{-i\mu x}$. Рассмотрим соответствующий ему аналог функции Лебега

$$\tilde{L}(x) = \int_{|\lambda| < 1} \frac{e^{i\lambda x} - 1}{i\lambda} c(\lambda + \mu) d\lambda + \int_{|\lambda| \geq 1} \frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda} c(\lambda + \mu) d\lambda. \quad (8)$$

По условию интеграл (1) сходится на множестве положительной меры, значит, функция $\int_0^\lambda c(u + \mu) du$ удовлетворяет условию $\mathcal{N}_0$. Поэтому функция $\tilde{L}$ согласно лемме 1 конечна почти всюду. Обозначим множество, где она конечна, через B . Тогда для $t, -t \in B$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{L}(t) - \tilde{L}(-t)}{2\pi} &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{|\lambda| < 1} \left(\frac{e^{i\lambda t} - 1}{i\lambda} - \frac{e^{-i\lambda t} - 1}{i\lambda} \right) c(\lambda + \mu) d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \int_{|\lambda| \geq 1} \left(\frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} - \frac{e^{-i\lambda t}}{i\lambda} \right) c(\lambda + \mu) d\lambda \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda =: S_t(\mu). \end{aligned} \quad (9)$$

Покажем, что функция $S_t(\mu)$ интегрируема по Лебегу по переменной t на каждом отрезке $[0, \omega]$. Действительно, согласно представлению (8) $\tilde{L}(t) = \tilde{L}_1(t) + \tilde{L}_2(t)$. Ясно, что $\tilde{L}_1(t) \in \mathcal{L}[-\omega, \omega]$. Рассмотрим $\tilde{L}_2(t)$. Можно считать, что $c(\lambda) = 0$ при $\lambda \in [\mu - 1, \mu + 1]$. Поэтому

$$\tilde{L}_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} c(\lambda + \mu) d\lambda.$$

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 1, имеем: согласно теореме 1 для каждого J , $|J| < 2\pi$, существует тригонометрический ряд с коэффициентами $c_n = o(1/n)$ такой, что

$$\int_{-\omega}^{\omega} \frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} c(\lambda + \mu) d\lambda - \sum_{|n| \leq \omega} c_n e^{int} \Rightarrow 0$$

на J при $\omega \rightarrow \infty$. Ряд $\sum_n c_n e^{int}$ является рядом Фурье функции из пространства $\mathcal{L}_2$, по теореме Карлесона он сходится к ней почти всюду. Поэтому сумма ряда, а значит, и $\tilde{L}_2(t)$ интегрируемы по Лебегу на J . Покрывая отрезок $[-\omega, \omega]$ интервалами J длины, меньшей 2π , получим интегрируемость функции $\tilde{L}_2(t)$ на отрезке $[-\omega, \omega]$ при всех конечных значениях ω . Значит, для каждого μ функция $S_t(\mu)$ интегрируема на отрезке $[0, \omega]$ при всех конечных значениях ω .

Поскольку

$$\int_0^\omega \sin \lambda t dt = \frac{2 \sin^2(\omega \lambda / 2)}{\lambda},$$

то из рассуждений в доказательстве леммы 2 следует, что в этом случае повторный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\omega} c(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt d\lambda$$

конечен для почти всех μ .

Фиксируем произвольное ω и произвольное μ , для которого оба повторных интеграла конечны. Покажем, что имеет место равенство

$$\int_0^{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\omega} c(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt d\lambda.$$

В силу второй теоремы равносходимости (см. [1; т. 2, гл. XVI, теорема (9.22)]) если функция g локально интегрируема по Лебегу и функция $\int_0^{\lambda} g(u) du$ удовлетворяет условию $\mathcal{N}_0$, то для произвольного отрезка J существует непрерывная (даже бесконечно дифференцируемая) функция $h(\lambda)$, $h(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \pm\infty$, такая, что

$$\int_{-u}^u g(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda - \int_{-u}^u h(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda$$

стремится равномерно на J к нулю при $u \rightarrow \infty$. Функция $c(\lambda + \mu)$ как функция переменной λ удовлетворяет условиям этой теоремы. Возьмем в качестве J отрезок $[-\omega - 1, \omega + 1]$ и найдем соответствующую функцию h такую, что

$$\int_{-u}^u c(\lambda + \mu) e^{i\lambda t} d\lambda - \int_{-u}^u h(\lambda + \mu) e^{i\lambda t} d\lambda \Rightarrow 0, \quad t \in J, \quad u \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Тогда тригонометрический интеграл функции $h(\lambda + \mu)$ сходится на множестве положительной меры; значит, функция $\int_0^{\lambda} h(u + \mu) du$ удовлетворяет условию $\mathcal{N}_0$.

Аналогично построению функции $\tilde{L}(x)$ для функции h можно построить функцию $\tilde{L}_h(x)$ (заменить в формуле (8) функцию c на h). В силу (10), проводя рассуждения, использованные в доказательстве теоремы 2, имеем $\tilde{L}_h(x) = \tilde{L}(x) + C$ для почти всех x из $[-\omega, \omega]$, C – постоянная величина. Следовательно, для почти всех t из отрезка $[0, \omega]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda.$$

Число ω фиксировано, поэтому

$$\int_0^{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda dt = \int_0^{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda dt. \quad (11)$$

По построению функция h является ограниченной функцией на всей прямой, поэтому функция

$$\frac{h(\lambda)}{2i\lambda} \chi_{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)}(\lambda)$$

интегрируема с квадратом на всей прямой.

Согласно теореме Планшереля (см. [10; теорема 9.13]) функция

$$\int_{|\lambda| \geq 1} \frac{h(\lambda + \mu)}{2i\lambda} e^{-i\lambda t} d\lambda$$

как преобразование Фурье функции из $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ существует для почти всех t и величины

$$\int_{1 \leq |\lambda| \leq C} h(\lambda + \mu) \frac{e^{-i\lambda t}}{2i\lambda} d\lambda$$

сходятся к ней в среднем квадратичном при $C \rightarrow \infty$.

Рассмотрим

$$\int_{1 \leq |\lambda| \leq C} h(\lambda + \mu) \frac{e^{i\lambda t}}{2i\lambda} d\lambda.$$

Сделаем замену $t = -u$. Согласно проведенному выше рассуждению величины

$$\int_{1 \leq |\lambda| \leq C} h(\lambda + \mu) \frac{e^{-i\lambda u}}{2i\lambda} d\lambda$$

сходятся в среднем квадратичном при $C \rightarrow \infty$ к $\int_{|\lambda| \geq 1} \frac{h(\lambda + \mu)}{2i\lambda} e^{-i\lambda u} d\lambda$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{|\lambda| \geq 1} h(\lambda + \mu) \frac{e^{i\lambda t}}{2i\lambda} d\lambda - \int_{1 \leq |\lambda| \leq C} h(\lambda + \mu) \frac{e^{i\lambda t}}{2i\lambda} d\lambda \right|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{|\lambda| \geq 1} h(\lambda + \mu) \frac{e^{-i\lambda u}}{2i\lambda} d\lambda - \int_{1 \leq |\lambda| \leq C} h(\lambda + \mu) \frac{e^{-i\lambda u}}{2i\lambda} d\lambda \right|^2 du \rightarrow 0, \\ & C \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Значит, в силу справедливости неравенства треугольника в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ существует предел в среднем квадратичном

$$\text{l. i. m.}_{C \rightarrow \infty} \int_{-C}^C h(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \int_0^{\omega} \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda - \int_{-C}^C h(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda \right|^2 dt \\ & < \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda - \int_{-C}^C h(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda \right|^2 dt \rightarrow 0, \\ & C \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

и в силу неравенства Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-C}^C \int_0^{\omega} h(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt d\lambda - \int_0^{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda dt \right|^2 \\ &= \left| \int_0^{\omega} \left(\int_{-C}^C h(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda \right) dt \right|^2 \\ &\leq \omega \int_0^{\omega} \left| \int_{-C}^C h(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda \right|^2 dt \rightarrow 0, \\ & C \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\omega} h(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt d\lambda = \int_0^{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda dt. \quad (12)$$

Осталось показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\omega} h(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\omega} c(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt d\lambda.$$

Рассмотрим функцию Римана для тригонометрического интеграла (7), получающуюся в результате его двукратного формального интегрирования,

$$\tilde{F}(x) = - \int_{|\lambda| < 1} \frac{e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x}{\lambda^2} c(\lambda + \mu) d\lambda - \int_{|\lambda| \geq 1} \frac{e^{i\lambda x}}{\lambda^2} c(\lambda + \mu) d\lambda.$$

Интеграл в правой части сходится равномерно на каждом конечном отрезке изменения x , поэтому функция $\tilde{F}$ непрерывна. Согласно [1; т. 2, гл. XVI, теорема (8.16)] если функция $\int_0^{\lambda} c(u) du$ удовлетворяет условию $\mathcal{N}_0$ и F является функцией Римана для тригонометрического интеграла функции c , то функция F является гладкой в каждой точке, т.е. $F(x+h) - 2F(x) + F(x-h) = o(h)$ при $h \rightarrow 0$ для всех x . Если же при этом известно, что тригонометрический интеграл функции c сходится в точке x_0 к значению s , то по [1; т. 2, гл. XVI, теорема (8.14)] вторая симметрическая производная $D^2 F(x_0)$ существует и равна s . Поэтому при наших предположениях всюду вне множества E вторая симметрическая производная $D^2 \tilde{F}(x)$ равна $f(x)e^{-i\mu x}$ – значению тригонометрического интеграла (7), и функция $\tilde{F}$ является гладкой в каждой точке.

Аналогично, рассмотрим функцию Римана для тригонометрического интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} h(\lambda + \mu) d\lambda$:

$$\tilde{F}_h(x) = - \int_{|\lambda| < 1} \frac{e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x}{\lambda^2} h(\lambda + \mu) d\lambda - \int_{|\lambda| \geq 1} \frac{e^{i\lambda x}}{\lambda^2} h(\lambda + \mu) d\lambda.$$

Вновь функция $\tilde{F}_h$ является непрерывной, согласно [1; т. 2, гл. XVI, теорема (8.16)] она является гладкой в каждой точке и в силу [1; т. 2, гл. XVI, теорема (8.14)] имеет место равенство $D^2 \tilde{F}_h(x) = f(x)e^{-i\mu x}$ при $x \in [-\omega, \omega] \setminus E$.

Функции $\tilde{F}(x)$ и $\tilde{F}_h(x)$ являются непрерывными, гладкими на $[-\omega, \omega]$ и $D^2(\tilde{F}(x) - \tilde{F}_h(x)) = 0$ на $[-\omega, \omega] \setminus E$. Согласно [1; т. 1, гл. IX, лемма (3.20)] если функция $H(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $D^2 H(x) \geq 0$ для каждого x , за исключением, быть может, счетного множества U , и

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{H(x+h) - 2H(x) + H(x-h)}{h} \geq 0$$

для $x \in U$, то функция H выпукла на $[a, b]$. Функции $\tilde{F}(x) - \tilde{F}_h(x)$ и $\tilde{F}_h(x) - \tilde{F}(x)$ удовлетворяют условиям этой теоремы, поэтому они выпуклы на $[-\omega, \omega]$; значит, $\tilde{F}(x) - \tilde{F}_h(x) = \alpha x + \beta$ на $[-\omega, \omega]$.

Нетрудно проверить, что имеют место равенства

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda + \mu) \frac{2 \sin^2(\omega \lambda / 2)}{\lambda^2} d\lambda &= \frac{\tilde{F}_h(\omega) + \tilde{F}_h(-\omega)}{2} + \int_{|\lambda| \geq 1} \frac{h(\lambda + \mu)}{\lambda^2} d\lambda, \\ \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda + \mu) \frac{2 \sin^2(\omega \lambda / 2)}{\lambda^2} d\lambda &= \frac{\tilde{F}(\omega) + \tilde{F}(-\omega)}{2} + \int_{|\lambda| \geq 1} \frac{c(\lambda + \mu)}{\lambda^2} d\lambda.\end{aligned}$$

Но, как показано выше, $\tilde{F}_h(x) = \tilde{F}(x) - \alpha x - \beta$ на $[-\omega, \omega]$, в частности эта связь имеет место при $x = \pm\omega$. Значит,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda + \mu) \frac{2 \sin^2(\omega \lambda / 2)}{\lambda^2} d\lambda &= \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda + \mu) \frac{2 \sin^2(\omega \lambda / 2)}{\lambda^2} d\lambda - \beta \\ &\quad - \int_{|\lambda| \geq 1} \frac{c(\lambda + \mu)}{\lambda^2} d\lambda + \int_{|\lambda| \geq 1} \frac{h(\lambda + \mu)}{\lambda^2} d\lambda.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\beta = \tilde{F}(0) - \tilde{F}_h(0) = - \int_{|\lambda| \geq 1} \frac{c(\lambda + \mu)}{\lambda^2} d\lambda + \int_{|\lambda| \geq 1} \frac{h(\lambda + \mu)}{\lambda^2} d\lambda.$$

Значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda + \mu) \frac{2 \sin^2(\omega \lambda / 2)}{\lambda^2} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda + \mu) \frac{2 \sin^2(\omega \lambda / 2)}{\lambda^2} d\lambda.$$

Поскольку

$$\int_0^{\omega} \sin \lambda t dt = \frac{2 \sin^2(\omega \lambda / 2)}{\lambda},$$

то отсюда и из (11) и (12) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\omega} c(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt d\lambda = \int_0^{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda dt,$$

что и требовалось показать.

Таким образом,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\omega} S_t(\mu) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda + \mu) \frac{2 \sin^2(\omega \lambda / 2)}{\omega \lambda^2} d\lambda,$$

где функция $S_t(\mu)$ определяется равенством (9). Согласно лемме 2 правая часть почти всюду сходится при $\omega \rightarrow \infty$ к $c(\mu)$. В этом случае говорят, что $S_t(\mu)$ сходится в смысле $(C, 1)$ -сходимости к $c(\mu)$ почти всюду. Утверждение доказано.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $c(\lambda)$ интегрируема по Лебегу на каждом конечном отрезке и ее тригонометрический интеграл (1) всюду вне некоторого не более чем счетного множества E сходится к конечной функции $f(x)$. Тогда функции $f(x)$ и $f(x)e^{-i\mu x}$ являются ASH -интегрируемыми и

$$c(\mu) = (C, 1) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\mu x} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{\omega} \left(\int_{-t}^t f(x) e^{-i\mu x} dx \right) dt \quad (13)$$

для почти всех μ , где интегралы по переменной x понимаются в смысле аппроксимативного симметрического интеграла Хенстока–Курцвейля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для упрощения дальнейших обозначений всюду далее при интегрировании по переменной x процесс интегрирования будет пониматься в смысле аппроксимативного симметрического интеграла Хенстока–Курцвейля. Для всех остальных переменных интегрирование будет пониматься в смысле интеграла Лебега.

Формально умножим интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} c(\lambda) d\lambda$ на $e^{-i\mu x}$. Получим тригонометрический интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} c(\lambda + \mu) d\lambda$, сходящийся вне множества E к конечной функции $f(x)e^{-i\mu x}$. Рассмотрим соответствующий ему аналог функции Лебега:

$$\tilde{L}(x) = \int_{|\lambda| < 1} \frac{e^{i\lambda x} - 1}{i\lambda} c(\lambda + \mu) d\lambda + \int_{|\lambda| \geq 1} \frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda} c(\lambda + \mu) d\lambda. \quad (14)$$

Функция $\int_0^\lambda c(u + \mu) du$ удовлетворяет условию $\mathcal{N}_0$, поэтому по теореме 2 функция $\tilde{L}$ всюду аппроксимативно симметрически непрерывна и $\tilde{L}'_{\text{sap}}(x) = f(x)e^{-i\mu x}$ для каждого $x \notin E$. Отсюда по теореме Прейсса–Томсона получаем, что функция $f(x)e^{-i\mu x}$ интегрируема в смысле ASH -интеграла с неопределенным интегралом $\tilde{L}$ и на каждом конечном отрезке с концами из множества B полной меры, в точках которого $\tilde{L}$ конечна:

$$\int_a^b f(x)e^{-i\mu x} dx = \tilde{L}(b) - \tilde{L}(a), \quad a, b \in B.$$

Выберем $t, -t \in B$, тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-t}^t f(x)e^{-i\mu x} dx = \frac{1}{2\pi} (\tilde{L}(t) - \tilde{L}(-t)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda + \mu) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda = S_t(\mu). \quad (15)$$

Согласно доказанному выше утверждению $S_t(\mu)$ сходится для почти всех μ в смысле $(C, 1)$ к $c(\mu)$. Отсюда

$$c(\mu) = (C, 1) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\mu x} dx \quad \text{почти всюду.}$$

Теорема 3 доказана.

Как следствие получаем, что каждое не более чем счетное множество является множеством единственности для тригонометрического интеграла.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если тригонометрический интеграл (1) сходится к функции f всюду вне некоторого не более чем счетного множества и B – множество точек, в которых неопределенный ASH -интеграл F функции f конечен, то для всех $a, b \in B$

$$(ASH) \int_a^b f(x) dx = (L) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda} c(\lambda) d\lambda.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть тригонометрический интеграл (1) сходится к функции f всюду вне некоторого не более чем счетного множества. Если $f \geq g$,

a и g является локально интегрируемой по Лебегу (соответственно Хенстоку–Курцвейлю), то для почти всех μ функция $c(\lambda)$ восстанавливается по формуле (13), в которой интеграл по переменной x понимается как интеграл Лебега (соответственно Хенстока–Курцвейля).

Действительно, согласно теореме 3 функция f аппроксимативно симметрически интегрируема и, как было отмечено ранее, если функция g интегрируема по Лебегу (соответственно Хенстоку–Курцвейлю), то она ASH -интегрируема и все интегралы согласованы. Значит, функция $f - g$ аппроксимативно симметрически интегрируема по Хенстоку–Курцвейлю. В силу неотрицательности функции $f - g$ согласно теореме D она локально интегрируема по Лебегу. Следовательно, функция f локально интегрируема по Лебегу (соответственно Хенстоку–Курцвейлю). Значит, в формуле (13) ASH -интегралы по переменной x можно заменить на интегралы Лебега (соответственно Хенстока–Курцвейля).

Автор выражает благодарность научному руководителю В. А. Скворцову за постоянное внимание и ценные обсуждения в процессе работы. Автор благодарит рецензента за информацию о работе [6], знакомство с которой позволило существенно сократить доказательство леммы 2.

Список литературы

- [1] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, 2, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, v. I, II, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.
- [2] A. Denjoy, “Une extension de l’intégrale de M. Lebesgue”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **154** (1912), 859–862.
- [3] D. Preiss, B. S. Thomson, “The approximate symmetric integral”, *Canad. J. Math.*, **41**:3 (1989), 508–555.
- [4] K. M. Ostaszewski, *Henstock integral in the plane*, Mem. Amer. Math. Soc., **63**, № 353, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [5] B. S. Thomson, *Symmetric properties of real functions*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **183**, Marcel Dekker, New York, 1994.
- [6] Г. Г. Геворкян, “О единственности интегралов Фурье, сходящихся в метриках L_p , $p > 0$, на каждом конечном интервале”, *Докл. АН Арм. ССР*, **84**:1 (1987), 21–25.
- [7] Н. Винер, *Интеграл Фурье и некоторые его приложения*, Физматгиз, М., 1963; пер. с англ.: N. Wiener, *The Fourier integral and certain of its applications*, Dover, New York, 1959.
- [8] N. Wiener, “Generalized harmonic analysis”, *Acta Math.*, **55**:1 (1930), 117–258.
- [9] С. Бохнер, *Лекции об интегралах Фурье*, Физматгиз, М., 1962; пер. с англ.: S. Bochner, *Lectures on Fourier integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1959.
- [10] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1974.

Т. А. Своровска (Т. А. Sworowska)
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: tazherebyova@yandex.ru

Поступила в редакцию
10.06.2009 и 03.12.2009