Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Б. Банару, О сасакиевых гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 8, 13–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm759>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 11:54:10

УДК 513.74

М. Б. Банару

О сасакиевых гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли

Установлен критерий минимальности сасакиевой гиперповерхности 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры октав. Доказано, что типовое число сасакиевой гиперповерхности 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры октав равно или четырем, или пяти. Доказано также, что сасакиева гиперповерхность 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли является минимальной в том и только том случае, если она линейчатая.

Библиография: 35 названий.

§ 1

В современных дифференциально-геометрических исследованиях значительное место отводится теории почти контактных метрических структур. Причины этого — в многочисленных приложениях теории в математической физике (например, в классической механике [1] и теории геометрического квантования [2]), в богатстве ее внутреннего содержания, а также в теснейших связях ее с другими разделами геометрии.

Напомним, что почти контактной метрической структурой на многообразии N называется система $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ тензорных полей на этом многообразии, для которой выполняются условия:

$$\begin{aligned}\eta(\xi) &= 1, & \Phi(\xi) &= 0, & \eta \circ \Phi &= 0, & \Phi^2 &= -\text{id} + \xi \otimes \eta, \\ \langle \Phi X, \Phi Y \rangle &= \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), & X, Y &\in \mathfrak{N}(N).\end{aligned}$$

(Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика, $\mathfrak{N}(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N .)

Хорошо известно, что многообразие, допускающее почти контактную метрическую структуру, нечетномерно и ориентируемо. Примером почти контактной метрической структуры является косимплектическая структура, характеризующаяся тождеством

$$\nabla \eta = \nabla \Phi = 0,$$

где ∇ — риманова связность метрики g . Многообразия, наделенные такой структурой, локально эквивалентны произведению кэлера многообразия на вещественную прямую [3].

Напомним [4], что почти контактная метрическая структура называется контактной метрической, или почти сасакиевой, если $d\eta = \Omega$, и нормальной, если $2N + d\eta \otimes \xi = 0$, где

$$N(X, Y) = \frac{1}{4}\{\Phi^2[X, Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]\}$$

— тензор Нейенхейса оператора структуры. Через $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$ обозначена фундаментальная форма структуры. Нормальная контактная метрическая структура называется сасакиевой. Сасакиевы структуры можно охарактеризовать и с помощью тождества

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle X, Y \rangle \xi - \eta(Y)X, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(N).$$

Сасакиевы структуры индуцируются, например, на вполне омбилических гиперповерхностях кэлеровых многообразий [5]. Они обладают многими замечательными свойствами и играют фундаментальную роль в контактной геометрии.

Почти контактные метрические структуры тесно связаны с почти эрмитовыми (almost Hermitian, AH -) структурами. Сасаки и Хатакеяма показали [6], что если $(N, \{\Phi, \xi, \eta, g\})$ — почти контактное метрическое многообразие, то на многообразии $N \times \mathbb{R}$ внутренним образом индуцируется почти комплексная структура J , а два года спустя Таширо заметил [7], что J вместе с метрикой прямого произведения задает почти эрмитову структуру на этом многообразии. Многообразие $N \times \mathbb{R}$, снабженное такой структурой, называют линейным расширением исходного почти контактного метрического многообразия [8]. Неоднократно делались попытки с помощью конструкции линейного расширения классифицировать почти контактные метрические многообразия. Классическим результатом в этом направлении является теорема Накаямы, утверждающая, что почти контактное метрическое многообразие нормально тогда и только тогда, когда его линейное расширение является эрмитовым многообразием [9].

Настоящая работа посвящена сасакиевым гиперповерхностям 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли. Она является продолжением исследований автора, рассматривавшего ранее почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях 6-мерных подмногообразий алгебры октав (см., например, [10]–[13]). Отметим, что изучением различных аспектов геометрии 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли занимались такие авторитетные геометры, как А. Грей, Е. Калаби (США), В. Ф. Кириченко (Россия), К. Секигава (Япония).

§ 2

Как известно, *почти эрмитовой структурой* на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(M^{2n}),$$

где $\mathbb{N}(M^{2n})$ – модуль гладких векторных полей на многообразии M^{2n} . Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется *почти эрмитовым (АН-) многообразием*. С каждой АН-структурой $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ на многообразии M^{2n} связано поле дважды ковариантного кососимметрического тензора (т.е. 2-формы), определяемого равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad X, Y \in \mathbb{N}(M^{2n}),$$

и называемого *фундаментальной (или кэлеровой) формой* структуры.

Пусть $(M^{2n}, \{J = g\langle \cdot, \cdot \rangle\})$ – почти эрмитово многообразие. Зафиксируем точку $p \in M^{2n}$. Пусть $T_p(M^{2n})$ – пространство, касательное к многообразию M^{2n} в точке p , $\{J_p, g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ – почти эрмитова структура, порожденная парой $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$. Реперы, адаптированные почти эрмитовой структуре (или А-реперы), выглядят так:

$$(p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}}),$$

где ε_a – собственные векторы оператора структуры, отвечающие собственному значению оператора $i = \sqrt{-1}$, а $\varepsilon_{\hat{a}}$ – собственные векторы, отвечающие собственному значению $-i$. Здесь индекс a принимает значения от 1 до n ; $\hat{a} = a + n$. Матрица оператора структуры в А-репере в точке p имеет вид:

$$(J_j^k) = \begin{pmatrix} iI_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -iI_n \end{pmatrix},$$

где I_n – единичная матрица порядка n ; $k, j = 1, \dots, 2n$. Хорошо известно [14], что матрицы римановой метрики g и фундаментальной формы F в А-репере принимают вид:

$$(g_{kj}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_n \\ I_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (F_{kj}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & iI_n \\ -iI_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Почти эрмитово многообразие называется *эрмитовым*, если почти комплексная структура является интегрируемой. Иногда эрмитовы многообразия определяют условием [15]:

$$\nabla_X(F)(Y, Z) - \nabla_{JX}(F)(JY, Z) = 0.$$

Пусть $\mathbb{O} \equiv \mathbb{R}^8$ – алгебра Кэли. Как известно [16], в ней определены два неизоморфных 3-векторных произведения:

$$\begin{aligned} P_1(X, Y, Z) &= -X(\overline{Y}Z) + \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y, \\ P_2(X, Y, Z) &= -(X\overline{Y})Z + \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y. \end{aligned}$$

Здесь $X, Y, Z \in \mathbb{O}$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{O}$, $X \rightarrow \overline{X}$ – оператор сопряжения в $\mathbb{O}$ [17], определяемый равенством $\overline{X} = \text{Re } X - \text{Ve } X$. Сопряжение в алгебре октав можно определить и через сопряжение кватернионов. В самом деле, если $X = (\theta, \psi)$, то $\overline{X} = (\overline{\theta}, -\psi)$ [18]. Известно также, что любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из вышеуказанных [16].

Если $M^6 \subset \mathbb{O}$ – 6-мерное ориентируемое подмногообразие алгебры Кэли, то на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{J_\alpha, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, определяемая в каждой точке $p \in M^6$ соотношением:

$$J_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2), \quad \alpha = 1, 2,$$

где $\{e_1, e_2\}$ – произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке p , $X \in T_p(M^6)$ [16]. Напомним [19], что точка $p \in M^6$ называется *общей*, если

$$e_0 \notin T_p(M^6),$$

где e_0 – единица алгебры Кэли. Подмногообразия, состоящие только из общих точек, называются *подмногообразиями общего типа* [19]. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbb{O}$ подразумеваются подмногообразиями общего типа.

§ 3

В [19] В. Ф. Кириченко получил структурные уравнения почти эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{ah[b} D_{h^c] \omega_b \wedge \omega_c, \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ah[b} D^{h^c] \omega_b \wedge \omega^c, \\ d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_{h[k} D^{g}_{j]} + \sum_{\varphi} T_{\hat{a}[k}^{\varphi} T_{j]b}^{\varphi} \right) \omega^k \wedge \omega^j, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\{\omega^k\}$ – компоненты форм смещения, $\{\omega_j^k\}$ – компоненты форм римановой связности. Условимся, что здесь и далее $\varphi = 7, 8$; $a, b, c, d, g, h = 1, 2, 3$; $\hat{a} = a + 3$; $k, j = 1, \dots, 6$. Как и в [10], [11], [13], [19], $\omega_a = \omega_{\hat{a}}$. При этом $\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$ – компоненты тензора Кронекера порядка три [20],

$$\begin{aligned} \delta_{bg}^{ah} &= \delta_b^a \delta_g^h - \delta_g^a \delta_b^h, \\ D^{hc} &= D_{\hat{h}\hat{c}}, \quad D_h^c = D_{h\hat{c}}, \quad D^h_c = D_{\hat{h}c}, \\ D_{cj} &= \mp T_{cj}^8 + iT_{cj}^7, \quad D_{\hat{c}j} = \mp T_{\hat{c}j}^8 - iT_{\hat{c}j}^7, \end{aligned}$$

где $\{T_{kj}^{\varphi}\}$ – компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея [21], или второй основной формы погружения подмногообразия M^6 [22]). Поскольку почти эрмитово подмногообразие $M^6 \subset \mathbb{O}$ является эрмитовым тогда и только тогда [23], когда $D_{\hat{a}b} = D_{a\hat{b}} = 0$, то уравнения (1) для 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли примут вид:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b, \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b, \\ d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_{hd} D^{gc} + \sum_{\varphi} T_{\hat{a}\hat{c}}^{\varphi} T_{bd}^{\varphi} \right) \omega_c \wedge \omega^d. \end{aligned} \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1. Матрица второй квадратичной формы погружения сасакиевой гиперповерхности N в 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли имеет вид:

$$(\sigma_{ps}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & \sigma_{\alpha\hat{\beta}} \\ 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 & 0 \\ \sigma_{\hat{\alpha}\beta} & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p, s = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N – сасакиева гиперповерхность 6-мерного эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbb{O}$. Тогда структурные уравнения почти контактной метрической структуры на N запишутся так [11], [24]:

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + (\sqrt{2} B^{\alpha 3}{}_\beta + i\sigma_\beta^\alpha) \omega^\beta \wedge \omega \\ &\quad + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} B^{\alpha\beta}{}_3 + i\sigma^{\alpha\beta} \right) \omega_\beta \wedge \omega, \\ d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta}{}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\beta + (\sqrt{2} B_{\alpha 3}{}^\beta - i\sigma_\alpha^\beta) \omega_\beta \wedge \omega \\ &\quad + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} B_{\alpha\beta}{}^3 - i\sigma_{\alpha\beta} \right) \omega^\beta \wedge \omega, \\ d\omega &= (\sqrt{2} B^{\alpha 3}{}_\beta - \sqrt{2} B_{3\beta}{}^\alpha - 2i\sigma_\beta^\alpha) \omega^\beta \wedge \omega_\alpha + (B_{3\beta}{}^3 + i\sigma_{3\beta}) \omega \wedge \omega^\beta \\ &\quad + (B^{3\beta}{}_3 - i\sigma_3^\beta) \omega \wedge \omega_\beta, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$B^{ab}{}_c = -\frac{i}{2} J_{b,c}^a, \quad B_{ab}{}^c = \frac{i}{2} J_{b,\hat{c}}^{\hat{a}}.$$

Здесь через $\{J_{k,m}^j\}$ обозначены компоненты ∇J . Условимся, что здесь и далее $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$. Отметим, что системы функций $\{B^{ab}{}_c\}$ и $\{B_{ab}{}^c\}$ служат компонентами виртуальных тензоров Кириченко [25] почти эрмитовой структуры на многообразии M^6 . Сопоставляя (4) со структурными уравнениями сасакиевой структуры [26]:

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta - i\omega \wedge \omega^\alpha, \\ d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + i\omega \wedge \omega_\alpha, \\ d\omega &= -2i\omega^\alpha \wedge \omega_\alpha, \end{aligned}$$

в силу линейной независимости базисных форм получаем условия, одновременное выполнение которых есть критерий того, что почти контактная метрическая структура, индуцированная на гиперповерхности 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры октав, является сасакиевой:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} B^{\alpha 3}{}_\beta + i\sigma_\beta^\alpha &= i\delta_\beta^\alpha, \quad B^{\alpha\beta}{}_\gamma = 0, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} B^{\alpha\beta}{}_3 + i\sigma^{\alpha\beta} = 0, \\ \sqrt{2} B^{3\alpha}{}_\beta - \sqrt{2} B_{3\beta}{}^\alpha - 2i\sigma_\beta^\alpha &= -2i\delta_\beta^\alpha, \quad B^{3\beta}{}_3 - i\sigma_3^\beta = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

и формулы комплексного сопряжения (ф.к.с.), запись которых мы опустим. Из (5) следует, что

$$\sigma^{\alpha\beta} = -\frac{i}{\sqrt{2}} B^{\alpha\beta}{}_3.$$

Проальтернируем это соотношение:

$$0 = \sigma^{[\alpha\beta]} = -\frac{i}{\sqrt{2}} B^{[\alpha\beta]}{}_3 = -\frac{i}{2\sqrt{2}} (B^{\alpha\beta}{}_3 - B^{\beta\alpha}{}_3) = -\frac{i}{\sqrt{2}} B^{\alpha\beta}{}_3.$$

Следовательно, $B^{\alpha\beta}{}_3 = 0$, а значит, $\sigma^{\alpha\beta} = 0$. Аналогично получаем, что $\sigma_3^\beta = 0$. Из (5) следует, что

$$B^{\alpha 3}{}_\beta = \frac{i}{\sqrt{2}} \delta_\beta^\alpha - \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_\beta^\alpha.$$

Подставим это значение в четвертое равенство из (5):

$$\begin{aligned} -i\delta_\beta^\alpha + i\sigma_\beta^\alpha - \sqrt{2} B_{3\beta}{}^\alpha - 2i\sigma_\beta^\alpha &= -2i\delta_\beta^\alpha, \\ -i\sigma_\beta^\alpha &= -i\delta_\beta^\alpha + \sqrt{2} B_{3\beta}{}^\alpha, \\ \sigma_\beta^\alpha &= i\sqrt{2} B_{3\beta}{}^\alpha + \delta_\beta^\alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, условия (5) можно переписать так:

$$B^{\alpha\beta}{}_\gamma = 0, \quad \sigma_{\alpha\beta} = 0, \quad \sigma_3^\beta = 0, \quad \sigma_\beta^\alpha = i\sqrt{2} B_{3\beta}{}^\alpha + i\delta_\beta^\alpha \quad (6)$$

и ф.к.с.

В силу (6) матрица второй квадратичной формы погружения сасакиевой гиперповерхности в 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли имеет вид (3), что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. *Сасакиева гиперповерхность 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли минимальна в том и только том случае, если $\sigma(\xi, \xi) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Критерием (иногда – определением) минимальности гиперповерхности является условие [27]

$$g^{ps} \sigma_{ps} = 0.$$

Матрица контравариантного метрического тензора гиперповерхности N имеет вид [11]:

$$(g^{ps}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для сасакиевой гиперповерхности N эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbb{O}$

$$\begin{aligned} g^{ps} \sigma_{ps} &= g^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} + g^{\hat{\alpha}\beta} \sigma_{\hat{\alpha}\beta} + g^{\alpha\hat{\beta}} \sigma_{\alpha\hat{\beta}} + g^{33} \sigma_{33} \\ &= g^{\hat{\alpha}\beta} \sigma_{\hat{\alpha}\beta} + g^{\alpha\hat{\beta}} \sigma_{\alpha\hat{\beta}} + g^{33} \sigma_{33}. \end{aligned}$$

Из (6) следует:

$$g^{ps}\sigma_{ps} = i\sqrt{2}B^{\alpha 3}{}_{\alpha} + 2 - i\sqrt{2}B_{\alpha 3}{}^{\alpha} - 2 + \sigma_{33} = \sigma_{33}.$$

Поэтому $g^{ps}\sigma_{ps} = 0 \Leftrightarrow \sigma_{33} = 0$. Последнее равенство означает, что

$$\sigma(\xi, \xi) = 0.$$

Итак, сасакиева гиперповерхность N эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbb{O}$ минимальна тогда и только тогда, когда $\sigma(\xi, \xi) = 0$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 3. *Типовое число t сасакиевой гиперповерхности N 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли равно или четырем, или пяти, причем $t \equiv 4$ в том и только том случае, если гиперповерхность N является минимальной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что под типовым числом поверхности риманова многообразия понимают ранг ее второй квадратичной формы [28]. Пусть N – минимальная сасакиева гиперповерхность эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbb{O}$. Тогда в силу доказанных теорем 1 и 2 матрица второй квадратичной формы гиперповерхности имеет вид:

$$(\sigma_{ps}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & \sigma_{\alpha\hat{\beta}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\hat{\alpha}\beta} & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\sigma_{\hat{\alpha}\beta} = \overline{\sigma_{\alpha\hat{\beta}}}$, получим, что

$$\text{rang}(\sigma_{ps}) = 2 \text{rang}(\sigma_{\hat{\alpha}\beta}).$$

Теперь воспользуемся выражениями для компонент тензоров Кириченко 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли [29]:

$$B^{ab}{}_c = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abh}D_{hc}, \quad B_{ab}{}^c = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{abh}D^{hc}. \quad (7)$$

Вычислим все компоненты “блока” $(\sigma_{\hat{\alpha}\beta})$ с помощью (6):

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{1}1} &= \sigma_1^1 = i\sqrt{2}B^{13}{}_1 + \delta_1^1 = i\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{13\gamma}D_{\gamma 1}\right) + 1 = -iD_{12} + 1, \\ \sigma_{\hat{2}2} &= \sigma_2^2 = i\sqrt{2}B^{23}{}_2 + \delta_2^2 = i\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{23\gamma}D_{\gamma 2}\right) + 1 = iD_{12} + 1, \\ \sigma_{\hat{1}2} &= \sigma_2^1 = i\sqrt{2}B^{13}{}_2 + \delta_2^1 = i\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{13\gamma}D_{\gamma 2}\right) = -iD_{22}, \\ \sigma_{\hat{2}1} &= \sigma_1^2 = i\sqrt{2}B^{23}{}_1 + \delta_1^2 = i\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{23\gamma}D_{\gamma 1}\right) = iD_{11}. \end{aligned}$$

Покажем, что матрица $(\sigma_{\hat{\alpha}\beta})$ не может быть вырожденной. В самом деле,

$$\begin{aligned}\det(\sigma_{\hat{\alpha}\beta}) &= (-iD_{12} + 1)(iD_{12} + 1) - (-iD_{22})(iD_{11}) \\ &= (D_{12} + i)(D_{12} - i) - D_{11}D_{22} = (D_{12})^2 - D_{11}D_{22} + 1.\end{aligned}$$

Так как для эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbb{O}$ справедливо тождество [30]

$$(D_{12})^2 = D_{11}D_{22},$$

получим:

$$\det(\sigma_{\hat{\alpha}\beta}) = 1 \neq 0.$$

Итак, матрица $(\sigma_{\hat{\alpha}\beta})$ не может быть вырожденной, ее ранг равен двум и поэтому $\text{rang}(\sigma_{ps}) = 4$, т.е. типовое число гиперповерхности N равно четырем.

Если же сасакиева гиперповерхность N эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbb{O}$ не является минимальной, то ее типовое число в некоторой точке будет вычисляться так:

$$t = 2 \text{rang}(\sigma_{\hat{\alpha}\beta}) + 1 = 5.$$

Теорема полностью доказана.

Из этой теоремы немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Минимальная сасакиева гиперповерхность эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbb{O}$ не может быть вполне геодезической.*

Естественно возникает вопрос: а может ли минимальная сасакиева гиперповерхность N эрмитова $M^6 \subset \mathbb{O}$ быть его вполне омбилическим подмногообразием? Если допустить, что ответ на этот вопрос утвердителен, то тогда

$$\sigma_{ps} = \lambda g_{ps}, \quad \lambda = \text{const},$$

и, учитывая (6), получим $\lambda = 0$, что противоречит следствию 1. Таким образом, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 2. *Минимальная сасакиева гиперповерхность эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbb{O}$ не может быть вполне омбилической.*

Заметим, что матрица второй квадратичной формы погружения сасакиевой гиперповерхности в 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли является вырожденной в том и только том случае, если гиперповерхность минимальна. Этот интересный факт геометрически можно интерпретировать так:

СЛЕДСТВИЕ 3. *Сасакиева гиперповерхность эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbb{O}$ является линейчатой тогда и только тогда, когда она минимальна.*

Собрав воедино полученные результаты о минимальности сасакиевой гиперповерхности эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbb{O}$, получим

СЛЕДСТВИЕ 4. *Пусть N – сасакиева гиперповерхность 6-мерного эрмитова подмногообразия M^6 алгебры октав, t – ее типовое число. Тогда следующие утверждения равносильны:*

- 1) N – минимальное подмногообразие многообразия M^6 ;
- 2) N – линейчатая поверхность;
- 3) $t \equiv 4$.

§ 4

Как показано выше, вполне омбилическая сасакиева гиперповерхность эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbb{O}$ не может быть минимальной.

Если N – вполне омбилическая гиперповерхность 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры октав, то условия (6) переписываются так:

$$\sigma_{\alpha\beta} = 0, \quad \lambda \delta_{\beta}^{\alpha} = i\sqrt{2} B_{3\beta}^{\alpha} + \delta_{\beta}^{\alpha}, \quad \sigma_3^{\beta} = 0, \quad B^{\alpha\beta}_{\gamma} = 0,$$

где $\lambda = \text{const}$, $\lambda \neq 0$. Отсюда вытекает, что $B_{31}^2 = B_{32}^1 = 0$. Учитывая (7), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{31h} D^{h2} = 0 &\Leftrightarrow \varepsilon_{312} D^{22} = 0 \Leftrightarrow D^{22} = 0 \Leftrightarrow D_{22} = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{32h} D^{h1} = 0 &\Leftrightarrow \varepsilon_{321} D^{11} = 0 \Leftrightarrow D^{11} = 0 \Leftrightarrow D_{11} = 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (6), делаем вывод, что $D_{\alpha\beta} = 0$. Кроме того, из (6) можно получить:

$$\begin{aligned} B^{\alpha\beta}_{\gamma} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{\alpha\beta 3} D_{3\gamma} = 0 \Leftrightarrow D_{3\gamma} = 0, \\ B^{\alpha\beta}_3 = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{\alpha\beta 3} D_{33} = 0 \Leftrightarrow D_{33} = 0. \end{aligned}$$

В итоге окажется:

$$D_{ab} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, если сасакиева гиперповерхность эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbb{O}$ является вполне омбилической, то в каждой ее точке выполняется равенство (8). Если через каждую точку M^6 проходит вполне омбилическая гиперповерхность Сасаки (т.е., если пользоваться терминологией [11], [13], [31], в случае, когда M^6 удовлетворяет аксиоме U -сасакиевых гиперповерхностей), то для каждой точки M^6 имеет место (8). Но (8) есть критерий кэлеровости 6-мерного почти эрмитова подмногообразия алгебры Кэли [19], [23]. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 4. *Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли, удовлетворяющее аксиоме U -сасакиевых гиперповерхностей, является кэлеровым многообразием.*

Отметим, что 6-мерные кэлеровы подмногообразия алгебры октав довольно хорошо изучены [19], [21], [32], [33], причем в [19] приводится их полная классификация. Это позволяет нам дать следующую интерпретацию результата последней теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Всякое эрмитово подмногообразие $M^6 \subset \mathbb{O}$, удовлетворяющее аксиоме U -сасакиевых гиперповерхностей, либо является вполне геодезическим подмногообразием алгебры Кэли, либо локально эквивалентно произведению двумерной минимальной поверхности, на которой индуцирована кэлерова структура, и четырехмерной плоскости.*

§ 5

Особую роль в эрмитовой геометрии играют локально симметрические подмногообразия алгебры октав. Их изучению посвящено несколько интересных работ, самая значительная из которых, на наш взгляд, принадлежит В. Ф. Кириченко [34]. В ней введены в рассмотрение и исследованы 6-мерные типа Риччи эрмитовы подмногообразия алгебры Кэли. Приведем их определение. Для этого напомним, что точка $p \in M^6$ называется *специальной*, если

$$T_p(M^6) \subset L(e_0)^\perp,$$

где $L(e_0)^\perp$ — ортогональное дополнение единицы алгебры октав. В противном случае точка p называется *простой*. Ясно, что совокупность всех простых точек M^6 представляет собой открытое подмногообразие $M_0^6 \subset M^6$, на котором канонически индуцируется распределение Z , порожденное ортогональными проекциями вектора e_0 на касательное пространство $T_p(M^6)$, $p \in M_0^6$. Такое распределение Z , а также одномерное пространство $Z_p \in T_p(M^6)$, $p \in M_0^6$, называют *исключительными* [34].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [34], [35]. Эрмитово подмногообразие $M^6 \subset \mathbb{O}$ называют *подмногообразием типа Риччи*, если кривизна Риччи в каждой точке $p \in M_0^6$ в направлении исключительного пространства Z_p принимает минимальное значение.

В [34] получена полная классификация локально симметрических эрмитовых подмногообразий $M^6 \subset \mathbb{O}$ типа Риччи: эрмитово локально симметрическое подмногообразие $M^6 \subset \mathbb{O}$ типа Риччи локально голоморфно изометрично либо $\mathbb{C}^3$, либо произведению кэлеровых $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}H^1$, “скрученному” вдоль $\mathbb{C}H^1$. (Здесь через $\mathbb{C}^n$ обозначено n -мерное комплексное евклидово пространство, через $\mathbb{C}H^1$ — комплексное гиперболическое пространство).

Кроме того, в [34] доказано, что матрица (D_{ab}) при соответствующем выборе репера для такого подмногообразия алгебры октав имеет вид:

$$\begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем для случая произведения $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}H^1$ имеет место $D_{11} \neq 0$. Отсюда, применяя (6), получим, что матрица второй квадратичной формы погружения сасакиевой гиперповерхности в локально симметрическое подмногообразие $M^6 \subset \mathbb{O}$ типа Риччи выглядит так:

$$(\sigma_{ps}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -iD^{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ iD_{11} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что условие $\sigma_{ps} = \lambda g_{ps}$, $\lambda = \text{const}$, не может быть реализовано, и поэтому для некэлерова подмногообразия типа Риччи наличие сасакиевой структуры на его гиперповерхности означает, что эта гиперповерхность не может быть вполне омбилической. Доказана

ТЕОРЕМА 5. Пусть $M^6 \subset \mathbb{O}$ – некэлерово подмногообразие типа Риччи алгебры Кэли, N – его сасакиева гиперповерхность. Тогда N не может быть вполне омбилической гиперповерхностью подмногообразия $M^6 \subset \mathbb{O}$.

В кэлеровом случае, как уже упоминалось в начале статьи, с помощью построений Блэра [5] легко показывается, что на вполне омбилической гиперповерхности подмногообразия $M^6 \subset \mathbb{O}$ будет реализована именно сасакиева структура.

Список литературы

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
2. Харп Н. Геометрическое квантование в действии. М.: Мир, 1985.
3. Kiritchenko V. F. Sur la géométrie des variétés approximativement cosymplectiques // C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1982. V. 295. №12. P. 673–676.
4. Blair D. E. The theory of quasi-Sasakian structures // Differential Geom. 1967. V. 1. P. 331–345.
5. Blair D. E. Contact manifolds in Riemannian geometry // Lecture Notes in Math. 1976. V. 509. P. 1–145.
6. Sasaki S., Hatakeyama Y. On differential manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structures. II // Tôhoku Math. J. (2). 1961. V. 13. №2. P. 281–294.
7. Tashiro Y. On contact structures of hypersurfaces in almost complex manifolds // Tôhoku Math. J. (2). 1963. V. 15. №1. P. 62–78.
8. Кириченко В. Ф., Родина Е. В. О геометрии трансасакиевых и почти трансасакиевых многообразий // Фундамент. и прикл. матем. 1997. Т. 3. №3. С. 837–846.
9. Nakayama S. On a classification of almost contact metric structures // Tensor (N.S.). 1968. V. 9. №1. P. 1–7.
10. Banaru M. Six theorems on six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Изв. АН Республики Молдова. 2000. Т. 34. №3. С. 3–10.
11. Banaru M. On six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra satisfying the G-cosymplectic hypersurfaces axiom // Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 2000. V. 94. P. 91–96.
12. Stepanova L., Banaru M. On hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds // An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi Math. (N.S.). 2001. V. XLVII. №1. P. 165–170.
13. Банару М. Б. Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Матем. сб. 2002. Т. 193. №5. С. 3–16.
14. Арсеньева О. Е., Кириченко В. Ф. Автодуальная геометрия обобщенных эрмитовых поверхностей // Матем. сб. 1998. Т. 189. №1. С. 21–44.
15. Gray A., Hervella L. M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1980. V. 123. №4. P. 35–58.
16. Gray A. Vector cross products on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 141. P. 465–504.
17. Фрейденталь Г. Октавы, особые группы и октавная геометрия // Математика. Сб. пер. 1957. Т. 1. №1. С. 117–153.
18. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1988.
19. Кириченко В. Ф. Классификация кэлеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Сер. матем. 1980. №8. С. 32–38.
20. Лизнерович А. Теория связностей в целом и группы голономий. М.: ИЛ, 1960.
21. Gray A. Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois J. Math. 1966. V. 10. №2. P. 353–366.
22. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1981.
23. Банару М. Б. Классы Грея–Хервеллы почти эрмитовых структур на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Научные труды МПГУ им. В. И. Ленина. 1994. С. 36–38.

24. Степанова Л. В. Квасисасакиева структура на гиперповерхностях эрмитовых многообразий // Научные труды МПГУ им. В.И. Ленина. 1995. С. 187–191.
25. Банару М. Б. Тензоры Кириченко // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям. №2. Смоленск: СГПУ, 2000. С. 42–48.
26. Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Проблемы геом. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1986. С. 25–71.
27. Норден А. П. Теория поверхностей. М.: ГИТТЛ, 1956.
28. Kurihara H. The type number on real hypersurfaces in a quaternionic space form // Tsukuba J. Math. 2000. V. 24. P. 127–132.
29. Banaru M. On six-dimensional Gl -submanifolds of Cayley algebra // Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math. 2001. V. 40. P. 17–21.
30. Banaru M., Banaru G. About six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Bul. Ştiinţ. Univ. Politeh. Timiş. Ser. Mat. Fiz. 2001. V. 46 (60). №1. P. 13–17.
31. Банару М. Б. О W_3 -многообразиях, удовлетворяющих аксиоме G -косимплектических гиперповерхностей // Труды XXIV Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова / ред. Д. В. Георгиевский, А. Н. Якивчик. М.: Изд-во МГУ, 2002.
32. Calabi E. Construction and properties of some 6-dimensional almost complex manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. V. 87. №2. P. 407–438.
33. Gray A. Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products // Tôhoku Math. J. (2). 1969. V. 21. №4. P. 614–620.
34. Кириченко В. Ф. Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестн. МГУ. Сер. матем., мех. 1994. №3. С. 6–13.
35. Банару М. Б., Кириченко В. Ф. Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // УМН. 1994. Т. 49. №1. С. 205–206.

Смоленский государственный университет
 E-mail: banaru@keytown.com

Поступила в редакцию
 04.07.2002