Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Михайлов, О существовании граничных значений у полигармонических функций, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 5, 111–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7593>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:29:28

УДК 517.9

В. П. Михайлов

О существовании граничных значений у полигармонических функций

Для полигармонической в шаре функции установлено необходимое и достаточное условие существования предела в среднем квадратичном на границе.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: полигармоническая функция, граничное значение, сферическая функция, шаровая функция.

Настоящая работа является расширенным изложением заметки [1] и продолжением работы [2], в ней некоторые результаты работы [2] перенесены на n -мерный случай.

Пусть $u(x)$, $|x| < 1$, – полигармоническая функция в шаре $\{|x| < 1\}$ n -мерного пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, т.е. функция, являющаяся в этом шаре решением при некотором целом $m \geq 1$ m -гармонического уравнения

$$\Delta^m u(x) = 0, \quad |x| < 1. \quad (1)$$

Полигармоническая в какой-то области функция, будучи бесконечно дифференцируемой и даже вещественноаналитической в этой области, не обязательно имеет предельные значения на границе области. Нас интересует, какие условия следует наложить на полигармоническую в шаре $\{|x| < 1\} = \{r < 1, |\omega| = 1\}$, где $x = r\omega$, $r = |x|$, $|\omega| = 1$, функцию, чтобы она имела на граничной сфере $\{r = 1, |\omega| = 1\}$ L_2 -предельное значение, т.е. чтобы существовала функция $a_0(\omega) \in L_2(|\omega| = 1)$, к которой множество следов функции $u(x)$ на сферах $\{|x| = r, |\omega| = 1\}$, $0 < r < 1$,

$$\{u(r\omega), |\omega| = 1\}, \quad 0 < r < 1, \quad (2)$$

сходилось бы в $L_2(|\omega| = 1)$ при $r \rightarrow 1 - 0$. Если множество $L_2(|\omega| = 1)$ -норм функций (2) ограничено при $0 < r < 1$, то (принадлежащую классу Харди H_2) функцию $u(x)$ будем называть L_2 -ограниченной.

Подпространство пространства $L_2(|\omega| = 1)$, являющееся собственным пространством оператора Бельтрами–Лапласа, отвечающим собственному значению $\lambda_k = k(k + n - 2)$, обозначим через $\mathfrak{N}_k$, $k = 0, 1, \dots$; $\mathfrak{N}_k \perp \mathfrak{N}_s$ при $k \neq s$, и имеет место ортогональное разложение $L_2(|\omega| = 1) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{N}_k$ (см., например, [3]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00144а) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3224.2008.1).

Обозначим через $\mathbb{P}_N$ при целом $N \geq 1$ оператор ортогонального проектирования пространства $L_2(|\omega| = 1)$ на подпространство $\bigcup_{k=N}^{2N} \mathfrak{N}_k$.

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы полигармоническая в шаре $\{|x| < 1\}$ функция $u(x)$ имела L_2 -предел на границе шара, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

условие L_2 -ограниченности

$$\sup_{0 \leq r < 1} \|u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)} < \infty \quad (3)$$

и условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq r < 1} \|\mathbb{P}_N u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)} = 0. \quad (4)$$

Условие (3) в пояснениях не нуждается: при исследовании вопроса о существовании L_2 -предела на границе условие L_2 -ограниченности естественно. Условие (4) означает, грубо говоря, следующее. Для любой функции $f(\omega) \in L_2(|\omega| = 1)$, от параметра r не зависящей, $\|\mathbb{P}_N f\|_{L_2(|\omega|=1)}^2 \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Условие (4) требует выполнения этого предельного соотношения равномерно по $r \in [0, 1)$.

Кроме уже процитированной работы [2] отметим еще работы [4]–[7], в которых в различных ситуациях устанавливаются условия существования L_2 -предельных значений на границе области у решений эллиптических уравнений высокого порядка.

Отметим, что сформулированная теорема относится к решениям уравнения (1) при любом $m \geq 1$, причем ко всем решениям этого уравнения, в том числе и к гармоническим функциям. С другой стороны, для гармонических функций (и для решений общего линейного однородного эллиптического уравнения второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами в n -мерных ограниченных областях с достаточно гладкой границей; см. [8], а также [9]–[12]) достаточным и, конечно, необходимым условием существования L_2 -предела является L_2 -ограниченность исследуемой функции. И это не находится в противоречии со сформулированной теоремой 1, поскольку для гармонических функций второе условие теоремы вытекает из первого. Для решения же уравнения более высокого чем 2 порядка условие L_2 -ограниченности решения, конечно, необходимо, но, вообще говоря (для любого решения такого уравнения), не достаточно для существования его L_2 -предела на границе. Соответствующий пример будет приведен в конце работы. Там же будет приведен и другой пример, показывающий, что на негармонические решения уравнения (1) не переносится и второй установленный в процитированных выше работах критерий существования предельных значений на границе (теорема типа теоремы Литтлвуда–Пэли).

При любом $k = 0, 1, \dots$ подпространство $\mathfrak{N}_k$ состоит из сферических функций порядка k ; каждая из этих функций принадлежит $C^\infty(|\omega| = 1)$ и после умножения на r^k становится гармоническим многочленом (по декартовым переменным $x_1, \dots, x_n$) степени k (шаровой функцией k -го порядка). Размерность подпространства $\mathfrak{N}_k$ есть

$$\dim \mathfrak{N}_k = M(k) = (2k + n - 2) \frac{(k + n - 3)!}{(n - 2)! k!},$$

и так как при всех $n \geq 2$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(k)}{k^{n-2}} = \frac{2}{(n-2)!},$$

то существует постоянная $C = C(n) > 0$ такая, что

$$C^{-1}k^{n-2} \leq M(k) \leq Ck^{n-2}, \quad k > 0, \quad M(0) = 1. \quad (5)$$

Обозначим через $Y_k^1(\omega), \dots, Y_k^{M(k)}(\omega)$ произвольный ортонормированный базис подпространства $\mathfrak{H}_k$. Тогда множество $\{Y_k^s(\omega), s = 1, \dots, M(k), k = 0, 1, \dots\}$ представляет собой ортонормированный базис пространства $L_2(|\omega| = 1)$.

При доказательстве теоремы мы будем пользоваться связью между решениями уравнения (1) и гармоническими функциями. Подобная связь широко использовалась в теории упругости при решении краевых задач для бигармонического уравнения в полуплоскости и в круговых областях ($n = 2, m = 2$; см., например, [9], [13], [14]). Представление полигармонической функции через гармонические при $n = 2$ имеется в [10] (см. также [2]). Сформулируем и докажем соответствующее предложение (лемма 1).

ЛЕММА 1. *При любых гармонических в шаре $\{|x| < 1\}$ функциях $u_0(x), \dots, u_{m-1}(x)$ функция*

$$u(x) = u_0(x) + (1 - |x|^2)u_1(x) + \dots + (1 - |x|^2)^{m-1}u_{m-1}(x), \quad |x| < 1, \quad (6)$$

является m -гармонической. Обратно, для любой m -гармонической в шаре $\{|x| < 1\}$ функции $u(x)$ найдутся, причем единственным образом, m гармонических в этом шаре функций $u_i(x)$, $i = 0, \dots, m-1$, таких, что имеет место равенство (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать первое утверждение леммы, применим метод математической индукции. Пусть известно, что при любых гармонических в $\{|x| < 1\}$ функциях $v_0(x), \dots, v_{p-1}(x)$ функция

$$v(x) = \sum_{k=0}^{p-1} (1 - |x|^2)^k v_k(x), \quad |x| < 1, \quad (6')$$

является p -гармонической в $\{|x| < 1\}$ (при $p = 1$ это утверждение очевидно). Докажем, что при любых гармонических в $\{|x| < 1\}$ функциях $w_0(x), \dots, w_p(x)$ функция

$$w(x) = \sum_{k=0}^p (1 - |x|^2)^k w_k(x), \quad |x| < 1,$$

является $(p+1)$ -гармонической в $\{|x| < 1\}$, или, что то же самое, что функция

$$\Delta w(x) = \sum_{k=0}^p \Delta((1 - |x|^2)^k w_k(x)), \quad |x| < 1,$$

является p -гармонической в $\{|x| < 1\}$. Так как при любом $k = 0, \dots, p$ k -е слагаемое этой суммы

$$\begin{aligned} \Delta((1 - |x|^2)^k w_k(x)) &= 2(\nabla w_k, \nabla((1 - |x|^2)^k)) + w_k \Delta(1 - |x|^2)^k \\ &= -4k(\nabla w_k, x)(1 - |x|^2)^{k-1} \\ &\quad + w_k(4k(k-1)(1 - |x|^2)^{k-2} - 2k(n+2k-2)(1 - |x|^2)^{k-1}) \\ &= 4k(k-1)(1 - |x|^2)^{k-2} w_k - (1 - |x|^2)^{k-1} (2k(n+2k-2)w_k + 4k(\nabla w_k, x)) \end{aligned}$$

представляется в виде (6') (функции w_k и $(\nabla w_k, x)$ гармонические), то и вся сумма представляется в виде (6'). Первое утверждение леммы доказано.

При доказательстве второго утверждения леммы воспользуемся следующим просто доказываемым утверждением о гармонических функциях.

Гармоническая в шаре $\{|x| < 1\}$ функция $u(x)$ представляется в этом шаре рядом по шаровым функциям

$$u(x) = u(r\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} \alpha_k^s r^k Y_k^s(\omega), \quad r \in [0, 1), \quad |\omega| = 1, \quad (7)$$

коэффициенты α_k^s , $s = 1, \dots, M(k)$, $k = 0, 1, \dots$, в котором однозначно определяются функцией $u(x)$ и подчинены условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} (\alpha_k^s)^2 R^{2k} < \infty \quad \text{для любого } R \in [0, 1). \quad (8)$$

На любом замкнутом подмножестве шара $\{|x| < 1\}$ ряд (7) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием произвольного порядка по декартовым переменным $x_1, \dots, x_n$, сходятся абсолютно и равномерно.

Любые числа α_k^s , $s = 1, \dots, M(k)$, $k = 0, 1, \dots$, удовлетворяющие условию (8), определяют равенством (7) гармоническую в шаре $\{|x| < 1\}$ функцию $u(x)$.

Отметим, что $\alpha_k^s R^k$, $s = 1, \dots, M(k)$, $k = 0, 1, \dots$, — коэффициенты Фурье разложения по сферическим функциям следа функции $u(x)$ на сфере $\{|x| = R\}$, а условие (8) — следствие соответствующего равенства Парсеваля и на самом деле имеет вид $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} (\alpha_k^s)^2 R^{2k} = \|u(R\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}^2$.

Переходя к доказательству второго утверждения леммы, прежде всего остановимся на вопросе о существовании гармонических функций $u_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, t-1$. Здесь также применим метод математической индукции.

При $t = 1$ это утверждение очевидно. Пусть оно установлено для некоторого $p > 1$, т.е. для любой p -гармонической в шаре $\{|x| < 1\}$ функции $v(x)$ существуют такие гармонические в этом шаре функции $v_i(x)$, $i = 0, \dots, p-1$, что имеет место равенство

$$v(x) = v_0(x) + (1 - |x|^2)v_1(x) + \dots + (1 - |x|^2)^{p-1}v_{p-1}(x), \quad |x| < 1. \quad (6_p)$$

Докажем, что для любой $(p+1)$ -гармонической в шаре $\{|x| < 1\}$ функции $w(x)$ можно найти такие гармонические в этом шаре функции $w_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, p$, что имеет место равенство

$$w(x) = w_0(x) + (1 - |x|^2)w_1(x) + \dots + (1 - |x|^2)^p w_p(x), \quad |x| < 1. \quad (6_{p+1})$$

Функция Δw является в шаре $\{|x| < 1\}$ p -гармонической, и, тем самым, для нее справедливо представление (6_p). Это означает, что функция w является некоторым решением уравнения Пуассона

$$\Delta w = v(x), \quad |x| < 1, \quad (9)$$

правая часть $v(x)$ в котором представляется в виде (6_p) с некоторыми гармоническими в шаре $\{|x| < 1\}$ функциями $v_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, p-1$. Поскольку любое решение уравнения (9) является суммой какого-нибудь частного его решения и некоторой гармонической функции, то для доказательства справедливости для функции $w(x)$ равенства (6_{p+1}) достаточно проверить, что уравнение (9) имеет решение вида

$$\tilde{w}(x) = \tilde{w}_0(x) + (1 - |x|^2)w_1(x) + \dots + (1 - |x|^2)^p w_p(x), \quad |x| < 1, \quad (10)$$

в котором $\tilde{w}_0(x), w_1(x), \dots, w_p(x)$ – гармонические в $\{|x| < 1\}$ функции.

Пусть разложение в ряд (7) по шаровым функциям гармонической функции $v_i(r\omega)$, $i = 0, 1, \dots, p-1$, из (6_p) имеет вид

$$v_i(r\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} \alpha_{ki}^s r^k Y_k^s(\omega), \quad r < 1, \quad |\omega| = 1, \quad i = 0, \dots, p-1.$$

Тогда

$$v(r\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} r^k \left(\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{ki}^s (1 - r^2)^i \right) Y_k^s(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} r^k R_k^s(r^2) Y_k^s(\omega),$$

$$r < 1, \quad |\omega| = 1,$$

где $R_k^s(t)$, $s = 1, \dots, M(k)$, $k = 0, 1, \dots$, – многочлен степени $p-1$:

$$R_k^s(t) = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{ki}^s (1-t)^i = \beta_{k0}^s + \beta_{k1}^s t + \dots + \beta_{kp-1}^s t^{p-1}, \quad (11)$$

$$0 \leq t \leq 1, \quad s = 1, \dots, M(k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$\beta_{ki}^s = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i R_k^s(t)}{dt^i} \right|_{t=0}, \quad i = 0, \dots, p-1, \quad s = 1, \dots, M(k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Таким образом, функция, стоящая в правой части уравнения (9), имеет вид

$$v(r\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \beta_{ki}^s r^{k+2i} \right) Y_k^s(\omega), \quad r < 1, \quad |\omega| = 1.$$

Непосредственно проверяется, что функция

$$w_{ki}^s(r\omega) = \frac{\beta_{ki}^s}{4(i+1)k + 2(i+1)(n+2i)} r^{2i+k+2} Y_k^s(\omega), \quad r < 1, \quad |\omega| = 1,$$

$$i = 0, \dots, p-1, \quad s = 1, \dots, M(k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta w_{ki}^s(r\omega) = \beta_{ki}^s r^{2i+k} Y_k^s(\omega), \quad r < 1, \quad |\omega| = 1,$$

а тогда искомое частное решение уравнения (9), записанное пока формально, имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{w}(r\omega) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\beta_{ki}^s}{4(i+1)k + 2(i+1)(n+2i)} r^{k+2i+2} Y_k^s(\omega) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{s=1}^{M(k)} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \frac{\beta_{ki}^s r^{2i+2}}{4(i+1)k + 2(i+1)(n+2i)} \right) Y_k^s(\omega) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} r^k G_k^s(r^2) Y_k^s(\omega). \end{aligned}$$

Здесь $G_k^s(t)$, $s = 1, \dots, M(k)$, $k = 0, 1, \dots$, — многочлен степени p :

$$G_k^s(t) = \sum_{j=1}^p \frac{\beta_{kj-1}^s t^j}{4kj + 2j(n+2j-2)} = \gamma_{k0}^s + \gamma_{k1}^s(t-1) + \dots + \gamma_{kp}^s(t-1)^p, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{k0}^s &= G_k^s(1), \quad \gamma_{k1}^s = \frac{dG_k^s(1)}{dt}, \quad \dots, \quad \gamma_{kp}^s = \frac{1}{p!} \frac{d^p G_k^s(1)}{dt^p}, \\ s &= 1, \dots, M(k), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом,

$$\tilde{w}(r\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{s=1}^{M(k)} \sum_{i=0}^p \gamma_{ki}^s (r^2 - 1)^i Y_k^s(\omega) = \tilde{w}_0(r\omega) + \sum_{i=1}^p (1 - r^2)^i w_i(r\omega),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{w}_0(x) &= \tilde{w}_0(r\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} \gamma_{k0}^s r^k Y_k^s(\omega), \\ w_i(x) &= w_i(r\omega) = (-1)^i \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} \gamma_{ki}^s r^k Y_k^s(\omega), \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (15)$$

Для доказательства гармоничности в шаре $\{|x| < 1\}$ функций $\tilde{w}_0(x)$ и $w_i(x)$, $i = 1, \dots, p$, достаточно согласно (8) установить сходимость при любом $R \in [0, 1)$ числовых рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} (\gamma_{ki}^s)^2 R^{2k}, \quad i = 0, \dots, p. \quad (16)$$

Возьмем произвольное $R \in [0, 1)$, а затем выберем $R_0 \in (R, 1)$. Из неравенства (8), примененного к каждой функции $v_i(x)$, $i = 0, \dots, p-1$, вытекает

существование такой постоянной $C > 0$, что коэффициенты α_{ki}^s функций $v_i(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\alpha_{ki}^s| \leq \frac{C}{R_0^k} \quad \text{для всех } i = 0, \dots, p-1, \quad s = 1, \dots, M(k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Следовательно, в силу (11) с постоянной $C_1 = Cp > 0$ имеют место неравенства

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |R_k^s(t)| \leq \frac{C_1}{R_0^k}, \quad s = 1, \dots, M(k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

а тогда из (12) вытекает, что

$$|\beta_{ki}^s| \leq \frac{C_2}{R_0^k} \quad \text{для всех } i = 0, \dots, p-1, \quad s = 1, \dots, M(k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где в качестве постоянной $C_2 > 0$ можно согласно теореме Маркова (см., например, [15]) взять число $C_1 \max_{0 \leq i \leq p-1} ((p-1)^{2i}/i!)$. Далее, из (13) имеем неравенства

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |G_k^s(t)| \leq \frac{C_3}{(k+1)R_0^k}, \quad s = 1, \dots, M(k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где в качестве C_3 можно взять постоянную C_2p , поскольку для всех $j \geq 1, k \geq 0$ имеем $4jk + 2j(n+2j-2) \geq 4k + 2n \geq k+1$. Но тогда снова на основании теоремы Маркова из (14) получаем, что

$$|\gamma_{ki}^s| \leq \frac{C_4}{(k+1)R_0^k} \quad \text{для всех } i = 0, \dots, p, \quad s = 1, \dots, M(k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $C_4 = C_3 \max_{0 \leq i \leq p} (p^{2i}/i!)$. А этого достаточно для доказательства сходимости рядов (16). Утверждение леммы 1 о существовании разложения (6) доказано.

Для доказательства единственности представления m -гармонической функции в виде суммы (6) достаточно проверить, что из тождества

$$u_0(x) + (1-|x|^2)u_1(x) + \dots + (1-|x|^2)^{m-1}u_{m-1}(x) \equiv 0, \quad |x| < 1, \quad (17)$$

в котором $u_i(x)$, $i = 0, \dots, m-1$, – гармонические в шаре $\{|x| < 1\}$ функции, вытекает, что в этом шаре $u_i(x) \equiv 0$ для всех $i = 0, \dots, m-1$; а для этого, конечно, достаточно установить, что лишь последняя функция $u_{m-1}(x)$ тождественно равна нулю, $|x| < 1$.

Функция

$$F(t, x) = u_0(x) + (1-t)u_1(x) + \dots + (1-t)^{m-1}u_{m-1}(x)$$

является многочленом по переменному t с коэффициентами, зависящими от x , $|x| < 1$, причем

$$F(|x|^2, x) \equiv 0, \quad |x| < 1. \quad (18)$$

По формуле Тейлора для произвольно фиксированного $R \in [0, 1)$ имеем равенство

$$F(t, x) = u'_0(x) + (t-R^2)u'_1(x) + \dots + (t-R^2)^{m-1}u'_{m-1}(x),$$

коэффициенты которого

$$u'_i(x) = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i F(t, x)}{\partial t^i} \Big|_{t=R^2}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

суть линейные комбинации функций $u_0(x), \dots, u_{m-1}(x)$ с постоянными коэффициентами, т.е. являются гармоническими функциями в шаре $\{|x| < 1\}$; в частности, $u'_{m-1}(x) = (-1)^{m-1} u_{m-1}(x)$. В силу равенства (18) наряду с равенством (17) получаем также тождество

$$u'_0(x) + (|x|^2 - R^2)u'_1(x) + \dots + (|x|^2 - R^2)^{m-1}u'_{m-1}(x) \equiv 0, \quad |x| < 1. \quad (17')$$

Полагая в (17') $|x| = R$, получаем $u'_0|_{|x|=R} = 0$, а следовательно, $u'_0(x) \equiv 0$ в шаре $\{|x| \leq R\}$; тем самым, $u'_0(x) \equiv 0$, $|x| < 1$. Поэтому равенство (17') можно переписать в виде

$$u'_1(x) + \dots + (|x|^2 - R^2)^{m-2}u'_{m-1}(x) \equiv 0, \quad |x| < 1.$$

Откуда получаем аналогично $u'_1(x) \equiv 0$ в $\{|x| < 1\}$ и т.д.,

$$u'_{m-1}(x) = (-1)^{m-1} u_{m-1}(x) \equiv 0, \quad |x| < 1,$$

что и требовалось установить. Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Для m -гармонической в шаре $\{|x| < 1\}$ функции $u(x)$ существуют постоянные α_{ki}^s , $i = 0, \dots, m-1$, $s = 1, \dots, M(k)$, $k = 0, 1, \dots$, такие, что для всех x , $|x| < 1$,

$$u(x) = u(r\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{ki}^s (1-r^2)^i r^k Y_k^s(\omega). \quad (7')$$

На любом замкнутом подмножестве шара $\{|x| < 1\}$ этот ряд и ряды, полученные из него почленным дифференцированием произвольного порядка по декартовым переменным $x_1, \dots, x_n$, сходятся абсолютно и равномерно. Коэффициенты α_{ki}^s , $i = 0, \dots, m-1$, $s = 1, \dots, M(k)$, $k = 0, 1, \dots$, в (7') определяются функцией $u(x)$ однозначно и подчинены условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{ki}^s)^2 R^{2k} < \infty \quad \text{при любых } R \in [0, 1]. \quad (8')$$

При любых α_{ki}^s , $i = 0, \dots, m-1$, $s = 1, \dots, M(k)$, $k = 0, 1, \dots$, подчиненных соотношению (8'), ряд в (7') определяет в шаре $\{|x| < 1\}$ m -гармоническую функцию.

ЛЕММА 2. Гармоническая в шаре $\{|x| < 1\}$ функция $u(x) = u(r\omega)$, удовлетворяющая условию (3), удовлетворяет и условию (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функцию $u(r\omega)$ в виде ряда (7). Условие (3) означает, что существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $r \in [0, 1)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} r^{2k} (\alpha_k^s)^2 \leq C.$$

Следовательно, $\sum_{k=0}^N r^{2k} \sum_{s=1}^{M(k)} (\alpha_k^s)^2 \leq C$ для всех $r \in [0, 1)$ и при любом $N \geq 1$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $r \rightarrow 1 - 0$, получим, что $\sum_{k=0}^N \sum_{s=1}^{M(k)} (\alpha_k^s)^2 \leq C$ для любого $N \geq 1$, т.е. из условия (3) вытекает сходимость числового ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} (\alpha_k^s)^2.$$

Но тогда

$$\sup_{0 \leq r < 1} \|\mathbb{P}_N u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}^2 = \sup_{0 \leq r < 1} \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} r^{2k} (\alpha_k^s)^2 \leq \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} (\alpha_k^s)^2$$

и, тем самым, выполняется (4).

ЛЕММА 3. Пусть $u(x) = u(r\omega)$ – гармоническая в шаре $\{|x| < 1\}$ функция, разложение в ряд по шаровым функциям которой задается формулой (7), и пусть $p > 0$ – некоторое целое число. Условие

$$\sup_{0 \leq r < 1} \|(1 - r^2)^p u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}^2 < \infty \quad (19)$$

эквивалентно условию

$$\sup_{N \geq 1} \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \frac{(\alpha_k^s)^2}{k^{2p}} < \infty, \quad (20)$$

а условие

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|(1 - r^2)^p u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}^2 = 0 \quad (19')$$

эквивалентно условию

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \frac{(\alpha_k^s)^2}{k^{2p}} = 0. \quad (20')$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале покажем, что из (19) вытекает (20). Так как

$$\|(1 - r^2)^p u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}^2 = (1 - r^2)^{2p} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} r^{2k} (\alpha_k^s)^2,$$

то соотношение (19) эквивалентно неравенству

$$(1 - r^2)^{2p} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} r^{2k} (\alpha_k^s)^2 \leq C, \quad r \in (0, 1), \quad (21)$$

в котором $C > 0$ – некоторая постоянная. Из (21) получаем выполняющееся при всех $r \in [0, 1)$ неравенство

$$\begin{aligned} C &\geq (1-r^2)^{2p}(\alpha_0^1)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} r^{2k} \sum_{s=1}^{M(k)} (\alpha_k^s)^2 (1-r^2)^{2p} \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} \frac{(\alpha_k^s)^2}{k^{2p}} ((1-r^2)k)^{2p} r^{2k} \geq \sum_{k \in [1/(1-r^2), 2/(1-r^2)]} \sum_{s=1}^{M(k)} \frac{(\alpha_k^s)^2}{k^{2p}} \left(1 - \frac{2}{k}\right)^k. \end{aligned}$$

Поскольку $(1-2/k)^k \rightarrow e^{-2}$ при $k \rightarrow \infty$, то существует такое $N_0 > 1$, что для всех $k \geq N_0$ имеет место неравенство $(1-1/k)^k \geq 1/(2e^2)$. Возьмем произвольное целое $N > N_0$; полагая в последнем неравенстве $r = \sqrt{1-1/N}$, получим неравенство

$$C \geq \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \frac{(\alpha_k^s)^2}{k^{2p}} \left(1 - \frac{2}{k}\right)^k \geq \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \frac{(\alpha_k^s)^2}{k^{2p}} \frac{1}{2e^2},$$

доказывающее соотношение (20).

Докажем теперь, что из (20) вытекает (19). Левую часть неравенства (21) с помощью преобразования Абеля представим в виде

$$\begin{aligned} (1-r^2)^{2p} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} r^{2k} (\alpha_k^s)^2 &= (\alpha_0^1)^2 (1-r^2)^{2p} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} k \frac{(\alpha_k^s)^2}{k^{2p}} \frac{(k(1-r^2))^{2p} r^{2k}}{k} \\ &= (\alpha_0^1)^2 (1-r^2)^{2p} + \sum_{k=1}^{\infty} (F(k) - F(k-1)) \frac{(k(1-r^2))^{2p} r^{2k}}{k} \\ &= (\alpha_0^1)^2 (1-r^2)^{2p} + \sum_{k=1}^{\infty} F(k) \left[\frac{(k(1-r^2))^{2p} r^{2k}}{k} - \frac{((k+1)(1-r^2))^{2p} r^{2(k+1)}}{k+1} \right] \\ &= (\alpha_0^1)^2 (1-r^2)^{2p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} F(k) \psi_k(r), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$F(k) = \sum_{i=1}^k i \sum_{s=1}^{M(i)} \frac{(\alpha_i^s)^2}{i^{2p}}, \quad k \geq 1, \quad F(0) = 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \psi_k(r) &= k \left[\frac{(k(1-r^2))^{2p} r^{2k}}{k} - \frac{((k+1)(1-r^2))^{2p} r^{2(k+1)}}{k+1} \right] \\ &= k^{2p} (1-r^2)^{2p} r^{2k} - k(k+1)^{2p-1} (1-r^2)^{2p} r^{2(k+1)} \\ &= (1-r^2)^{2p} r^{2k} (k^{2p} - k(k+1)^{2p-1}) + (1-r^2)^{2p+1} k(k+1)^{2p-1} r^{2k} \\ &= -(1-r^2)^{2p} r^{2k} \sum_{j=0}^{2p-2} C_{2p-1}^j k^{j+1} + (1-r^2)^{2p+1} r^{2k} \sum_{j=0}^{2p-1} C_{2p-1}^j k^{j+1}, \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (24)$$

а $C_l^j = l!/(j!(l-j)!)$, $0 \leq j \leq l$, $l > 0$.

Следовательно,

$$|\psi_k(r)| \leq (1-r^2)^{2p} r^{2k} \sum_{j=0}^{2p-2} C_{2p-1}^j k^{j+1} + (1-r^2)^{2p+1} r^{2k} \sum_{j=0}^{2p-1} C_{2p-1}^j k^{j+1}. \quad (25)$$

Легко видеть, что для любого (целого) $q \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^q r^{2k} \leq \frac{q!}{(1-r^2)^{q+1}} \quad \text{для всех } r \in [0, 1]. \quad (26)$$

Действительно, дифференцируя q раз по $\rho \in (-1, 1)$ равенство

$$(1-\rho)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k,$$

получим

$$q! (1-\rho)^{-(q+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-q+1) \rho^{k-q} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+q) \cdots (k+1) \rho^k.$$

Следовательно, при $\rho \in [0, 1)$

$$q! (1-\rho)^{-(q+1)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} k^q \rho^k,$$

откуда и вытекает нужное нам неравенство (26).

Из неравенства (25) с помощью (26) получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k(r)| \\ & \leq (1-r^2)^{2p} \sum_{j=0}^{2p-2} C_{2p-1}^j \sum_{k=1}^{\infty} k^{j+1} r^{2k} + (1-r^2)^{2p+1} \sum_{j=0}^{2p-1} C_{2p-1}^j \sum_{k=1}^{\infty} k^{j+1} r^{2k} \\ & \leq (1-r^2)^{2p} \sum_{j=0}^{2p-2} C_{2p-1}^j \frac{(j+1)!}{(1-r^2)^{j+2}} + (1-r^2)^{2p+1} \sum_{j=0}^{2p-1} C_{2p-1}^j \frac{(j+1)!}{(1-r^2)^{j+2}} \\ & \leq \sum_{j=0}^{2p-2} C_{2p-1}^j (j+1)! + \sum_{j=0}^{2p-1} C_{2p-1}^j (j+1)! = C_1, \quad r \in [0, 1). \end{aligned} \quad (27)$$

Далее воспользуемся следующим элементарным утверждением (лемма 4 из работы [2]).

Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ – последовательность неотрицательных чисел. Если

$$\sum_{k=N}^{2N} \gamma_k = O(1) \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad (28)$$

то

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N k\gamma_k = O(1) \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Если

$$\sum_{k=N}^{2N} \gamma_k = o(1) \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad (30)$$

то

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N k\gamma_k = o(1) \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Продолжая доказательство леммы 3, положим

$$\gamma_k = \frac{1}{k^{2p}} \sum_{s=1}^{M(k)} (\alpha_k^s)^2, \quad k > 0.$$

Тогда силу (20) имеет место соотношение (28). Следовательно (поскольку из (28) вытекает (29)), числовая последовательность $\{F(k), k = 0, 1, \dots\}$, определенная равенствами (23), обладает следующим свойством:

$$0 \leq \frac{F(k)}{k} \leq C_2, \quad k \geq 1, \quad (32)$$

где $C_2 > 0$ – некоторая постоянная.

Из равенства (22) в силу (32) и (27) имеем справедливое для всех $r \in (0, 1)$ неравенство

$$\begin{aligned} & (1 - r^2)^{2p} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} r^{2k} (\alpha_k^s)^2 \\ & \leq (\alpha_0^1)^2 (1 - r^2)^{2p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} F(k) \psi_k(r) + (\alpha_0^1)^2 (1 - r^2)^{2p} + C_2 \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k(r)| \\ & \leq (\alpha_0^1)^2 (1 - r^2)^{2p} + C_2 C_1 \leq C_3, \end{aligned}$$

т.е. имеет место соотношение (19).

Доказательство эквивалентности соотношений (19') и (20') проводится по тому же плану, что и доказательство эквивалентности (19) и (20).

Пусть выполнено условие (19'). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $r_0 \in (0, 1)$, что

$$(1 - r^2)^{2p} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} r^{2k} (\alpha_k^s)^2 \leq \varepsilon \quad \text{для всех } r \in (r_0, 1). \quad (21')$$

Это неравенство совпадает с неравенством (21), в котором $C = \varepsilon$ и $r \in (r_0, 1)$. Повторяя проведенные выше рассуждения, получим, что для всех $N \geq N_0$, где $N_0 = [1/(1 - r_0^2)] + 1$, имеет место неравенство

$$\sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \frac{(\alpha_k^s)^2}{k^{2p}} \leq 2\varepsilon e^2,$$

из которого вытекает соотношение (20').

Докажем обратное утверждение. Пусть выполнено условие (20'). Полагая, как и в проведенном выше доказательстве,

$$\gamma_k = \frac{1}{k^{2p}} \sum_{s=1}^{M(k)} (\alpha_k^s)^2, \quad k > 0,$$

получим, что

$$\sum_{k=N}^{2N} \gamma_k \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty,$$

откуда (поскольку из (30) вытекает (31)) имеем

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N k \gamma_k \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty.$$

В терминах функции $F(k)$, определенной равенством (23), последнее соотношение можно переписать в виде

$$\frac{1}{N} F(N) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty,$$

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N_0 \geq 1$, что

$$0 \leq \frac{1}{N} F(N) \leq \varepsilon \quad \text{для всех} \quad N \geq N_0.$$

Из равенства (22), справедливого, напомним, для любого $r \in (0, 1)$, получим неравенство

$$\begin{aligned} \|(1-r^2)^p u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}^2 &= (\alpha_0^1)^2 (1-r^2)^{2p} + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} F(N) \psi_N(r) \\ &\leq (\alpha_0^1)^2 (1-r^2)^{2p} + \sum_{N=1}^{N_0} \frac{1}{N} F(N) |\psi_N(r)| + \sum_{N=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{N} F(N) |\psi_N(r)| \\ &\leq (\alpha_0^1)^2 (1-r^2)^{2p} + \sum_{N=1}^{N_0} \frac{1}{N} F(N) |\psi_N(r)| + \varepsilon \sum_{N=N_0+1}^{\infty} |\psi_N(r)| \\ &\leq (\alpha_0^1)^2 (1-r^2)^{2p} + \sum_{N=1}^{N_0} \frac{1}{N} F(N) |\psi_N(r)| + \varepsilon C_1, \quad r \in (0, 1), \end{aligned}$$

в котором C_1 – постоянная из неравенства (27). Из определения функции $\psi_k(r)$ (см. (24)) следует, что для любого $N \geq 1$ имеем $\psi_N(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1 - 0$. Это означает, что по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $r_0 \in (0, 1)$, что

$$\|(1-r^2)^p u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}^2 \leq (C_1 + 1)\varepsilon \quad \text{для всех} \quad r \in (r_0, 1),$$

что эквивалентно условию (19'). Лемма 3 доказана.

Покажем, что условия (19') и (20') эквивалентны еще и условию

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq r < 1} \|\mathbb{P}_N(1 - r^2)^p u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}^2 = 0. \quad (20'')$$

Согласно следствию из леммы 1

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}_N(1 - r^2)^p u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}^2 &= \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} (\alpha_k^s)^2 (1 - r^2)^{2p} r^{2k} \\ &= \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \left(\frac{\alpha_k^s}{k^p}\right)^2 ((1 - r^2)k)^{2p} r^{2k} \leq \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \left(\frac{\alpha_k^s}{k^p}\right)^2 \left(\frac{2pk}{2p+k}\right)^{2p} \left(\frac{k}{2p+k}\right)^k, \end{aligned}$$

поскольку

$$\max_{0 \leq r \leq 1} (((1 - r^2)k)^{2p} r^{2k}) = \left(\frac{2pk}{2p+k}\right)^{2p} \left(\frac{k}{2p+k}\right)^k.$$

Следовательно, при достаточно больших N

$$\|\mathbb{P}_N(1 - r^2)^p u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}^2 \leq 2(2p)^{2p} e^{-2p} \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \left(\frac{\alpha_k^s}{k^p}\right)^2$$

и, тем самым, условие (20'') вытекает из (20').

Обратно. Пусть выполнено условие (20''). Тогда, в частности, при $r = r_N = \sqrt{1 - 1/N}$, $N > 1$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathbb{P}_N(1 - r_N^2)^p u(r_N \omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}^2 = 0,$$

поэтому по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $N_0 > 0$, что для всех $N > N_0$

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} (1 - r_N^2)^{2p} (\alpha_k^s)^2 r_N^{2k} = \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} (\alpha_k^s)^2 \frac{1}{N^{2p}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k \\ &\geq \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \left(\frac{\alpha_k^s}{k^p}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2N} \geq \frac{1}{2e^2} \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \left(\frac{\alpha_k^s}{k^p}\right)^2, \end{aligned}$$

т.е. имеет место условие (20'). Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 4. Пусть $u(x) = u(r\omega)$ – гармоническая в шаре $\{|x| < 1\}$ функция, и пусть $p > 0$ – некоторое целое число. Условие

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|(1 - r^2)^p u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}^2 = 0 \quad (19')$$

и условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq r < 1} \|\mathbb{P}_N(1 - r^2)^p u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}^2 = 0 \quad (20'')$$

эквивалентны.

ЛЕММА 5. Пусть $u(x)$ – m -гармоническая в шаре $\{|x| < 1\}$ функция, а

$$u(x) = \sum_{i=0}^{m-1} (1 - |x|^2)^i u_i(x), \quad |x| < 1,$$

– ее представление (6) согласно лемме 1.

Условие (3) L_2 -ограниченности функции $u(x)$, а именно

$$\sup_{0 \leq r < 1} \|u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)} < \infty$$

и условие L_2 -ограниченности функций $(1 - |x|^2)^i u_i(x)$, $i = 0, \dots, m-1$,

$$\sup_{0 \leq r < 1} \|(1 - r^2)^i u_i(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)} < \infty, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (33)$$

эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется доказать только утверждение, что из условия (3) вытекает (33).

Пусть выполнено условие (3). Тогда согласно следствию из леммы 1 имеем неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{ki}^s (1 - r^2)^i r^k \right)^2 \leq C \quad \text{для всех } r \in [0, 1),$$

в котором $C = \sup_{0 \leq r < 1} \|u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}$, и тем более при любом целом $N > 0$ для всех $r \in [0, 1)$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^N \sum_{s=1}^{M(k)} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{ki}^s (1 - r^2)^i r^k \right)^2 \leq C.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $r \rightarrow 1 - 0$, получим, что $\sum_{k=0}^N \sum_{s=1}^{M(k)} (\alpha_{k0}^s)^2 \leq C$ при любом $N > 0$, т.е. сходится числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} (\alpha_{k0}^s)^2 \leq C,$$

и, тем самым,

$$\sup_{0 \leq r < 1} \|u_0(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)} = \sup_{0 \leq r < 1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} (\alpha_{k0}^s)^2 r^{2k} \leq \sup_{0 \leq r < 1} \|u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}. \quad (34)$$

Из условий (3) и (34) следует неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{ki}^s (1 - r^2)^i r^k \right)^2 \leq C_1 \quad \text{для всех } r \in [0, 1), \quad (35)$$

где $C_1 = 4 \sup_{0 \leq r < 1} \|u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}$, и, тем более, справедливое для всех $N \geq 1$ неравенство

$$\sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{ki}^s r^k (1-r^2)^{i-1} \right)^2 \leq \frac{C_1}{(1-r^2)^2}, \quad r \in [0, 1). \quad (36)$$

Введем обозначение

$$\frac{\alpha_{ki}^s}{k^i} = \beta_{ki}^s, \quad s = 1, \dots, M(k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (37)$$

Тогда (36) можно переписать в виде неравенства

$$\sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} k^2 \left(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_{ki}^s r^k ((1-r^2)k)^{i-1} \right)^2 \leq \frac{C_1}{(1-r^2)^2}, \quad r \in [0, 1), \quad N \geq 1,$$

проинтегрировав которое по r по интервалу $(0, r)$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} k^2 \int_0^r \left(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_{ki}^s \rho^k ((1-\rho^2)k)^{i-1} \right)^2 d\rho \\ & \leq C_1 \left(\frac{1}{4} \ln \frac{1+r}{1-r} + \frac{r}{2(1-r^2)} \right) \leq C_1 \frac{r}{1-r^2}, \quad r \in [0, 1), \quad N \geq 1, \end{aligned}$$

поскольку

$$\ln \frac{1+r}{1-r} \leq \frac{2r}{1-r^2} \quad \text{при всех } r \in [0, 1).$$

В частности, при $r = r_N = \sqrt{1-1/N}$, $N > 1$, имеем

$$\begin{aligned} C_1 & \geq \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \frac{k^2}{N \sqrt{1-1/N}} \int_0^{\sqrt{1-1/N}} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_{ki}^s \rho^k ((1-\rho^2)k)^{i-1} \right)^2 d\rho \\ & = \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \frac{k^2}{N \sqrt{1-1/N}} \int_{k/N}^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_{ki}^s \left(1 - \frac{\zeta}{k}\right)^{k/2} \zeta^{i-1} \right)^2 \frac{d\zeta}{2k \sqrt{1-\zeta/k}} \\ & \geq \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \frac{k}{2(N-1)} \int_{k/N}^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_{ki}^s \left(1 - \frac{\zeta}{k}\right)^{k/2} \zeta^{i-1} \right)^2 d\zeta, \quad N \geq 2. \quad (38) \end{aligned}$$

Рассмотрим при произвольных вещественных (не только целых) k и N , $N \geq 2$, $N \leq k \leq 2N$, и произвольном вещественном $(m-1)$ -мерном векторе $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ функцию

$$\mathbb{K}(k, N, \beta) = \frac{k}{2(N-1)} \int_{k/N}^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_i \left(1 - \frac{\zeta}{k}\right)^{k/2} \zeta^{i-1} \right)^2 d\zeta, \quad (39)$$

являющуюся квадратичной формой в $\mathbb{R}^{m-1}$ симметрической матрицы $\mathbb{A} = \|A_{ij}\|_{i,j=1,\dots,m-1}$ с элементами

$$A_{ij} = A_{ji} = \frac{k}{2(N-1)} \int_{k/N}^k \left(1 - \frac{\zeta}{k}\right)^k \zeta^{i+j-2} d\zeta,$$

$$N \leq k \leq 2N, \quad N \geq 2, \quad i, j = 1, \dots, m-1,$$

$$\mathbb{K}(k, N, \beta) = \sum_{i,j=1}^{m-1} A_{ij} \beta_i \beta_j.$$

Из равенства (39) вытекает, что матрица $\mathbb{A}$ неотрицательно определенная. Нам потребуется более сильное утверждение.

ЛЕММА 6. *Квадратичная форма $\mathbb{K}(k, N, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}^{m-1}$, симметрической матрицы $\mathbb{A}$ равномерно на множестве $\{N \leq k \leq 2N, N \geq 2\}$ положительно определена, т.е.*

$$\lambda_1 = \inf_{N \leq k \leq 2N, N \geq 2} \inf_{|\beta|=1} \mathbb{K}(k, N, \beta) > 0 \quad (40)$$

(здесь $|\beta| = (\beta_1^2 + \dots + \beta_{m-1}^2)^{1/2}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим в противоположность (40), что $\lambda_1 = 0$. Тогда существуют последовательности $\{k_p, p = 1, 2, \dots\}$, $\{N_p, p = 1, 2, \dots\}$, $\{\beta^p = (\beta_1^p, \dots, \beta_{m-1}^p), p = 1, 2, \dots\}$, $2 \leq N_p \leq k_p \leq 2N_p$, $p = 1, 2, \dots$, для которых

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathbb{K}(k_p, N_p, \beta^p) = 0. \quad (41)$$

Возможны два случая:

- последовательность $\{N_p, p = 1, 2, \dots\}$ ограничена;
- последовательность $\{N_p, p = 1, 2, \dots\}$ не ограничена.

В первом случае за счет прореживания соответствующих последовательностей можно считать, что $N_p \rightarrow N_0$, $2 \leq N_0 < \infty$, $\beta^p \rightarrow \beta^0 = (\beta_1^0, \dots, \beta_{m-1}^0)$, $|\beta^0| = 1$, $k_p/N_p \rightarrow \sigma \in [1, 2]$ при $p \rightarrow \infty$ и, следовательно, $k_p \rightarrow \sigma N_0$ при $p \rightarrow \infty$. Тогда при $p \rightarrow \infty$

$$\mathbb{K}(k_p, N_p, \beta^p) \rightarrow \frac{\sigma N_0}{2(N_0 - 1)} \int_{\sigma}^{\sigma N_0} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_i^0 \left(1 - \frac{\zeta}{\sigma N_0}\right)^{\sigma N_0/2} \zeta^{i-1} \right)^2 d\zeta,$$

чего в силу (41) быть не может, поскольку $|\beta^0| = 1$.

Во втором случае можно считать, что $N_p \rightarrow \infty$, $\beta^p = (\beta_1^p, \dots, \beta_{m-1}^p) \rightarrow \beta^0$, $|\beta^0| = 1$, $k_p/N_p \rightarrow \sigma \in [1, 2]$ при $p \rightarrow \infty$ и, следовательно, $k_p \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow \infty$; при этом последовательность $\{k_p, p = 1, 2, \dots\}$ можно считать монотонно возрастающей.

Обозначая через $\chi_p(\zeta)$ характеристическую функцию отрезка $[k_p/N_p, k_p]$, имеем

$$\mathbb{K}(k_p, N_p, \beta^p) = \frac{k_p}{2(N_p - 1)} \int_2^{\infty} \chi_p(\zeta) \left(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_i^p \left(1 - \frac{\zeta}{k_p}\right)^{k_p/2} \zeta^{i-1} \right)^2 d\zeta. \quad (42)$$

Очевидно, что подынтегральная функция в (42) почти всюду сходится при $p \rightarrow \infty$ к функции

$$\chi_0(\zeta) \left(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_i^0 e^{-\zeta/2} \zeta^{i-1} \right)^2,$$

где $\chi_0(\zeta)$ – характеристическая функция множества $[\sigma, \infty)$, и имеет интегрируемую мажоранту, поскольку $(1 - \zeta/k_p)^{k_p/2} \leq e^{-\zeta/2}$.

Поэтому, переходя в (42) к пределу при $p \rightarrow \infty$, получим с использованием (41) равенство

$$\int_{\sigma}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_i^0 \zeta^{i-1} \right)^2 e^{-\zeta} d\zeta = 0,$$

которое тоже противоречит условию $|\beta^0| = 1$. Лемма 6 доказана.

Возвращаясь к доказательству леммы 5, продолжим неравенство (38); при этом $(m-1)$ -мерный вектор $(\beta_{k,1}^s, \dots, \beta_{k,m-1}^s)$ обозначим через β_k^s : $\beta_k^s = (\beta_{k,1}^s, \dots, \beta_{k,m-1}^s)$. Из неравенства (40) вытекает, что

$$C_1 \geq \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \mathbb{K}(k, N, \beta_k^s) \geq \lambda_1 \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} |\beta_k^s|^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} (\beta_{ki}^s)^2.$$

Следовательно, имеют место неравенства

$$\sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} (\beta_{ki}^s)^2 \leq \frac{C}{\lambda_1}, \quad i = 1, \dots, m-1,$$

которые в силу (37) совпадают с неравенствами

$$\sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \frac{(\alpha_{ki}^s)^2}{k^{2i}} \leq \frac{C}{\lambda_1}, \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Совокупность последних двух неравенств согласно лемме 3 после добавления к ней ранее доказанного неравенства (34) эквивалентна (33). Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $u(x)$ – m -гармоническая в шаре $\{|x| < 1\}$ функция, а (6) – ее разложение по шаровым функциям. Условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq r < 1} \|\mathbb{P}_N u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)} = 0 \quad (43)$$

эквивалентно условиям

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq r < 1} \|\mathbb{P}_N (1 - r^2)^i u_i(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)} = 0 \quad \text{для всех } i = 0, \dots, m-1. \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в лемме 5, доказать нужно лишь утверждение о том, что из условия (43) вытекает (44). Так как

$$\|\mathbb{P}_N u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}^2 = \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{ki}^s r^k (1 - r^2)^{i-1} \right)^2,$$

то согласно (43) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N_0 = N_0(\varepsilon) > 0$, что для всех $N \geq N_0$

$$\sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{ki}^s r^k (1-r^2)^{i-1} \right)^2 \leq \varepsilon \quad \text{при всех } r \in [0, 1).$$

Из этого неравенства (как и в соответствующем месте доказательства в лемме 5) вытекает неравенство

$$\sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} (\alpha_{k0}^s)^2 \leq \varepsilon,$$

а значит, и справедливое для всех $N \geq N_0$ неравенство

$$\sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{ki}^s r^k (1-r^2)^{i-1} \right)^2 \leq 4\varepsilon \quad \text{при всех } r \in [0, 1). \quad (45)$$

Из неравенства (45) (так же, как из неравенства (35) было получено неравенство (38)) вытекает справедливость при всех $N \geq \max(N_0, 2)$ неравенства

$$4\varepsilon \geq \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \frac{k}{2(N-1)} \int_{k/N}^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_{ki}^s \left(1 - \frac{\zeta}{k}\right)^{k/2} \zeta^{i-1} \right)^2 d\zeta,$$

в котором β_{ki}^s определяются через α_{ki}^s по формулам (37), $s = 1, \dots, m-1$, $k = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, m-1$. Следовательно, в силу леммы 6 при $N \geq \max(N_0, 2)$

$$\sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \frac{(\alpha_{ki}^s)^2}{k^{2i}} \leq \frac{4\varepsilon}{\lambda_1} \quad \text{при всех } i = 1, \dots, m-1,$$

т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \frac{(\alpha_{ki}^s)^2}{k^{2i}} = 0.$$

Утверждение леммы 7 теперь вытекает из лемм 3 и 4.

ЛЕММА 8. Пусть разложение (6) m -гармонической в шаре $\{|x| < 1\}$ функции $u(x)$ имеет вид

$$u(x) = \sum_{i=1}^{m-1} (1 - |x|^2)^i u_i(x), \quad |x| < 1. \quad (46)$$

Если функция $u(x)$ имеет L_2 -предел на границе, то этот предел равен нулю и каждое слагаемое равенства (46) также имеет нулевой L_2 -предел на границе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу равенства (7') (следствие из леммы 1) при любом $r \in [0, 1)$

$$(u(r\omega), Y_k^s(\omega))_{L_2(|\omega|=1)} = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{ki}^s (1-r^2)^i, \quad s = 1, \dots, M(k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Поэтому при любых $s = 1, \dots, M(k)$, $k = 0, 1, \dots$,

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (u(r\omega), Y_k^s(\omega))_{L_2(|\omega|=1)} = 0.$$

Тем самым (поскольку система $\{Y_k^s(\omega)\}$ является базисом в $L_2(|\omega| = 1)$, а функция $u(x)$, L_2 -ограничена), функция $u(x)$ имеет нулевой слабый L_2 -предел на границе, а значит, и ее L_2 -предел на границе также равен нулю.

Обозначим через $f(r)$ заданную на $[0, 1]$ функцию, равную $\|u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}^2$ при $r \in [0, 1)$ и равную нулю при $r = 1$. По только что доказанному $f(r) \in C([0, 1])$. При всех $r \in [0, 1)$

$$f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{ki}^s (1-r^2)^i r^k \right)^2$$

и, тем более, для всех $N \geq 1$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{ki}^s (1-r^2)^i r^k \right)^2 \leq f(r) \quad \text{для всех } r \in [0, 1).$$

С этим неравенством поступим так же, как с неравенством (35) в доказательстве леммы 5: вместо коэффициентов α_{ki}^s введем коэффициенты β_{ki}^s , $s = 1, \dots, M(k)$, $k = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, m-1$, по формулам (37), разделим неравенство на $(1-r^2)^2$ и проинтегрируем полученное неравенство по r по интервалу $(0, r)$. В результате получим

$$\sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} k^2 \int_0^r \left(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_{ki}^s \rho^k ((1-\rho^2)k)^{i-1} \right)^2 d\rho \leq \int_0^r \frac{f(\rho) d\rho}{(1-\rho^2)^2}, \quad r \in [0, 1),$$

откуда при $r = r_N = \sqrt{1-1/N}$, $N > 1$, получим неравенство

$$\sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} k^2 \int_0^{\sqrt{1-1/N}} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_{ki}^s \rho^k ((1-\rho^2)k)^{i-1} \right)^2 d\rho \leq \int_0^{\sqrt{1-1/N}} \frac{f(\rho) d\rho}{(1-\rho^2)^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \frac{k}{2(N-1)} \int_{k/N}^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_{ki}^s \left(1 - \frac{\zeta}{k}\right)^{k/2} \zeta^{i-1} \right)^2 d\zeta \leq \frac{2}{N} \int_0^{\sqrt{1-1/N}} \frac{f(\rho) d\rho}{(1-\rho^2)^2},$$

$$N \geq 2.$$

По лемме 6 для всех интересующих нас k и N

$$\frac{k}{2(N-1)} \int_{k/N}^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_{ki}^s \left(1 - \frac{\zeta}{k}\right)^{k/2} \zeta^{i-1} \right)^2 d\zeta \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^{m-1} (\beta_{ki}^s)^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(\alpha_{ki}^s)^2}{k^{2i}},$$

$$N \geq 2,$$

поэтому для каждого $i = 1, \dots, m - 1$ получаем неравенство

$$\sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \frac{(\alpha_{ki}^s)^2}{k^{2i}} \leq \frac{2}{\lambda_1 N} \int_0^{\sqrt{1-1/N}} \frac{f(\rho) d\rho}{(1-\rho^2)^2}, \quad (47)$$

справедливое для всех $N \geq 2$.

Поскольку, как не трудно проверить,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^{\sqrt{1-1/N}} \frac{f(\rho) d\rho}{(1-\rho^2)^2} = 0,$$

то из неравенства (47) вытекает, что при любом $i = 1, \dots, m - 1$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^{2N} \sum_{s=1}^{M(k)} \frac{(\alpha_{ki}^s)^2}{k^{2i}} = 0,$$

а следовательно, в силу леммы 3 функция $(1 - |x|^2)^i u_i(x)$ при любом $i = 1, \dots, m - 1$ имеет нулевой L_2 -предел на границе. Лемма 8 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Достаточность. Пусть $u(x)$ — m -гармоническая в шаре $\{|x| < 1\}$ функция, а (6) — ее разложение согласно лемме 1 по шаровым функциям.

Из условия L_2 -ограниченности функции $u(x)$ (условие (3)) в силу леммы 5 следует L_2 -ограниченность каждого слагаемого в сумме (6) и, в частности, L_2 -ограниченность функции $u_0(x)$; из L_2 -ограниченности функции $u_0(x)$ в силу результатов работы [8] вытекает существование L_2 -предела этой функции на границе.

Из условия (4) для функции $u(x)$ в силу леммы 7 следует, что каждое слагаемое в правой части (6) также удовлетворяет этому условию (в том числе согласно лемме 2 и функция $u_0(x)$), а тогда по лемме 4 слагаемые $(1 - |x|^2)^i u_i(x)$, $i = 1, \dots, m - 1$, имеют нулевые L_2 -пределы на границе. Следовательно, функция $u(x)$ имеет L_2 -предел на границе, совпадающий с L_2 -пределом на границе функции $u_0(x)$.

Необходимость. Пусть m -гармоническая функция $u(x)$ имеет L_2 -предел на границе. Тогда она L_2 -ограничена и по лемме 5 L_2 -ограничено каждое слагаемое ее разложения (6), в частности, L_2 -ограничена гармоническая функция $u_0(x)$, которая согласно результату из [8] имеет L_2 -предел на границе. Следовательно, сумма $(1 - |x|^2)u_1(x) + \dots + (1 - |x|^2)^{m-1}u_{m-1}(x)$ также имеет L_2 -предел на границе. По лемме 8 каждое слагаемое этой суммы имеет нулевой L_2 -предел на границе. А тогда по лемме 4 каждое из этих слагаемых удовлетворяет условию (4) и, тем самым, функция $u(x)$ также удовлетворяет условию (4).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u(x)$ — полигармоническая функция в шаре $\{|x| < 1\}$, и пусть (6) — ее представление через гармонические функции. Если функция $u(x)$ имеет L_2 -предел на границе $\{|x| = 1\}$, то и каждое слагаемое в (6) имеет L_2 -предел на границе, причем L_2 -предел функции $u_0(x)$ совпадает с соответствующим пределом функции $u(x)$, а L_2 -пределы всех остальных слагаемых равны нулю.

Доказательство этой теоремы содержится в пункте “необходимость” доказательства теоремы 1.

Приведем примеры, о которых шла речь в начале работы.

Функция

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} \sqrt{\frac{k}{M(k)}} r^k Y_k^s(\omega), \quad r < 1, \quad |\omega| = 1,$$

является гармонической функцией в шаре $\{r < 1, |\omega| = 1\}$, так как в силу неравенств (5) ее коэффициенты удовлетворяют условию (8). Следовательно, по лемме 1 функция

$$u(r\omega) = (1 - r^2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} \sqrt{\frac{k}{M(k)}} \varepsilon_k^s r^k Y_k^s(\omega), \quad r < 1, \quad |\omega| = 1, \quad (48)$$

при любом $m > 1$ является m -гармонической функцией в этом шаре.

Поскольку

$$\begin{aligned} \|u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)}^2 &= (1 - r^2)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} r^{2k} \frac{k}{M(k)} \\ &= (1 - r^2)^2 \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} k = r^2 \uparrow 1 \quad \text{при } r \rightarrow 1 - 0, \end{aligned} \quad (49)$$

то эта функция L_2 -ограничена (удовлетворяет условию (3)).

С другой стороны, множество следов (2) этой функции при $r \rightarrow 1 - 0$ слабо в $L_2(|\omega| = 1)$ сходится к нулю: это множество L_2 -ограничено и все коэффициенты Фурье функций $u(r\omega)$ по полной в $L_2(|\omega| = 1)$ системе сферических функций стремятся к нулю при $r \rightarrow 1 - 0$, т.е.

$$(u(r\omega), Y_k^s(\omega))_{L_2(|\omega|=1)} = (1 - r^2) r^k \sqrt{\frac{k}{M(k)}} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 1 - 0$$

для любых $s = 1, \dots, M(k), \quad k = 0, 1, \dots$.

Это означает, что множество (2) не может быть сходящимся в $L_2(|\omega| = 1)$, поскольку в противном случае оно должно сходиться в $L_2(|\omega| = 1)$ к нулю, а этого быть не может в силу (49).

Таким образом, функция $u(r\omega)$ в (48) доставляет пример m -гармонической при любом $m > 1$ в шаре $\{|x| < 1\}$ функции, L_2 -ограниченной, но не имеющей L_2 -предела на границе.

В работе [5] установлен еще один критерий (типа теоремы Литтлвуда–Пэли) существования L_2 -пределов на границе у решений уравнения второго порядка. В нашей ситуации для решений уравнения (1) при $m = 1$ он выглядит следующим образом: для существования L_2 -предела на границе у решения $u(x)$ этого уравнения (у гармонической функции) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_{|x| < 1} |\nabla u|^2 (1 - |x|) dx < \infty. \quad (50)$$

Это утверждение, однако, не является критерием для любого решения уравнения (1) при $m > 1$. Можно показать, что конечность интеграла (50) является достаточным условием для существования L_2 -предела на границе любого решения уравнения (1). Однако для всех решений уравнения (1) при $m > 1$ это условие не является необходимым: m -гармоническая при любом $m > 1$ функция

$$u(r\omega) = (1 - r^2) \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{s=1}^{M(k)} \sqrt{\frac{k}{M(k) \ln k}} r^k Y_k^s(\omega), \quad r < 1, \quad |\omega| = 1,$$

имеет (нулевой) L_2 -предел на границе, но условие (50) для нее не выполняется.

Список литературы

- [1] В. П. Михайлов, “О существовании предельных значений на границе решений полигармонического уравнения”, *Докл. РАН*, **407**:5, (2006), 592–594; англ. пер.: V. P. Mikhailov, “On the existence of boundary limit values for solutions to polyharmonic equations”, *Dokl. Math.*, **73**:2, (2006), 261–263.
- [2] В. П. Михайлов, “О существовании предельных значений на границе области решений полигармонического уравнения”, *Матем. сб.*, **187**:11, (1996), 89–114; англ. пер.: V. P. Mikhailov, “Existence of limit values of the solutions of a polyharmonic equation on the boundary of a domain”, *Sb. Math.*, **187**:11, (1996), 1665–1690.
- [3] С. Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных*, Высшая школа, М., 1977.
- [4] В. П. Михайлов, “О существовании граничных значений у метатармонических функций”, *Матем. сб.*, **190**:10, (1999), 17–48; англ. пер.: V. P. Mikhailov, “Existence of boundary values for metaharmonic functions”, *Sb. Math.*, **190**:10, (1999), 1417–1448.
- [5] В. П. Михайлов, “О существовании граничного значения у бигармонических функций”, *Матем. сб.*, **195**:12, (2004), 81–94; англ. пер.: V. P. Mikhailov, “Existence of boundary values for biharmonic functions”, *Sb. Math.*, **195**:12, (2004), 1781–1793.
- [6] В. П. Михайлов, “О существовании граничного значения у полигармонической функции”, *Сиб. матем. журн.*, **46**:5, (2005), 1125–1137; англ. пер.: V. P. Mikhailov, “Existence of the boundary value of a polyharmonic function”, *Siberian Math. J.*, **46**:5, (2005), 902–912.
- [7] В. П. Михайлов, “Достаточное условие существования предельных значений на границе у решений эллиптического уравнения”, *ТМФ*, **157**:3, (2008), 436–449; англ. пер.: V. P. Mikhailov, “A sufficient condition for the existence of limit values of solutions of an elliptic equation on the boundary”, *Theoret. and Math. Phys.*, **157**:3, (2008), 1733–1744.
- [8] В. П. Михайлов, “О граничных значениях решений эллиптических уравнений в областях с гладкой границей”, *Матем. сб.*, **101**(143):2(10), (1976), 163–188; англ. пер.: V. P. Mikhailov, “On the boundary values of solutions of elliptic equations in domains with a smooth boundary”, *Math. USSR-Sb.*, **30**:2, (1976), 143–166.
- [9] В. П. Михайлов, “О граничных значениях решений эллиптических уравнений второго порядка”, *Матем. сб.*, **100**(142):1(5), (1976), 5–13; англ. пер.: V. P. Mikhailov, “On the boundary values of solutions of second-order elliptic equations”, *Math. USSR-Sb.*, **29**:1, (1976), 3–11.
- [10] В. П. Михайлов, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, *Дифференц. уравнения*, **12**:10, (1976), 1877–1891; англ. пер.:

- V. P. Mihaïlov, “Dirichlet’s problem for a second-order elliptic equation”, *Differential Equations*, **12**:10, (1977), 1320–1329.
- [11] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, “О граничных значениях в L_p , $p > 1$, решений эллиптических уравнений”, *Матем. сб.*, **108(150)**:1, (1979), 3–21; англ. пер.: A. K. Guščin, V. P. Mihaïlov, “On boundary values in l_p , $p > 1$ of solutions of elliptic equations”, *Math. USSR-Sb.*, **36**:1, (1980), 1–19.
- [12] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, “О существовании граничных значений решений эллиптического уравнения”, *Матем. сб.*, **182**:6, (1991), 787–810; англ. пер.: A. K. Gushchin, V. P. Mikhaïlov, “On the existence of boundary values of solutions of an elliptic equation”, *Math. USSR-Sb.*, **73**:1, (1992), 171–194.
- [13] Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Наука, М., 1966; англ. пер.: N. I. Muskhelishvili, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Noordhoff, Leiden, 1977.
- [14] И. Н. Векуа, *Новые методы решения эллиптических уравнений*, Наука, М.–Л., 1948; англ. пер.: I. N. Vekua, *New methods for solving elliptic equations*, North-Holland, Amsterdam, 1967.
- [15] И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1949; англ. пер.: I. P. Natanson, *Constructive function theory*, v. vols. I–III, Ungar Publ., New York, 1964–1965.

В. П. Михайлов (V. P. Mikhailov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: drozzin@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

23.06.2009