Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Данченко, О сходимости наипростейших дробей
в $L_p(\mathbb{R})$, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 7, 53–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7596>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 14:59:23

УДК 517.538.52

В. И. Данченко

О сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$

Изучается сходимость в метрике $L_p(\mathbb{R})$ рядов, частичными суммами которых являются наипростейшие дроби. Получены некоторые условия сходимости в терминах последовательностей полюсов таких рядов.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: наипростейшие дроби, двойственность, разреженные последовательности.

§ 1. Введение

1.1. Наипростейшей дробью n -го порядка, $n \in \mathbb{N}$, называется рациональная функция вида

$$r_n(z) = \sum_{k=1}^n (z - \xi_k)^{-1}, \quad z, \xi_k \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Пусть $p \in (1, \infty)$. Через S_p обозначим класс всех комплекснозначных функций $f \in L_p = L_p(\mathbb{R})$ на действительной оси $\mathbb{R}$, приближаемых сколь угодно точно наипростейшими дробями r_n в метрике L_p . Полное описание класса S_p получено В. Ю. Протасовым в [1; теорема 3]. Здесь этот результат приводится частично.

ТЕОРЕМА 1 (см. [1]). Пусть $p \in (1, \infty)$, $f \in S_p$. Тогда f является аналитической на $\mathbb{R}$ функцией, продолжается до мероморфной на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функции и представляется в виде ряда $f(z) = \sum_k (z - \xi_k)^{-1}$, сходящегося к f в L_p . При этом показатель сходимости последовательности $\{\xi_k\}$ удовлетворяет неравенству

$$\tau(\{\xi_k\}) \leq 1 - \frac{1}{p}, \quad \tau(\{\xi_k\}) := \inf \left\{ \gamma > 0, \sum_k |\xi_k|^{-\gamma} < \infty \right\}. \quad (2)$$

Из теоремы 1 видно, что класс S_p весьма узок. В частности, он состоит из тех и только тех функций $f(x)$, которые представляются в виде сходящихся к ним в L_p рядов $\sum_k (x - \xi_k)^{-1}$. Ниже будет показано, что функции этого класса обладают и другими ограничительными свойствами. Теорему 1 интересно сравнить с результатом П. А. Бородина и О. Н. Косухина (см. [2]) о том, что в равномерной метрике каждая непрерывная на $\mathbb{R}$ функция f с нулевым значением на бесконечности с любой точностью приближается наипростейшими

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00648) и Аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект № 2.1.1/5568).

дробями. Для сравнения приведем еще один результат П. А. Бородина (см. [3]): при $p \in [2, \infty)$ наипростейшие дроби всюду плотны в $L_p(\mathbb{R}^+)$, где $\mathbb{R}^+$ – действительная полуось $x \geq 0$.

1.2. Напомним, что преобразование Гильберта функции $f \in L_p = L_p(\mathbb{R})$ определяется (почти всюду) как

$$H(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-x} dt = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t-x| \geq \varepsilon} \frac{f(t)}{t-x} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Хорошо известно, что $H(f) \in L_p$, и оператор $H: L_p \rightarrow L_p$ при $p \in (1, \infty)$ ограничен (см., например, [4], [5]). Обозначим через h_p его норму, так что $\|H(f)\|_p \leq h_p \|f\|_p$ при всех $f \in L_p$. Здесь и в дальнейшем применяется обозначение $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L_p}$, $1 < p \leq \infty$.

1.3. Предположим, что ряд $\sum_k (x - \xi_k)^{-1}$ сходится в L_p , $p \in (1, \infty)$, к некоторой функции $f \in L_p$ (и, следовательно, $f \in S_p$). Запишем это в виде

$$f(x) \stackrel{L_p}{=} \sum_k (x - \xi_k)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Как показано в [1; следствие леммы 3], ряд (3) сходится к f в L_p безусловно, т.е. при любой перестановке его членов. При этом ряд (3) совпадает с рядом, указанным в теореме 1. Через z_k , $k = 1, 2, \dots$, будем обозначать занумерованные в каком-либо порядке полюсы суммы (3), лежащие в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$. Если число $m \geq 0$ таких полюсов конечно, то для единообразия записей будем считать, что $z_{m+k} = \infty$ и $(z - z_{m+k})^{-1} \equiv 0$, $k \in \mathbb{N}$. То же будем предполагать относительно полюсов, лежащих в нижней полуплоскости $\mathbb{C}^-$; будем обозначать их через $\tilde{z}_k$, $k = 1, 2, \dots$. Введем частичные суммы $f_n(z) = \rho_n(z) + \tilde{\rho}_n(z)$, где

$$\rho_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k}, \quad \tilde{\rho}_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - \tilde{z}_k}. \quad (4)$$

При $z_k = x_k + iy_k$ ($y_k > 0$) и $z = x + iy$ положим

$$\mu_n(z) = \operatorname{Im} \rho_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{y_k - y}{|z - z_k|^2}, \quad \nu_n(x) = \operatorname{Re} \rho_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{x - x_k}{|z - z_k|^2}. \quad (5)$$

Аналогично, положим $\tilde{\mu}_n = \operatorname{Im} \tilde{\rho}_n$, $\tilde{\nu}_n = \operatorname{Re} \tilde{\rho}_n$. Из безусловной сходимости ряда (3) следует сходимость f_n к f в L_p . Более того, в [1; лемма 3] показано, что для сходимости (3) необходима и достаточна одновременная сходимость в L_p сумм ρ_n и $\tilde{\rho}_n$ или ν_n и $\tilde{\nu}_n$, или μ_n и $\tilde{\mu}_n$ (т.е. одновременная конечность L_p -норм сумм $\mu(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(x)$, $\tilde{\mu}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_n(x)$ знакопостоянных рядов).

Доказательство этих утверждений основано на следующем свойстве оператора H , которое следует из формулы Сохоцкого–Привалова: $H(\rho_n) = -i\rho_n$ и $H(\tilde{\rho}_n) = i\tilde{\rho}_n$, т.е.

$$H(\nu_n) = \mu_n, \quad H(\mu_n) = -\nu_n, \quad H(\tilde{\nu}_n) = -\tilde{\mu}_n, \quad H(\tilde{\mu}_n) = \tilde{\nu}_n. \quad (6)$$

В частности, из равенств (6) и ограниченности оператора H получаются слабые эквивалентности $\|\nu_n\|_p \asymp \|\mu_n\|_p$, $\|\mu_n\|_p \asymp \|\rho_n\|_p$, которые означают, что отношения выражений слева и справа ограничены и сверху, и снизу некоторыми положительными конечными величинами, зависящими лишь от p (не зависящими от n).

Пусть выполнено (3). Для получения оценок воспроизведем фрагмент из леммы 3 работы [1]. Из (6) получаем

$$\begin{aligned} \|\mu_n\|_p &\leq \|\mu_n - \tilde{\mu}_n\|_p = \|H(\nu_n + \tilde{\nu}_n)\|_p \\ &\leq h_p \|\nu_n + \tilde{\nu}_n\|_p \leq h_p \|f_n\|_p \rightarrow h_p \|f\|_p, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Из теоремы Б. Леви следует, что неубывающая последовательность $\mu_n(x)$ сходится в L_p к функции $\mu(x)$ и при этом $\|\mu\|_p \leq h_p \|f\|_p$. Отсюда в силу (6) и ограниченности оператора H вытекает, что последовательность $\{\nu_n\}$ является фундаментальной в L_p и, значит, сходится к некоторой функции ν , причем $\|\nu\|_p \leq h_p^2 \|f\|_p$. Значит, последовательность $\rho_n(x)$ сходится в L_p к функции $\rho = \mu + i\nu$ и

$$\|\rho\|_p \leq h_p(1 + h_p)\|f\|_p. \quad (7)$$

Аналогичные рассуждения и оценки справедливы для функций со знаком $\sim$.

ПРИМЕЧАНИЕ 1. Оценка типа (7) компонент ρ и $\tilde{\rho}$ через их сумму $f = \rho + \tilde{\rho}$ возможна только при конечных p . При $p = \infty$ и $n \geq 2$ можно утверждать лишь, что $\|\rho_n\|_\infty \leq \text{const} \cdot \ln n \cdot \|f_n\|_\infty$ (оценка точна по порядку; см. [6]).

1.4. Приведем результаты из [7; теорема 2а и ее следствие]. Справедлива следующая оценка расстояния $Y_p(r_n)$ от полюсов $\{\xi_k\}$ наипростейшей дроби r_n вида (1) до действительной оси $\mathbb{R}$:

$$Y_p(r_n) \geq \alpha_p \|r_n\|_p^{-q}, \quad \alpha_p := p^{-1} \left(\sin \frac{\pi}{p} \right)^q \cdot 2^{q/p}, \quad (8)$$

и оценка $\sup$ -нормы на $\mathbb{R}$ дроби r_n

$$\|r_n\|_\infty \leq \beta_p \cdot \|r_n\|_p^q, \quad \beta_p := 2p \sin^{-q} \frac{\pi}{p}, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1. \quad (9)$$

Обе оценки не зависят от n . Если имеет место сходимость (3), то оценки (8) и (9), очевидно, распространяются на ряд f . В этом случае из (2) и (8), в частности, следует, что функция $f \in S_p$ аналитична в полосе $|\text{Im } z| < \alpha_p \|f\|_p^{-q}$.

ПРИМЕЧАНИЕ 2. Оценка типа (8) с более точной константой α_p^* получена в работе [8]; при $p = 2$ там же найдено точное значение $\alpha_2^* = \pi$.

Приведем результат из [6; теорема 4]. Для наипростейших дробей $\rho_n(z)$ вида (4) с конечным числом n полюсов $z_k \in \mathbb{C}^+$ справедливы следующие оценки производных (не зависящие от n):

$$|\rho'_n(x)| \leq (|\rho_n(x)| + \|\rho_n\|_\infty) \cdot \mu_n(x) \leq 2\|\rho_n\|_\infty \cdot \mu_n(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

§ 2. Некоторые оценки

Пусть $\rho_n = \nu_n + i\mu_n$ и $\tilde{\rho}_n = \tilde{\nu}_n + i\tilde{\mu}_n$ – частичные суммы (4), (5) с полюсами $z_k \in \mathbb{C}^+$ и $\tilde{z}_k \in \mathbb{C}^-$ соответственно; $\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(x)$, $\tilde{\mu}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_n(x)$. Как отмечалось, сходимость ρ_n в L_p (к некоторой функции ρ) равносильна конечности L_p -нормы суммы μ . То же справедливо и для функций со знаком $\sim$.

ЛЕММА 1. Пусть $\|\mu\|_p < \infty$, $p \in (1, \infty)$. Тогда последовательность $\rho_n(x)$ сходится к $\rho(x)$ равномерно на $\mathbb{R}$, функция ρ аналитична при $\text{Im } z < \alpha_p \|\rho\|_p^{-q}$ и

$$\|\rho\|_\infty \leq \beta_p \|\rho\|_p^q, \quad |\rho'(x)| \leq 2\|\rho\|_\infty \cdot \mu(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Кроме того, справедлива эквиваленция

$$\|\mu\|_p < \infty \iff \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu^p(c_k) < \infty \quad \forall c_k \in [k, k+1]. \quad (12)$$

Из (12), в частности, имеем импликацию $\|\mu\|_p < \infty \implies \|\mu\|_r < \infty$ при $p < r$. Аналогичные утверждения и оценки верны для функций со знаком $\sim$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равномерная сходимость ρ_n к ρ на $\mathbb{R}$ и первое неравенство в (11) получаются из (9). Аналитичность функции $\rho \in S_p$ на указанном множестве следует из (2) и (8). Второе неравенство в (11) получается из (10) с учетом равномерной сходимости $\rho_n(x)$. Импликация $\Leftarrow$ в (12) очевидна. Для доказательства $\implies$ заметим, что из (11) для модуля логарифмической производной $\mu'(x)/\mu(x)$ имеем мажоранту $m = 2\beta_p \|\rho\|_p^q$ и, следовательно, при действительных t_1 и t_2 с $|t_1 - t_2| \leq 1$ получаем оценку $\mu(t_1)/\mu(t_2) \leq e^m$. В силу конечности $\|\mu\|_p < \infty$ получается оценка суммы в (12).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p \in (1, \infty)$ и выполнено (3). Тогда ряд (3) сходится к f равномерно на $\mathbb{R}$, функция f аналитична в полосе $|\text{Im } z| < \alpha_p \|f\|_p^{-q}$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, и при этом¹

$$\|f\|_\infty \leq A_0(p) \|f\|_p^q, \quad |f'(x)| \leq A_1(p) \|f\|_p^q (\mu(x) + |\tilde{\mu}(x)|), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

$$\|f'\|_p \leq A_2(p) \|f\|_p^{q+1}, \quad \|f'\|_\infty \leq A_3(p) \|f\|_p^{2q}. \quad (14)$$

Неравенства (13) получаются из (11) и (7) (и аналогичных оценок для $\tilde{\rho}$). Первое неравенство в (14) получается из (13) и (7), а второе – из (13), (11), (7).

Поскольку любая функция $f \in S_p$ представляется в виде (3), то из последнего утверждения (импликации) леммы 1 получается

ТЕОРЕМА 3. При $r > p$ выполняется включение $S_p \subset S_r$.

§ 3. Задача о сходимости

В работе [1] сформулирована задача: каков критерий сходимости в L_p ряда (3) в терминах последовательности полюсов $\{\xi_k\}$, или, что то же самое, каков критерий конечности L_p -норм отдельно для сумм $\mu(x)$ и $\tilde{\mu}(x)$ в терминах

¹Ниже через $A_j(\cdot)$ обозначаются конечные положительные величины, зависящие лишь от указанных параметров и, вообще говоря, различные в различных пунктах.

последовательностей $\{z_k\} \subset \mathbb{C}^+$ и $\{\tilde{z}_k\} \subset \mathbb{C}^-$? Ввиду полной аналогии этих задач для μ и $\tilde{\mu}$ всюду ниже рассматривается только вопрос о конечности $\|\mu\|_p$ (сходимости $\rho_n \rightarrow \rho$ в L_p). Достаточно удобный для проверки критерий конечности $\|\mu\|_p$ получается в случае $1 < p < 3$ (см. (16), (17), (19)).

Пусть ρ_n – дробь (4) с полюсами $z_k = x_k + iy_k$, $y_k > 0$, $\mu_n = \text{Im } \rho_n$, $\nu_n = \text{Re } \rho_n$. По теореме о вычетах несложно проверить равенства

$$2\|\mu_n\|_2^2 = 2\|\nu_n\|_2^2 = \|\rho_n\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x) \overline{\rho_n(x)} dx = 2\pi \sum_{k=1}^n \mu_n(\overline{z_k}). \quad (15)$$

Отсюда, в частности, находим

$$\|\rho\|_2^2 = 2\|\mu\|_2^2 = 2\pi \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{y_k + y_m}{(x_k - x_m)^2 + (y_k + y_m)^2}. \quad (16)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При $1 < p < 3$ имеем

$$\|\mu\|_p < \infty \iff \text{Im} \left(e^{-i\pi(p-2)/2} \sum_{k=1}^n \rho_n^{p-1}(\overline{z_k}) \right) \leq A < \infty \quad \forall n, \quad (17)$$

где конечная величина $A = A(p, \{z_k\})$ не зависит от n , а суммируются значения однозначной в $\mathbb{C}^-$ аналитической ветви

$$\rho_n^{p-1}(z) = |\rho_n(z)|^{p-1} e^{i\varphi(p-1)}, \quad \varphi = \arg \rho_n(z) \in (0, \pi), \quad z \in \mathbb{C}^-.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = 2$ эквиваленция (17) следует из (16). Пусть $p \in (2, 3)$ и $p = 2 + \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$. Положим

$$\rho_n^\alpha(z) = |\rho_n(z)|^\alpha e^{i\varphi\alpha}, \quad \varphi = \arg \rho_n(z) \in (0, \pi), \quad z \in \mathbb{C}^-.$$

Функция $w(z) = e^{i\pi(1-\alpha)/2} \rho_n^\alpha(z)$ голоморфно отображает полуплоскость $\mathbb{C}^-$ внутрь угла $\pi(1-\alpha) < 2 \arg w < \pi(1+\alpha)$, поэтому

$$|\rho_n(z)|^\alpha = |w(z)| \asymp \text{Im } w(z) = \text{Im}(e^{i\pi(1-\alpha)/2} \rho_n^\alpha(z)), \quad z \in \mathbb{C}^-.$$

Учитывая это, по теореме о вычетах находим

$$\begin{aligned} \|\rho_n\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |\rho_n(x)|^2 |\rho_n(z)|^\alpha dx \asymp \text{Im} \left(e^{i\pi(1-\alpha)/2} \int_{\mathbb{R}} |\rho_n(x)|^2 \rho_n^\alpha(x) dx \right) \\ &= \text{Im} \left(e^{i\pi(1-\alpha)/2} \int_{\mathbb{R}} \rho_n^{1+\alpha}(x) \overline{\rho_n(x)} dx \right) = 2\pi \text{Im} \left(e^{-i\pi\alpha/2} \sum_{k=1}^n \rho_n^{1+\alpha}(\overline{z_k}) \right). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом $\|\mu_n\|_p \asymp \|\rho_n\|_p$ получается (17) при $p \in (2, 3)$. В случае $p = 2 - \alpha \in (1, 2)$, $\alpha \in (0, 1)$, доказательство получается аналогичной оценкой функции $\rho_n^{-\alpha}(z)$.

Из выкладок видно также, что при $1 < p < 3$ имеем

$$\|\rho_n\|_p^p \cos \frac{\pi(p-2)}{2} \leq 2\pi \text{Im} \left(e^{-i\pi(p-2)/2} \sum_{k=1}^n \rho_n^{p-1}(\overline{z_k}) \right) \leq \|\rho_n\|_p^p. \quad (18)$$

Отметим, что аргументы слагаемых $e^{-i\pi(p-2)/2} \rho_n^{p-1}(\overline{z_k})$ принадлежат интервалу $(\pi(1-p/2), \pi p/2)$. Поэтому при $p \in (1, 2)$ их мнимые части слабо эквивалентны их модулям, и из (17) получается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. При $1 < p < 2$ имеем

$$\|\mu\|_p < \infty \iff \sum_{k=1}^n |\rho_n(\overline{z_k})|^{p-1} \leq A < \infty \quad \forall n. \quad (19)$$

§ 4. Критерий сходимости в терминах двойственности

Через $H_p = H_p(\mathbb{C}^+)$ обозначается пространство Харди аналитических на $\mathbb{C}^+$ функций f ,

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{y>0} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p dx \right)^{1/p}.$$

При вещественных x через $f(x)$ обозначим некасательные угловые пределы функции $f \in H_p$ со стороны $\mathbb{C}^+$. Хорошо известно (см. [4] или [5]), что $f(x)$ существуют почти всюду на $\mathbb{R}$, $f(x) \in L_p$ и $\|f\|_p = \|f\|_{H_p}$. Здесь и далее по-прежнему применяется обозначение $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p}$, причем в связи со спецификой задачи рассматривается случай $p > 1$.

Рассмотрим частичную сумму $\rho_n(z)$ из (4). Имеет место соотношение двойственности (см. [4], [5], [9])

$$\begin{aligned} & \inf_{f \in H_p} \|\rho_n - f\|_p \\ &= \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x) g(x) dx \right| = 2\pi \left| \sum_{k=1}^n g(z_k) \right| : g \in H_q, \|g\|_q \leq 1 \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $p \in (1, \infty)$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Покажем, что для любой функции $f \in H_p$ имеем

$$\|\rho_n\|_p \leq A(p) \|\rho_n - f\|_p \quad (21)$$

с некоторой величиной $A(p)$, зависящей лишь от p (не зависящей от ρ_n и f). Положим $F(x) = \rho_n(x) - f(x)$ и рассмотрим интеграл типа Коши

$$I(F; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(x)}{x - z} dx, \quad z \in \mathbb{C}^-.$$

Поскольку по теореме Коши имеем $I(f; z) = 0$ при $z \in \mathbb{C}^-$ (см. [4], [5]), то $I(F; z) = -\rho_n(z)$, $z \in \mathbb{C}^-$. С другой стороны, по формуле Сохоцкого–Привалова почти всюду на $\mathbb{R}$ имеем для некасательного предела со стороны $\mathbb{C}^-$

$$\lim_{z \rightarrow x_0} I(F, z) = \frac{1}{2i} H(F)(x_0) - \frac{1}{2} F(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Итак, почти всюду на $\mathbb{R}$ имеем $2i\rho_n(x_0) = iF(x_0) - H(F)(x_0)$, откуда по неравенству Минковского с учетом ограниченности оператора H получается оценка (21) с $A(p) = 2^{-1}(1 + h_p)$. Следовательно, справедлива слабая эквивалентность (отношение левой и правой частей ограничено и сверху, и снизу положительными конечными величинами, зависящими только от p):

$$\|\rho_n\|_p \asymp \inf_{f \in H_p} \|\rho_n - f\|_p, \quad 1 < p < \infty. \quad (22)$$

ПРИМЕЧАНИЕ 3. Выкладки, приводящие к соотношениям (21) и (22), не новы, они использовались, например, в работах [10], [11; § 6]. Отметим, что, в отличие от случая конечных p , при $p = \infty$ некоторые наипростейшие дроби ρ_n аппроксимируются в метрике $L_\infty(\mathbb{R})$ граничными значениями ограниченных и аналитических на $\mathbb{C}^+$ функций (класса $H_\infty(\mathbb{C}^+)$); вместо (22) возникает соотношение (см. [6; лемма 2]):

$$\inf_{f, \rho_n} \frac{\|\rho_n - f\|_\infty}{\|\rho_n\|_\infty} \asymp \ln^{-1} n, \quad (23)$$

где нижняя грань берется по всем функциям $f \in H_\infty(\mathbb{C}^+)$ и наипростейшим дробям ρ_n фиксированной степени n с полюсами в $\mathbb{C}^+$. В некоторых случаях соотношение (23) можно применять для оценки скорости равномерных приближений на $\mathbb{R}$. Например, если $f(x)$ – граничные значения некоторой функции класса $H_\infty(\mathbb{C}^+)$, а аппроксимация проводится наипростейшими дробями ρ_n , то порядок малости этой скорости не может быть выше чем $\ln^{-1} n$.

Учитывая, что $\|\mu_n\|_p \asymp \|\rho_n\|_p$, из (22) и (20) получаем при $p \in (1, \infty)$

$$\|\mu_n\|_p \asymp \|\rho_n\|_p \asymp \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^n g(z_k) \right| : g \in H_q, \|g\|_q \leq 1 \right\}. \quad (24)$$

Таким образом, L_p -нормы неубывающей последовательности частичных сумм $\mu_n(x)$ ограничены в совокупности тогда и только тогда, когда супремум в (24) ограничен некоторой конечной величиной, не зависящей от n . Отсюда и из теоремы Б. Леви получается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Имеем $\|\mu\|_p < \infty$ ($\rho_n \rightarrow \rho$ в L_p) тогда и только тогда, когда найдется конечная величина $A = A(p, \{z_k\})$ такая, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $g \in H_q$ выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{k=1}^n g(z_k) \right| \leq A \|g\|_q, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1, \quad 1 < p < \infty.$$

Следующее утверждение несколько уточняет свойство (2) теоремы 1.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $\|\mu\|_p < \infty$. Тогда справедливы следующие равномерные относительно $x_0 \in \mathbb{R}$ оценки (с величиной $A = A(\|\mu\|_p, p)$, не зависящей от ε и h):*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k - x_0 + ih|^{-\varepsilon-1/q} \leq A \frac{\varepsilon^{-1/q}}{1 - p\varepsilon} h^{-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{p}, \quad h > 0; \quad (25)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k - x_0|^{-\varepsilon-1/q} \leq \frac{A}{\varepsilon^{1/q}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (26)$$

ПРИМЕЧАНИЕ 4. Показатель степени $1/q$ справа в (26) нельзя уменьшить. Это легко проверяется при $p = 2$ и $z_k = iy_k$, где $y_k = k^2 \ln^{1+\delta}(k+1)$ с фиксированным малым $\delta \in (0, 1/2)$. Опуская элементарные оценки ввиду их громоздкости, приведем окончательный результат. Из (16) следует, что $\|\mu\|_2 < \infty$

(для оценки суммирование $\sum_{k,m}(y_k + y_m)^{-1}$ удобно провести по индексам $k + m = c$, $c = 2, 3, \dots$; в этом случае при каждом c слагаемые $(y_k + y_m)^{-1}$ слабо эквивалентны величине y_c^{-1}). С другой стороны, при $x_0 = 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ сумма в (26) оценивается снизу величиной $A_0(\delta)\varepsilon^{\delta-1/2}$; для доказательства эту сумму удобно оценить снизу интегралом

$$\int_{k \geq 2} k^{-1-2\varepsilon} \ln^{-\delta-1/2} k \, dk$$

и сделать замену переменной $t = 2\varepsilon \ln k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Достаточно получить неравенства при $x_0 = 0$. Пусть $h > 0$, $\varepsilon \in (0, p^{-1})$, $\alpha = \varepsilon + q^{-1}$. Используем (24), взяв в качестве пробной функции из H_q следующую голоморфную ветвь на $\mathbb{C}^+$:

$$g(z) = (z + ih)^{-\alpha} = |z + ih|^{-\alpha} e^{-\alpha\varphi i}, \quad \varphi = \arg(z + ih) \in (0, \pi).$$

Как несложно проверить, имеем $\|g\|_q \asymp \varepsilon^{-1/q} h^{-\varepsilon}$, и

$$\left| \sum_{k=1}^n g(z_k) \right| = \left| \sum_{k=1}^n |z_k + ih|^{-\alpha} e^{-\alpha(\varphi_k - \frac{\pi}{2})i} \right| \geq \cos \frac{\pi\alpha}{2} \sum_{k=1}^n |z_k + ih|^{-\alpha},$$

где $\varphi_k = \arg(z_k + ih) \in (0, \pi)$, $\cos(\pi\alpha/2) > 1 - \alpha = -\varepsilon + 1/p > 0$. Отсюда и из (24) получается (25). В случае $\varepsilon \in (0, (2p)^{-1})$ неравенство (26) получается из (25) при $h = 1$, поскольку $|z_k + i| \asymp |z_k|$ (учитываем (8)). Отсюда, вновь учитывая неравенство (8), получим (26) и при всех других значениях $\varepsilon \in [(2p)^{-1}, 1]$.

§ 5. Разреженные последовательности

5.1. Мы изучаем сходимость в L_p , $p \in (1, \infty)$, частичных сумм

$$\rho_n(z) = \sum_{k=1}^n (z - z_k)^{-1}, \quad z_k = x_k + iy_k, \quad y_k > 0.$$

Заметим, что условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k^{1-p} < \infty \tag{27}$$

необходимо для такой сходимости, или, что то же самое, для конечности $\|\mu\|_p$. Действительно, $\|\mu\|_p^p \geq \sum_k \|\tau_k\|_p^p$, где $\tau_k(x) = y_k / ((x - x_k)^2 + y_k^2)$, и, как легко проверить, $\|\tau_k\|_p^p \asymp y_k^{1-p}$. Ниже показано, что условие (27) является и достаточным или близким к достаточному в случае разреженных последовательностей $\{z_k\}$ определенных классов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что последовательность $\omega = \{z_k\} \subset \mathbb{C}^+$ принадлежит классу $\mathcal{H}$ (класс последовательностей, разреженных относительно гиперболической метрики на $\mathbb{C}^+$), если существует натуральное $N(\omega)$ такое, что в каждом круге $D(\xi) := \{z : |z - \xi|/|z - \bar{\xi}| \leq 1/2\}$, $\xi \in \mathbb{C}^+$, $D(\xi) \subset \mathbb{C}^+$, лежит не более $N(\omega)$ точек этой последовательности.

Очевидно, что $\omega \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда ω есть объединение конечного числа подпоследовательностей ω_l , для каждой из которых имеем

$$|z_j - z_s| |z_j - \bar{z}_s|^{-1} \geq \frac{1}{2}, \quad z_j, z_s \in \omega_l, \quad j \neq s. \quad (28)$$

ПРИМЕЧАНИЕ 5. То, что $D(\xi)$ является кругом, следует из кругового свойства дробно-линейных отображений. В гиперболической геометрии на верхней полуплоскости $D(\xi)$ является гиперболическим кругом с центром ξ и радиусом $2^{-1} \ln 3$. Условие (28) означает, что в гиперболической метрике расстояние между точками z_j и z_s не меньше этого радиуса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что последовательность $\{z_k\} \subset \mathbb{C}^+$ принадлежит классу $\mathcal{C}$ (класс последовательностей Карлесона), если для любого круга $d(x, r)$ с центром $x \in \mathbb{R}$ и радиусом r имеем

$$\sum_{z_k \in d(x, r)} \operatorname{Im} z_k \leq A \cdot r, \quad A = A(\{z_k\}).$$

Классы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{H}$ играют важную роль в задачах интерполяции (см. [4], [5]). Отметим, что $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$ (см. [4; гл. IX] или [5; гл. VII]). Это включение строгое. Например, легко проверить, что в области $y \geq a|x|^\alpha$ при $\alpha \in (0, 1)$ любая последовательность $\omega \in \mathcal{H}$, образующая 1-сеть в гиперболической метрике на $\mathbb{C}^+$, не является последовательностью Карлесона.

ТЕОРЕМА 6 (Л. Карлесон; см. [4], [5]). Пусть $\{z_k\} \in \mathcal{C}$, $z_k = x_k + iy_k$. Тогда для любой функции $g \in H_q$ при $q > 0$ имеем

$$\sum_k y_k |g(z_k)|^q < A(q, \{z_k\}) \|g\|_q^q < \infty. \quad (29)$$

5.2. Докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \dots, m$, есть конечный набор точек, принадлежащих некоторой последовательности $\omega \in \mathcal{H}$. Тогда для любой функции $g \in H_q$ при $q \in (1, \infty)$ имеем

$$\sum_{k=1}^m y_k^{1/q} |g(z_k)| \leq A(p, \omega) m^{1/p} \|g\|_q, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1. \quad (30)$$

Отметим, что в случае $\omega \in \mathcal{C}$ неравенство (30), очевидно, следует из (29) и неравенства Гёльдера. Для доказательства теоремы 7 нам понадобится следующая оценка суммы специального вида из [12; лемма 6]. Через $\mathbb{D}$ обозначается единичный круг $|w| < 1$.

ЛЕММА 2 (см. [12]). Пусть задан конечный набор точек $w_k \in \mathbb{D}$, $k = 1, \dots, m$, для которого $|w_j - w_s| |1 - \bar{w}_j w_s|^{-1} \geq \delta$ при некотором $\delta \in (0, 1)$. Тогда

$$S(m, p) := \int_{|w|=1} \left(\sum_{k=1}^m \frac{(1 - |w_k|^2)^{1+1/q}}{|w - w_k|^2} \right)^p |dw| \leq A_1(p, \delta) m. \quad (31)$$

ЛЕММА 3. В условиях леммы 2 для любой функции $f \in H_q(\mathbb{D})$ имеем

$$S_1(f, m, p) := \sum_{k=1}^m |f(w_k)| (1 - |w_k|^2)^{1/q} \leq A_2(p, \delta) m^{1/p} \|f\|_q. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы Пуассона

$$f(w_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=1} \frac{1 - |w_k|^2}{|w - w_k|^2} f(w) |dw|$$

и неравенства Гёльдера получается

$$S_1(f, m, p) \leq \int_{|w|=1} |f(w)| \sum_{k=1}^m \frac{(1 - |w_k|^2)^{1+1/q}}{|w - w_k|^2} |dw| \leq \|f\|_q S^{1/p}(m, p),$$

откуда с учетом (31) следует оценка (32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Достаточно получить неравенство (30) для точек z_k , удовлетворяющих условию (28) (с заменой $A(p, \omega)$ на $A(p)$ в (30)). Пусть $g \in H_q(\mathbb{C}^+)$. Сделаем замену $w = (z - i)/(z + i)$, $z = i(1 + w)/(1 - w)$, $z \in \mathbb{C}^+$, $w \in \mathbb{D}$. Тогда (см. [4; гл. VI]) любая однозначная ветвь

$$f(w) = F(w)(1 - w)^{-2/q}, \quad \text{где} \quad F(w) = g\left(\frac{i(1 + w)}{1 - w}\right),$$

принадлежит классу $H_q(\mathbb{D})$ и $\|f\|_q = \|g\|_q$. Из (28) и инвариантности гиперболических расстояний относительно дробно-линейных преобразований круга следует, что точки $w_k = (z_k - i)/(z_k + i)$ удовлетворяют условию леммы 3 с $\delta = 1/2$. Отсюда с учетом легко проверяемых равенств $y_k = (1 - |w_k|^2)|1 - w_k|^{-2}$ получаем

$$\sum_{k=1}^m |g(z_k)| y_k^{1/q} = \sum_{k=1}^m |F(w_k)| \left(\frac{1 - |w_k|^2}{|1 - w_k|^2} \right)^{1/q} = S_1 \leq A_2\left(p, \frac{1}{2}\right) m^{1/p} \|f\|_q,$$

где величина $S_1 = S_1(f, m, p)$ определена в (32) и $\|f\|_q = \|g\|_q$.

§ 6. Сходимость в случае разреженных последовательностей полюсов

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\{z_k\} \in \mathcal{C}$, $z_k = x_k + iy_k$. Тогда для $\|\mu\|_p < \infty$ необходимо и достаточно выполнение условия (27).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Осталось доказать достаточность (27) (см. п. 5.1). Для любой функции $g \in H_q$ с учетом (27) и (29) находим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |g(z_k)| &= \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{-1/q} y_k^{1/q} |g(z_k)| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k |g(z_k)|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k^{-p/q} \right)^{1/p} \\ &\leq A^{1/q}(p, \{z_k\}) \cdot \|g\|_q \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k^{1-p} \right)^{1/p} < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда и из (24) получается нужное.

ПРИМЕЧАНИЕ 6. В задаче о сходимости можно считать без ограничения общности, что $y_k \geq 1$. Действительно, дробь $\rho_n^*(z) = c\rho_n(cz)$ ($c > 0$) также является наипростейшей, $\|\rho_n^*\|_p = c^{1/q}\|\rho_n\|_p$, и для ее полюсов имеем $z_k^* = z_k/c$. Остается учесть неравенство (8).

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\{z_k\} \in \mathcal{H}$, $z_k = x_k + iy_k$, $y_k \geq 1$. Обозначим через m_σ число точек z_k , для которых $2^{\sigma-1} \leq y_k \leq 2^\sigma$, $\sigma \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} m_\sigma^{1/p} 2^{-\sigma/q} < \infty \implies \|\mu\|_p < \infty. \quad (33)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\{z_k\} \in \mathcal{H}$, $z_k = x_k + iy_k$, и сходится ряд $\sum_k y_k^{-\alpha+1}$ при некотором $\alpha \in (1, p)$. Тогда $\|\mu\|_p < \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\{z_k\} \in \mathcal{H}$, $z_k = x_k + iy_k$, $y_k \geq 1$, и точки z_k лежат над графиком $y = a|x|^\beta$ при некоторых $\beta > 1/p$, $a > 0$. Тогда $\|\mu\|_p < \infty$.

Отметим, что в следствии 2 нельзя положить $\beta = 1/p$. Действительно, пусть $x_1 = 1$ и при $k = 1, 2, \dots$ выполнены рекуррентные соотношения $y_k = x_k^{1/p}$, $x_{k+1} = x_k + y_k$. Точки $z_k = x_k + iy_k$ лежат на графике $y = |x|^{1/p}$ и, очевидно, $\{z_k\} \in \mathcal{H}$. Из указанных рекуррентных соотношений легко (по индукции) получить, что $x_k \leq k^q$, $y_k \leq k^{q/p}$. Отсюда следует, что ряд из (27) расходится и, значит, $\|\mu\|_p = \infty$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\{z_k\} \in \mathcal{H}$, $z_k = x_k + iy_k$, и точки z_k лежат над графиком $y = a|x|^\gamma$, $a, \gamma > 0$. Обозначим через $\tilde{m}_\sigma$ число точек z_k , для которых $2^{\sigma-1} \leq |x_k| + 1 \leq 2^\sigma$, $\sigma \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} \tilde{m}_\sigma^{1/p} 2^{-\sigma\gamma/q} < \infty \implies \|\mu\|_p < \infty. \quad (34)$$

Докажем теорему 9 и следствия 1 и 2. Для любой функции $g \in H_q$, $\|g\|_q \leq 1$, из (30) находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(z_k)| \leq \sum_{\sigma=1}^{\infty} 2^{(1-\sigma)/q} \sum_{2^{\sigma-1} \leq y_k \leq 2^\sigma} y_k^{1/q} |g(z_k)| \leq A(p, \{z_k\}) \sum_{\sigma=1}^{\infty} 2^{-\sigma/q} m_\sigma^{1/p}.$$

Отсюда и из (24) получается (33).

Докажем следствие 1. Из сходимости $\sum_k y_k^{-\alpha+1}$ следует, что за исключением конечного числа номеров k имеем $y_k \geq 1$, и сходится ряд $\sum_{\sigma=1}^{\infty} m_\sigma 2^{-\sigma(\alpha-1)}$. Значит, $m_\sigma \leq A 2^{\sigma(\alpha-1)}$ и

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} m_\sigma^{1/p} 2^{-\sigma/q} \leq A \sum_{\sigma=1}^{\infty} 2^{-\sigma(1-\alpha/p)} < \infty,$$

откуда с учетом (33) получается нужное.

Докажем следствие 2. Достаточно рассмотреть случай $\beta \in (1/p, 1)$. Кроме того, достаточно доказать следствие 2 для подпоследовательности, удовлетворяющей свойству (28). В этом случае для любых различных точек z_j, z_s из прямоугольника $R_\sigma : |x| \leq (2^\sigma/a)^{1/\beta}$, $2^{\sigma-1} \leq y \leq 2^\sigma$, $\sigma \in \mathbb{N}$, имеем $|z_j - z_s| \geq 2^{\sigma-1}$

(см. (28)). Следовательно, круги $|z - z_k| < 2^{\sigma-2}$, $z_k \in R_\sigma$, попарно не пересекаются. Сравнивая площади этих кругов с площадью прямоугольника R_σ , для числа m_σ точек $z_k \in R_\sigma$ получаем оценку $m_\sigma \leq A(a)2^{\sigma(-1+1/\beta)}$. Из этой оценки следует сходимость ряда в (33), откуда получается требуемое.

Доказательство теоремы 10 аналогично доказательству теоремы 9.

§ 7. Некоторые формулы для вычисления L_2 -норм

Пусть $B_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k)(z - \bar{z}_k)^{-1}$. При фиксированном $\varphi \in (0, 2\pi)$ через $t_s = t_s(\varphi)$, $-\infty < t_1 < \dots < t_{2n} < \infty$, обозначим корни уравнения $B_n^2(x) = e^{i\varphi}$. Отметим равенства

$$2\mu_n(x) = -i \frac{B'_n(x)}{B_n(x)} = (\arg B_n(x))', \quad \int_{t_s}^{t_{s+1}} \mu_n(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Последнее равенство позволяет вычислять точки t_s , если известны значения $\mu_n(x)$ только при $x \in \mathbb{R}$. Получим некоторые формулы, выражающие нормы $\|\rho_n\|_2$, $\|\mu_n\|_2$ через значения $\mu_n(t_s)$ и $\nu_n(t_s)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливы тождества*

$$\sum_{s=1}^{2n} \frac{1}{\mu_n(t_s)} \frac{y_k}{|t_s - z_k|^2} = 2 \quad \forall k; \quad (35)$$

$$2\|\mu_n\|_2^2 = \|\rho_n\|_2^2 = \pi \sum_{s=1}^{2n} \frac{\nu_n^2(t_s)}{\mu_n(t_s)} = \pi \sum_{s=1}^{2n} \mu_n(t_s). \quad (36)$$

Из (35) и из второго равенства в (36), в частности, получается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если $|\nu_n(t_s)| \leq A\sqrt{y_k}|t_s - z_k|^{-1}$ при $s = 1, \dots, 2n$ и некоторых фиксированных $A > 0$ и $k = 1, \dots, n$, то $\|\rho_n\|_2^2 \leq 2\pi A^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство в (35) получается из разложения

$$\frac{B_n^2(z)}{B_n^2(z) - e^{i\varphi}} = \frac{1}{1 - e^{i\varphi}} + \frac{1}{4i} \sum_{s=1}^{2n} \frac{1}{\mu_n(t_s)(z - t_s)}$$

после подстановки $z = \bar{z}_k$ (как равенство действительных частей). Далее, пусть $k = 1, \dots, n$ и

$$F_k(z) = \frac{B_n^2(z)}{B_n^2(z) - e^{i\varphi}} \frac{z - x_k}{z - z_k} \frac{P'_n(z)}{P_n(z)}, \quad P_n(z) := \prod_{j=1}^n (z - z_j). \quad (37)$$

Имеем разложение рациональной функции $F_k(z)$ на простейшие дроби

$$\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{2n} \frac{B_n(t_s)}{B'_n(t_s)(z - t_s)} \frac{t_s - x_k}{t_s - z_k} \frac{P'_n(t_s)}{P_n(t_s)} = \frac{1}{4i} \sum_{s=1}^{2n} \frac{1}{\mu_n(t_s)(z - t_s)} \frac{t_s - x_k}{t_s - z_k} \frac{P'_n(t_s)}{P_n(t_s)}.$$

Подставив $z = \bar{z}_k$ в это разложение и непосредственно в (37), получим

$$\frac{i}{4} \sum_{s=1}^{2n} \frac{1}{\mu_n(t_s)} \frac{t_s - x_k}{|t_s - z_k|^2} \frac{P'_n(t_s)}{P_n(t_s)} = \frac{1}{2} \frac{P'_n(\bar{z}_k)}{P_n(\bar{z}_k)} = \frac{1}{2} (\nu_n(\bar{z}_k) + i\mu_n(\bar{z}_k)).$$

Просуммировав полученные равенства по $k = 1, \dots, n$ и приравняв мнимые части, получим второе равенство в (36) (с учетом (15)).

Положим $Q_n(z) = \overline{P_n(\bar{z})}$. Через $\tau_m = \tau_m(\varphi)$, $-\infty < \tau_1 < \dots < \tau_{2n} < \infty$, обозначим корни уравнения $B_n^2(x) = -e^{i\varphi}$. Имеем следующее разложение логарифмической производной и его следствие при $z = t_s$ (равенство действительных частей разложения):

$$\frac{2B_n(z)B'_n(z)}{B_n^2(z) + e^{i\varphi}} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{1}{z - \tau_m} - 2\frac{Q'_n(z)}{Q_n(z)}, \quad \sum_{m=1}^{2n} \frac{1}{t_s - \tau_m} = 2\nu_n(t_s). \quad (38)$$

Рассмотрим разложение

$$\frac{P'_n(z)B_n^2(z)/P_n(z) + Q'_n(z)e^{i\varphi}/Q_n(z)}{B_n^2(z) - e^{i\varphi}} = \frac{1}{2i} \sum_{s=1}^{2n} \frac{\nu_n(t_s)}{\mu_n(t_s)} \frac{1}{z - t_s}.$$

Подставим сюда $z = \tau_m$ и затем просуммируем полученные равенства по всем m с учетом (38). Тогда последовательно получим

$$2\mu_n(\tau_m) = \sum_{s=1}^{2n} \frac{\nu_n(t_s)}{\mu_n(t_s)} \frac{1}{t_s - \tau_m}, \quad \sum_{m=1}^{2n} \mu_n(\tau_m) = \sum_{s=1}^{2n} \frac{\nu_n^2(t_s)}{\mu_n(t_s)}.$$

Учитывая это и второе равенство в (36), находим $\|\rho_n\|_2^2 = \pi \sum_{m=1}^{2n} \mu_n(\tau_m)$. Отсюда получается третье равенство в (36), для чего достаточно поменять в предыдущих рассуждениях местами точки t_s и τ_m .

Список литературы

- [1] В. Ю. Протасов, “Приближения наипростейшими дробями и преобразование Гильберта”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 123–140; англ. пер.: V. Yu. Protasov, “Approximation by simple partial fractions and the Hilbert transform”, *Izv. Math.*, **73**:2 (2009), 333–349.
- [2] П. А. Бородин, О. Н. Косухин, “О приближении наипростейшими дробями на действительной оси”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 1, 3–8; англ. пер.: P. A. Borodin, O. N. Kosukhin, “Approximation by the simplest fractions on the real axis”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **60**:1 (2005), 1–6.
- [3] П. А. Бородин, “Приближение наипростейшими дробями на полуоси”, *Матем. сб.*, **200**:8 (2009), 25–44; англ. пер.: P. A. Borodin, “Approximation by simple partial fractions on the semi-axis”, *Sb. Math.*, **200**:8 (2009), 1127–1148.
- [4] П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p с приложением доказательства Волффа теоремы о короне*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: P. Koosis, *Introduction to H^p spaces with an appendix on Wolff’s proof of the corona theorem*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **40**, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1980.
- [5] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Pure Appl. Math., **96**, Academic Press, New York–London, 1981.
- [6] В. И. Данченко, “Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы”, *Матем. сб.*, **197**:4 (2006), 33–52; англ. пер.: V. I. Danchenko, “Estimates of derivatives of simplest fractions and other questions”, *Sb. Math.*, **197**:4 (2006), 505–524.

- [7] В. И. Данченко, “Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей”, *Матем. сб.*, **185**:8 (1994), 63–80; англ. пер.: V. I. Danchenko, “Estimates of the distances from the poles of logarithmic derivatives of polynomials to lines and circles”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **82**:2 (1995), 425–440.
- [8] П. А. Бородин, “Оценки расстояний до прямых и лучей от полюсов наипростейших дробей, ограниченных по норме L_p на этих множествах”, *Матем. заметки*, **82**:6 (2007), 803–810; англ. пер.: P. A. Borodin, “Estimates of the distances to direct lines and rays from the poles of simplest fractions bounded in the norm of L_p on these sets”, *Math. Notes*, **82**:5–6 (2007), 725–732.
- [9] С. Я. Хавинсон, “Об одной экстремальной задаче теории аналитических функций”, *УМН*, **4**:4 (1949), 158–159.
- [10] А. А. Пекарский, “Обобщенная рациональная аппроксимация в круге”, *Изв. АН БССР*, 1990, № 6, 9–14.
- [11] В. И. Данченко, “Оценки потенциалов Грина. Приложения”, *Матем. сб.*, **194**:1 (2003), 61–86; англ. пер.: V. I. Danchenko, “Estimates of Green potentials. Applications”, *Sb. Math.*, **194**:1 (2003), 63–88.
- [12] В. И. Данченко, “Некоторые интегральные оценки производных рациональных функций на множествах с ограниченной плотностью”, *Матем. сб.*, **187**:10 (1996), 33–52; англ. пер.: V. I. Danchenko, “Several integral estimates of the derivatives of rational functions on sets of finite density”, *Sb. Math.*, **187**:10 (1996), 1443–1463.

В. И. Данченко (V. I. Danchenko)

Владимирский государственный университет

им. А. Г. и Н. Г. Столетовых

E-mail: danch@vpti.vladimir.ru

Поступила в редакцию

24.06.2009 и 05.04.2010