Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, Спектральные кратности и асимптотические операторные свойства действий с инвариантной мерой, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 12, 107–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7597>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:13:02

УДК 517.987

В. В. Рыжиков

Спектральные кратности и асимптотические операторные свойства действий с инвариантной мерой

Предложены новые наборы спектральных кратностей эргодических автоморфизмов вероятностного пространства. Реализованы, в частности, наборы вида $\{p, q, pq\}$, $\{p, q, r, pq, pr, rq, pqr\}$ и т.п. Показано, что системы с однородным спектром могут обладать факторами, являясь конечными расширениями над ними. Кроме того, эти системы обладают любыми полиномиальными пределами и поэтому могут служить полезными элементами конструкций. Предложено так называемое минимальное исчисление кратностей. Вычислены некоторые бесконечные наборы кратностей, возникающие у тензорных произведений, имеющих гауссовский или пуассоновский множитель. Кратности спектра рассматриваются также в классе перемешивающих действий.

Библиография: 25 названий.

Ключевые слова: сохраняющие меру действия, однородный спектр, спектральные кратности, слабое замыкание поддействия.

Введение

Задача о реализуемости заданного подмножества натурального ряда как множества кратностей спектра эргодического действия является давней нерешенной проблемой спектральной теории динамических систем с инвариантной мерой. (По этой тематике см., например, [1]–[5] и ссылки в них.)

Среди нерешенных задач в этой области отметим задачу о реализуемости наборов кратностей вида $\{p, q\}$ (известны, например, реализации множеств $\{1, q\}$, $\{2, q\}$, $\{q, qn\}$). Задача об однородном спектре эргодических автоморфизмов и ее решение (см. [6]–[9]) стимулировали появление новых методов, с которыми связаны недавние результаты о наборах кратностей спектра.

В настоящей статье предлагаются некоторые новые реализации, наиболее простые из которых имеют следующий вид:

$$\{p, q, pq\}, \quad \{p, q, r, pq, pr, rq, pqr\}, \quad \dots$$

Подход, использованный в работе, основан на оснащении систем с однородным спектром асимптотическими свойствами, которые позволяют контролировать спектральные кратности декартовых произведений таких систем. Следует отметить, что эргодические действия с однородным спектром кратности $n > 2$ пока что играли только роль интересного феномена в эргодической теории.

Работа выполнена в рамках Программы поддержки Ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3038.2008.1).

Мы покажем, что эти действия могут быть элементами конструкций с полезными свойствами, например, системы с однородным непростым спектром могут обладать свойством капша-перемешивания [10]. Поэтому такие системы также могут быть основой для контрпримеров, построенных в [11], но с новыми (кратными) спектральными свойствами.

В статье будет доказана совместимость однородного спектра с таким инвариантным свойством как наличие любого полинома

$$\mathcal{P}(T) = \sum_i a_i T^i, \quad \sum_i a_i = 1, \quad a_i \geq 0,$$

в слабом замыкании степеней автоморфизма T . Это помогает вычислять кратности спектров тензорных произведений таких действий, их степеней и факторов. Конечно, возникает вопрос о взаимодействии свойства однородности спектра с другими типичными свойствами, например, включением в поток (см. [12]–[14]) или наличием у системы структуры факторов (см. [15], [13]) и нетривиальных эргодических самоприсоединений. Наша гипотеза формулируется так: однородность спектра совместима со всеми типичными свойствами, которые не влекут меньшую кратность спектра (не обязательно однородного). Например, при кратности спектра, большей m , автоморфизму запрещено обладать рангом m .

В статье рассматриваются действия, коммутирующие с периодическими преобразованиями, поэтому у этих систем с однородным спектром имеются нетривиальные факторы. Заметим, что наша система с n -однородным спектром является самоприсоединением (self-joining) n копий ее фактора с простым спектром (см. теорему 1.1). Система обладает корнем порядка n и этот корень возмущает фактор. Полученная сильно зависящая система из конечного набора изоморфных факторов дает интересный пример для теории джойнингов и косых произведений. Читатель найдет аналоги (при $n = 2$) в работах [16], [17].

Реализация спектральных кратностей в классе перемешиваний значительно сложнее, чем в классе слабо перемешивающих преобразований. Было бы интересным применить для этого методы работы [18], где изучаются типичные перемешивающие преобразования.

§ 1. Групповые действия и однородный спектр автоморфизма

Проблема Рохлина об однородном спектре для кратности $n = 2$ была явно решена Агеевым и автором (см. [2], [6]), а в [7] доказано существование автоморфизмов с однородным спектром кратности $n > 2$. Замечательным фактом является то, что категорными методами было получено совершенно новое спектральное свойство. Упрощенное доказательство теоремы Агеева и конструктивные примеры для всех кратностей даны в работе Даниленко [8]. Мы модифицируем рассуждения из [7], [8] и докажем существование действий с однородным спектром, используя группу

$$G_n = \langle \varphi, s \mid s, s^\varphi, \dots, s^{\varphi^{n-1}} \text{ коммутируют, } \varphi^n = e \rangle$$

(через s^φ обозначается элемент $\varphi^{-1}s\varphi$). Представление G_n в группе преобразований, сохраняющих меру, обозначено через Ψ , преобразования $\Phi, S_1, S_2, \dots, S_n$

сопоставлены элементам $\varphi, s, s^\varphi, \dots, s^{\varphi^n}$ соответственно. Главным “персонажем” является автоморфизм

$$T = S_1 S_2 \cdots S_n = (\Phi S_1)^n.$$

ТЕОРЕМА 1.1. *Существует G_n -действие такое, что*

- 1) *поддействие $\langle S_1, S_2, \dots, S_n \rangle$ имеет простой спектр;*
- 2) *$R = \Phi S_1$ имеет простой спектр;*
- 3) *$S_1 S_2^{-1}$ и R имеют непрерывный спектр;*
- 4) *$T = R^n = S_1 S_2 \cdots S_n$ имеет непрерывный однородный спектр кратности n ;*
- 5) *для каждого полинома $\mathcal{P}$ выполнено $\mathcal{P}(T) \in \overline{\{T^k\}}$;*
- 6) *действие, порожденное автоморфизмами T, Φ , имеет простой спектр;*
- 7) *ограничение T на пространство Φ -инвариантных функций имеет простой спектр;*
- 8) *свойства 1)–7) являются типичными в пространстве всех G_n -действий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1)–7) сохраняются при сопряжении действия. Группа G_n аменабельна. Поэтому чтобы доказать существование такого действия, достаточно для каждого пункта привести пример свободного действия, обладающего этим свойством, и доказать типичность этих свойств. Сразу отметим, что свойство 4), как будет показано ниже, является следствием свойств 1)–3), типичность которых хорошо известна (см. [7], [8]).

Укажем примеры (модели), реализующие свойства 1)–3). Отметим, что нас интересуют только свободные действия группы G_n . Для удобства рассмотрим случай $n = 3$ (случай $n > 3$ совершенно аналогичен).

МОДЕЛЬ 1. Пусть автоморфизм S пространства (X, μ) имеет простой спектр. Положим $S_1(x_1, x_2, x_3) = (Sx_1, x_2, x_3)$, $\Phi(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$. Действие Ψ на (X^3, μ^3) , порожденное преобразованиями S_1 и Φ , удовлетворяет свойству 1).

МОДЕЛЬ 2. Рассмотрим действие на Ψ на пространстве $(\mathbf{Z}_3 \times X, \delta_3 \times \mu)$, δ_3 – мера Хаара на $\mathbf{Z}_3$:

$$\Phi(i, x) = (i + 1, x), \quad S_1(i, x) = (i, T_i x), \quad i \in \mathbf{Z}_3,$$

где преобразования T_1, T_2, T_3 пространства (X, μ) коммутируют, а их произведение $\tilde{T} = T_1 T_2 T_3$ имеет простой спектр. Требуемые автоморфизмы T_1, T_2, T_3 можно выбрать как элементы подходящего потока с условием, что им отвечают рационально независимые моменты времени. Тогда действие Ψ будет свободным. Так как $R = \Phi S_1$ имеет простой спектр, то получаем свойство 2).

МОДЕЛЬ 3. Бернуллиевское действие (или модификация моделей 1, 2) обладает свойством 3).

ЛЕММА 1.2. *Свойства 1)–3) влекут за собой свойство 4).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действие $\langle S_1, S_2, S_3 \rangle$ имеет следующее спектральное представление: на торе $\mathbf{T}^3$ имеется борелевская мера τ , а действие умножением на $t_1^m t_2^{n_1} t_3^k$ в пространстве $L_2(\tau)$ изоморфно действию $S_1^m S_2^{n_1} S_3^k$ на $L_2(\mu)$.

Так как действия $\langle S_1, S_2, S_3 \rangle$ и $\langle S_2, S_3, S_1 \rangle$ сопряжены посредством автоморфизма Φ , то мера τ является (квази)инвариантной относительно циклической перестановки φ^* координат t_1, t_2, t_3 в торе $\mathbf{T}^3$. Оператор T изоморфен оператору умножению на $t_1 t_2 t_3$ в пространстве $L_2(\tau)$. Мы уже знаем, что почти все условные меры являются суммой не более трех точечных мер, так как спектральная кратность T не превосходит трех (в силу свойства 2) максимальная спектральная кратность $T = R^3$ не превосходит трех). Но число точечных масс условной меры τ_z на слое $t_1 t_2 t_3 = z$ кратно трем, если масса не лежит на диагонали, так как τ_z инвариантна относительно φ^* . Но τ -мера диагонали равна нулю в силу 3). Таким образом, T имеет однородный спектр кратности три. Доказательство для других n состоит в замене символа “3” на символ “ n ” и вставке многоточий после символа “2”.

Так как типичное G_n -действие обладает свойствами 1)–3), то из леммы 1.2 вытекает свойство однородности спектра T . Это доказательство еще проще, чем в [8], но для нас важно другое. Рассмотрение модели 2 позволяет оснастить T дополнительными (типичными) свойствами. Свойство 5) теоремы 1.1 будет доказано в следующем параграфе.

ЗАМЕЧАНИЕ. Известна простая эффективная реализация действия группы G_2 . В качестве модели берем действие, в котором

$$S_1(x_1, x_2) = (Sx_1, x_2), \quad \Phi(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$$

при условии, что ΦS_1 имеет простой спектр, а $S_1 S_2^{-1}$ – непрерывный. Рассмотрение такого ΦS_1 для исследования проблемы Рохлина было предложено Гудзоном, а доказательство простоты спектра ΦS_1 в типичном случае было получено в [19]. Это дало одно из решений проблемы для $n = 2$. (В [19] предложены еще два варианта решения: один из них аналогичен [20], другой дает решение для систем, неформально говоря, “сколь угодно близких” к перемешивающим. Решение для перемешивающего случая дано в [21].) Приведенное сейчас доказательство случая $n > 2$ можно рассматривать как существенную модификацию случая $n = 2$. Принципиально новым в [7] было рассмотрение групповых действий, что позволило при помощи категорных соображений избавиться от “лишних” кратностей, возникающих в модели 1 при $n > 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СВОЙСТВ 6), 7) ТЕОРЕМЫ 1.1. В модели 2 действие, порожденное автоморфизмами Φ и T , имеет простой спектр. Следовательно, таким же свойством обладает типичное действие. Ограничение действия, порожденного автоморфизмами Φ и T , на пространство Φ -инвариантных функций (пространство фактора) имеет простой спектр. Но Φ на нем действует тождественно. Следовательно, соответствующий фактор автоморфизма T имеет простой спектр.

§ 2. Однородный спектр и типичные свойства

Для доказательства типичности свойства 5) надо привести пример действия с этим свойством. Примером служит модель 1, где автоморфизм $\tilde{T} = T_1 T_2 T_3$ обладает свойством 5). Такой автоморфизм $\tilde{T}$ берется, например, из потока, слабое замыкание которого содержит все полиномы $\mathcal{P}(\tilde{T})$. Нужный поток

нетрудно построить в классе потоков ранга один, но можно сразу сослаться на типичность свойства включения в поток (см. [12], [13]). Типичность полиномиальных пределов доказывается вполне стандартно. Как заметил автор в [9], слабое замыкание степеней содержит все полиномы, если ему принадлежат пределы вида $0.5(I + T^p)$ для всех $p > 0$ (автоморфизмы с этим свойством появились в [22]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СВОЙСТВА 5) ТЕОРЕМЫ 1.1. Пусть действие Ψ_0 таково, что слабое замыкание степеней T_0 содержит оператор $\mathcal{P}(T_0)$. Фиксируем $\{J_p\}$ – всюду плотное множество автоморфизмов. Рассмотрим U_{kip} – окрестности “точек” $J_p^{-1}\Psi_0 J_p$, $p = 1, 2, \dots$, определенные условиями

$$\rho(T^i, T_p^i), \rho(T_p^i, \mathcal{P}(T_p)), \rho(\mathcal{P}(T_p), \mathcal{P}(T)) < \frac{1}{k}.$$

Заметим, что $P = \bigcap_k \bigcup_i \bigcup_p U_{kip}$ есть пересечение открытых всюду плотных множеств. Действительно, замыкание степеней оператора T_p содержат оператор $\mathcal{P}(T_p)$. Поэтому для любых k и p и некоторого i открытое множество U_{kip} не пусто. Значит, для любого k открытое множество $\bigcup_i \bigcup_p U_{kip}$ всюду плотно, так как содержит всюду плотное множество $\{J_p^{-1}\Psi_0 J_p\}$. Для любого $\Psi \in P$ и любого k найдутся такие i_k, p_k , что

$$\rho(T^{i_k}, \mathcal{P}(T)) < \rho(T^{i_k}, T_{p_k}^{i_k}) + \rho(T_{p_k}^{i_k}, \mathcal{P}(T_{p_k})) + \rho(\mathcal{P}(T_{p_k}), \mathcal{P}(T)) < \frac{3}{k}.$$

Таким образом, все элементы массивного множества P удовлетворяют свойству 5). Теорема 1.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. С учетом результатов [9] получаем, что все степени T^p , $p > 0$, также обладают однородным спектром кратности n .

Только что мы привели рассуждения, из которых вытекает

ЛЕММА 2.1. Для последовательности $n(i) \rightarrow \infty$ и полинома $\mathcal{P}$ свойство $\mathcal{P}(T) \in \overline{\{T^{n(i)}\}}$ является типичным в пространстве G_m -действий, где T – соответствующий автоморфизм с однородным спектром кратности m .

Из этой леммы получаем следующее утверждение. Пусть $\overline{\mathcal{P}} = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots\}$ – набор полиномов, $m_1, m_2, \dots, m_k \geq 1$. Тогда существует набор автоморфизмов $T_1, T_2, \dots$ с однородными спектрами кратности $m_1, m_2, \dots$ соответственно такой, что при всех $q = 1, \dots, k$ выполнено $T_q^{n(i)} \rightarrow \mathcal{P}_q(T_q)$ для некоторой последовательности $n(i) = n_k(i)$, $n(i) \rightarrow \infty$. Еще раз обобщим сказанное.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\{\mathcal{P}_1^\gamma, \mathcal{P}_2^\gamma, \dots\}_{\gamma \in \Gamma}$ – семейство наборов полиномов и задана последовательность $m_1, m_2, \dots$, $m_i \geq 1$. Существует набор автоморфизмов $T_1, T_2, \dots$ с однородными спектрами кратности $m_1, m_2, \dots$ соответственно такой, что семейство операторов $\{\mathcal{P}_1^\gamma \otimes \mathcal{P}_2^\gamma \otimes \dots\}_{\gamma \in \Gamma}$ лежит в слабом замыкании степеней автоморфизма $\{T_1 \otimes T_2 \otimes \dots\}$.

Теорема доказывается с учетом предыдущего стандартным способом: сначала доказываем ее для конечных семейств и конечных тензорных произведений, затем – для счетных семейств, всюду плотных в $\{\mathcal{P}_1^\gamma, \mathcal{P}_2^\gamma, \dots\}_{\gamma \in \Gamma}$, и переходим к замыканию.

§ 3. Сильная дизъюнктность и умножение кратностей

Пусть унитарные операторы U и V таковы, что их тензорное произведение $U \otimes V$ имеет простой спектр. Тогда эти операторы спектрально дизъюнктны (их спектральные меры взаимно сингулярны). Это объясняет словосочетание *сильная дизъюнктность*. Заметим, что обратное неверно. Более того, оператор с лебеговским спектром не может быть сильно дизъюнктен с другим (неодномерным) оператором. Однако в классе операторов с сингулярным спектром имеется изобилие следующих примеров. Пусть U, V – операторы с простым спектром, а

$$\bar{U} := \mathbf{m}U := \bigoplus_{i=1}^m U_{(i)}, \quad \bar{V} := \mathbf{n}V := \bigoplus_{j=1}^n V_{(j)}$$

– операторы с однородными спектрами кратности m и n соответственно. Далее мы будем также использовать обозначение

$$\frac{\bar{U}}{\mathbf{m}} := U.$$

Оператор $\bar{U} \otimes \bar{V}$ в этих обозначениях есть $\mathbf{mn}U \otimes V$, он имеет набор кратностей $mn\mathcal{M}_{U \otimes V}$.

Определение сильной дизъюнктности для унитарных операторов P и Q с наборами кратностей $p_1, p_2, \dots$ и $q_1, q_2, \dots$ соответственно должно обеспечить следующее свойство: оператор $P \otimes Q$ имеет в качестве набора кратностей множество

$$\{p_i\} \circ \{q_j\} := \{p_i q_j\}.$$

При представлении

$$P = \bigoplus_i \mathbf{p}_i P_i, \quad Q = \bigoplus_j \mathbf{p}_j Q_j$$

(прямые суммы операторов с однородным спектром) потребуем, чтобы все операторы $P_i \otimes Q_j$ имели простой спектр и были попарно спектрально дизъюнктны. Такую пару P, Q будем называть *сильно дизъюнктной*. Аналогично определяется произвольный набор сильно дизъюнктных операторов. Отметим, что гауссовские динамические системы с простым спектром, являясь бесконечными тензорными произведениями, дают многообразие сильно дизъюнктных наборов унитарных операторов. К этому мы вернемся позже, а пока наша цель – найти сильно дизъюнктные динамические системы с однородными спектрами.

ЛЕММА 3.1. *Если $U^{n_i} \rightarrow aI$, $V^{n_i} \rightarrow bV$, $a, b > 0$, U, V имеют простой спектр, то оператор $U \otimes V$ также имеет простой спектр.*

Пусть g, h – циклические векторы операторов U, V соответственно. Рассмотрим вектор $g \otimes h$. Слабое замыкание множества $U^n g \otimes V^n h$ содержит вектор $g \otimes Vh = ab(I \otimes V)g \otimes h$, $a^2 b^2 (I \otimes V)^2 g \otimes h$ и т.д. Циклическое пространство вектора $g \otimes h$ содержит все векторы вида $g \otimes V^n h$, следовательно, и все векторы вида $U^m g \otimes V^{m+n} h$, которые в $H \otimes H$ образуют полную систему. Вектор $g \otimes h$ является циклическим для оператора $U \otimes V$.

Из леммы 3.1, применяя индукцию, получим более общее утверждение.

ЛЕММА 3.2. Пусть операторы $U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_k$ и U_{k+1} имеют простой спектр. Если $U_q^{n(i)} \rightarrow a_q I$, $q = 1, 2, \dots, k$, и $U_{k+1}^{n(i)} \rightarrow a_{k+1} U_{k+1}$ при условии, что $a_1 \cdots a_k a_{k+1} > 0$, то оператор $U_1 \otimes \cdots \otimes U_k \otimes U_{k+1}$ также имеет простой спектр.

Когда речь идет о спектре автоморфизма пространства Лебега (X, μ) , то обычно подразумевается спектр соответствующего унитарного оператора в пространстве $L_2^0(X, \mu)$, ортогональном константам, т.е. постоянным функциям на X . При рассмотрении спектров тензорных произведений автоморфизмов про константы нужно вспомнить. Умножение спектральных кратностей с учетом пространства констант приводит к следующему определению умножения множеств. Положим

$$M_1 \diamond M_2 = M_1 \cup M_2 \cup (M_1 \circ M_2).$$

В этих обозначениях имеем

$$\{p\} \diamond \{q\} = \{p, q, pq\}, \quad \{p\} \diamond \{q\} \diamond \{r\} = \{p, q, r, pq, pr, rq, pqr\}.$$

ТЕОРЕМА 3.3. 1) Если S – жесткий слабо перемешивающий автоморфизм, то для любого $p \geq 1$ найдется автоморфизм T такой, что $S \otimes T$ эргодичен и $M_{S \otimes T} = M_S \diamond \{p\}$.

2) Для любого набора $p_1, \dots, p_n$, $p_i \geq 1$, существует слабо перемешивающее действие с набором кратностей $\{p_1\} \diamond \{p_2\} \diamond \cdots \diamond \{p_n\}$ (здесь $\{p_k\}$ – одноэлементное множество, содержащее p_k). Аналогичное утверждение справедливо и для бесконечных наборов $\{p_1, p_2, \dots\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. 1). Рассмотрим последовательность $r_i \rightarrow \infty$ такую, что $S^{r_i} \rightarrow I$ слабо. По теореме 1.1 найдется T с однородным спектром кратности p такой, что последовательность T^{r_i} имеет в слабой топологии предельную точку T . Пока предположим, что S имеет простой спектр. Тогда оператор $U_S \otimes \frac{U_T}{p}$ по лемме 3.1 имеет простой спектр. Следовательно, $U_S \otimes U_T$ имеет однородную кратность p . Для произвольного эргодического S получим набор кратностей pM_{U_S} . Обозначим через 1 тождественный оператор на одномерном пространстве констант. Если в правой части равенств

$$S \otimes T = (1 \otimes U_T) \oplus (U_S \otimes U_T) \oplus (U_S \otimes 1)$$

слагаемые попарно спектрально дизъюнкты, то получим требуемое, т.е.

$$M_{S \otimes T} = M_S \cup \{p\} \cup pM_{U_S} = M_S \diamond \{p\}.$$

Дизъюнктность операторов $U_S \otimes U_T$ и $U_S \otimes 1$ следует из того, что последовательность $U_T^{r_i}$ для подходящего T имеет в слабой топологии предельную точку нуль (типичная ситуация в силу леммы 2.1). Аналогично, операторы $(U_S \otimes U_T)$ и $(1 \otimes U_T)$ дизъюнкты, если для некоторой последовательности k_i выполнено $U_S^{k_i} \rightarrow 0$, причем $U_T^{k_i} \rightarrow I$. Действительно, из равенства

$$(U_S \otimes U_T)J = J(1 \otimes U_T),$$

переходя к слабому пределу, получим

$$0 = J(1 \otimes I), \quad J = 0.$$

Здесь мы воспользовались слабым перемешиванием автоморфизма S : существует последовательность $U_S^{k_i} \rightarrow 0$. Кроме того, свойство $I \in \overline{U_T^{k_i}}$ типично (лемма 2.1). Осталось заметить, что пересечение двух массивных множеств действий также является массивным множеством.

ТЕОРЕМА 3.4. *Существует набор автоморфизмов $T_1, T_2, \dots$ с однородными спектрами кратности $m_1, m_2, \dots$ соответственно такой, что операторы*

$$\left(\frac{T_1}{\mathbf{m}_1} \right)^{\odot d_1} \otimes \left(\frac{T_2}{\mathbf{m}_2} \right)^{\odot d_2} \otimes \dots$$

имеют простой спектр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2.2 и достаточного запаса полиномов в слабом замыкании операторов $T_i/\mathbf{m}_i$ (см. [20], [9]) имеем простоту спектра $(T_i/\mathbf{m}_i)^{\odot d_i}$. Но эти операторы в типичной ситуации образуют сильно дизъюнктный набор (применяем теорему 2.2 и лемму 3.2 с коэффициентами $a_i = 1$). Это эквивалентно утверждению теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение теоремы 3.4 эквивалентно утверждению о простоте спектра оператора

$$\bigotimes_i \mathbf{e}^{\frac{T_i}{\mathbf{m}_i}} = \mathbf{e}^{\bigoplus \frac{T_i}{\mathbf{m}_i}}$$

(определения см. в § 5).

Совместно с Р. А. Коневым автор получил следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Существует набор перемешивающих автоморфизмов $T_1, T_2, \dots, T_n$ с однородными спектрами кратности два такой, что операторы*

$$\left(\frac{T_1}{2} \right)^{\odot d_1} \otimes \left(\frac{T_2}{2} \right)^{\odot d_2} \otimes \dots \otimes \left(\frac{T_n}{2} \right)^{\odot d_n}$$

имеют простой спектр.

§ 4. О тензорных и симметрических степенях действий

Использовать тензорные степени как источник конечнократного спектра предложил в 80-х годах Каток (см. [23]). Затем эта идея была развита и применялась в серии работ других авторов (см., например, [20], [21], [24], [25], [5]).

Рассмотрим действие, порожденное автоморфизмами S_1, S_2, S_3 из модели 1:

$$\begin{aligned} S_1(x_1, x_2, x_3) &= (Sx_1, x_2, x_3), & S_2(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, Sx_2, x_3), \\ S_3(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, Sx_3). \end{aligned}$$

Если преобразование S обладает простым спектром, то рассматриваемое действие тоже имеет простой спектр. Предположим также, что S слабо перемешивает. Рассмотрим ограничение $T = S_1 S_2 S_3 = S^{\otimes 3}$ и всего действия на пространство $H \otimes H \otimes H$. Обозначим его через $U^{\otimes 3}$. Перейдем к спектральному представлению. На торе $\mathbf{T}^3$ рассматривается борелевская мера $\tau = \sigma^{\otimes 3}$, где $\sigma = \sigma_{U_S}$. Напомним, что U_S – ограничение оператора S на пространство, ортогональное к константам, а σ_{U_S} – его спектральная мера. Оператор умножения на $t_1 t_2 t_3$ в пространстве $L_2(\mathbf{T}^3, \tau)$ изоморфен действию $S^{\otimes 3}$ на $H \otimes H \otimes H$.

На слоях $t_1 t_2 t_3 = z$ действует группа перестановок координат. Проекция меры на диагональ есть σ^{*3} – сверточный куб спектральной меры σ .

Предположим, что $U^{\otimes 3}$ имеет простой спектр. Тогда условная мера τ_z сосредоточена в $3!$ точках для почти всех z относительно меры σ^{*3} . Здесь важно, что τ -мера диагонали равна нулю (это вытекает из того, что $S_1 \otimes S_2^{-1} \otimes I$ не имеет неподвижных элементов в $H \otimes H \otimes H$, кроме нуля). Таким образом, ограничение $T^{\otimes 3}$ на $H^{\otimes 3}$ имеет однородный спектр кратности $3!$.

Для оператора $U^{\otimes n}$ аналогично получим $n!$ при условии простоты спектра оператора $U^{\otimes n}$. Поясним, как используется непрерывность спектральной меры оператора U . Замечаем, что группа S_n действует свободно на множестве

$$H_z = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) : z_1 z_2 \cdots z_n = z\} \setminus F,$$

где $F = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) : z_i = z_j, i \neq j\}$. Мера $\tau = \sigma^{\otimes n}$ множества F равна нулю в силу непрерывности меры σ . Поэтому можно считать, что (почти) все условные меры сосредоточены на слоях H_z . В силу простоты спектра симметрической степени автоморфизма и инвариантности τ относительно перестановок получим, что проекция τ на диагональ вдоль слоев H_z является п.в. отображением типа $n! \rightarrow 1$. Отсюда следует, что $U^{\otimes n}$ имеет однородный спектр кратности $n!$.

Если кратность $U^{\otimes n}$ в точке z равна $M(z, U^{\otimes n})$, то по тем же причинам кратность $U^{\otimes}$ в точке z равна $n! M(z, U^{\otimes n})$.

Напомним, что мы пишем $\mathbf{n}U$ вместо $\bigoplus_{i=1}^n U_{(i)}$ (прямая сумма n копий оператора U). Сказанное выше приводит к следующему утверждению.

УТВЕРЖДЕНИЕ. В предположении непрерывности спектра унитарного оператора U выполняется $U^{\otimes n} \equiv \mathbf{n}! U^{\otimes n}$.

Очевидным обобщением этого утверждения является

ЛЕММА 4.1. Пусть унитарный оператор U имеет непрерывный спектр. Если Γ – подгруппа S_n перестановок сомножителей в $U^{\otimes n}$, то соответствующий фактор-оператор (ограничение $U^{\otimes n}$ на Γ -инвариантные тензоры) изоморфен $\frac{n!}{|\Gamma|} U^{\otimes n}$.

Эта лемма является переформулировкой одной из лемм работы [5], где она нашла следующее применение. Пусть u автоморфизма U бесконечного пространства с мерой (строго говоря, унитарного оператора, соответствующего ему) симметрическая степень $U^{\otimes n}$ имеет простой спектр. Как замечено в [5],

естественные факторы тензорной степени $U^{\otimes n}$ имеют однородный спектр кратности $\frac{n!}{|\Gamma|}$, где Γ – подгруппа в группе S_n перестановок сомножителей, отвечающая фактору. В частности, оператор $U^{\odot n} \otimes U$ (такие произведения рассматривались в [23], [25]) имеет однородный спектр кратности n при условии, что оператор $U^{\odot(n+1)}$ имеет простой спектр. Таким образом, отсутствие констант в пространстве $L_2(X, \mu)$ приводит к решению проблемы Рохлина в классе бесконечных эргодических автоморфизмов, а это простое решение, в свою очередь, используется для реализации любых кратностей (см. [5]).

§ 5. Исчисление минимальных кратностей

В этом параграфе используется обозначение $\mathbf{n}U = \bigoplus_{i=1}^n U_{(i)}$; вместо знака прямой суммы $\oplus$ пишем $+$; тождественный оператор на одномерном пространстве (констант) обозначается через 1; оператор $\exp(U)$ обозначается через $\mathbf{e}^U$ и по определению

$$\mathbf{e}^U = 1 + U + U^{\odot 2} + \dots + U^{\odot n} + \dots$$

Заметим, что выполняются следующие равенства (изоморфизмы):

$$\mathbf{e}^{U+V} = \mathbf{e}^U \otimes \mathbf{e}^V, \quad \mathbf{e}^U = 1 + U + \frac{U^{\otimes 2}}{2} + \dots + \frac{U^{\otimes n}}{n!} + \dots$$

Наша цель – предложить формулы, с помощью которых легко вычислять кратности спектра некоторых тензорных произведений и их факторов. Нас будет интересовать случай, когда унитарный оператор U обладает свойством простоты спектра всех его симметрических степеней. В случае набора операторов условие минимальности состоит в том, что тензорные произведения симметрических степеней этих операторов имеют простой спектр.

Унитарному оператору U отвечает гауссовская система, которая как оператор имеет вид $\mathbf{e}^U$. Пусть $\mathbf{e}^U$ имеет простой спектр (такое возможно даже для перемешивающих систем). Представляя $U = U_1 + U_2 + \dots$ (прямая сумма), получим набор $\mathbf{e}^{U_1}, \mathbf{e}^{U_2}, \dots$ гауссовских систем, образующих спектрально дизъюнктивный набор.

Имеют место следующие изоморфизмы (те соотношения, которые не являются очевидными, непосредственно выводятся из леммы 4.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{m}U \odot \mathbf{n}U &= \mathbf{mn}U \odot U, & (\mathbf{m}U)^{\otimes n} &= \mathbf{m}^n \mathbf{n}! U^{\odot n}, \\ (\mathbf{p}U)^{\odot m} \otimes (\mathbf{q}U)^{\odot n} &= \mathbf{p}^m \mathbf{q}^n C_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}^{\mathbf{m}} U^{\odot(m+n)}, \\ (\mathbf{p}U \otimes \mathbf{q}V)^{\odot n} &= (\mathbf{pq})^n \mathbf{n}! U^{\odot n} \otimes V^{\odot n}, & \mathbf{e}^{\mathbf{m}U} &= (\mathbf{e}^U)^{\otimes m}. \end{aligned}$$

Перечисленные изоморфизмы непосредственно не переносятся на операторы, отвечающие автоморфизмам T пространств с вероятностной мерой. Нужно представить $T = 1 + U$, где U обозначает U_T , и воспользоваться приведенными выше равенствами. Вычислим кратности спектра $T^{\otimes n}$. Имеем

$$\begin{aligned} (1 + U)^{\otimes n} &= 1 + \mathbf{n}U + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n} - 1)}{2} U^{\otimes 2} + \dots + \mathbf{n}U^{\otimes(n-1)} + U^{\otimes n} \\ &= 1 + \mathbf{n}U + \mathbf{n}(\mathbf{n} - 1)U^{\odot 2} + \dots + \mathbf{n}! U^{\odot(n-1)} + \mathbf{n}! U^{\odot n}. \end{aligned}$$

При условии, что все $U^{\odot k}$ имеют простой спектр, получим, что $(1+U)^{\otimes n}$ имеет набор кратностей $\{n, n(n-1), \dots, n!\}$ (см. [23], [20]).

ТЕОРЕМА 5.1. *Если оператор $\mathbf{e}^U$ имеет простой спектр, то*

- 1) *тензорная степень $(\mathbf{e}^U)^{\otimes p}$ имеет набор кратностей $\{p, p^2, p^3, \dots\}$;*
- 2) *выполняется равенство $(1+U) \otimes \mathbf{e}^U = 1 + 2U + 3U^{\odot 2} + 4U^{\odot 3} + \dots$;*
- 3) *оператор $(1+\mathbf{p}U) \otimes \mathbf{e}^{\mathbf{p}U}$ обладает набором кратностей $\{2p, 3p^2, 4p^3, \dots\}$.*

Найдется оператор V такой, что оператор $(1+V) \otimes (1+U) \otimes \mathbf{e}^U$ обладает набором кратностей $\{1, 2p, 3p^2, 4p^3, \dots\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Имеем

$$(\mathbf{e}^U)^{\otimes p} = \mathbf{e}^{\mathbf{p}U} = 1 + \mathbf{p}U + \mathbf{p}^2 U^{\odot 2} + \dots + \mathbf{p}^n U^{\odot n} + \dots$$

Так как операторы $U, U^{\odot 2}, \dots, U^{\odot n}, \dots$ спектрально дизъюнкты (их прямая сумма имеет простой спектр), то получаем требуемый набор кратностей.

2) Запишем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} (1+U) \otimes \mathbf{e}^U &= (1+U) \otimes (1+U+U^{\odot 2}+\dots+U^{\odot n}+\dots) \\ &= (1+U+U^{\odot 2}+\dots) + (U+2U^{\odot 2}+\dots+(\mathbf{n}-1)U^{\odot(n-1)}+\dots) \\ &= 1+2U+3U^{\odot 2}+4U^{\odot 3}+\dots \end{aligned}$$

Доказательство п. 3) предлагается читателю в качестве упражнения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Наборы кратностей в теореме 5.1 реализуются в классе перемешивающих автоморфизмов. В качестве $\mathbf{e}^U$ берется (перемешивающая) гауссовская система, а в качестве унитарного оператора U – оператор U_T , где T – перемешивающий автоморфизм со свойством простоты спектра его симметрических степеней [9].

Кратности и вынуждение перемешивания. В работе [21] предложен метод “вынуждения перемешивания”, позволяющий получать перемешивающую систему как предел неперемешивающих действий, обладающих свойством простоты спектра симметрических степеней (см. также [9], [25]). Это свойство сохраняется в пределе. Метод существенно использует конструкции ранга один.

Вкратце опишем результаты, которые можно получить, комбинируя свойство простоты спектра симметрических степеней, сильной спектральной дизъюнктивности и метода вынуждения перемешивания. Для получения конечных наборов кратностей гауссовские или пуассоновские системы, входя в тензорные произведения, не годятся, так как их спектр либо простой, либо кратности не ограничены. В классе конструкций ранга один, применяя метод § 3 (см. также [11]), можно строить автоморфизмы $T_1, T_2, \dots, T_n$ такие, что произведение

$$T_1^{\odot d_1} \otimes T_2^{\odot d_2} \otimes \dots \otimes T_n^{\odot d_n}$$

будет иметь простой спектр для любых наборов $d_1, d_2, \dots, d_n$. Используя метод вынуждения, эти автоморфизмы можно сделать перемешивающими.

В предположении спектральной минимальности набора $T_1, T_2, \dots, T_n$ рассмотрим $M_1, M_2, \dots, M_n$ – наборы кратностей спектра факторов $F_1, F_2, \dots, F_n$

тензорных степеней $T_1^{\otimes d_1}, T_2^{\otimes d_2}, \dots, T_n^{\otimes d_n}$ соответственно. Тогда “кратности перемножаются”:

$$\mathcal{M}_{F_1 \otimes \dots \otimes F_n} = M_1 \diamond M_2 \diamond \dots \diamond M_n,$$

где $\mathcal{M}_S$ обозначает множество существенных значений функции кратности спектра. В частности, автор совместно с Р. А. Коневым доказал, что в классе ранга один для любого n найдутся перемешивающие автоморфизмы $T_1, T_2, \dots, T_n$ такие, что

$$\mathcal{M}_{T_1^{\otimes 2} \otimes T_2^{\otimes 2} \otimes \dots \otimes T_n^{\otimes 2}} = \{2, 4, \dots, 2^n\}.$$

Конев обобщил этот результат на действия группы $\mathbf{Z}^2$. Отметим, что и эти конструкции можно сделать перемешивающими.

Агеев в [25] предъявил реализацию набора кратностей вида $\{2, 3, \dots, n\}$. Рассматривая бесконечные произведения вида

$$S \otimes T_1^{\otimes n+1} \otimes T_2^{\otimes n+2} \otimes T_3^{\otimes n+3} \otimes \dots,$$

несложно получить дополнительные наборы кратностей вида

$$\begin{aligned} &\{1, n+1, n+2, n+3, \dots\}; \quad \{m+1, m+2, n+3, \dots\}; \\ &\{2, 3, \dots, n, m+n, m+n+1, m+n+2, \dots\}; \\ &\{1, 2, 3, \dots, n, m+n, m+n+1, m+n+2, \dots\}. \end{aligned}$$

Приведем еще несколько примеров.

Произведения вида $T_1^{\otimes m_1} \otimes T_2^{\otimes m_2} \otimes \dots \otimes T_i^{\otimes m_i} \otimes \dots$ дают, например, наборы кратностей:

$$\{m+1, m+2, n+3, \dots\} \setminus P, \quad \{m+1, m+2, n+3, \dots\} \setminus P \diamond P'$$

и т.п., где P, P' — это некоторые подмножества множества простых чисел.

ТЕОРЕМА 5.2. *Для любой полугруппы $M \subset \mathbf{N}$ относительно сложения (или умножения) в $\mathbf{N}$ существует набор $T_1, T_2, \dots$ перемешивающих автоморфизмов такой, что для произведения $T = \bigotimes_{m \in M} T_m^{\otimes m}$ выполнено $\mathcal{M}_T = M$.*

В качестве $T_1, T_2, \dots$ можно выбирать перемешивающие автоморфизмы ранга один или гауссовские автоморфизмы с простым спектром. Доказательства этих результатов автор предполагает подробнее изложить в отдельной работе.

Список литературы

- [1] В. И. Оселедец, “О спектре эргодических автоморфизмов”, *Докл. АН СССР*, **168**:5 (1966), 1009–1011; англ. пер.: V. I. Oseledets, “The spectrum of ergodic automorphisms”, *Soviet Math. Dokl.*, **7** (1966), 776–779.
- [2] G. R. Goodson, “A survey of recent results in the spectral theory of ergodic dynamical systems”, *J. Dynam. Control Systems*, **5**:2 (1999), 173–226.
- [3] M. Lemańczyk, *Spectral theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Complexity and System Science, Springer-Verlag, 2009.
- [4] A. I. Danilenko, *On new spectral multiplicities for ergodic maps*, [arXiv:0904.4808](https://arxiv.org/abs/0904.4808).
- [5] A. I. Danilenko, V. V. Ryzhikov, *Spectral multiplicities for infinite measure preserving transformations*, [arXiv:0905.3486](https://arxiv.org/abs/0905.3486).

- [6] Д. В. Аносов, *О спектральных кратностях в эргодической теории*, Совр. пробл. матем., **3**, МИАН, М., 2003.
- [7] O. Ageev, “The homogeneous spectrum problem in ergodic theory”, *Invent. Math.*, **160**:2 (2005), 417–446.
- [8] A. I. Danilenko, “Explicit solution of Rokhlin’s problem on homogeneous spectrum and applications”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **26**:5 (2006), 1467–1490.
- [9] В. В. Рыжиков, “Слабые пределы степеней, простой спектр симметрических произведений и перемешивающие конструкции ранга 1”, *Матем. сб.*, **198**:5 (2007), 137–159; англ. пер.: V. V. Ryzhikov, “Weak limits of powers, simple spectrum of symmetric products, and rank-one mixing constructions”, *Sb. Math.*, **198**:5 (2007), 733–754.
- [10] А. М. Стёпин, “Спектральные свойства типичных динамических систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:4 (1986), 801–834; англ. пер.: A. M. Stepin, “Spectral properties of generic dynamical systems”, *Math. USSR-Izv.*, **29**:1 (1987), 159–192.
- [11] A. del Junco, M. Lemańczyk, “Generic spectral properties of measure-preserving maps and applications”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **115**:3 (1992), 725–736.
- [12] Th. de La Rue, J. de Sam Lazaro, “Une transformation générique peut être insérée dans un flot”, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **39**:1 (2003), 121–134.
- [13] А. М. Стёпин, А. М. Ерёменко, “Неединственность включения в поток и общирность централизатора для типичного сохраняющего меру преобразования”, *Матем. сб.*, **195**:12 (2004), 95–108; англ. пер.: A. M. Stepin, A. M. Eremenko, “Non-unique inclusion in a flow and vast centralizer of a generic measure-preserving transformation”, *Sb. Math.*, **195**:12 (2004), 1795–1808.
- [14] С. В. Тихонов, “Вложения действий решетки в потоки с многомерным временем”, *Матем. сб.*, **197**:1 (2006), 97–132; англ. пер.: S. V. Tikhonov, “Embedding lattice actions in flows with multidimensional time”, *Sb. Math.*, **197**:1 (2006), 95–126.
- [15] О. Н. Агеев, “О типичности некоторых неасимптотических динамических свойств”, *УМН*, **58**:1 (2003), 177–178; англ. пер.: O. N. Ageev, “On the genericity of some non-asymptotic dynamical properties”, *Russian Math. Surveys*, **58**:1 (2003), 173–174.
- [16] O. N. Ageev, “A typical dynamical system is not simple or semisimple”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **23**:6 (2003), 1625–1636.
- [17] A. I. Danilenko, “On simplicity concepts for ergodic actions”, *J. Anal. Math.*, **102**:1 (2007), 77–117.
- [18] С. В. Тихонов, “Полная метрика на множестве перемешивающих преобразований”, *Матем. сб.*, **198**:4 (2007), 135–158; англ. пер.: S. V. Tikhonov, “A complete metric in the set of mixing transformations”, *Sb. Math.*, **198**:4 (2007), 575–596.
- [19] V. V. Ryzhikov, “Transformations having homogeneous spectra”, *J. Dynam. Control Systems*, **5**:1 (1999), 145–148.
- [20] O. N. Ageev, “On ergodic transformations with homogeneous spectrum”, *J. Dynam. Control Systems*, **5**:1 (1999), 149–152.
- [21] V. V. Ryzhikov, “Homogeneous spectrum, disjointness of convolutions, and mixing properties of dynamical systems”, *Selected Russian Mathematics*, **1**, 1999, 13–24.
- [22] А. Б. Каток, А. М. Стёпин, “Метрические свойства гомеоморфизмов, сохраняющих меру”, *УМН*, **25**:2 (1970), 193–220; англ. пер.: A. B. Katok, A. M. Stepin, “Metric properties of measure preserving homeomorphisms”, *Russian Math. Surveys*, **25**:2 (1970), 191–220.
- [23] A. Katok, *Combinatorial constructions in ergodic theory and dynamics*, Univ. Lecture Ser., **30**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

- [24] A. A. Prikhod'ko, V. V. Ryzhikov, "Disjointness of the convolutions for Chacon's automorphism", *Colloq. Math.*, **84/85** (2000), 67–74.
- [25] O. Ageev, "Mixing with staircase multiplicity functions", *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **28**:6 (2008), 1687–1700.

В. В. Рыжиков (V. V. Ryzhikov)

Механико-математический факультет Московского
государственного университета им. М. В. Ломоносова
E-mail: vryzh@mail.ru

Поступила в редакцию
25.06.2009 и 11.09.2009