Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Садовничая, О равносходимости разложений в ряды по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 9, 61–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7598>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:52:51

УДК 517.984

И. В. Садовничая

О равносходимости разложений в ряды по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями

Изучается оператор Штурма–Лиувилля $L = -d^2/dx^2 + q(x)$ в пространстве $L_2[0, \pi]$ с граничными условиями Дирихле. Предполагается, что $q(x) = u'(x)$, $u(x) \in L_2[0, \pi]$ (производная понимается в смысле распределений). Рассматривается вопрос о равномерной на всем отрезке $[0, \pi]$ равносходимости разложения некоторой функции $f(x)$ в ряд по системе собственных и присоединенных функций оператора L с ее разложением в ряд Фурье по системе синусов. Доказано, что для любой функции $f(x)$ из пространства $L_2[0, \pi]$ такая равномерная сходимость имеет место.

Библиография: 22 названия.

Ключевые слова: оператор Штурма–Лиувилля, сингулярный потенциал, равномерная равносходимость.

В настоящей работе изучается оператор Штурма–Лиувилля

$$Ly = -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y \quad (1)$$

в пространстве $L_2[0, \pi]$ с граничными условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$. Предполагается, что $q(x) = u'(x)$, $u \in L_2[0, \pi]$. Производная здесь понимается в смысле распределений. Пространство таких функций q обозначается через $W_2^{-1}[0, \pi]$. Операторы такого (и более общего) вида были определены в работах [1], [2]. Там же было доказано, что оператор L фредгольмов с индексами $(0, 0)$ (в случае вещественного потенциала – самосопряжен и полуограничен) и имеет чисто дискретный спектр. Некоторые результаты об операторе L , полученные в [1]–[3] и необходимые нам в этой работе, будут приведены ниже.

В статье рассматривается вопрос о равномерной на всем отрезке $[0, \pi]$ равносходимости разложения функции f в ряд по системе собственных и присоединенных функций оператора L с ее разложением в ряд Фурье по системе синусов – собственных функций оператора $L^0 = -d^2/dx^2$ с теми же граничными условиями. Эта задача хорошо известна в классической теории операторов Штурма–Лиувилля (в случае, когда потенциал q локально суммируем). Первые работы по ее решению принадлежат У. Дини [4], В. А. Стеклову [5], А. Харау [6], М. Стоуну [7]. В монографии В. А. Марченко [8; гл. 1, § 3] доказана равномерная равносходимость в случае, если $f \in L_2[0, \pi]$, а q – комплекснозначная суммируемая функция. В. А. Ильин [9] показал, что равносходимость имеет место на любом компакте, лежащем внутри отрезка, в случае, когда $f \in L_1[0, \pi]$, q – комплекснозначная суммируемая функция. Вопрос о скорости

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-90408).

равносходимости для классических потенциалов изучался в статье А. М. Гомилко и Г. В. Радзиевского [10]. Равносходимость разложений по системам собственных и присоединенных функций операторов порядка $n \geq 2$ с суммируемыми коэффициентами и общими регулярными по Биркгофу краевыми условиями также подробно изучена. В работе А. П. Хромова [11] для заданной пары операторов установлен критерий равносходимости в терминах раскладываемой функции $f \in C[0, \pi]$. В статье Е. Вермута [12] найдены необходимые и достаточные условия для пары операторов, обеспечивающие равносходимость для любой функции $f \in L_1[0, \pi]$. Мы указали здесь только отдельные работы, другие ссылки и информацию по этой теме можно найти в обзорной статье А. М. Минкина [13].

Равносходимость для операторов с сингулярными потенциалами изучена мало. В. А. Винокуров и В. А. Садовничий в [14] в 2001 г. доказали теорему о равносходимости для случая операторов с вещественнозначным потенциалом q , являющимся производной функции ограниченной вариации, при этом $f \in L_1[0, \pi]$. В недавних работах П. Дьякова и Б. Митягина [15] и [16] для потенциалов $q \in W_2^{-1}$ доказаны оценки

$$\|P_n - P_n^0\|_{L_1 \rightarrow L_\infty} \rightarrow 0, \quad \left\| \sum_{n < N} (P_n - P_n^0) \right\|_{L_1 \rightarrow L_\infty} < CN \ln N,$$

$$\sum_{n > N} \|P_n - P_n^0\|_{\text{HS}}^2 \rightarrow 0.$$

Здесь P_n и P_n^0 – проекторы Рисса на n -е корневые подпространства операторов L и L^0 соответственно (при этом граничные условиями выбираются периодическими, антипериодическими или условиями Дирихле), а $\|\cdot\|_{\text{HS}}$ – норма Гильберта–Шмидта для операторов в $L_2[0, \pi]$. Отметим, что в настоящей работе мы, в частности, доказываем, что

$$\left\| \sum_{n < N} (P_n - P_n^0) \right\|_{L_2 \rightarrow L_\infty} < C,$$

где C зависит от потенциала, но не зависит от N .

В работе автора [17] изучался вопрос об оценке скорости равносходимости на всем отрезке в случае, когда первообразная u от потенциала – комплекснозначная функция из пространства $W_2^\theta[0, \pi]$, $0 < \theta < 1/2$, $f \in L_2[0, \pi]$. В случае $\theta = 0$ (т.е. $q = u'$, $u \in L_2[0, \pi]$) задача о равносходимости для произвольной функции $f \in L_2[0, \pi]$ оказывается существенно более сложной. Цель настоящей работы – дать ее положительное решение. Некоторые результаты о такой равносходимости были анонсированы автором в работе [18], но подробное доказательство приведено не было.

§ 1. Предварительные результаты

Нам понадобятся некоторые предварительные сведения об операторе (1). Напомним (см. [2; § 1]), что

$$\begin{cases} Ly = l(y) = -(y^{[1]})' - u(x)y^{[1]} - u^2(x)y, \\ \mathfrak{D}(L) = \{y \mid y, y^{[1]} \in W_1^1[0, \pi], y(0) = y(\pi) = 0, l(y) \in L_2[0, \pi]\}, \end{cases}$$

где $y^{[1]}(x) := y'(x) - u(x)y(x)$ – первая квазипроизводная. Обозначим через $\omega(x, \lambda)$ решение дифференциального уравнения $l(\omega) = \lambda\omega$ с начальными условиями $\omega(0, \lambda) = 0$, $\omega^{[1]}(0, \lambda) = 1$. Ясно, что нули целой функции $\omega(\pi, \lambda)$ совпадают с собственными значениями оператора L . В силу теоремы существования и единственности геометрическая кратность каждого собственного значения равна 1. В случае вещественного потенциала присоединенные функции отсутствуют, т.е. все собственные значения являются простыми, но в общем случае это не так. Обозначим через $\{\mu_k\}_1^\infty$ все нули функции $\omega(\pi, \lambda)$ без учета кратности (т.е. $\mu_j = \mu_k$ только при $j = k$), причем нумерацию будем вести в порядке возрастания модуля, а в случае совпадения модулей – по возрастанию аргумента, значения которого выбираются из полуинтервала $(-\pi, \pi]$. Цепочкой из собственной и присоединенных функций (СПФ), отвечающей собственному значению μ_k , называют систему функций

$$\{y_k^0, y_k^1, \dots, y_k^{p_k-1}\}, \quad (L - \mu_k I)y_k^0 = 0, \quad (L - \mu_k I)y_k^j = y_k^{j-1}, \quad j = 1, \dots, p_k - 1.$$

Отметим, что в нашем случае геометрическая кратность собственных значений равна 1, поэтому мы говорим только об одной цепочке, всегда предполагая, что ее длина максимальна.

Пусть μ_k – нуль функции $\omega(\pi, \lambda)$ кратности q_k . Заметим, что функции $\omega_\lambda^{(j)}(x, \lambda)$, $j = 1, 2, \dots, q_k - 1$, удовлетворяют дифференциальным уравнениям $l(\omega_\lambda^{(j)}) = \lambda\omega_\lambda^{(j)} + \omega_\lambda^{(j-1)}$, причем $\omega_\lambda^{(j)}(0, \lambda) \equiv 0$. Кроме того, $\omega_\lambda^{(j)}(\pi, \mu_k) = 0$, поскольку μ_k есть нуль кратности q_k . Таким образом, функции $\omega_\lambda^{(j)}(x, \mu_k)$, $j = 0, 1, \dots, q_k - 1$, образуют цепочку из собственной и присоединенных функций, отвечающую собственному значению μ_k . Как и любая цепочка из собственной и присоединенных функций, эта система линейно независима, а значит, порождает подпространство размерности q_k . Остается отметить (см. [19; гл. I, п. 3]), что эта цепочка является канонической, т.е. имеет максимальную длину ($p_k = q_k$).

Предположим, что норма собственного вектора в каждой цепочке равна 1, и обозначим систему $\{\{y_k^j\}_{j=0}^{p_k-1}\}_{k=1}^\infty$ через $\{y_n\}_1^\infty$. Выбранной системе СПФ однозначно отвечает биортогональная система $\{w_n\}_1^\infty$, которая является системой СПФ сопряженного оператора L^* . Ее можно построить в явном виде (подробнее см. [8; гл. 1, § 3]).

Далее важную роль играют следующие результаты, полученные А. М. Савчуком и А. А. Шкаликовым.

ТЕОРЕМА А (см. [2; теорема 2.7]). Пусть $u \in L_2[0, \pi]$. Тогда система $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ собственных и присоединенных функций оператора L образует базис Рисса в пространстве $L_2[0, \pi]$.

ТЕОРЕМА В (см. [2] и [20]). Пусть $u \in L_2[0, \pi]$. Тогда начиная с некоторого номера $N = N_u$ все собственные значения оператора L просты, а для функций y_n и w_n справедливы асимптотические равенства

$$\begin{aligned} y_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx + \varphi_n(x), & w_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx + \psi_n(x), \\ y'_n(x) &= n \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx + \eta_n(x) \right) + u(x) \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx + \varphi_n(x) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$n = N, N + 1, \dots,$$

причем

$$\{\gamma_n\}_{n=N}^\infty = \{\|\varphi_n(x)\|_C + \|\psi_n(x)\|_C + \|\eta_n(x)\|_C\}_{n=N}^\infty \in l_2 \quad (3)$$

и $\|\{\gamma_n\}_N^\infty\|_{l_2} < 1$. Кроме того, при $n \geq N$

$$\psi_n(x) = \psi_{n,0}(x) + \psi_{n,1}(x) + \psi_{n,2}(x).$$

Здесь

$$\psi_{n,0}(x) = \alpha_n \sin nx - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \overline{u(t)} \sin n(x-2t) dt, \quad (4)$$

где норма последовательности $\{|\alpha_n|\}_{n=N}^\infty$ в пространстве l_2 ограничена величиной C_u , зависящей только от u ;

$$\begin{aligned} \psi_{n,1}(x) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \left(-\frac{1}{2n} \int_0^x \overline{u^2(t)} \sin(2nt) dt \right) \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx \left(-\frac{x}{\pi} \int_0^\pi \overline{u(t)} \sin(2nt) dt + \frac{x}{2\pi n} \int_0^\pi \overline{u^2(t)} (\cos(2nt) - 1) dt \right. \\ & - \frac{2x}{\pi} \int_0^\pi \int_0^t \overline{u(t)u(s)} \cos(2nt) \sin(2ns) ds dt + \frac{1}{2n} \int_0^x \overline{u^2(t)} (1 - \cos(2nt)) dt \\ & \left. + 2 \int_0^x \int_0^t \overline{u(t)u(s)} \cos(2nt) \sin(2ns) ds dt \right), \end{aligned} \quad (5)$$

а последовательность $\{\|\psi_{n,2}(x)\|_C\}_{n=N}^\infty$ принадлежит пространству l_1 и ее норма в этом пространстве не превосходит C_u .

Отметим, что в [2; лемма 2.5] была приведена оценка

$$\sum_{n=1}^\infty (|\varphi_n(x)|^2 + |\eta_n(x)|^2) < C,$$

где константа C не зависит от $x \in [0, \pi]$. Однако в доказательстве этой леммы был получен более сильный результат

$$\sum_{n=1}^\infty (\|\varphi_n\|_{C[0,\pi]}^2 + \|\eta_n\|_{C[0,\pi]}^2) < \infty$$

(см. формулы (2.28) и комментариев к ним). Представления (4) и (5) для функций ψ_n так же, как и оценка для функций $\psi_{n,2}$, были доказаны в недавней работе А. М. Савчука [20].

В этой статье важную роль будет играть числовая последовательность

$$v_u(k) = \left(C_u \sum_{n \geq k} \|\psi_n\|_{L_2}^2 \right)^{1/2} + \left(C_u \sum_{n \geq k} \|\varphi_n\|_{L_2}^2 \right)^{1/2}, \quad k \geq N, \quad (6)$$

где $N = N_u$ определено в теореме В (мы пишем здесь индекс u , чтобы подчеркнуть зависимость от функции u – первообразной потенциала). Из (3) вытекает, что $v_u(k) \rightarrow 0$ при $k \geq N$, $k \rightarrow \infty$. Далее мы убедимся, что скорость стремления к нулю этой последовательности характеризует скорость равномерности.

§ 2. Основная теорема

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Рассмотрим оператор (1), действующий в пространстве $L_2[0, \pi]$, с граничными условиями Дирихле, потенциал которого удовлетворяет следующим условиям: $q(x) = u'(x)$, где $u \in L_2[0, \pi]$ – комплекснозначная функция. Пусть $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – определенная выше система собственных и присоединенных функций оператора L , $\{w_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – биортogonalная к ней система. Для произвольной функции $f \in L_2[0, \pi]$ обозначим

$$c_n = (f(x), w_n(x)), \quad c_{n,0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (f(x), \sin nx).$$

Тогда имеет место равномерная на всем отрезке $[0, \pi]$ равносходимость разложения функции f в ряд по системе $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и по системе синусов. Более того, скорость равносходимости характеризуется следующей оценкой:

$$\left\| \sum_{n=1}^m c_n y_n(x) - \sum_{n=1}^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} c_{n,0} \sin nx \right\|_C \leq C_u \left(\sum_{n \geq m^{1/2-\varepsilon}} |c_{n,0}|^2 \right)^{1/2} + \|f\|_{L_2} (v_u([m^{1/2-\varepsilon}]) + C_u m^{-\varepsilon}), \quad (7)$$

где $\varepsilon \in (0, 1/2)$ – произвольное число, $m^{1/2-\varepsilon} > N_u$, а $v_u(k)$ определено в (6).

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае более гладкого потенциала $u \in W_2^\theta[0, \pi]$ при $\theta \in (0, 1/2)$ оценку скорости равносходимости можно улучшить – поставить в правой части неравенства выражение

$$C_{\|u\|, \theta} \left(\left(\sum_{n \geq \sqrt{m}} |c_{n,0}|^2 \right)^{1/2} + \|f\|_{L_2} m^{-\theta/2} \right)$$

(см. работу [17]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Рассмотрим операторы

$$B_{m,N}: L_2[0, \pi] \rightarrow C[0, \pi],$$

действующие по правилу

$$(B_{m,N})f(x) := \sum_{n=N}^m c_n y_n(x) - \sum_{n=N}^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} c_{n,0} \sin nx,$$

где $f \in L_2[0, \pi]$. При $N = 1$ будем опускать второй индекс: $B_{m,1} =: B_m$.

Зафиксируем индекс N , положив $N = N_u$, где N_u – натуральное число, существование которого постулируется в теореме В.

Из теоремы В следует, что для любой функции $f \in L_2[0, \pi]$ справедливо асимптотическое равенство (мы будем называть его *основным равенством*)

$$\begin{aligned} (B_{m,N})f(x) = & \sum_{n=N}^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} (f(t), \psi_{n,0}(t)) \sin nx + \sum_{n=N}^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} (f(t), \psi_{n,1}(t)) \sin nx \\ & + \sum_{n=N}^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} (f(t), \psi_{n,2}(t)) \sin nx + \sum_{n=N}^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} (f(t), \sin nt) \varphi_n(x) \\ & + \sum_{n=N}^m (f(t), \psi_n(t)) \varphi_n(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Наша ближайшая цель – показать, что для любой функции $u \in L_2[0, \pi]$ последовательность операторов $\{B_{m,N}\}_{m=N}^{\infty}$ равномерно ограничена:

$$\|B_{m,N}\|_{L_2 \rightarrow C} \leq C_u. \quad (9)$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части основного равенства (8) по отдельности (наиболее трудной является оценка первого слагаемого).

Шаг 1 (оценка первого слагаемого). Покажем, что для любой функции $f \in L_2[0, \pi]$ имеет место неравенство

$$\left\| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=N}^m (f(t), \psi_{n,0}(t)) \sin nx \right\|_C \leq C_u \|f\|_{L_2}. \quad (10)$$

В силу асимптотических формул (4)

$$(f(t), \psi_{n,0}(t)) = \overline{\alpha_n}(f(t), \sin nt) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f(t) \int_0^t u(s) \sin n(t-2s) ds dt.$$

Таким образом, нужно равномерно по $x \in [0, \pi]$ оценить выражение

$$\sum_{n=N}^m \left(\overline{\alpha_n}(f(t), \sin nt) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f(t) \int_0^t u(s) \sin n(t-2s) ds dt \right) \sin nx. \quad (11)$$

Так как $\|\{\alpha_n\}\|_{l_2} \leq C_u$, то

$$\left\| \sum_{n=N}^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \overline{\alpha_n}(f(t), \sin nt) \sin nx \right\|_C \leq C_u \|f\|_{L_2}.$$

Оценка второго слагаемого в (11) – задача гораздо более сложная. Она является наиболее существенной частью работы. Применив формулу разности косинусов, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=N}^m \int_0^\pi f(t) \int_0^t u(s) \sin n(t-2s) ds dt \cdot \sin nx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=N}^m \int_0^\pi f(t) \int_0^t u(s) \cos n(t-x-2s) ds dt \\ & \quad - \frac{1}{2} \sum_{n=N}^m \int_0^\pi f(t) \int_0^t u(s) \cos n(t+x-2s) ds dt. \end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое в правой части последнего соотношения (второе слагаемое рассматривается аналогично). Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^m \int_0^\pi f(t) \int_0^t u(s) \cos n(t-x-2s) ds dt &= \int_0^\pi f(t) \int_0^t u(s) D_m(t-x-2s) ds dt \\ &\quad - \int_0^\pi f(t) \int_0^t u(s) D_{N-1}(t-x-2s) ds dt, \end{aligned} \quad (12)$$

где $D_m(\xi) = 1/2 + \sum_{n=1}^m \cos n\xi$ – ядро Дирихле. Так как второе слагаемое в правой части (12) не зависит от m , то для него сразу получаем необходимую оценку

$$\left\| \int_0^\pi f(t) \int_0^t u(s) D_{N-1}(t-x-2s) ds dt \right\|_C \leq C_u \|f\|_{L_2}.$$

Займемся оценкой первого слагаемого в (12). Определим оператор $A_{m,-x}$, действующий в пространстве $L_2[0, \pi]$ по правилу

$$(A_{m,-x}u)(t) = \int_0^t u(s) D_m(t-x-2s) ds,$$

и положим по определению $A_m := A_{m,0}$. Нам необходимо оценить нормы операторов $A_{m,-x}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ и $x \in [0, \pi]$.

Покажем, что оператор $A_{m,-x}$ унитарно эквивалентен сумме оператора A_m и некоторого оператора $\tilde{A}_{m,x}$, норму которого в $L_2[0, \pi]$ оценить легко. Пусть $T_x g(t) = g(t+x)$ – оператор сдвига в пространстве $L_2[0, \pi]$ (считаем, что все функции продолжены за отрезок $[0, \pi]$ периодически). Тогда можем записать

$$\begin{aligned} (T_{-x} A_{m,-x} T_x)(u(\cdot)) &= (T_{-x} A_{m,-x})(u(x+\cdot)) \\ &= T_{-x} \int_0^t u(s+x) D_m(t-x-2s) ds = \int_0^{t-x} u(s+x) D_m(t-2x-2s) ds \\ &= \int_x^t u(s) D_m(t-2s) ds = (A_m u)(t) - (\tilde{A}_{m,x} u)(t), \end{aligned}$$

где $\tilde{A}_{m,x} u(t) := \int_0^x u(s) D_m(t-2s) ds$. Несложно видеть, что оператор $\tilde{A}_{m,x}$ представляет собой композицию оператора срезки $H_x u(t) = \chi_{[0,x]} u(t)$ и оператора F_m , действующего по правилу

$$\begin{aligned} (F_m v)(t) &= \sum_{n=1}^m \left(\int_0^\pi v(s) \cos(2ns) ds \cdot \cos nt + \int_0^\pi v(s) \sin(2ns) ds \cdot \sin nt \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\pi v(s) ds. \end{aligned} \quad (13)$$

Очевидно, что

$$\|H_x\|_{L_2} \leq 1, \quad \|F_m v\|_{L_2}^2 = \left\| \sum_{n=1}^m (a_n \cos nt + b_n \sin nt) + \frac{1}{2} a_0 \right\|_{L_2}^2 \leq C \|v\|_{L_2}^2,$$

где

$$a_n = \int_0^\pi v(s) \cos(2ns) ds, \quad b_n = \int_0^\pi v(s) \sin(2ns) ds$$

– коэффициенты Фурье функции $v(t)$. Таким образом, норма оператора $\tilde{A}_{m,x}$ в $L_2[0, \pi]$ ограничена равномерно по $m \in \mathbb{N}$ и $x \in [0, \pi]$.

Теперь докажем равномерную по $m \in \mathbb{N}$ ограниченность оператора A_m в пространстве $L_2[0, \pi]$. Заметим, что

$$\begin{aligned} (A_m u)(t) &= \int_0^t u(s) D_m(t-2s) ds \\ &= \int_0^\pi u(s) D_m(t-2s) ds - \int_t^\pi u(s) D_m(t-2s) ds = (F_m u)(t) - (E_m^* u)(t), \end{aligned}$$

где оператор F_m определен в (13), а E_m^* является сопряженным к оператору E_m , определенному равенством

$$(E_m u)(t) = \int_0^t u(s) D_m(2t-s) ds.$$

Таким образом, задача свелась к проверке равномерной ограниченности оператора E_m .

Рассмотрим билинейную форму $(E_m f, g)$, где $f, g \in L_2[0, \pi]$, и докажем ее ограниченность. В силу известной оценки $|D_m(x)| \leq C/|x|$, где C – абсолютная постоянная (см., например, [21; гл. 1, § 32]), имеем

$$\begin{aligned} |(E_m f, g)| &= \left| \int_0^\pi \int_0^t f(s) \overline{g(t)} D_m(2t-s) ds dt \right| \\ &\leq \int_0^\pi \int_0^t |f(s)| |g(t)| |D_m(2t-s)| ds dt \\ &\leq C \int_0^\pi \int_0^t |f(s)| |g(t)| \frac{1}{2t-s} ds dt \leq 2C \int_0^\pi \int_0^t |f(s)| |g(t)| \frac{1}{t+s} ds dt \\ &\leq 2C \int_0^\pi \int_0^\pi |f(s)| |g(t)| \frac{1}{t+s} ds dt \leq 2\pi C \|f\|_{L_2} \|g\|_{L_2}. \end{aligned}$$

При переходе к последнему неравенству мы воспользовались известным фактом (см. [22; гл. IX, п. 3]), что оператор Гильберта с ядром $1/(t+s)$ является ограниченным в $L_2[0, \infty)$.

Неравенство (10) полностью доказано.

Шаг 2 (оценка второго слагаемого в основном равенстве). Покажем, что для любой функции $f \in L_2[0, \pi]$ справедливо неравенство

$$\left\| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=N}^m (f(t), \psi_{n,1}(t)) \sin nx \right\|_C \leq C_u \|f\|_{L_2}, \quad (14)$$

где C_u зависит только от u .

С учетом асимптотических формул (5) нам нужно рассмотреть выражение

$$\begin{aligned} \Psi_n := (f(t), \psi_{n,1}(t)) &= -\frac{1}{2n} \int_0^\pi f(t) \sin nt \int_0^t u^2(s) \sin(2ns) ds dt \\ &\quad - \int_0^\pi \frac{t}{\pi} f(t) \cos nt \int_0^\pi u(s) \sin(2ns) ds dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\pi \frac{tf(t)}{2\pi n} \cos nt \int_0^\pi u^2(s)(\cos(2ns) - 1) ds dt \\
& - \frac{1}{2n} \int_0^\pi f(t) \cos nt \int_0^t u^2(s) \cos(2ns) ds dt \\
& + \frac{1}{2n} \int_0^\pi f(t) \cos nt \int_0^t u^2(s) ds dt \\
& - \int_0^\pi \frac{2tf(t)}{\pi} \cos nt \int_0^\pi \int_0^s u(s)u(\tau) \cos(2ns) \sin(2n\tau) d\tau ds dt \\
& + 2 \int_0^\pi f(t) \cos nt \int_0^t \int_0^s u(s)u(\tau) \cos(2ns) \sin(2n\tau) d\tau ds dt. \tag{15}
\end{aligned}$$

Покажем, что для любой функции $f \in L_2[0, \pi]$ справедлива оценка

$$\left\| \sum_{n=N}^m \Psi_n \sin nx \right\|_C \leq C_u \|f\|_{L_2}. \tag{16}$$

Проведем оценку этого ряда для случая, когда вместо Ψ_n в него входит первое слагаемое из правой части (15). Меняя в двойном интеграле пределы интегрирования, получаем

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=N}^m \frac{\sin nx}{2n} \int_0^\pi f(t) \sin nt \int_0^t u^2(s) \sin(2ns) ds dt \right| \\
& \leq \int_0^\pi |u(s)|^2 \left| \sum_{n=N}^m \frac{\sin(2ns)}{2n} \sin nx \int_s^\pi f(t) \sin nt dt \right| ds \\
& \leq \int_0^\pi |u(s)|^2 \sum_{n=N}^m \frac{1}{2n} \left| \int_s^\pi f(t) \sin nt dt \right| ds \leq C_u \|f\|_{L_2}, \tag{17}
\end{aligned}$$

так как последовательность

$$\left\{ \int_s^\pi f(t) \sin nt dt \right\}_{n=N}^\infty = \{(\tilde{H}_s f, \sin nt)\}_{n=N}^\infty$$

принадлежит пространству l_2 и ее норма в этом пространстве не превосходит $\|\tilde{H}_s f\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_2}$ (здесь $\tilde{H}_s$ – оператор срезки в пространстве $L_2[0, \pi]$).

Точно такие же рассуждения можно провести для четвертого слагаемого в правой части (15).

Для второго слагаемого в (15) получим оценки

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=N}^m \int_0^\pi \frac{t}{\pi} f(t) \cos nt \int_0^\pi u(s) \sin(2ns) ds dt \cdot \sin nx \right| \\
& \leq \frac{1}{\pi} \left(\sum_{n=N}^m \left| \int_0^\pi t f(t) \cos nt dt \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=N}^m \left| \int_0^\pi u(s) \sin(2ns) ds \right|^2 \right)^{1/2} \\
& \leq C_u \|f\|_{L_2}. \tag{18}
\end{aligned}$$

Для третьего слагаемого в (15) оценка получается аналогично:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=N}^m \int_0^\pi \frac{tf(t)}{2\pi n} \cos nt \int_0^\pi u^2(s)(\cos(2ns) - 1) ds dt \cdot \sin nx \right| \\ & \leq C_u \left(\sum_{n=N}^m \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=N}^m \left| \int_0^\pi tf(t) \cos nt dt \right|^2 \right)^{1/2} \leq C_u \|f\|_{L_2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для оценки пятого слагаемого в (15) сначала проинтегрируем функцию $u^2(s)$:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=N}^m \frac{\sin nx}{2n} \int_0^\pi f(t) \cos nt \int_0^t u^2(s) ds dt \right| \leq \sum_{n=N}^m \frac{1}{2n} \left| \int_0^\pi f(t) U(t) \cos nt dt \right| \\ & \leq C \left(\sum_{n=N}^m \left| \int_0^\pi f(t) U(t) \cos nt dt \right|^2 \right)^{1/2} \leq C \|f(t)U(t)\|_{L_2} \leq C_u \|f\|_{L_2}, \end{aligned} \quad (20)$$

поскольку функция

$$U(t) = \int_0^t u^2(s) ds$$

является абсолютно непрерывной.

Перейдем к тройным интегралам в правой части (15). Оценим ряд (16) в случае, когда вместо Ψ_n в него входит первый из тройных интегралов в правой части (15):

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=N}^m \int_0^\pi \frac{2tf(t)}{\pi} \cos nt \int_0^\pi \int_0^s u(s)u(\tau) \cos(2ns) \sin(2n\tau) d\tau ds dt \cdot \sin nx \right| \\ & \leq \frac{2}{\pi} \left(\sum_{n=N}^m \left| \int_0^\pi tf(t) \cos nt dt \right|^2 \right)^{1/2} \\ & \quad \times \left(\sum_{n=N}^m \left| \int_0^\pi \int_0^s u(s) \cos(2ns) u(\tau) \sin(2n\tau) d\tau ds \right|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C \|f\|_{L_2} \left(\sum_{n=N}^m \left| \int_0^\pi \int_0^\pi u(s)u(\tau) \chi(s, \tau) \cos(2ns) \sin(2n\tau) ds d\tau \right|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C_u \|f\|_{L_2}, \end{aligned} \quad (21)$$

поскольку

$$u(s)u(\tau)\chi(s, \tau) \in L_2([0, \pi]^2)$$

(здесь $\chi(s, \tau) = 1$, если $\tau \leq s$, и $\chi(s, \tau) = 0$, если $\tau > s$).

Наконец,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=N}^m \int_0^\pi f(t) \cos nt \int_0^t \int_0^s u(s)u(\tau) \cos(2ns) \sin(2n\tau) d\tau ds dt \cdot \sin nx \right| \\ & = \left| \int_0^\pi u(s) \sum_{n=N}^m \cos(2ns) \sin nx (\tilde{H}_s f(t), \cos nt) (H_s u(\tau), \sin(2n\tau)) ds \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^\pi |u(s)| \left| \sum_{n=N}^m (\tilde{H}_s f(t), \cos nt)(H_s u(t), \sin(2nt)) \right| ds \\
&\leq C \int_0^\pi |u(s)| \|\tilde{H}_s f\|_{L_2} \|H_s u\|_{L_2} ds \leq C_u \|f\|_{L_2}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Здесь через $\tilde{H}_s$ обозначен оператор срезки $\tilde{H}_s f(t) = \chi_{[s, \pi]} f(t)$.

Из (17)–(22) следует неравенство (16) (а значит, и (14)).

Шаг 3 (оценка оставшихся слагаемых в основном равенстве). Оценка третьего слагаемого в (8) получается тривиально:

$$\sum_{n=N}^m \left| \int_0^\pi f(t) \overline{\psi_{n,2}(t)} dt \right| \leq C_u \|f\|_{L_2}, \tag{23}$$

так как $\{\|\psi_{n,2}(t)\|_C\} \in l_1$.

Перейдем к четвертому члену представления (8). В силу асимптотических формул (2)

$$\left\| \sum_{n=N}^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} (f(t), \sin nt) \varphi_n(x) \right\|_C \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=N}^m (|f(t), \sin nt| \cdot \|\varphi_n(x)\|_C) \leq C_u \|f\|_{L_2}. \tag{24}$$

Наконец,

$$\left\| \sum_{n=N}^m (f(t), \psi_n(t)) \varphi_n(x) \right\|_C \leq \|f\|_{L_2} \sum_{n=N}^m (\|\psi_n(t)\|_{L_2} \cdot \|\varphi_n(x)\|_C) \leq C_u \|f\|_{L_2}. \tag{25}$$

Из неравенств (10), (14) и (23)–(25) вытекает оценка (9).

Теперь мы можем легко получить оценку для нормы оператора B_m . Очевидно, что он представляется в виде суммы: $B_m = B_{N-1} + B_{m,N}$. Поскольку выбор числа N зависит только от u , то ясно, что $\|B_{N-1}\|_{L_2 \rightarrow C} \leq C_u$ (так как этот оператор представляется в виде суммы конечного числа слагаемых). Отсюда и из неравенства (9) немедленно следует, что

$$\|B_m\|_{L_2 \rightarrow C} \leq C_u. \tag{26}$$

Шаг 4 (доказательство равносходимости). Заметим, что для любой функции $f \in L_2[0, \pi]$ выполнено

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|B_m f\|_C = 0. \tag{27}$$

Рассмотрим действие оператора B_m на собственные и присоединенные функции оператора L :

$$(B_m y_k)(x) = \sum_{n=1}^m (y_k(x), w_n(x)) y_n(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^m (y_k(x), \sin nx) \sin nx.$$

Первое слагаемое в правой части последнего соотношения равно 0 при $m < k$ и равно $y_k(x)$ при $m \geq k$. Второе слагаемое представляет собой частичную сумму ряда Фурье функции y_k . Так как все функции y_k принадлежат пространству $W_2^1[0, \pi]$, то ряд Фурье функции y_k сходится к ней равномерно на отрезке $[0, \pi]$, и мы получаем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|B_m y_k\|_C = 0. \tag{28}$$

Согласно теореме A система собственных и присоединенных функций полна в пространстве $L_2[0, \pi]$, поэтому любую функцию $f(x)$ можно приблизить линейными комбинациями функций системы $\{y_k(x)\}$. Но тогда (28) влечет (27). Шаг 4 завершен.

Перейдем к доказательству утверждения о скорости равномерности (см. неравенство (7)). Для любого $k \geq N_u$ обозначим $g_k(x) = \sum_{n=1}^k c_n y_n(x)$ (напомним, что $c_n = (f(x), w_n(x))$). Очевидно, что для любой функции $f \in L_2[0, \pi]$ и для любого натурального m выполнено

$$\|B_m f\|_C \leq \|B_m(f - g_k)\|_C + \|B_m g_k\|_C. \quad (29)$$

Шаг 5 (оценка нормы $B_m(f - g_k)$ в пространстве $C[0, \pi]$). Пусть

$$g_k(x) = \sum_{n=1}^k c_n y_n(x), \quad k \geq N_u.$$

Тогда

$$\|B_m(f - g_k)\|_C \leq C_u \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} |c_{n,0}|^2 \right)^{1/2} + \|f\|_{L_2} v_u(k+1), \quad (30)$$

где $c_{n,0} = \sqrt{2/\pi} (f(x), \sin nx)$, а числа $v_u(k)$ определены в (6).

С учетом асимптотических формул (2) получаем

$$\begin{aligned} \|f(x) - g_k(x)\|_{L_2} &\leq \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{\pi} (f(x), \sin nx) \sin nx \right\|_{L_2} \\ &\quad + \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (f(x), \psi_n(x)) \sin nx \right\|_{L_2} \\ &\quad + \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (f(x), \sin nx) \varphi_n(x) \right\|_{L_2} + \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} (f(x), \psi_n(x)) \varphi_n(x) \right\|_{L_2} \\ &\leq C_u \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} |c_{n,0}|^2 \right)^{1/2} + \|f\|_{L_2} \left(\left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \|\psi_n\|_{L_2}^2 \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \|\varphi_n\|_{L_2}^2 \right)^{1/2} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \|\psi_n\|_{L_2} \|\varphi_n\|_{L_2} \right) \\ &= C_u \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} |c_{n,0}|^2 \right)^{1/2} + v_u(k+1) \|f\|_{L_2}. \end{aligned}$$

В силу оценки (26) для нормы оператора B_m из доказанного неравенства немедленно вытекает неравенство (30). Шаг 5 завершен.

Перейдем к оценке второго слагаемого в (29).

Шаг 6 (оценка нормы $B_m g_k$ в пространстве $C[0, \pi]$). Пусть $m > k \geq N_u$ – натуральные числа. Тогда

$$\|B_m g_k\|_C \leq \|f\|_{L_2} \cdot C_u k m^{-1/2}. \quad (31)$$

Пусть $m > k$. Обозначим через S_m оператор, действующий из пространства $W_2^1[0, \pi]$ в пространство $C[0, \pi]$ по правилу

$$S_m h(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=m+1}^{\infty} (h(t), \sin nt) \sin nx.$$

Заметим, что

$$B_m g_k(x) = g_k(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^m (g_k(t), \sin nt) \sin nx = S_m g_k(x)$$

(поскольку все собственные и присоединенные функции оператора L принадлежат пространству $W_2^1[0, \pi]$, то действие оператора S_m на них корректно определено). Тогда

$$\|B_m g_k\|_C \leq \|S_m(g_k - g_N)\|_C + \|S_m g_N\|_C. \quad (32)$$

Пусть $m > k \geq N_u$. Получаем, что

$$\|S_m(g_k(x) - g_N(x))\|_C = \left\| \sum_{n=N+1}^k c_n S_m y_n(x) \right\|_C = \left\| \sum_{n=N+1}^k c_n S_m \varphi_n(x) \right\|_C,$$

так как $y_n(x) = \sqrt{2/\pi} \sin nx + \varphi_n(x)$, где $\varphi_n(x)$ определены в (2). Далее,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=N+1}^k c_n S_m \varphi_n(x) \right\|_C &\leq \left(\sum_{n=N+1}^k |c_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=N+1}^k \|S_m \varphi_n(x)\|_C^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C_u \|f\|_{L_2} \left(\sum_{n=N+1}^k \|S_m \varphi_n(x)\|_C^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

При выводе последнего неравенства мы учли тот факт, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^k |c_n|^2 &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|^2 \\ &\leq 2 \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} |(f(x), \sin nx)|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |(f(x), \psi_n(x))|^2 \right) \leq C_u \|f\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

Оценим $\|S_m \varphi_n(x)\|_C$:

$$\begin{aligned} \|S_m \varphi_n(x)\|_C &\leq \frac{2}{\pi} \sum_{j=m+1}^{\infty} |(\varphi_n(x), \sin jx)| = \frac{2}{\pi} \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{|(\varphi_n'(x), \cos jx)|}{j} \\ &\leq \frac{2}{\pi} \left(\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{j=m+1}^{\infty} |(\varphi_n'(x), \cos jx)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C m^{-1/2} \|\varphi_n(x)\|_{W_2^1}. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь мы проинтегрировали по частям и учли тот факт, что $\varphi_n(0) = \varphi_n(\pi) = 0$.

Так как из асимптотических формул (2) следует, что $\varphi'_n(x) = n\eta_n(x) + u(x)y_n(x)$, то $\|\varphi_n(x)\|_{W_2^1} \leq C_u n\eta_n$, где $\|\{\eta_n\}\|_{l_2} \leq C_u$. Значит,

$$\|S_m \varphi_n(x)\|_C \leq C_u m^{-1/2} n \eta_n.$$

Итак, первое слагаемое в (32) можно оценить следующим образом:

$$\|S_m(g_k - g_N)\|_C \leq C_u \|f\|_{L_2} \left(\sum_{n=1}^k m^{-1} n^2 \eta_n^2 \right)^{1/2} \leq C_u \|f\|_{L_2} m^{-1/2} k. \quad (34)$$

Перейдем ко второму слагаемому. Действие оператора S_m на функции g_N оценивается точно так же, как в (33):

$$\|S_m g_N(x)\|_C \leq C m^{-1/2} \|g_N(x)\|_{W_2^1}.$$

Поскольку число N фиксировано и зависит только от первообразной потенциала u , то $\|g_N\|_{W_2^1} \leq C_u \|f\|_{L_2}$, а тогда

$$\|S_m g_N\|_C \leq C_u \|f\|_{L_2} m^{-1/2}. \quad (35)$$

Оценка (31) сразу вытекает из соотношений (32), (34) и (35). Шаг 6 завершен.

Заметим, что оценка (7) теперь следует из (29), (30) и (31) (достаточно взять $k = [m^{1/2-\varepsilon}]$, где $\varepsilon \in (0, 1/2)$ произвольно).

Теорема полностью доказана.

Гипотеза о том, что условие для потенциала q в теореме Марченко (см. [8; гл. 1, § 3]) можно значительно ослабить (вместо $q \in L_2$ требовать $\int q \in L_2$), была высказана А. А. Шкаликовым, который инициировал исследования автора по этой теме. Автор благодарит А. А. Шкаликова и А. М. Савчука за обсуждения доказательства основной теоремы, полезные замечания и советы. Автор также благодарит Б. С. Митягина за интерес к работе и полезные замечания, которые помогли исправить ряд неточностей.

Список литературы

- [1] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами”, *Матем. заметки*, **66:6** (1999), 897–912; англ. пер.: A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, “Sturm–Liouville operators with singular potentials”, *Math. Notes*, **66:6** (1999), 741–753.
- [2] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями”, Тр. ММО, **64**, УРСС, М., 2003, 159–212; англ. пер.: A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, “Sturm–Liouville operators with distribution potentials”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2003, 143–192.
- [3] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева”, *Матем. заметки*, **80:6** (2006), 864–884; англ. пер.: A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, “On the eigenvalues of the Sturm–Liouville operator with potentials from Sobolev spaces”, *Math. Notes*, **80:5–6** (2006), 814–832.
- [4] U. Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Piza, 1878.

- [5] В. А. Стеклов, “Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions, définies par les équations différentielles linéaires du second ordre, et leurs applications au problème du développement d’une fonction arbitraire en séries procédant suivant lesdites fonctions”, *Собщ. Харьк. матем. об-ва* (2), **10**:2–6 (1909), 97–200.
- [6] А. Haar, “Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme”, *Math. Ann.*, **69**:3 (1910), 331–371; **71**:1 (1911), 38–53.
- [7] М. Н. Stone, “A comparison of the series of Fourier and Birkhoff”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **28**:4 (1926), 695–761.
- [8] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Научова думка, Киев, 1977; англ. пер.: V. A. Marchenko, *Sturm–Liouville operators and applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **22**, Birkhäuser, Basel, 1986.
- [9] В. А. Ильин, “Равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям одномерного оператора Шрёдингера с комплексным потенциалом класса L_1 ”, *Дифференц. уравнения*, **27**:4 (1991), 577–597; англ. пер.: V. A. Il’in, “Equiconvergence, with trigonometric series, of expansions in root functions of a one-dimensional Schrödinger operator with a complex potential in the class L_1 ”, *Differential Equations*, **27**:4 (1991), 401–416.
- [10] А. М. Гомилко, Г. В. Радзиевский, “Равносходимость рядов по собственным функциям обыкновенных функционально-дифференциальных операторов”, *Докл. РАН*, **316**:2 (1991), 265–270; англ. пер.: A. M. Gomilko, G. V. Radzievskii, “Equiconvergence of series in eigenfunctions of ordinary functional-differential operators”, *Soviet Math. Dokl.*, **43**:1 (1991), 47–52.
- [11] А. П. Хромов, “О равносходимости разложений по собственным функциям дифференциальных операторов второго порядка”, *Дифференц. уравнения и выч. матем.*, **5**:2 (1975), 3–20.
- [12] E. Wermuth, *Konvergenzuntersuchungen bei Eigenfunktionsentwicklungen zu Rand eigenwertproblemen n-ter Ordnung mit parameterabhängigen Randbedingungen*, RWTH, Mathematisch-Naturwissenschaft. fak., Aachen, 1984.
- [13] А. М. Мinkin, “Equiconvergence theorems for differential operators”, *J. Math. Sci. (New York)*, **96**:6 (1999), 3631–3715.
- [14] В. А. Винокуров, В. А. Садовничий, “Равномерная равносходимость ряда Фурье по собственным функциям первой краевой задачи и тригонометрического ряда Фурье”, *Докл. РАН*, **380**:6 (2001), 731–735; англ. пер.: V. A. Vinokurov, V. A. Sadovnichii, “Uniform equiconvergence of a Fourier series in eigenfunctions of the first boundary value problem and of a Fourier trigonometric series”, *Dokl. Math.*, **64**:2 (2001), 248–252.
- [15] P. Djakov, B. Mityagin, “Spectral gaps of Schrodinger operators with periodic singular potentials”, *Dyn. Partial Differ. Equ.*, **6**:2 (2009), 95–165.
- [16] P. Djakov, B. Mityagin, “Bari–Markus property for Riesz projections of Hill operators with singular potentials”, *Functional analysis and complex analysis* (Istanbul, Turkey, 2007), Contemp. Math., **481**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, 59–80.
- [17] И. В. Садовничая, “О скорости равносходимости разложений в ряды по тригонометрической системе и по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом-распределением”, *Дифференц. уравнения*, **44**:5 (2008), 656–664; англ. пер.: I. V. Sadovnichaya, “On the equiconvergence rate of trigonometric series expansions and eigenfunction expansions for the Sturm–Liouville operator with a distributional potential”, *Differ. Equ.*, **44**:5 (2008), 675–684.
- [18] И. В. Садовничая, “О равносходимости разложений в ряды по тригонометрической системе и по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом-распределением”, *Докл. РАН*, **392**:2 (2003), 170–173; англ. пер.: I. V. Sadovnichaya, “Equiconvergence of series expansions in terms of trigonometric functions and eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator with a distribution potential”, *Dokl. Math.*, **68**:2 (2003), 191–193.

- [19] М. А. Neumark, *Lineare Differentialoperatoren*, 2-е изд., Akademie-Verlag, Berlin, 1960.
- [20] А. М. Савчук, *О собственных функциях оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева*, arXiv: [1003.3172](#).
- [21] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
- [22] Г. Харди, Дж. Литтлвуд, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948; пер. с англ.: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.

И. В. Садовничая (I. V. Sadovnichaya)

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ivsad@yandex.ru

Поступила в редакцию

25.06.2009 и 17.03.2010