Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Б. Пенков, А. С. Тихомиров, Тривиальность векторных расслоений на скрученных инд-грассманианах, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 1, 65–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7599>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 17:54:30

УДК 512.723

И. Б. Пенков, А. С. Тихомиров

Тривиальность векторных расслоений на скрученных инд-грассманианах

Скрученными инд-грассманианами называются инд-многообразия $\mathbf{G}$, определяемые как прямые пределы грассманианов $G(i_m, V^{n_m})$ для $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ при вложениях степени больше единицы. И. Дониным и И. Пенковым (2003 г.) была высказана гипотеза о том, что всякое векторное расслоение конечного ранга на скрученном инд-грассманиане тривиально. Мы доказываем эту гипотезу.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: инд-многообразие, скрученный инд-грассманиан, векторное расслоение.

§ 1. Введение и формулировка основного результата

1.1. Инд-грассманиан $\mathbf{G} = \varinjlim G(i_m, V^{n_m})$ есть инд-многообразие, определяемое как прямой предел цепочки вложений

$$G(i_1, V^{n_1}) \xrightarrow{\varphi_1} G(i_2, V^{n_2}) \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_{m-1}} G(i_m, V^{n_m}) \xrightarrow{\varphi_m} \dots, \quad (1.1)$$

где через $G(i, V)$ обозначается грассманиан i -мерных подпространств в конечномерном векторном пространстве V . Каждое вложение φ_m имеет корректно определенную степень $\deg \varphi_m$, и инд-грассманиан $\mathbf{G}$ называется *скрученным*, если $\deg \varphi_m > 1$ для бесконечно большого числа значений m . Векторное расслоение $\mathbf{E}$ ранга $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}_{>0}$ на $\mathbf{G}$ определяется как обратный предел $\varprojlim E_m$ обратной системы векторных расслоений E_m ранга $\mathbf{r}$ на $G(i_m, V^{n_m})$ (т.е. системы векторных расслоений E_m с фиксированными изоморфизмами $\psi_m: E_m \cong \varphi_m^* E_{m+1}$).

В частном случае, когда $i_m = 1$ и $\deg \varphi_m = 1$ для всех m , изучение векторных расслоений конечного ранга на инд-грассманианах восходит к В. Барту и А. Ван де Вену (см. [1]) и А.Н. Тюрину (см. [2]). В этом случае $\mathbf{G}$ есть бесконечномерное проективное пространство $\mathbb{P}^\infty$, и замечательная теорема Барта–Ван де Вена–Тюринга гласит, что всякое векторное расслоение конечного ранга на $\mathbb{P}^\infty$ изоморфно прямой сумме линейных расслоений. Исторически она впервые явилась отражением следующего общего феномена, по-видимому, имеющего место для инд-многообразий, определяемых последовательностями вложений (1.1) с заменой $G(i_m, V_m)$ на произвольные флаговые многообразия: во всех известных случаях ограничение векторного расслоения конечного ранга

Работа выполнена при частичной поддержке Немецкого исследовательского общества (грант № DFG PE980/3-1).

с инд-многообразием на достаточно большое конечномерное флаговое подмногообразии эквивариантно. Примерно в то же время это явление было обнаружено и в работах Е. Сато, который дал независимое доказательство теоремы Барта–Ван де Вена–Тюрина (см. [3]). Вскоре после этого Сато доказал более общий результат, относящийся к инд-грассманиану $\mathbf{G}(i, V)$ i -мерных подпространств в счетномерном векторном пространстве V (см. [4]).

Сравнительно недавно это направление возобновилось в работах [5]–[7]. В частности, в [7] была высказана общая гипотеза о векторных расслоениях конечного ранга на скрученных инд-грассманианах. В действительности, как показано авторами в [7], если инд-грассманиан $\mathbf{G}$ не является скрученным (что равносильно тому, что $\deg \varphi_m = 1$ для всех m), эта гипотеза является более или менее прямым следствием результата Сато. При этом остается открытым случай скрученного инд-грассманиана $\mathbf{G}$, в котором гипотеза гласит, что векторное расслоение конечного ранга на $\mathbf{G}$ тривиально. До настоящего времени гипотеза была доказана лишь в следующих трех случаях: для расслоений ранга 2 на произвольном скрученном инд-грассманиане (см. [7]); для расслоений конечного ранга на произвольном скрученном проективном инд-пространстве (скрученное проективное инд-пространство определяется последовательностью (1.1) с $i_m = 1$ и $\deg \varphi_m > 1$ для всех m ; см. [5]); для произвольных расслоений конечного ранга на некоторых специальных скрученных инд-грассманианах (для которых вложения φ_m являются скрученными расширениями в смысле [5]).

В настоящей статье мы доказываем данную гипотезу, т.е. устанавливаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Векторное расслоение конечного ранга $\mathbf{E} = \varprojlim E_m$ на произвольном скрученном инд-грассманиане $\mathbf{G} = \varinjlim G(i_m, V^{n_m})$ тривиально.*

1.2. Дадим краткое описание основных элементов доказательства теоремы 1. Во-первых, без ограничения общности мы можем считать, что расслоение $\mathbf{E}$ самодвойственно. При необходимости этого можно добиться заменой $\mathbf{E}$ на $\mathcal{E}nd \mathbf{E}$. Конечная цель доказательства состоит в построении для больших m подпучков $\mathcal{F}_m$ в векторных расслоениях E_m с $c_1(\mathcal{F}_m) > 0$ в предположении, что E_m нетривиальны. Это предположение затем легко приводит к противоречию, поскольку скрученность инд-грассманиана $\mathbf{G}$ и бесконечная продолжительность расслоений E_m влекут бесконечный рост класса $c_1(\mathcal{F}_m)$. Общая идея этой конструкции восходит к Барту, Ван де Велу и Тюрину для случая $\mathbb{P}^\infty$.

Конструкция подпучков $\mathcal{F}_m$ представляет собой комбинацию нескольких идей и основана на изучении многообразия прямых максимального подскока векторного расслоения $\mathbf{E}$. В нашем случае исследуется многообразие прямых максимального подскока векторного расслоения E_m на грассманиане $G(i_m, V^{n_m})$. Мы сводим задачу к изучению аналогичного многообразия для проективного пространства с помощью бирационального изоморфизма между грассманианом $G(i_m, V^{n_m})$ и расслоенным пространством X_m со слоем проективное пространство. Ключевым результатом в этой связи является существование универсальных оценок сверху на степень и коразмерность многообразия прямых максимального подскока векторного расслоения, проходящих через точку в проективном пространстве.

Статья построена следующим образом. В § 3 изучаются многообразия ограниченной степени и коразмерности в проективном пространстве растущей размерности. Основной результат здесь состоит в том, что любые две точки такого многообразия могут быть соединены цепочкой проективных подпространств растущей размерности. Этот результат близок по духу классическому результату А. Предонцана и включен в настоящую статью ввиду отсутствия подходящей ссылки.

В § 4 мы даем достаточное условие на целое число m , при котором данное векторное расслоение E на $\mathbb{P}^n$ является m -регулярным в смысле Мамфорда–Кастельнуово, т.е. таким, что $H^i(E(m-i)) = 0$ для $i \geq 1$. Это условие на m необходимо для получения оценки на степень многообразия прямых максимального подскока векторного расслоения на проективном пространстве, проходящих через точку, которую мы даем в § 5. Эта оценка (см. теорему 7) дается в терминах ранга расслоения, его второго класса Черна, максимального подскока и размерности проективного пространства в предположении, что первый класс Черна расслоения равен нулю.

Конструкции подпучка $\mathcal{F}_m$ расслоения E_m , где $\mathbf{E} = \varprojlim E_m$ есть самодвойственное векторное расслоение на $\mathbf{G}$, посвящен § 6. Здесь мы заменяем $G(i_m, V^{n_m})$ расслоенным пространством X_m , к слоям которого применяются предыдущие результаты о векторных расслоениях на проективных пространствах. Конструкция пучка $\mathcal{F}_m$ затем быстро приводит к противоречию с предположением о нетривиальности расслоения E_m , как было объяснено выше.

1.3. Приведем простой пример скрученного инд-грассманиана, для которого наша теорема дает нетривиальное утверждение. В этом примере скрученный инд-грассманиан возникает естественным образом как однородное пространство локально линейной инд-группы. Различные дальнейшие примеры скрученных инд-грассманианов можно найти в работах [5] и [7].

Интересной инд-группой является инд-группа $\mathbf{SL}(n, \text{Adj})$. Зафиксируем n и рассмотрим вложение

$$\text{SL}(n) \rightarrow \text{SL}(n^2 - 1),$$

определяемое условием, чтобы естественное представление группы $\text{SL}(n^2 - 1)$ ограничивалось до представления, изоморфного присоединенному представлению подгруппы $\text{SL}(n)$. Полагая $\mathcal{G}_1 := \text{SL}(n)$, $\mathcal{G}_2 := \text{SL}(n^2 - 1)$ и итерируя эту конструкцию, получаем инд-группу $\mathbf{SL}(n, \text{Adj})$ как прямой предел $\varinjlim \mathcal{G}_m$. Зафиксируем подпространство $V_1 \subset \mathbb{C}^n$. Тогда $V_2 := V_1 \otimes (\mathbb{C}^n/V_1)^\vee$ (где $^\vee$ обозначает двойственное пространство) является корректно определенным подпространством присоединенного представления группы $\mathcal{G}_2$. Итерирование этой последней конструкции дает подпространство V_m естественного представления группы $\mathcal{G}_m$ для каждого m . Стабилизаторы $\mathcal{P}_m \subset \mathcal{G}_m$ пространств V_m образуют прямую систему параболических подгрупп $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \dots$ со свойством $\mathcal{P}_m \cap \mathcal{G}_{m-1} = \mathcal{P}_{m-1}$. Это определяет замкнутые вложения

$$\zeta_{m-1}: \mathcal{G}_{m-1}/\mathcal{P}_{m-1} \hookrightarrow \mathcal{G}_m/\mathcal{P}_m$$

и, следовательно, инд-многообразие $\varinjlim \mathcal{G}_m/\mathcal{P}_m$. Поскольку каждое многообразие $\mathcal{G}_m/\mathcal{P}_m$ есть грассманиан, $\varinjlim \mathcal{G}_m/\mathcal{P}_m$ является инд-грассманианом. Более того, ограничение на подмногообразии $\mathcal{G}_{m-1}/\mathcal{P}_{m-1}$ тавтологического

расслоения на грассманиане $\mathcal{G}_m/\mathcal{P}_m$ изоморфно кокасательному расслоению грассманиана $\mathcal{G}_{m-1}/\mathcal{P}_{m-1}$. Это показывает, что степень вложения ζ_m равна размерности естественного представления группы $\mathcal{G}_m$. Тем самым, $\varinjlim \mathcal{G}_m/\mathcal{P}_m$ есть скрученный инд-грассманиан. Простое упражнение показывает, что инд-группа $\varinjlim \mathcal{P}_m$ не имеет нетривиальных конечномерных представлений. Поэтому $\varinjlim \mathcal{G}_m/\mathcal{P}_m = \mathbf{SL}(n, \text{Adj})/\varinjlim \mathcal{P}_m$ не допускает нетривиальных $\mathbf{SL}(n, \text{Adj})$ -эквивариантных векторных расслоений конечного ранга. Теорема 1, однако, дает намного более сильный результат о том, что всякое векторное расслоение конечного ранга на $\varinjlim \mathcal{G}_m/\mathcal{P}_m$ тривиально.

Мы благодарим Ф. Л. Зака за то, что он обратил наше внимание на работу Р. Брауна и С. Мюллера-Штахта. Мы признательны за поддержку и гостеприимство Математическому институту им. Макса Планка в Бонне, где была задумана настоящая статья. Второй автор также выражает благодарность за поддержку центру ICTS в Университете Якобса в Бремене.

§ 2. Обозначения и соглашения

2.1. Наши обозначения в основном стандартны. Основным полем является поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Предполагается, что все рассматриваемые векторные расслоения имеют конечный ранг. Мы отождествляем локально свободные пучки с векторными расслоениями конечного ранга и пользуемся термином “алгебраическое многообразие” или просто “многообразие” для обозначения приведенной нётеровой схемы. Если $\mathcal{F}$ – пучок $\mathcal{O}_X$ -модулей на алгебраическом многообразии или схеме X , то $\mathcal{F}^j$ обозначает прямую сумму j копий пучка $\mathcal{F}$, $H^j(\mathcal{F})$ обозначает j -ю группу когомологий пучка $\mathcal{F}$, $h^j(\mathcal{F}) := \dim H^j(\mathcal{F})$ и через $\mathcal{F}^\vee$ обозначается двойственный пучок, т.е. пучок $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$. Соответственно, Sym^j и $\wedge^j$ обозначают j -ю симметрическую и внешнюю степени. Если $Z \subset X$ – подмногообразие или подсхема, то через $\mathcal{I}_{Z,X}$ обозначается пучок идеалов, соответствующий Z . Через $\mathbb{P}(E)$ мы обозначаем проективизацию векторного расслоения E (в частности, векторного пространства).

2.2. Под *проективным подпространством* $\mathbb{P}^k$ в $G(i, V)$ понимается линейно вложенное проективное подпространство, т.е. подмножество i -мерных подпространств W в V с $V_0 \subset W \subset V_1$, где $V_0 \subset V_1$ есть фиксированный флаг подпространств в V размерностей $i-1$ и $i+k$ либо $i-k$ и $i+1$ соответственно. В частности, *прямая* в $G(i, V)$ определяется флагом $V_1 \subset V_2$ подпространств в V , где $\dim V_1 = i-1$, $\dim V_2 = i+1$.

Если $C \subset X$ – гладкая неприводимая рациональная кривая на алгебраическом многообразии X и E – векторное расслоение на X , то согласно классической теореме Гротендика $E|_C$ изоморфно $\bigoplus_i \mathcal{O}_C(\delta_i)$ для некоторых $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_{\text{rk } E}$. Мы называем упорядоченный набор $(\delta_1, \dots, \delta_{\text{rk } E})$ длины $\text{rk } E$ *типом расщепления* расслоения $E|_C$.

Пусть E – векторное расслоение на $G(i, V)$. Для произвольной рациональной кривой C на $G(i, V)$ рассмотрим тип расщепления $(\delta_1, \dots, \delta_{\text{rk } E})$ расслоения $E|_C$ и положим

$$\begin{aligned} \delta_A(E|_C) &:= \delta_1, & \delta_B(E|_C) &:= \delta_{\text{rk } E}, & \delta(E|_C) &:= \delta_A(E|_C) - \delta_B(E|_C), \\ \kappa_A(E|_C) &:= \max\{k \mid 1 \leq k \leq \text{rk } E, \delta_k = \delta_A(E|_C)\}. \end{aligned}$$

Далее, положим

$$\delta_A(E) := \max_l \delta_A(E|_l), \quad \delta_B(E) := \min_l \delta_B(E|_l),$$

где l пробегает все прямые на $G(i, V)$,

$$\delta(E) := \delta_A(E) - \delta_B(E),$$

$$\kappa_A(E) := \max\{\kappa_A(E|_l) \mid l - \text{прямая в } G(i, V) \text{ такая, что } \delta_A(E|_l) = \delta_A(E)\}.$$

Важно отметить, что $\delta_A(E|_C)$ и $\kappa_A(E|_C)$ являются полунепрерывными функциями от C , где C принадлежит любому плоскому семейству рациональных кривых в $G(i, V)$ (см. [8; ч. III, теорема 12.8]).

2.3. Нам потребуется также одно обозначение, касающееся многочленов. Для произвольного ненулевого многочлена

$$f(y_1, \dots, y_q) = \sum \frac{a_{i_1 \dots i_q}}{b_{i_1 \dots i_q}} y_1^{i_1} \dots y_q^{i_q} \in \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_q]$$

с взаимно простыми коэффициентами $a_{i_1 \dots i_q} \in \mathbb{Z}$ и $b_{i_1 \dots i_q} \in \mathbb{Z}$ для всех $i_1, \dots, i_q$ через

$$f(y_1, \dots, y_q)^+ \in \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_q]$$

будем обозначать многочлен $\sum a_{i_1 \dots i_q}^2 y_1^{2i_1} \dots y_q^{2i_q}$. Отметим, что

$$-f(y_1, \dots, y_q)^+ \leq f(y_1, \dots, y_q) \leq f(y_1, \dots, y_q)^+$$

для всех $y_1, \dots, y_q \in \mathbb{Z}$.

§ 3. Проективные подпространства в многообразиях ограниченной коразмерности и степени

3.1. В этом параграфе мы доказываем, что любые две точки на многообразии ограниченной коразмерности и степени в проективном пространстве растущей размерности могут быть соединены цепочкой проективных подпространств растущей размерности, лежащих на этом многообразии. По существу это глава из теории схем Фано в духе Альтмана и Клеймана (см. [9]), и наш результат близок также к теореме Предонцана (1948 г.), современное изложение которой можно найти в [10]. Всюду в этом параграфе $d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ постоянно, а $n \in \mathbb{Z}_{\geq 6}$ является переменным. Число $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ также является переменным и удовлетворяет неравенству

$$n \geq d \binom{k+d}{d} + k; \tag{3.1}$$

например, можно положить $k = k(n) := \lceil \sqrt[n+1]{n/d} \rceil$.

3.2. Проективные подпространства на гиперповерхности ограниченной степени и растущей размерности. Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$, где V – векторное пространство размерности $n+1$. Пусть

$$\mathbb{P}^s := |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|, \quad s = \binom{n+d}{d} - 1,$$

– полный линейный ряд гиперповерхностей данной степени d в $\mathbb{P}^n$. Рассмотрим естественную диаграмму

$$G(k+1, V) \xleftarrow{\tilde{p}} \Gamma \xrightarrow{\tilde{q}} \mathbb{P}^s, \quad (3.2)$$

где $\Gamma = \{(\mathbb{P}^k, H) \in G(k+1, V) \times \mathbb{P}^s \mid \mathbb{P}^k \subset H\}$ и где $G(k+1, V)$ интерпретируется как грассманиан k -мерных проективных подпространств в $\mathbb{P}^n$. Для каждой пары $(\mathbb{P}^k, H) \in \Gamma$ выберем однородные координаты $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ в $\mathbb{P}^n$ такие, что $\mathbb{P}^k = \{x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$. Пусть $H = \{f(x_0, \dots, x_n) = 0\}$, $f \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, и

$$\Phi_i(x_0, x_1, \dots, x_k) := \frac{\partial f}{\partial x_{k+i}}(x_0, x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0), \quad 1 \leq i \leq n-k.$$

Предположим, что гиперповерхность H неособа. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{n-k} \{\Phi_i(x_0, x_1, \dots, x_k) = 0\} = \emptyset,$$

и мы имеем точную последовательность нормальных расслоений на $\mathbb{P}^k$

$$0 \rightarrow N_{\mathbb{P}^k/H} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)^{n-k} \xrightarrow{\varepsilon_k} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(d) \rightarrow 0, \quad \varepsilon_k : (L_1, \dots, L_{n-k}) \mapsto \sum_{i=1}^{n-k} L_i \Phi_i. \quad (3.3)$$

Предположим, что H является общей в том смысле, что

$$\text{Span}(\Phi_1, \dots, \Phi_{n-k}) = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(d-1)). \quad (3.4)$$

Тогда точная последовательность, полученная из (3.3) подкруткой на $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(-1)$, индуцирует сюръективный гомоморфизм $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}^{n-k}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(d-1))$, и легко видеть, что после обратной подкрутки на $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)$ мы получаем сюръективный гомоморфизм $h^0(\varepsilon_k) : H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)^{n-k}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(d))$. Поэтому

$$h^0(N_{\mathbb{P}^k/H}) = (k+1)(n-k) - \binom{k+d}{d} > 0, \quad h^1(N_{\mathbb{P}^k/H}) = h^1(N_{\mathbb{P}^k/H}(-1)) = 0 \quad (3.5)$$

(неравенство следует из (3.1)).

Заметим, что $\tilde{p} : \Gamma \rightarrow G(k+1, V)$ является проективным расслоением со слоем $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{I}_{\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n}(d)))$, а значит, Γ гладко и неприводимо. Поэтому

$$\begin{aligned} \dim \tilde{q}^{-1}(H) &\geq \dim \Gamma - s = \dim G(k+1, V) + \dim \mathbb{P}(H^0(\mathcal{I}_{\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n}(d))) - s \\ &= (k+1)(n-k) + \left(s - \binom{k+d}{d}\right) - s = (k+1)(n-k) - \binom{k+d}{d}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.5) по теории деформаций получаем, что

$$B_H := \tilde{p}(\tilde{q}^{-1}(H))$$

имеет размерность

$$\dim B_H = h^0(N_{\mathbb{P}^k/H}) = (k+1)(n-k) - \binom{k+d}{d} \quad (3.6)$$

и является гладким в точке $\mathbb{P}^k$ для общей гладкой гиперповерхности $H \in \mathbb{P}^s$. Более того, проективный морфизм $\tilde{q}$ доминантен. Поскольку образ проективного морфизма замкнут (см. [8; ч. II, § 4, теорема 4.9]), это влечет сюръективность морфизма $\tilde{q}$.

ЛЕММА 1. *Для гладкой общей (в смысле (3.4)) гиперповерхности $H \in \mathbb{P}^s$ B_H есть гладкое неприводимое многообразие размерности $(k+1)(n-k) - \binom{k+d}{d}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гладкость B_H следует из того факта, что B_H есть общий слой сюръективного морфизма $\tilde{q}: \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^s$ гладких многообразий (см. [8; ч. III, § 10, следствие 10.7]).

Пусть S_{k+1} есть тавтологическое расслоение ранга $k+1$ на $G(k+1, V)$. Согласно [9; теорема 1.3] B_H есть схема нулей регулярного сечения $\sigma \in H^0(T^\vee)$, где $T := \text{Sym}^d S_{k+1}$. Более того, имеем стандартную резольвенту Кошуля пучка $\mathcal{O}_{B_H}$

$$0 \rightarrow \wedge^{\text{rk } T} T \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^2 T \rightarrow T \xrightarrow{\sigma^\vee} \mathcal{O}_{G(k+1, V)} \rightarrow \mathcal{O}_{B_H} \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

Мы покажем, что

$$H^0(T) = H^j(\wedge^j T) = 0, \quad 1 \leq j \leq \text{rk } T. \quad (3.8)$$

Для этого рассмотрим диаграмму инцидентности

$$G(i+1, V) \xleftarrow{p_i} \text{Fl}(i, i+1, V) \xrightarrow{q_i} G(i, V), \quad 1 \leq i \leq k. \quad (3.9)$$

На $\text{Fl}(i, i+1, V)$ имеется точная последовательность векторных расслоений

$$0 \rightarrow q_i^* S_i \xrightarrow{\theta_i} p_i^* S_{i+1} \rightarrow q_i^* \mathcal{O}_{G(i, V)}(1) \otimes p_i^* \mathcal{O}_{G(i+1, V)}(-1) \rightarrow 0, \quad (3.10)$$

где S_i есть тавтологическое расслоение ранга i на $G(i, V)$. Ограничивая (3.10) на слой $\mathbb{P}_y^{n-i} := q_i^{-1}(y)$ для $y \in G(i, V)$, получаем точную тройку

$$0 \rightarrow q_i^* S_i|_{\mathbb{P}_y^{n-i}} \xrightarrow{\theta_i|_{\mathbb{P}_y^{n-i}}} p_i^* S_{i+1}|_{\mathbb{P}_y^{n-i}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_y^{n-i}}(-1) \rightarrow 0, \quad q_i^* S_i|_{\mathbb{P}_y^{n-i}} \simeq (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_y^{n-i}})^i.$$

Переходя к симметрическим степеням и полагая $s_i := \binom{d+i}{d-1}$, $t_i := \binom{d+i-1}{d}$, имеем

$$0 \rightarrow q_i^* \text{Sym}^d S_i|_{\mathbb{P}_y^{n-i}} \rightarrow p_i^* \text{Sym}^d S_{i+1}|_{\mathbb{P}_y^{n-i}} \rightarrow \bigoplus_{p=1}^{s_i} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_y^{n-i}}(a_p) \rightarrow 0, \quad (3.11)$$

$$-d \leq a_p \leq -1, \quad 1 \leq p \leq s_i,$$

$$q_i^* \text{Sym}^d S_i|_{\mathbb{P}_y^{n-i}} \simeq (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_y^{n-i}})^{t_i}. \quad (3.12)$$

Рассмотрим точные тройки

$$0 \rightarrow q_i^* \wedge^j (\mathrm{Sym}^d S_i) \xrightarrow{\Theta_{ij}} p_i^* \wedge^j (\mathrm{Sym}^d S_{i+1}) \rightarrow \Lambda_{ij} \rightarrow 0, \quad (3.13)$$

$$\Lambda_{ij} := \mathrm{coker} \Theta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq \mathrm{rk} T,$$

где Θ_{ij} суть мономорфизмы, индуцируемые морфизмами θ_i в (3.10). После ограничения на $\mathbb{P}_y^{n-i}$, используя (3.11) и (3.12), получаем

$$\Lambda_{ij}|_{\mathbb{P}_y^{n-i}} \simeq \bigoplus_{q=1}^{u_{ij}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_y^{n-i}}(b_q), \quad -jd \leq b_q \leq -1, \quad 1 \leq q \leq u_{ij}, \quad (3.14)$$

где $u_{ij} := \binom{s_i+t_i}{j} - \binom{t_i}{j}$. Ключевое наблюдение состоит в том, что из (3.1) и (3.14) вытекают равенства

$$H^a(\Lambda_{ij}|_{\mathbb{P}_y^{n-i}}) = 0, \quad a \geq 0, \quad 1 \leq j \leq \mathrm{rk} T, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Отсюда следует, что спектральная последовательность Лере

$$E_2^{aa'} = H^a(R^{a'} q_{i*} \Lambda_{ij}) \implies H^a(\Lambda_{ij})$$

вырождается и потому влечет равенства

$$H^a(\Lambda_{ij}) = 0, \quad a \geq 0, \quad 1 \leq j \leq \mathrm{rk} T, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (3.15)$$

Поскольку (как хорошо известно)

$$\begin{aligned} H^a(\wedge^j (\mathrm{Sym}^d S_i)) &= H^a(q_i^* \wedge^j (\mathrm{Sym}^d S_i)), \\ H^a(\wedge^j (\mathrm{Sym}^d S_{i+1})) &= H^a(p_i^* \wedge^j (\mathrm{Sym}^d S_{i+1})), \\ a &\geq 0, \end{aligned}$$

из (3.15) и (3.13) выводим равенства

$$H^a(\wedge^j (\mathrm{Sym}^d S_{i+1})) = H^a(\wedge^j (\mathrm{Sym}^d S_i)), \quad 1 \leq i \leq k. \quad (3.16)$$

Более того, полагая $j_i := \mathrm{rk} \mathrm{Sym}^d S_i$, получаем

$$\wedge^{j_i} (\mathrm{Sym}^d S_i) \simeq \mathcal{O}_{G(i,V)} \left(- \binom{d+i-1}{i} \right),$$

так что по аналогии с (3.15)

$$H^a(\wedge^{j_i} (\mathrm{Sym}^d S_i)) = 0, \quad a \geq 0, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Эти равенства вместе с (3.16) дают (3.8).

Равенства (3.7) и (3.8) показывают, что $h^0(\mathcal{O}_{B_H}) = h^0(\mathcal{O}_{G(k+1,V)}) = 1$. Следовательно, B_H связно. Это вместе с гладкостью B_H влечет его неприводимость.

Рассмотрим график инцидентности $\Sigma_H = \{(x, \mathbb{P}^k) \in H \times B_H \mid x \in \mathbb{P}^k\}$ с проекциями

$$H \xleftarrow{\pi_1} \Sigma_H \xrightarrow{\pi_2} B_H. \quad (3.17)$$

Поскольку слои проекции π_2 изоморфны $\mathbb{P}^k$, неприводимость B_H влечет неприводимость Σ_H .

ЛЕММА 2. Пусть $H \subset \mathbb{P}^n$ – гладкая гиперповерхность, общая в смысле (3.4). Тогда:

(i) H замещается подпространствами $\mathbb{P}^k$ семейства B_H , и для произвольного $x \in H$ множество $B_H(x) := \pi_2(\pi_1^{-1}(x))$ равноразмерно размерности

$$\dim B_H(x) = k(n - k) - \binom{k + d}{d} + 1; \quad (3.18)$$

более того, для общего $x \in H$ $B_H(x)$ является неприводимым подмногообразием в B_H ;

(ii) подмножество $K_{H,k}(x) := \pi_1(\pi_2^{-1}(B_H(x))) = \bigcup_{\mathbb{P}^k \in B_H(x)} \mathbb{P}^k$ в H имеет размерность

$$\dim K_{H,k}(x) \geq n - d; \quad (3.19)$$

более того, для общего $x \in H$ $K_{H,k}(x)$ есть неприводимое подмногообразие в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $(x, \mathbb{P}^k) \in \Sigma_H$. Рассмотрим стандартную резольвенту Кошуля пучка идеалов $\mathcal{I}_{x, \mathbb{P}^k}$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(-k) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(-i) \binom{k}{i} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(-1)^k \rightarrow \mathcal{I}_{x, \mathbb{P}^k} \rightarrow 0. \quad (3.20)$$

Подкручивая (3.20) на $N_{\mathbb{P}^k/H}$, получим точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow N_{\mathbb{P}^k/H}(-k) \rightarrow \cdots \rightarrow N_{\mathbb{P}^k/H}(-i) \binom{k}{i} \rightarrow \cdots \rightarrow N_{\mathbb{P}^k/H}(-1)^k \\ \rightarrow \mathcal{I}_{x, \mathbb{P}^k} \otimes N_{\mathbb{P}^k/H} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Поскольку $h^i(N_{\mathbb{P}^k/H}(-i)) = 0$, $1 \leq i \leq k$ (для $i > 1$ эти равенства немедленно следуют из (3.3); для $i = 1$ см. (3.5)), то (3.21) дает

$$h^1(\mathcal{I}_{x, \mathbb{P}^k} \otimes N_{\mathbb{P}^k/H}) = 0. \quad (3.22)$$

Далее, рассмотрим точную тройку

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{x, \mathbb{P}^k} \otimes N_{\mathbb{P}^k/H} \rightarrow N_{\mathbb{P}^k/H} \rightarrow \mathbb{C}_x \otimes N_{\mathbb{P}^k/H} \rightarrow 0. \quad (3.23)$$

Так как $\mathbb{C}_x \otimes N_{\mathbb{P}^k/H} \simeq \mathbb{C}^{n-1-k}$, из (3.5), (3.23) и (3.22) следует, что

$$h^0(\mathcal{I}_{x, \mathbb{P}^k} \otimes N_{\mathbb{P}^k/H}) = k(n - k) - \binom{k + d}{d} + 1. \quad (3.24)$$

Заметим, что $H^0(\mathcal{I}_{x, \mathbb{P}^k} \otimes N_{\mathbb{P}^k/H})$ есть касательное пространство по Зарискому к $B_H(x)$ в точке $\mathbb{P}^k$. Более того, из (3.22) и (3.24) по теории деформации вытекает гладкость $B_H(x)$ в точке $\mathbb{P}^k$ и равноразмерность $B_H(x)$ вместе с равенством (3.18). Это последнее равенство показывает, что $\dim \pi_1(\Sigma_H) = \dim H$. Поскольку H неприводимо, морфизм $\pi_1: \Sigma_H \rightarrow H$ является сюръективным, будучи проективным морфизмом проективных многообразий. Это означает, что H замещается пространствами $\mathbb{P}^k \in B_H$.

(ii) Пусть теперь y – произвольная точка в $\mathbb{P}^k$, отличная от x , и пусть $\mathbb{P}^1$ – проективная прямая в $\mathbb{P}^k$, соединяющая точки x и y . Подкручивая (3.3) на пучки $\mathcal{I}_{\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^k}$ и $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$, получаем точные тройки

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^k} \otimes N_{\mathbb{P}^k/H} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)^{n-k} \xrightarrow{\varepsilon_k} \mathcal{I}_{\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(d) \rightarrow 0, \quad (3.25)$$

$$0 \rightarrow N_{\mathbb{P}^k/H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{n-k} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-2) \rightarrow 0. \quad (3.26)$$

Рассмотрим морфизм ε_k в (3.25). Переходя к сечениям, получаем гомоморфизм

$$H^0(\varepsilon_k): H^0(\mathcal{I}_{\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)^{n-k}) \rightarrow H^0(\mathcal{I}_{\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(d)).$$

Чтобы показать, что $H^0(\varepsilon_k)$ является эпиморфизмом, рассмотрим стандартную резольвенту Кошуля пучка $\mathcal{I}_{\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(2-k) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(-1)^{\binom{k-1}{2}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}^{-1} \xrightarrow{e_1} \mathcal{I}_{\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1) \rightarrow 0.$$

Переходя к когомологиям, получаем эпиморфизм в сечениях

$$H^0(e_1): H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}^{k-1}) \rightarrow H^0(\mathcal{I}_{\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)).$$

Подкручивая предыдущую резольвенту на $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(d-1)$ и снова переходя к когомологиям, получаем эпиморфизм

$$H^0(e_d): H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(d-1)^{k-1}) \rightarrow H^0(\mathcal{I}_{\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(d)).$$

Гомоморфизмы $H^0(\varepsilon_k)$, $H^0(e_1)$ и $H^0(e_d)$ образуют коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{I}_{\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)^{n-k}) & \xrightarrow{H^0(\varepsilon_k)} & H^0(\mathcal{I}_{\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(d)) \\ \uparrow H^0(e_1)^{n-k} & & \uparrow H^0(e_d) \\ H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}^{(k-1)(n-k)}) & \xrightarrow{H^0(\varepsilon_k)^{k-1}} & H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(d-1)^{k-1}) \end{array}$$

в которой сюръективность нижнего горизонтального отображения $H^0(\varepsilon_k)^{k-1}$ следует из (3.4). Следовательно, $H^0(\varepsilon_k)$ – эпиморфизм. Поэтому когомологическая последовательность тройки (3.25) дает

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{I}_{\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^k} \otimes N_{\mathbb{P}^k/H}) &= (k-1)(n-k) - \binom{k+d}{d} + d + 1, \\ h^1(\mathcal{I}_{\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^k} \otimes N_{\mathbb{P}^k/H}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Далее, (3.26) влечет $h^0(N_{\mathbb{P}^k/H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = 0$, $h^1(N_{\mathbb{P}^k/H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = d-1$. Отсюда и из (3.27) и точной тройки

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^k} \otimes N_{\mathbb{P}^k/H} \rightarrow \mathcal{I}_{x \cup y, \mathbb{P}^k} \otimes N_{\mathbb{P}^k/H} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \otimes N_{\mathbb{P}^k/H} \rightarrow 0 \quad (3.28)$$

находим

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{I}_{x \cup y, \mathbb{P}^k} \otimes N_{\mathbb{P}^k/H}) &= (k-1)(n-k) - \binom{k+d}{d} + d + 1, \\ h^1(\mathcal{I}_{x \cup y, \mathbb{P}^k} \otimes N_{\mathbb{P}^k/H}) &= d-1. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Положим $\Sigma_H(x) := \pi_2^{-1}(B_H(x))$, $\pi_1(x) := \pi_1|_{\Sigma_H(x)}$, и пусть

$$K_{H,k}(x) \xleftarrow{\pi_1(x)} \Sigma_H(x) \xrightarrow{\pi_2(x)} B_H(x)$$

– диаграмма проекций. Для любой точки $y \in K_{H,k}(x)$, $y \neq x$, рассмотрим слой $B_{H,x}(y) := \pi_1(x)^{-1}(y)$ как подмногообразие в $B_H(x)$. Касательное пространство по Зарискому к $B_{H,x}(y)$ в точке в $\mathbb{P}^k$ совпадает с $H^0(\mathcal{I}_{x \cup y, \mathbb{P}^k} \otimes N_{\mathbb{P}^k/H})$, поэтому в силу (3.29) и теории деформаций имеем

$$(k-1)(n-k) - \binom{k+d}{d} + d + 1 \geq \dim B_{H,x}(y) \geq (k-1)(n-k) - \binom{k+d}{d} + 2. \quad (3.30)$$

Ясно, что $\dim B_{H,x}(y) > 0$, а значит, $\pi_1(x)$ сюръективно. Поскольку слой проекции $\pi_2(x)$ есть $\mathbb{P}^k$, это в совокупности с (3.18), (3.30) и неприводимостью $B_H(x)$ влечет неравенство (3.19) и неприводимость $K_{H,k}(x)$.

Как следствие этой леммы мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Всякая гиперповерхность H степени d в $\mathbb{P}^n$ замещается подпространствами $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим графики инцидентности $\Pi := \{(\mathbb{P}^k, x) \in G(k+1, V) \times \mathbb{P}^n \mid x \in \mathbb{P}^k\}$ и $\tilde{H} := \{(H, x) \in \mathbb{P}^s \times \mathbb{P}^n \mid x \in H\}$, входящие в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \Pi & \xleftarrow{\text{pr}_1} & \Pi_\Gamma & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \tilde{H} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G(k+1, V) \times \mathbb{P}^n & \xleftarrow{\tilde{p} \times \text{id}} & \Gamma \times \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\tilde{q} \times \text{id}} & \mathbb{P}^s \times \mathbb{P}^n \end{array} \quad (3.31)$$

где Γ , $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ были определены в (3.2), $\Pi_\Gamma = (\tilde{p} \times \text{id})^{-1}(\Pi)$, а pr_1 и pr_2 – индуцированные проекции. Поскольку общая гладкая гиперповерхность $H \in \mathbb{P}^s$ замещается проективными подпространствами $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$ (лемма 2, (i)), проекция pr_2 доминантна. Следовательно, pr_2 сюръективна, поскольку все многообразия и морфизмы в (3.31) проективны. Отсюда следует утверждение теоремы.

3.3. Проективные подпространства в многообразиях ограниченной коразмерности и степени и растущей размерности. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ есть неприводимое проективное многообразие, удовлетворяющее условиям

$$1 \leq c := \text{codim}_{\mathbb{P}^n} X, \quad \deg X \leq d, \quad (3.32)$$

где c – константа. Предположим, что $\mathbb{P}^n = \text{Span } X$. Хорошо известно, что $\deg X \geq c + 1$. Если $c \geq 2$, то, начиная с $X_0 := X$, можно построить индуктивно последовательность проективных многообразий $X_i \subset \mathbb{P}^{n-i}$, $0 \leq i \leq c-1$, соответствующих коразмерностей $c-i$ вместе с линейными проекциями

$$p_{x_i}: \mathbb{P}^{n-i} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-i-1}, \quad 0 \leq i \leq c-2,$$

с центрами в точках $x_i \in X_i \setminus \text{Sing } X_i$ таких, что каждое ограничение

$$p_i := p_{x_i}|_{X_i}: X_i \dashrightarrow X_{i+1}, \quad 0 \leq i \leq c-2, \quad (3.33)$$

является бирациональным изоморфизмом. Для этого достаточно зафиксировать точку $x_i \in X_i \setminus \text{Sing } X_i$ и взять в качестве X_{i+1} замыкание многообразия $p_{x_i}(X_i)$ в $\mathbb{P}^{n-i}$. Тогда $\deg X_{i+1} = \deg X_i - 1$. Утверждение о том, что p_i бирационально, является стандартным.

Далее, используя обозначение (3.1), положим

$$k_{c-1}(n) := k(n - c + 1), \quad k_{c-1-i}(n) := \underbrace{\left[\frac{1}{2} \cdots \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} k_{c-1}(n) \right] \right] \cdots \right]}_i, \\ 1 \leq i \leq c - 1.$$

Теперь обратной индукцией покажем, что $X = X_0$ замечается проективными подпространствами размерности $k_0(n)$. По определению X_{c-1} есть гиперповерхность в $\mathbb{P}^{n-(c-1)}$ степени

$$\deg X_{c-1} = \deg X - (c - 1) \leq d. \quad (3.34)$$

Следовательно, по теореме 2 X_{c-1} замечается подпространствами $\mathbb{P}^{k_{c-1}(n)}$ в $\mathbb{P}^{n-(c-1)}$. Это дает начало индукции.

Переходя к шагу индукции, рассмотрим бирациональное отображение (3.33). Предположим, что X_{i+1} замечается подпространствами $\mathbb{P}^{k_{i+1}(n)} \subset \mathbb{P}^{n-i-1}$. Пусть B – неприводимая компонента базы семейства всех таких подпространств, удовлетворяющая условию, что подпространства из B замечают X_{i+1} . Возьмем общее пространство $\mathbb{P}^{k_{i+1}(n)} \in B$ и рассмотрим замыкание $Y_{i+1} := \overline{p_i^{-1}(\mathbb{P}^{k_{i+1}(n)})}$. Так как $\mathbb{P}^{k_{i+1}(n)}$ – общая точка из B , то рациональное отображение

$$\tilde{p} := p_i|_{Y_{i+1}} : Y_{i+1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{k_{i+1}(n)}$$

есть линейная проекция из точки $x_i \in Y_{i+1}$, и имеет место один из следующих случаев:

(i) Y_{i+1} – неприводимая квадратика и

$$\tilde{p}: Y_{i+1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{k_{i+1}(n)}$$

есть бирациональная (стереографическая) проекция из точки $x_i \in Y_{i+1}$;

(ii) Y_{i+1} – приводимая квадратика, содержащая в качестве компоненты некоторое $k_{i+1}(n)$ -мерное пространство $\tilde{\mathbb{P}}^{k_{i+1}(n)}$, отображаемое изоморфно на $\mathbb{P}^{k_{i+1}(n)}$,

$$\tilde{p}: \tilde{\mathbb{P}}^{k_{i+1}(n)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^{k_{i+1}(n)}.$$

Рассмотрим оба эти случая.

В случае (i) Y_{i+1} есть неприводимая квадратика размерности $k_{i+1}(n)$, заполняемая проективными подпространствами размерности $[\frac{1}{2}k_{i+1}(n)] = k_i(n)$. Поскольку $\mathbb{P}^{k_{i+1}(n)}$ есть общая точка в B , квадратика $Y_{i+1}(\mathbb{P}^{k_{i+1}(n)})$, $\mathbb{P}^{k_{i+1}(n)} \in B$, замечают многообразие X_i . Следовательно, подпространства $\mathbb{P}^{k_i(n)}$ замечают X_i .

В случае (ii) из неприводимости X_i и бирациональности p_i следует, что подпространства $\tilde{\mathbb{P}}^{k_{i+1}(n)}$ замечают X_i . Более того, каждое $\tilde{\mathbb{P}}^{k_{i+1}(n)}$ замечается подпространствами $\mathbb{P}^{k_i(n)}$. Следовательно, X_i также замечается этими подпространствами $\mathbb{P}^{k_i(n)}$.

Наконец, заметим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} k_0(n) = \infty$. Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ – неприводимое проективное многообразие, удовлетворяющее условиям (3.32), и $\text{Span } X = \mathbb{P}^n$. Тогда X замещается проективными подпространствами $\mathbb{P}^{k_0(n)} \subset \mathbb{P}^n$ с $\lim_{n \rightarrow \infty} k_0(n) = \infty$.

3.4. Цепочки проективных подпространств, соединяющих точки многообразий ограниченной коразмерности и степени. Пусть снова H – гладкая гиперповерхность степени $d \geq 2$ в $\mathbb{P}^n$ и $x \in H$. Обозначим через $\mathbb{P}^{n-1}(x)$ гиперплоскость в $\mathbb{P}^n$, касательную к H в точке x . Возьмем аффинное подпространство $\mathbb{A}^{n-1}(x)$ в $\mathbb{P}^{n-1}(x)$, содержащее точку x , с аффинными координатами $(y_1, \dots, y_{n-1})$ в окрестности x . Пересечение $Y_H(x) := H \cap \mathbb{A}^{n-1}(x)$ есть гиперповерхность в $\mathbb{A}^{n-1}(x)$, задаваемая уравнением $\Psi_x = 0$ для некоторого многочлена $\Psi_x = \Psi_x(y_1, \dots, y_{n-1})$ степени d . Разложим Ψ_x в сумму его однородных компонент:

$$\Psi_x = \sum_{p=2}^d \Psi_p(y_1, \dots, y_{n-1}), \quad \deg \Psi_p = p. \quad (3.35)$$

Рассмотрим $(y_1 : y_2 : \dots : y_{n-1})$ как однородные координаты в $\mathbb{P}^{n-2}$; соответственно, рассмотрим Ψ_p как формы $\Psi_p \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(p))$. Имеем замкнутое подмножество

$$X_x = \bigcap_{p=2}^d \{ \Psi_p(y_1, \dots, y_{n-1}) = 0 \}, \quad \deg \Psi_p = p,$$

в $\mathbb{P}^{n-2}$. Теорема Безу дает

$$\text{codim}_{\mathbb{P}^{n-2}} X \leq d - 1, \quad \deg X \leq d! \quad (3.36)$$

для любой неприводимой компоненты X в X_x . Поэтому $n - 2 \geq \dim \text{Span } X \geq n - d - 1$. В частности, коразмерность и степень X ограничены не зависящими от n константами, так что теорема 3 применима к X . Это доказывает следующую лемму.

ЛЕММА 3. Существует число $n(d) \in \mathbb{Z}_{>0}$ такое, что при $n \geq n(d)$ многообразие X_x связно, и любая неприводимая компонента X многообразия X_x замещается подпространствами $\mathbb{P}^{\tilde{k}(n)} \subset \mathbb{P}^{n-2}$ с $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{k}(n) = \infty$.

Пусть $K_H(x)$ – конус в $\mathbb{A}^{n-1}(x)$ с базой X_x . По лемме 3 замыкание $\overline{K_H(x)}$ многообразия $K_H(x)$ в $\mathbb{P}^{n-1}(x)$ замещается подпространствами $\mathbb{P}^{\tilde{k}(n)}$. Рассмотрим подмногообразие $K_{H,k}(x)$ в H , определенное в лемме 2, (ii). По определению $K_{H,k}(x)$ замещается подпространствами $\mathbb{P}^k$ на H , проходящими через точку x . Ясно, что

$$K_H(x) \supset K_{H,k}(x), \quad k = \tilde{k}(n). \quad (3.37)$$

Предположим, что $H \subset \mathbb{P}^n$ – общая гладкая гиперповерхность степени d и x – общая точка в H . В частности, формы Ψ_p являются общими точками пространств $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(p))$. Следовательно, в этом случае $X = X_x$ есть гладкое неприводимое полное пересечение $d - 1$ гиперповерхностей $\{\Psi_p = 0\}$, $p = 2, \dots, d$, в $\mathbb{P}^{n-2}$, и неравенства (3.36) становятся равенствами. Это вместе

с (3.37), (3.19) влечет равенство $K_H(x) = K_{H,k}(x)$. В частности, пучок $\mathcal{O}_X$ имеет стандартную резольвенту Кошуля

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \left(2 - \frac{d(d+1)}{2} \right) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{p=2}^d \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(1-p) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(1) \xrightarrow{\text{res}} \mathcal{O}_X(1) \rightarrow 0.$$

Эта резольвента вместе с (3.1) показывает, что отображение ограничения

$$H^0(\text{res}): H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(1)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(1))$$

является изоморфизмом. Поэтому $\text{Span } X = \mathbb{P}^{n-2}$ и, следовательно,

$$\text{Span } K_{H,k}(x) = \mathbb{P}^{n-1}(x). \quad (3.38)$$

Определим теперь последовательность неприводимых подмногообразий $x \in X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_i \subset \cdots \subset H$ по индукции:

- 1) $X_1 := K_{H,k}(x)$;
- 2) $X_{i+1} := \pi_1(\pi_2^{-1}(Y_i))$ для $i \geq 1$, где Y_i есть неприводимая компонента в $\pi_2(\pi_1^{-1}(X_i))$, а проекции π_1 и π_2 введены в диаграмме (3.17).

Поскольку X неприводимо, эта последовательность стабилизируется, т.е.

$$X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_{i_0} = X_{i_0+1} \subset \cdots \subset H \quad (3.39)$$

для некоторого номера i_0 . Рассмотрим плотное открытое подмножество $U := \{x' \in H \mid K_{H,k}(x') \text{ неприводимо и } \text{Span}(K_{H,k}(x')) = \mathbb{P}^{n-1}(x')\} \subset H$. По построению $x \in U$, а следовательно, $X_{i_0} \cap U$ есть плотное открытое множество в X_{i_0} . Более того, по определению многообразия X_{i_0} мы имеем

$$K_{H,k}(x') \subset X_{i_0} \quad (3.40)$$

для $x' \in X_{i_0} \cap U$. Обозначим через $H(x')$ проективное подпространство в $\mathbb{P}^n$, касательное к X_{i_0} в точке $x' \in (X_{i_0} \setminus \text{Sing } X_{i_0}) \cap U$. Поскольку $K_{H,k}(x')$ по определению заматается проективными подпространствами на H , проходящими через точку x' , то из (3.40) вытекает, что $K_{H,k}(x') \subset H(x') \subset \mathbb{P}^{n-1}(x')$. С другой стороны, так как $x' \in U$, то, значит, $\text{Span } K_{H,k}(x) = H(x')$. Поскольку $H(x')$ есть подпространство в $\mathbb{P}^{n-1}(x')$, то в силу (3.38) имеем равенство $H(x') = \mathbb{P}^{n-1}(x')$. Следовательно, так как x' — неособая точка в X_{i_0} , получаем $\dim X_{i_0} = \dim H$, так что

$$X_{i_0} = H. \quad (3.41)$$

Это равенство и конструкция цепочки (3.39) показывают, что точку $x \in H$ можно соединить с любой точкой $x' \in H$ цепочкой подпространств $\mathbb{P}_1^k, \mathbb{P}_2^k, \dots, \mathbb{P}_{i_0}^k$. Таким образом, мы имеем

$$x \in \mathbb{P}_1^k \subset \mathbb{P}_1^k \cup \mathbb{P}_2^k \cup \cdots \cup \mathbb{P}_{i_0}^k \supset \mathbb{P}_{i_0}^k \ni x'. \quad (3.42)$$

Покажем, наконец, что (3.42) выполняется без предположения об общности H и x . Это делается по-существу так же, как и в доказательстве теоремы 2. Действительно, рассмотрим грассманиан $G := G(k+1, V)$, многообразие инцидентности

$$\text{Inc}^{i_0}(G) := \{(\mathbb{P}_1^k, \dots, \mathbb{P}_{i_0}^k) \in G^{\times i_0} \mid \mathbb{P}_1^k, \dots, \mathbb{P}_{i_0}^k \text{ есть цепочка подпространств в } \mathbb{P}^n\}$$

и графики инцидентности

$$\begin{aligned}\Pi_{i_0} &:= \{(\mathbb{P}_1^k, \dots, \mathbb{P}_{i_0}^k, x, x') \in \text{Inc}^{i_0}(G) \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \mid x \in \mathbb{P}_1^k, x' \in \mathbb{P}_{i_0}^k\}, \\ \widetilde{H} &:= \{(H, x, x') \in \mathbb{P}^s \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \mid x, x' \in H\}, \\ \Gamma_{i_0} &:= \{(\mathbb{P}_1^k, \dots, \mathbb{P}_{i_0}^k, G) \in \text{Inc}^{i_0}(G) \times \mathbb{P}^s \mid \mathbb{P}_1^k, \dots, \mathbb{P}_{i_0}^k \subset H\}\end{aligned}$$

с естественными проекциями

$$\text{Inc}^{i_0}(G) \xleftarrow{\tilde{p}_{i_0}} \Gamma_{i_0} \xrightarrow{\tilde{q}_{i_0}} \mathbb{P}^s.$$

Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}\Pi_{i_0} & \xleftarrow{\text{pr}_1} & \Pi_{\Gamma_{i_0}} & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \widetilde{H} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Inc}^{i_0}(G) \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n & \xleftarrow{\tilde{p}_{i_0} \times \text{id}} & \Gamma_{i_0} \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\tilde{q}_{i_0} \times \text{id}} & \mathbb{P}^s \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n\end{array}$$

где pr_1 и pr_2 – индуцированные проекции. Так как общая гладкая гиперповерхность $H \in \mathbb{P}^s$ замечается проективными подпространствами $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$ (лемма 2, (i)), морфизм pr_2 доминантен. Следовательно, он сюръективен, поскольку все многообразия и морфизмы в вышеприведенной диаграмме проективны. Это равносильно (3.42) для произвольной гиперповерхности $H \in \mathbb{P}^s$ и произвольных точек $x, x' \in H$.

Итак, мы доказали следующую лемму.

ЛЕММА 4. Пусть H – гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}^n$. Тогда любые две различные точки $x, x' \in H$ можно соединить цепочкой (3.42) подпространств $\mathbb{P}^k$ на H .

Наконец, лемма 4 вместе с теоремой 3 дают основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 4. В условиях теоремы 3 любые две различные точки $x, x' \in X$ можно соединить цепочкой (3.42) подпространств $\mathbb{P}^{k_0(n)}$ на X , где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_0(n) = \infty.$$

§ 4. Достаточное условие m -регулярности векторного расслоения на $\mathbb{P}^N$

4.1. Напомним, что векторное расслоение E на схеме Y называется *обильным*, если обратимый пучок Гротендика $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$ на $\mathbb{P}(E^\vee)$ обилён. Следующий результат хорошо известен (см., например, [11; предложение 6.3.56]).

ЛЕММА 5. Пусть E – векторное расслоение на $\mathbb{P}^N$. Тогда $E(a)$ обильно для любого $a \in \mathbb{Z}_{\geq a_0}$, где a_0 – некоторое фиксированное целое число.

ЛЕММА 6. Пусть E – векторное расслоение на $\mathbb{P}^1$. Тогда $E(a)$ обильно для $a \geq 1 - \delta_B(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Гротендика $E \simeq \bigoplus_{j=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_j)$, где $\delta_B(E) = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_r$, $r = \operatorname{rk} E$. Следовательно, для $a \geq 1 - \delta_B(E)$ расслоение $E(a)$ есть прямая сумма обильных линейных расслоений. Тогда согласно [11; предложение 6.1.12, (i)] $E(a)$ само является обильным.

4.2. Напомним теперь понятие *степени* $\deg \mathcal{E}$ векторного расслоения $\mathcal{E}$ на одномерной схеме Y . Если Y – гладкая неприводимая кривая, то $\deg \mathcal{E} := \chi(\mathcal{E}) - \chi(\mathcal{O}_Y) \operatorname{rk} \mathcal{E}$. Если Y неприводимая, но не обязательно гладкая кривая, то $\deg \mathcal{E}$ определяется как степень обратного образа $\mathcal{E}$ относительно нормализации Y . Если Y есть общая одномерная схема с неприводимыми компонентами $Y_1, \dots, Y_q$, то корректно определены кратности $k_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ компонент Y_i в Y (см. [12; п. 1.5]), и мы полагаем

$$\deg \mathcal{E} = \sum_i k_i \deg(\mathcal{E}|_{Y_i}). \quad (4.1)$$

ЛЕММА 7. Пусть E – векторное расслоение на $\mathbb{P}^N$ и $\operatorname{pr}: \mathbb{P}(E^\vee) \rightarrow \mathbb{P}^N$ – проекция. Пусть Y – одномерная подсхема в $\mathbb{P}(E^\vee)$ такая, что $Y_{\text{red}} \subset \operatorname{pr}^{-1}(\mathbb{P}^1)$ для некоторой прямой $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^N$. Рассмотрим линейное расслоение $L_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1) \otimes \operatorname{pr}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$ на $\mathbb{P}(E^\vee)$ для $a \geq 1 - \delta_B(E)$. Тогда

$$\deg(L_0|_Y) > 0. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (4.1)

$$\deg(L_0|_Y) = \sum_i k_i \deg(L_0|_{Y_i}), \quad k_i > 0, \quad (4.3)$$

где Y_i – неприводимые компоненты в Y . Так как $\delta_B(E|_{\mathbb{P}^1}) \geq \delta_B(E)$, из леммы 6 следует, что пучок $L_0|_{\operatorname{pr}^{-1}(\mathbb{P}^1)}$ обилён. Значит, $\deg(L_0|_{Y_i}) > 0$ для каждой из компонент Y_i , и поэтому (4.2) следует из (4.3).

4.3. Пусть Z_1 – произвольная приведенная неприводимая кривая в $\mathbb{P}^N$, где $N \geq 3$. Возьмем проективную прямую $l_0 \subset \mathbb{P}^N$ и подпространство $\mathbb{P}^{N-2} \subset \mathbb{P}^N$ такие, что

$$l_0 \cap Z_1 = \mathbb{P}^{N-2} \cap Z_1 = \emptyset. \quad (4.4)$$

Зафиксируем однородные координаты $(x_0 : \dots : x_N)$ в $\mathbb{P}^N$, в которых

$$l_0 = \{x_2 = \dots = x_N = 0\}, \quad \mathbb{P}^{N-2} = \{x_0 = x_1 = 0\},$$

и зафиксируем изоморфизм

$$\Lambda: \mathbb{C}^* \times \mathbb{P}^N \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^* \times \mathbb{P}^N, \quad (t, (x_0 : \dots : x_N)) \mapsto (t, (x_0 : x_1 : tx_2 : \dots : tx_N)),$$

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Положим $\Gamma^* := \Lambda(\mathbb{C}^* \times Z_1)$ и рассмотрим схему Гильберта $\mathcal{H} := \operatorname{Hilb}^{P_{Z_1}}(\mathbb{P}^N)$, где P_{Z_1} есть многочлен Гильберта $P_{Z_1}(n) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(n)|_{Z_1})$. По построению $\Gamma^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ есть плоское семейство кривых над $\mathbb{C}^*$, а значит, оно определяет морфизм $g: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathcal{H}$ такой, что $\Gamma^* = \Gamma_{\mathcal{H} \times_{\mathcal{H}} \mathbb{C}^*}$, где $\Gamma_{\mathcal{H}} \subset \mathbb{P}^N \times \mathcal{H}$ – универсальное семейство кривых. Координата t отождествляет $\mathbb{C}^*$ с $\mathbb{P}^1 \setminus \{z_0, z_\infty\}$, где $z_0 = \{t = 0\}$, $z_\infty = \{t = \infty\}$, и поскольку схема Гильберта $\mathcal{H}$

проективна, морфизм g продолжается до морфизма $\tilde{g}: \mathbb{P}^1 \rightarrow H$. Таким образом, мы получаем плоское семейство $\varphi: \Gamma = \Gamma_{\mathcal{H}} \times_{\mathcal{H}} \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ кривых над $\mathbb{P}^1$ такое, что $Z_1 = \varphi^{-1}(z_1)$ для $z_1 := \{t = 1\}$ и $(\varphi^{-1}(z_0))_{\text{red}} = l_0$.

Пусть снова E – векторное расслоение ранга $\text{rk } E \geq 2$ на $\mathbb{P}^N$, и пусть $\text{pr}: \mathbb{P}(E^\vee) \rightarrow \mathbb{P}^N$ – проекция. Рассмотрим проекцию $q: \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^N$ и схему $\Gamma^E := \mathbb{P}(q^*E^\vee) = \mathbb{P}(E^\vee) \times_{\mathbb{P}^N} \Gamma$ с проекциями

$$\mathbb{P}(E^\vee) \xleftarrow{q'} \Gamma^E \xrightarrow{\text{pr}'} \Gamma, \quad \rho = \varphi \circ \text{pr}': \Gamma^E \rightarrow \mathbb{P}^1.$$

Заметим, что по лемме 5 существует $a_0 \in \mathbb{Z}$ такое, что линейное расслоение $A = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1) \otimes \text{pr}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(a_0)$ обильно на $\mathbb{P}(E^\vee)$; следовательно, линейное расслоение q^*A является ρ -обильным на Γ^E .

Зафиксируем неприводимую кривую Y_1 в Γ^E такую, что $\text{pr}'(Y_1) = Z_1$, и обозначим через P_{Y_1} многочлен Гильберта $P_{Y_1}(n) := \chi(q^*A^{\otimes n}|_{Y_1})$. Рассмотрим относительную схему Гильберта $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^1} = \text{Hilb}^{P_{Y_1}}(\Gamma^E/\mathbb{P}^1)$ вместе с естественным сюръективным проективным морфизмом $f: \mathcal{H}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow \mathbb{P}^1$ и универсальным семейством $\Sigma \hookrightarrow \Gamma^E \times_{\mathbb{P}^1} \mathcal{H}_{\mathbb{P}^1}$ с проекциями $\Gamma^E \xleftarrow{p''} \Sigma \xrightarrow{q''} \mathcal{H}_{\mathbb{P}^1}$. По определению найдется точка $y_1 \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^1}$ такая, что

$$q''^{-1}(y_1) \xrightarrow[p]{p''} Y_1 \quad (4.5)$$

и $f(y_1) = a_1$. Далее, рассмотрим нормализацию $\nu: Z \rightarrow Z_1$ кривой Z_1 и поверхности $\mathcal{S} = \mathbb{P}(\nu^*(E^\vee|_{Z_1}))$ и $\mathcal{S}_1 = \mathbb{P}(E^\vee|_{Z_1}) \subset X_\Gamma$ с проекциями $\text{pr}_{\mathcal{S}}: \mathcal{S} \rightarrow Z$ и $\text{pr}_{\mathcal{S}_1}: \mathcal{S}_1 \rightarrow Z_1$. По конструкции морфизм ν поднимается на нормализацию $\tilde{\nu}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_1$ так, что $\text{pr}_{\mathcal{S}_1} \circ \tilde{\nu} = \nu \circ \text{pr}_{\mathcal{S}}$, и кривая $Y = \tilde{\nu}^{-1}(Y_1)$ есть мультисечение проекции $\text{pr}_{\mathcal{S}}$.

Рассмотрим многочлен Гильберта $P_Y(n) := \chi(\tilde{\nu}^*q^*A^{\otimes n}|_Y)$. Так как $\mathcal{S}$ есть гладкая поверхность, то схема Гильберта $\text{Hilb}^{P_Y}(\mathcal{S})$ совпадает с линейным рядом $|\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(Y)| \simeq \mathbb{P}^h$, $h = h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(Y)) - 1$, и существует биективный морфизм

$$\mathbb{P}^h = \text{Hilb}^{P_Y}(\mathcal{S}) \rightarrow \text{Hilb}^{P_{Y_1}}(\mathcal{S}_1) = f^{-1}(a_1): C \mapsto \tilde{\nu}(C).$$

Таким образом, слой $f^{-1}(a_1)$ неприводим.

Поскольку морфизм $f: \mathcal{H}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow \mathbb{P}^1$ проективен, схема $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^1}$ также проективна. Поэтому в силу сюръективности и плоскости морфизма f и неприводимости слоя $f^{-1}(a_1)$ существуют гладкая неприводимая кривая T и морфизм $\theta: T \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{P}^1}$ такие, что $\theta_T = f \circ \theta: T \rightarrow \mathbb{P}^1$ сюръективно. Следовательно,

$$\theta_T(t_0) = z_0 \quad (4.6)$$

для некоторого $t_0 \in T$, и поскольку $f(y_1) = z_1$, то

$$\theta(t_1) = y_1, \quad \theta_T(t_1) = z_1 \quad (4.7)$$

для некоторого $t_1 \in T$.

Рассмотрим расслоенное произведение $\Sigma_T = \Sigma \times_{\mathbb{P}^1} T$ с проекциями

$$p_T: \Sigma_T \rightarrow T, \quad q_T: \Sigma_T \rightarrow \Sigma \xrightarrow{p''} X_\Gamma \xrightarrow{q''} \mathbb{P}(E^\vee)$$

и вложением $i = (q_T, p_T): \Sigma \hookrightarrow \mathbb{P}(E^\vee) \times T$. Семейство $p_T: \Sigma_T \rightarrow T$ есть плоское семейство кривых в $\mathbb{P}(E^\vee)$ с базой T такое, что слой $p_T^{-1}(t_1)$ совпадает с Y_1 и приведенный слой $(Y_0)_{\text{red}} := (p_T^{-1}(t_0))_{\text{red}}$ лежит в $\text{pr}^{-1}(l_0)$. Далее, рассмотрим линейное расслоение $L_T = i^*(L_0 \boxtimes \mathcal{O}_T)$ на Σ_T , где L_0 есть линейное расслоение на X , определенное в лемме 7. Степень $\deg(L_T|_{p_T^{-1}(t)})$ не зависит от $t \in T$ в силу принципа непрерывности (см. [12; теорема 10.2]). В частности, поскольку $\deg(L_0|_{Y_0}) > 0$ по лемме 7, мы получаем

$$\deg(L_0|_{Y_1}) > 0. \quad (4.8)$$

ЛЕММА 8. Пусть E и pr те же, что и в лемме 7.

- (i) Линейное расслоение $L := \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1) \otimes \text{pr}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(2 - \delta_B(E))$ на $\mathbb{P}(E^\vee)$ обильно.
- (ii) Линейное расслоение

$$A_i := L^{r+1} \otimes \text{pr}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(i) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(r+1) \otimes \text{pr}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}((r+1)((2 - \delta_B(E)) + i)), \quad (4.9)$$

где $r = \text{rk } E$, также обильно для произвольного $i \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Заметим сначала, что линейное расслоение $L_0 := L \otimes \text{pr}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-1)$ численно эффективно, т.е. степень его ограничения на любую кривую в $\mathbb{P}(E^\vee)$ положительна. В самом деле, пусть Y – неприводимая кривая в $\mathbb{P}(E^\vee)$. Если $\text{pr}(Y)$ – кривая, то наше утверждение вытекает из (4.8). Если $\text{pr}(Y)$ – точка (скажем, z), то $Y \subset \text{pr}^{-1}(z) \simeq \mathbb{P}^{r-1}$ и $\deg(L_0|_Y) = \deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(1)|_Y)$ снова положительно.

Численно эффективный класс дивизоров $c_1(L_0)$ равен $W + (1 - \delta_B(E))H$, где $W := c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1))$, $H := \text{pr}^* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$. По лемме 5 класс дивизоров $W + a_0 H$ на $\mathbb{P}(E^\vee)$ обилен для достаточно большого $a_0 - 2 + \delta_B(E)$. Более того, следствие из теоремы Клеймана (см. [11; следствие 1.4.9]) влечет обильность класса дивизоров

$$(a_0 - 2 + \delta_B(E))c_1(L_0) + W + a_0 H = (a_0 - 1 + \delta_B(E))(W + (2 - \delta_B(E))H).$$

Следовательно, $W + (2 - \delta_B(E))H$ также обилен.

Утверждение (ii) есть прямое следствие утверждения (i).

4.4. Напомним, что когерентный пучок $\mathcal{F}$ на $\mathbb{P}^N$ m -регулярен в смысле Мамфорда–Кастельнуово, если $H^i(\mathcal{F}(m - i)) = 0$ для $i \geq 1$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть E – векторное расслоение ранга r на $\mathbb{P}^N$.

- (i) E является m -регулярным при $m \geq m_0 := c_1(E) + (1 + r)(2 - \delta_B(E)) - 1$. Более того, $E(m)$ порождается глобальными сечениями при $m \geq m_0$.
- (ii) Для любой гиперплоскости $\mathbb{P}^{N-1}$ в $\mathbb{P}^N$ векторное расслоение $E(m)|_{\mathbb{P}^{N-1}}$, $m \geq m_0$, порождается глобальными сечениями и

$$h^0(E(m)|_{\mathbb{P}^{N-1}}) \leq \frac{r}{(N-1)!} (\delta_A(E) + m + N - 1)^{N-1}. \quad (4.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы сохраняем обозначения лемм 7 и 8. Дуализирующий пучок $\omega_{\mathbb{P}(E^\vee)}$ на $\mathbb{P}(E^\vee)$ дается стандартной формулой

$$\omega_{\mathbb{P}(E^\vee)} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(-r) \otimes \text{pr}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(c_1(E) - N - 1). \quad (4.11)$$

Поэтому (4.9) и (4.11) влекут изоморфизм

$$\omega_{\mathbb{P}(E^\vee)} \otimes A_i \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1) \otimes \mathrm{pr}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(m_0 - N + i).$$

Так как A_i обилиен для $i \geq 0$ по лемме 8, то теорема Кодайры об обращении в нуль дает

$$0 = H^j(\omega_{\mathbb{P}(E^\vee)} \otimes A_i) = H^j(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1) \otimes \mathrm{pr}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(m_0 - N + i)), \quad i \geq 0, \quad j \geq 1. \quad (4.12)$$

Кроме того, очевидно,

$$\mathrm{pr}_*(\omega_{\mathbb{P}(E^\vee)} \otimes A_i) \simeq E(m_0 - N + i), \quad R^j \mathrm{pr}_*(\omega_{\mathbb{P}(E^\vee)} \otimes A_i) = 0, \quad j \geq 1, \quad i \geq 0.$$

Поэтому спектральная последовательность Лере

$$E_2^{ab} = H^a(R^b \mathrm{pr}_*(\omega_{\mathbb{P}(E^\vee)} \otimes A_i)) \implies H^{a+b}(\omega_{\mathbb{P}(E^\vee)} \otimes A_i)$$

вырождается и дает (в силу (4.12)) $H^j(E(m_0 - N + i)) = 0$, $i \geq 0$, $j \geq 1$. Это показывает, что E m -регулярно для $m \geq m_0$. Факт, что из m -регулярности расслоения E следует, что $E(m)$ порождается глобальными сечениями, хорошо известен (см. [13; лемма 1.7.2]). Утверждение (i) доказано.

Утверждение (ii) следует из теоремы Ле Потье–Симпсона (см. [13; лемма 3.3.2]) в которой берется $X = \mathbb{P}^N$, $\deg(X) = 1$, $F = E(m)$, $\nu = N - 1$, $X_\nu = \mathbb{P}^{N-1}$, $X_1 = \mathbb{P}^1$, $\mu_{\max}(E(m)|_{\mathbb{P}^1}) = \delta_A(E(m)) = \delta_A(E) + m$.

§ 5. Оценка сверху для степени многообразия прямых максимального подскока через точку для векторного расслоения на $\mathbb{P}^N$

5.1. Преобразование L_0 векторного расслоения E при линейной проекции. Пусть

$$p_x: \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^{N-1}$$

– рациональная линейная проекция с центром в точке $x \in \mathbb{P}^N$, и пусть $\widetilde{\mathbb{P}}^N$ – замыкание в $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^{N-1}$ графика проекции p_x . Имеем следующую очевидную диаграмму проекций:

$$\mathbb{P}^N \xleftarrow{\sigma} \widetilde{\mathbb{P}}^N \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^{N-1}. \quad (5.1)$$

Всюду в этом параграфе E будет обозначать векторное расслоение ранга r на $\mathbb{P}^N$ с дополнительным условием

$$\delta_B(E) = 0. \quad (5.2)$$

Положим $L_0 := \pi_* \sigma^* E$.

ТЕОРЕМА 6. (i) L_0 есть векторное расслоение ранга

$$\rho_0 := \mathrm{rk} L_0 = c_1(E) + r \quad (5.3)$$

на $\mathbb{P}^{N-1}$, и его конструкция совместима с заменой базы, т.е. для любого рас-
слоенного квадрата

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{\mathbb{P}}^N \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}^{N-1} \end{array} \quad (5.4)$$

имеем изоморфизм замены базы

$$\beta_0: \tilde{\pi}_* \tilde{g}^* \sigma^* E \xrightarrow{\sim} g^* \pi_* \sigma^* E = g^* L_0;$$

более того, естественное отображение вычисления $\text{ev}: \pi^* L_0 \rightarrow \sigma^* E$ является
эпиморфизмом.

(ii) $c_1(L_0) = P(c_1(E), c_2(E))$, где $P(x, y) := \frac{1}{2}x(x+1) - y \in \mathbb{Q}[x, y]$.

(iii) $\delta_A(E) \geq \delta_A(L_0)$.

(iv) Выполняются неравенства

$$\delta_A(L_0) \geq -(P(c_1(E), c_2(E)))^2, \quad (5.5)$$

$$\delta_B(L_0) \geq Q(r, \delta_A(E), c_1(E), c_2(E)), \quad (5.6)$$

где $Q(x, y, z, t) := -(x+z)y + P(z, t) - (P(z, t))^2 \in \mathbb{Q}[x, y]$ и многочлен P опре-
делен в (ii).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Рассмотрим произвольную точку $y \in \mathbb{P}^{N-1}$ и поло-
жим $\mathbb{P}_y^1 := \pi^{-1}(y)$. Из (5.2) немедленно получаем, что $h^1(E|_{\mathbb{P}_y^1}) = 0$, следо-
вательно, $h^0(E|_{\mathbb{P}_y^1}) = \chi(E|_{\mathbb{P}_y^1}) = c_1(E) + r$. Эти равенства и теорема о замене
базы (см. [8; ч. 3, теорема 12.11]) влекут (5.3), равенство $R^1 \pi_* \sigma^* E = 0$ и су-
ществование изоморфизма β_0 . Более того, в силу (5.2) пучок $\sigma^* E|_{\mathbb{P}_y^1}$ поро-
ждается глобальными сечениями. Это означает, что существует эпиморфизм
 $\text{ev}_y: H^0(\sigma^* E|_{\mathbb{P}_y^1}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_y^1} \twoheadrightarrow \sigma^* E|_{\mathbb{P}_y^1}$. Более того, отображение перехода к значе-
нию $\text{ev}: \pi^* L_0 \rightarrow \sigma^* E$ совместимо с заменой базы, т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi^* L_0 \otimes \mathbb{C}_y & \xrightarrow{\text{ev} \otimes \mathbb{C}_y} & \sigma^* E \otimes \mathbb{C}_y \\ \pi^* \beta_0 \downarrow & & \parallel \\ H^0(\sigma^* E|_{\mathbb{P}_y^1}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_y^1} & \xrightarrow{\text{ev}_y} & \sigma^* E|_{\mathbb{P}_y^1} \end{array} \quad (5.7)$$

где $\pi^* \beta_0$ – изоморфизм; тем самым, отображение перехода к значению ev :
 $\pi^* L_0 \rightarrow \sigma^* E$ эпиморфно.

(ii) На время доказательства фиксируем произвольную прямую $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^{N-1}$
и рассмотрим поверхность $S := \pi^{-1}(\mathbb{P}^1)$ и проективную плоскость $\mathbb{P}^2 := \sigma(S)$
в $\mathbb{P}^N$. Эта плоскость проходит через центр x проекции $p_x: \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^{N-1}$, и
диаграмма (5.1) продолжается до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^2 & \xleftarrow{\tilde{\sigma}} & S & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^N & \xleftarrow{\sigma} & \tilde{\mathbb{P}}^N & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^{N-1} \end{array} \quad (5.8)$$

где $\tilde{\pi} = \pi|_S$, $\tilde{\sigma} = \sigma|_S$: $S \rightarrow \mathbb{P}^2$ есть раздутие $\mathbb{P}^2$ в точке x , а вертикальные стрелки являются вложениями.

Положим $\mathcal{O}_S(\tau) := \tilde{\sigma}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, $\mathcal{O}_S(h) := \tilde{\pi}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. Заметим, что в кольце Чжоу $A(S)$ выполнены соотношения

$$\tau^2 = \tau h = [pt]. \quad (5.9)$$

Кроме того, $R^1 \pi_* \sigma^* E = 0$ влечет в силу замены базы равенство $R^1 \tilde{\pi}_* \tilde{\sigma}^* E|_{\mathbb{P}^2} = 0$. Тем самым, теорема Римана–Роха (см., например, [12; пример 15.2.8]) дает

$$\text{ch}(L_0|_{\mathbb{P}^1}) = \tilde{\pi}_*(\text{td}(T_{S/\mathbb{P}^1}) \cdot \text{ch}(\tilde{\sigma}^* E|_{\mathbb{P}^2})). \quad (5.10)$$

Здесь $T_{S/\mathbb{P}^1} \simeq \mathcal{O}_S(2\tau - h)$. Поэтому, полагая $c_i := c_i(E)$, $i = 1, 2$, и используя соотношения (5.9), мы получаем в $A(S)$

$$\text{td}(T_{S/\mathbb{P}^1}) \cdot \text{ch}(\tilde{\sigma}^* E|_{\mathbb{P}^2}) = 1 + (r + c_1)\tau - \frac{1}{2}rh + P(c_1, c_2)[pt]. \quad (5.11)$$

Соответственно, в $A(\mathbb{P}^1)$ имеем

$$\tilde{\pi}_*(\text{td}(T_{S/\mathbb{P}^1}) \cdot \text{ch}(\tilde{\sigma}^* E|_{\mathbb{P}^2})) = (r + c_1) \cdot 1 + P(c_1, c_2)[pt]. \quad (5.12)$$

Отсюда следует (ii).

(iii) Положим $\tilde{E} := E(-\delta_A(E) - 1)$. Тогда $\delta_A(\tilde{E}) = -1$ и

$$\pi_* \sigma^* \tilde{E} = 0, \quad h^0(\tilde{E}) = h^0(\sigma^* \tilde{E}) = 0. \quad (5.13)$$

Вдобавок (5.2) и условие $-1 = \delta_A(\tilde{E}) \geq \delta_B(\tilde{E})$ дают

$$D := \delta_A(E) + 1 = -\delta_B(\tilde{E}) > 0. \quad (5.14)$$

Пусть $l_0 = \tilde{\sigma}^{-1}(x)$ – исключительная прямая на S . Так как $\mathcal{O}_S(l_0) = \mathcal{O}_S(\tau - h)$, имеем точную тройку

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S(D(\tau - h)) \rightarrow \mathcal{O}_{Dl_0}(Dl_0) \rightarrow 0. \quad (5.15)$$

Здесь Dl_0 обозначает стандартную схемную структуру кратности D на l_0 , как на дивизоре в S , и мы имеем точную тройку пучков $\mathcal{O}_{Dl_0}$ -модулей для $D \geq 2$

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathcal{O}_{l_0}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{Dl_0}(Dl_0) \rightarrow \mathcal{O}_{(D-1)l_0}(Dl_0) \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \mathcal{O}_{l_0}(-2) \rightarrow \mathcal{O}_{(D-1)l_0}(Dl_0) \rightarrow \mathcal{O}_{(D-2)l_0}(Dl_0) \rightarrow 0, \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &\rightarrow \mathcal{O}_{l_0}(1-D) \rightarrow \mathcal{O}_{2l_0}(Dl_0) \rightarrow \mathcal{O}_{l_0}(-D) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Заметим, что по аналогии с (5.13)

$$h^0(\tilde{\sigma}^* \tilde{E}|_{\mathbb{P}^2}) = 0. \quad (5.17)$$

Далее, поскольку $l_0 = \tilde{\sigma}^{-1}(x)$, то $(\tilde{\sigma}^* \tilde{E}|_{\mathbb{P}^2})|_{ml_0} \simeq \mathcal{O}_{ml_0}^r$ для $m \geq 1$. Поэтому, подкручивая тройки (5.16) на $\tilde{\sigma}^* \tilde{E}|_{\mathbb{P}^2}$, мы получаем при $D \geq 2$

$$h^0(\tilde{\sigma}^* \tilde{E}|_{\mathbb{P}^2} \otimes \mathcal{O}_{Dl_0}(Dl_0)) = 0. \quad (5.18)$$

Более того, равенство (5.18) очевидно при $D = 1$, а значит, оно выполняется при $D \geq 1$.

Подкручивая (5.15) на $\tilde{\sigma}^* \tilde{E}|_{\mathbb{P}^2}$, мы получаем точную тройку

$$0 \rightarrow \tilde{\sigma}^* \tilde{E}|_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \tilde{\sigma}^* \tilde{E}|_{\mathbb{P}^2}(D(\tau - h)) \rightarrow \tilde{\sigma}^* \tilde{E}|_{\mathbb{P}^2} \otimes \mathcal{O}_{Dl_0}(Dl_0) \rightarrow 0,$$

и (5.17) и (5.18) дают

$$0 = h^0(\tilde{\sigma}^* \tilde{E}|_{\mathbb{P}^2})(D(\tau - h)) = h^0(\tilde{\pi}_* \tilde{\sigma}^* \tilde{E}|_{\mathbb{P}^2}(D(\tau - h))). \quad (5.19)$$

Применяя изоморфизм замены базы β_0 к правому квадрату диаграммы (5.8) и используя формулу проекции, получаем изоморфизмы

$$\tilde{\pi}_*(\tilde{\sigma}^* \tilde{E}|_{\mathbb{P}^2}(D(\tau - h))) \simeq (\pi_* \sigma^* \tilde{E}(D)|_{\mathbb{P}^1})(-D) \simeq (\pi_* \sigma^* E|_{\mathbb{P}^1})(-D) \simeq L_0(-D)|_{\mathbb{P}^1}.$$

Поэтому (5.19) влечет равенство $h^0(L_0(-D)|_{\mathbb{P}^1}) = 0$, т.е. $\delta_A(L_0) < D$, поскольку $\mathbb{P}^1$ есть произвольная прямая в $\mathbb{P}^{N-1}$. В совокупности с (5.14) это дает (iii).

(iv) Пусть

$$L_0|_{\mathbb{P}^1} \simeq \bigoplus_{i=1}^{\rho_0} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i).$$

Ясно, что $\delta_A(L_0) \geq c_1(L_0)/\rho_0$, поскольку $a_i \leq \delta_A(L_0)$ для $1 \leq i \leq \rho_0$. Очевидно также, что $c_1(L_0)/\rho_0 \geq -(c_1(L_0))^2$. Поэтому $\delta_A(L_0) \geq -(c_1(L_0))^2$. С другой стороны, согласно (ii) $-(c_1(L_0))^2 = -(P(c_1, c_2))^2$. Поэтому выполняется (5.5).

Наконец, положим $\tilde{L}_0 := L_0(-\delta_A(L_0) - 1)$. Имеем

$$\delta_A(\tilde{L}_0) = -1, \quad \delta_B(L_0) = \delta_B(\tilde{L}_0) + \delta_A(L_0) + 1. \quad (5.20)$$

Предположим вдобавок, что прямая $\mathbb{P}^1$ в $\mathbb{P}^{N-1}$ выбрана таким образом, что $\delta_B(\tilde{L}_0|_{\mathbb{P}^1}) = \delta_B(\tilde{L}_0)$. Тогда $h^0(\tilde{L}_0|_{\mathbb{P}^1}) = 0$, и поэтому теорема Римана–Роха дает

$$h^1(\tilde{L}_0|_{\mathbb{P}^1}) = -c_1(\tilde{L}_0) - \text{rk } \tilde{L}_0 = -c_1(\tilde{L}_0) - \rho_0. \quad (5.21)$$

С другой стороны, поскольку $\delta_B(\tilde{L}_0) \leq \delta_A(\tilde{L}_0) = -1$, мы имеем $-\delta_B(\tilde{L}_0) - 1 = h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\delta_B(\tilde{L}_0))) \leq h^1(\tilde{L}_0|_{\mathbb{P}^1})$. Два последних неравенства вместе с (5.21) влекут

$$-1 \geq \delta_B(\tilde{L}_0) \geq c_1(\tilde{L}_0) + \rho_0 - 1. \quad (5.22)$$

Кроме того, определение $\tilde{L}_0$ и утверждения (ii) и (iii) дают

$$\begin{aligned} c_1(\tilde{L}_0) + \rho_0 - 1 &= -\rho_0(\delta_A(L_0) + 1) + c_1(L_0) + \rho_0 - 1 \\ &\geq -\rho_0(\delta_A(E) + 1) + P(c_1, c_2) + \rho_0 - 1. \end{aligned}$$

Подставляя это вместе с (5.22) в (5.20) и используя (5.5) и (5.3), мы получаем неравенство

$$\delta_B(L_0) \geq -\rho_0 \delta_A(E) + P(c_1, c_2) + \delta_A(L_0) \geq -(r + c_1) \delta_A(E) + P(c_1, c_2) - (P(c_1, c_2))^2,$$

т.е. неравенство (5.6).

5.2. Оценка на преобразованное ядро отображения $\text{ev}: \pi^* L_0 \rightarrow \sigma^* E$.

Предположим вдобавок, что

$$\delta_A(E) = 2\delta, \quad c_1(E) = r\delta \quad (5.23)$$

для некоторого $\delta \in \mathbb{Z}_{>0}$. Положим

$$\gamma := c_2(E) - \frac{1}{2}r(r-1)\delta^2. \quad (5.24)$$

Тогда теорема 6 дает

$$\rho_0 = \text{rk } L_0 = r(1 + \delta), \quad (5.25)$$

$$c_1(L_0) = P_1(r, \gamma, \delta), \quad (5.26)$$

$$Q_1(r, \gamma, \delta) \leq \delta_B(L_0) \leq \delta_A(L_0) \leq 2\delta, \quad (5.27)$$

где

$$P_1(r, \gamma, \delta) := P\left(r\delta, \gamma + \frac{r(r-1)\delta^2}{2}\right), \quad Q_1(r, \gamma, \delta) := Q\left(r, 2\delta, r\delta, \gamma + \frac{r(r-1)\delta^2}{2}\right).$$

По теореме 6, (i) мы имеем точную тройку векторных расслоений

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{\iota} \pi^* L_0 \xrightarrow{\text{ev}} \sigma^* E \rightarrow 0, \quad (5.28)$$

где $F := \text{Ker ev}$. Ограничение этой тройки на S дает точную тройку

$$0 \rightarrow F|_S \rightarrow \tilde{\pi}^*(L_0|_{\mathbb{P}^1}) \rightarrow \tilde{\sigma}^* E|_{\mathbb{P}^2} \rightarrow 0 \quad (5.29)$$

и ее подкрученный вариант

$$0 \rightarrow (F|_S)(jh) \rightarrow \tilde{\pi}^*(L_0|_{\mathbb{P}^1}(j)) \rightarrow \tilde{\sigma}^* E|_{\mathbb{P}^2}(jh) \rightarrow 0. \quad (5.30)$$

Замена базы влечет изоморфизм $L_0|_{\mathbb{P}^1} \simeq \tilde{\pi}_* \tilde{\sigma}^* E|_{\mathbb{P}^2}$. Поэтому

$$L_0|_{\mathbb{P}^1}(j) \simeq (\tilde{\pi}_* \tilde{\sigma}^* E|_{\mathbb{P}^2})(jh), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $H^1(\tilde{\pi}^*(L_0|_{\mathbb{P}^1}(j))) = H^1(L_0|_{\mathbb{P}^1}(j)) = 0$, $j \geq -\delta_B(L_0)$, а морфизм $H^0(\tilde{\pi}^*(L_0|_{\mathbb{P}^1}(j))) \rightarrow H^0(\tilde{\sigma}^* E|_{\mathbb{P}^2}(jh))$, $j \in \mathbb{Z}$, индуцированный тройкой (5.30), является изоморфизмом, мы получаем

$$h^1(F|_S(jh)) = 0, \quad j \geq -Q_1(r, \gamma, \delta) \quad (5.31)$$

(см. (5.27)).

Далее, тройка (5.29) в силу (5.25), (5.26) влечет

$$\begin{aligned} \text{rk } F &= \text{rk}(F|_S) = r\delta, \\ c_1(F|_S) &= (r\delta)\tau - P_1(r, \gamma, \delta)h, \quad c_2(F|_S) = P_2(r, \gamma, \delta)[pt], \end{aligned} \quad (5.32)$$

где $P_2(r, \gamma, \delta) := -\gamma - r(r-1)\delta^2/2 - r^2\delta^2 + r\delta P_1(r, \gamma, \delta)$ и использованы соотношения (5.9).

Положим

$$b := -\min\{\delta_B(F|_{\mathbb{P}_y^1}) \mid y \in \mathbb{P}^{N-1}\} \quad (5.33)$$

и отметим, что $b \geq 0$ в силу мономорфизма ι в (5.28). Для получения оценки сверху на b возьмем точку $y \in \mathbb{P}^{N-1}$ такую, что $\delta_B(F|_{\mathbb{P}_y^1}) = -b$. Тогда

$$F|_{\mathbb{P}_y^1} \simeq \bigoplus_{i=1}^{r\delta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_i) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-b) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r\delta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_i), \quad (5.34)$$

где $-b = b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{r\delta} \leq 0$. Ограничивая (5.28) на $\mathbb{P}_y^1$ и используя (5.25), мы получаем тройку

$$0 \rightarrow F|_{\mathbb{P}_y^1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_y^1}^{r(1+\delta)} \rightarrow \sigma^* E|_{\mathbb{P}_y^1} \rightarrow 0.$$

Более того, (5.23) дает $\chi(\sigma^* E|_{\mathbb{P}_y^1}) = \operatorname{rk} E + c_1(E) = r(1 + \delta)$. Поэтому $0 = \chi(F|_{\mathbb{P}_y^1}) = -b + \sum_{i=2}^{r\delta} b_i + r(1 + \delta)$. Поскольку $\sum_{i=2}^{r\delta} b_i \leq 0$, мы получаем следующую оценку сверху на b :

$$b = \sum_{i=2}^{r\delta} b_i + r(1 + \delta) \leq r(1 + \delta). \quad (5.35)$$

Рассмотрим векторные расслоения

$$\mathcal{O}_\pi(1) := \sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1), \quad F_b := F \otimes \mathcal{O}_\pi(b), \quad L_1 := \pi_* F_b.$$

Заметим, что

$$R^1 \pi_* F_b = 0. \quad (5.36)$$

Далее, (5.32) влечет равенства

$$c_1(F_b|_S) = r\delta(1 + b)\tau - hP_1(r, \gamma, \delta), \quad (5.37)$$

$$c_2(F_b|_S) = c_2(F|_S) + (r\delta - 1)(r\delta\tau - hP_1(r, \gamma, \delta))b\tau + \frac{1}{2}rb^2\delta(r\delta - 1)[pt]. \quad (5.38)$$

Замена базы вместе с (5.36) дает

$$\tilde{\pi}_*(F_b|_S) = L_1|_{\mathbb{P}^1}, \quad R^1 \tilde{\pi}_*(F_b|_S) = 0. \quad (5.39)$$

Следовательно, по теореме Римана–Роха (ср. (5.10))

$$\operatorname{ch}(L_1|_{\mathbb{P}^1}) = \tilde{\pi}_*(\operatorname{td}(T_{S/\mathbb{P}^1}) \cdot \operatorname{ch}(F_b|_S)). \quad (5.40)$$

Подставляя (5.37) и (5.38) в (5.40) и продолжая, как при выводе равенств (5.11) и (5.12), мы получаем

$$\operatorname{rk} L_1 = r\delta(2 + b), \quad (5.41)$$

$$c_1(L_1) = F_1(r, b, \gamma, \delta) := \binom{r\delta(1+b)+1}{2} - (r\delta(1+b)+1)P_1(r, \gamma, \delta) - F(r, b, \gamma, \delta). \quad (5.42)$$

Более того, (5.39) влечет равенства

$$\tilde{\pi}_*(F_b|_S(jh)) = L_1(j)|_{\mathbb{P}^1}, \quad R^1\tilde{\pi}_*(F_b|_S(jh)) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому спектральная последовательность Лере $E_2^{a,a'} = H^a(R^{a'}\tilde{\pi}_*(F_b|_S(jh))) \Rightarrow H^{a+a'}(F_b|_S(jh))$ вырождается и

$$H^1(F_b|_S(jh)) = H^1(L_1(j)|_{\mathbb{P}^1}), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (5.43)$$

Теперь перейдем к доказательству следующей леммы.

ЛЕММА 9. *Существуют многочлены $R(x, y, z)$ и $S(x, y, z)$ в $\mathbb{Z}[x, y, z]$ такие, что*

$$-R(r, \gamma, \delta) \leq \delta_B(L_1) \leq \delta_A(L_1) \leq S(r, \gamma, \delta). \quad (5.44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем прямую $l \subset \mathbb{P}^2$, не проходящую через точку x (напомним, что x есть центр раздутья $\tilde{\sigma}: S \rightarrow \mathbb{P}^2$), и пусть $\mathbb{P}_\tau^1 := \tilde{\sigma}^{-1}(l)$. Тогда $\mathcal{O}_S(\mathbb{P}_\tau^1) \simeq \mathcal{O}_S(\tau)$. Ограничивая тройку (5.30) на $\mathbb{P}_\tau^1$, мы получаем точную тройку на $\mathbb{P}_\tau^1 \simeq \mathbb{P}^1$

$$0 \rightarrow F|_{\mathbb{P}_\tau^1}(j) \rightarrow \tilde{\pi}^*(L_0|_{\mathbb{P}^1}(j))|_{\mathbb{P}_\tau^1} \rightarrow \tilde{\sigma}^*(E(j)|_l) \rightarrow 0.$$

Поскольку $\tilde{\pi}^*(L_0|_{\mathbb{P}^1}(j))|_{\mathbb{P}_\tau^1} \simeq L_0|_{\mathbb{P}^1}(j)$, мы имеем $\chi(E(j)|_l) = r(1 + \delta + j)$. Более того, (5.25), (5.26) и теорема Римана–Роха дают

$$\chi(L_0|_{\mathbb{P}^1}(j)) = P_1(r, \gamma, \delta) + r(1 + \delta)(j + 1).$$

Следовательно,

$$\chi(F|_{\mathbb{P}_\tau^1}(j)) = P_1(r, \gamma, \delta) + r\delta j. \quad (5.45)$$

Далее, (5.27) влечет

$$Q_1(r, \gamma, \delta) + j \leq \delta_B(L_0|_{\mathbb{P}^1}(j)) \leq \delta_A(L_0|_{\mathbb{P}^1}(j)) \leq 2\delta + j. \quad (5.46)$$

С другой стороны, $F|_{\mathbb{P}_\tau^1}(j) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r\delta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_i)$, где $\delta_B(F|_{\mathbb{P}_\tau^1}(j)) = e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_{r\delta}$. Поэтому (5.45) дает

$$P_1(r, \gamma, \delta) + r\delta j = \chi(F|_{\mathbb{P}_\tau^1}(j)) = \delta_B(F|_{\mathbb{P}_\tau^1}(j)) + r\delta + \sum_{i=2}^{r\delta} e_i. \quad (5.47)$$

Заметим, что поскольку $F|_{\mathbb{P}_\tau^1}(j)$ – подрасслоение в $\tilde{\pi}^*(L_0|_{\mathbb{P}^1}(j))|_{\mathbb{P}_\tau^1} \simeq L_0|_{\mathbb{P}^1}(j)$, (5.46) влечет неравенства $e_2 \leq \dots \leq e_{r\delta} \leq \delta_A(L_0(j)|_{\mathbb{P}^1}) \leq 2\delta + j$, так что $\sum_{i=2}^{r\delta} e_i \leq (2\delta + j)(r\delta - 1)$. Эти неравенства вместе с (5.47) показывают, что

$$\delta_B(F|_{\mathbb{P}_\tau^1}(j)) = P_1(r, \gamma, \delta) + r\delta(j - 1) - \sum_{i=2}^{r\delta} e_i \geq \delta(r - 2r\delta + 2\delta) - P_1(r, \gamma, \delta) + j.$$

Следовательно,

$$\delta_B(F|_{\mathbb{P}_\tau^1}(j)) \geq 0, \quad j \geq P_2(r, \gamma, \delta) := P_1(r, \gamma, \delta) + \delta(-r + 2r\delta - 2\delta), \quad (5.48)$$

Комбинируя эти неравенства с (5.53), находим

$$\delta_A(L_1) \leq R_1(r, b, \gamma, \delta) := F_2(r, b, \gamma, \delta) + (r\delta(2+b) - 1)R(r, \gamma, \delta). \quad (5.54)$$

Напомним, что в соответствии с (5.35)

$$0 \leq b \leq r(1 + \delta). \quad (5.55)$$

Полагая $S(x, y, z) := R_1(r, r(1 + \delta), \gamma, \delta)^+$, мы получаем из (5.54) искомую правую часть неравенства (5.44).

5.3. Оценка для степени многообразия прямых максимального подскока $B_\delta^\varkappa(E^0, x, \mathbb{P}^{N-1})$. Заметим, что из (5.34) и (5.33) вытекает, что $F_b|_{\mathbb{P}_y^1}$ порождается глобальными сечениями для любой точки $y \in \mathbb{P}^{N-1}$. Поэтому замена базы дает эпиморфизм $\pi^*L_1 \rightarrow F_b$ и его подкрутку

$$\text{ev}_1: \pi^*L_1 \otimes \mathcal{O}_\pi(-b) \rightarrow F. \quad (5.56)$$

Комбинируя (5.29) с (5.56), мы получаем точную последовательность

$$\pi^*L_1 \otimes \mathcal{O}_\pi(-b) \xrightarrow{\Psi} \pi^*L_0 \rightarrow \sigma^*E \rightarrow 0, \quad (5.57)$$

где $\Psi := i \circ \text{ev}_1$. Подкручивая (5.57) на π -относительный дуализирующий пучок и применяя $R^1\pi_*$, получаем точную последовательность

$$L_1 \otimes A_b \xrightarrow{\Phi} L_0 \rightarrow R^1\pi_*(\sigma^*E \otimes \omega_\pi) \rightarrow 0, \quad (5.58)$$

где

$$\begin{aligned} A_b &:= (\pi_*\mathcal{O}_\pi(b))^\vee \simeq S^b(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}) \\ &= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(-b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(-b+1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Положим $E^0 := E(-\delta)$. Тогда (5.23) и (5.24) дают

$$c_1(E^0) = 0, \quad c_2(E^0) = \gamma, \quad \delta_A(E^0) = \delta = -\delta_B(E^0). \quad (5.60)$$

Положим также

$$B_\delta^\varkappa(E^0, x, \mathbb{P}^{N-1}) := \{y \in \mathbb{P}^{N-1} \mid \dim_{\mathbb{C}_y}(\mathbb{C}_y \otimes R^1\pi_*(\sigma^*E \otimes \omega_\pi)) = \varkappa\} \quad (5.61)$$

для $x \in \mathbb{P}^N$.

Заметим, что $\varkappa \leq \text{rk } E = r$. Поэтому в силу (5.25)

$$r(1 + \delta) = \rho_0 \geq \rho_0 - \varkappa \geq r\delta \geq 0. \quad (5.62)$$

Далее, обозначим

$$\rho_1 := \text{rk}(L_1 \otimes A_b) = \text{rk } L_1 \cdot \text{rk } A_b = r\delta(2+b)(1+b) \quad (5.63)$$

(мы используем здесь (5.41) и (5.59)). Отметим, что (5.59) влечет равенства $\delta_A(L_1 \otimes A_b) = \delta_A(L_1) - b$, $\delta_B(L_1 \otimes A_b) = \delta_B(L_1) - b$, так что

$$\begin{aligned} j\delta_B(L_1) - jb &= j\delta_B(L_1 \otimes A_b) \leq \delta_B(\wedge^j(L_1 \otimes A_b)) \leq \delta_A(\wedge^j(L_1 \otimes A_b)) \\ &\leq j\delta_A(L_1 \otimes A_b) = j\delta_A(L_1) - jb \end{aligned}$$

для любого $j \in \mathbb{Z}_{>0}$. Это вместе с леммой 9 и (5.55) дает неравенства

$$-jR(r, \gamma, \delta) - jr(1 + \delta) \leq \delta_B(\wedge^j(L_1 \otimes A_b)) \leq \delta_A(\wedge^j(L_1 \otimes A_b)) \leq jS(r, \gamma, \delta). \quad (5.64)$$

Аналогичным образом (5.27) дает

$$jQ_1(r, \gamma, \delta) \leq j\delta_B(L_0) \leq \delta_B(\wedge^j L_0) \leq \delta_A(\wedge^j L_0) \leq j\delta_A(L_0) \leq 2j\delta. \quad (5.65)$$

Заметим теперь, что, как показывает локально свободная резольвента (5.58) пучка $R^1\pi_*(\sigma^*E \otimes \omega_\pi)$, пучок $\varkappa$ -х идеалов Фиттинга ¹ $\mathcal{I} := \mathcal{Fitt}_\varkappa(R^1\pi_*(\sigma^*E \otimes \omega_\pi))$ пучка $R^1\pi_*(\sigma^*E \otimes \omega_\pi)$ совпадает с образом морфизма

$$\Lambda: \mathcal{E} := \wedge^{(\rho_0 - \varkappa)}(L_1 \otimes A_b) \otimes \wedge^{(\rho_0 - \varkappa)} L_0^\vee \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}},$$

индуцированного морфизмом Φ в (5.58). Таким образом, мы имеем эпиморфизм

$$\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{I}. \quad (5.66)$$

Обозначим через $V_\delta^\varkappa(x)$ подсхему в $\mathbb{P}^{N-1}$, определяемую пучком идеалов $\mathcal{I}$, т.е.

$$\mathcal{O}_{V_\delta^\varkappa(x)} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}} / \mathcal{I} = \text{coker } \Lambda. \quad (5.67)$$

Тогда из (5.61) следует, что

$$B_\delta^\varkappa(E^0, x, \mathbb{P}^{N-1}) = \text{Supp}(\text{coker } \Lambda) = V_\delta^\varkappa(x)_{\text{red}}. \quad (5.68)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \delta_B(\wedge^{(\rho_0 - \varkappa)}(L_1 \otimes A_b)) + \delta_B(\wedge^{(\rho_0 - \varkappa)} L_0^\vee) &\leq \delta_B(\mathcal{E}) \leq \delta_A(\mathcal{E}) \\ &\leq \delta_A(\wedge^{(\rho_0 - \varkappa)}(L_1 \otimes A_b)) + \delta_A(\wedge^{(\rho_0 - \varkappa)} L_0^\vee). \end{aligned}$$

Подставляя сюда (5.64) и (5.65) с $j = \rho_0 - \varkappa$ и используя (5.62), получаем

$$T_1(r, \gamma, \delta) \leq \delta_B(\mathcal{E}) \leq \delta_A(\mathcal{E}) \leq T_2(r, \gamma, \delta), \quad (5.69)$$

где

$$\begin{aligned} T_1(r, \gamma, \delta) &= -r(1 + \delta)(Q_1(r, \gamma, \delta) - R(r, \gamma, \delta) - r(1 + \delta))^+, \\ T_2(r, \gamma, \delta) &= r(1 + \delta)(S(r, \gamma, \delta) + 2p\delta)^+. \end{aligned}$$

Кроме того, принимая во внимание (5.25) и (5.63), находим

$$\text{rk } \mathcal{E} = I_0(r, b, \rho_0 - \varkappa, \delta) := \binom{r\delta(2+b)(1+b)}{\rho_0 - \varkappa} \binom{r(1+\delta)}{\rho_0 - \varkappa}. \quad (5.70)$$

Поэтому, используя (5.55) и (5.62), получаем

$$\text{rk } \mathcal{E} \leq I(r, \delta) := I_0(r, r(1 + \delta), r(1 + \delta), \delta)^+. \quad (5.71)$$

¹Определение пучков идеалов Фиттинга см., например, в [14; с. 492].

Аналогично, (5.26) и (5.42) дают

$$\begin{aligned} c_1(\wedge^{(\rho_0-\varkappa)} L_0^\vee) &= U_0(r, \gamma, \delta) := P_1(r, \gamma, \delta) \binom{r(1+\delta)-1}{\rho_0-\varkappa-1}, \\ c_1(\wedge^{(\rho_0-\varkappa)} L_1 \otimes A_b) &= U_1(r, b, \gamma, \delta) \\ &:= (b+1) \left(F_1(r, b, \gamma, \delta) + \binom{r(1+\delta)-1}{\rho_0-\varkappa-1} \frac{r\delta b(b+1)(b+2)}{2} \right); \end{aligned}$$

а значит,

$$c_1(\mathcal{E}) = J_0(r, b, \gamma, \delta) := U_0(r, \gamma, \delta)r\delta(2+b)(1+b) + U_1(r, \gamma, \delta)r(1+\delta).$$

Тогда

$$c_1(\mathcal{E}) \leq J(r, \gamma, \delta) := J_0(r, r(1+\delta), \gamma, \delta)^+. \quad (5.72)$$

Применим теперь теорему 5 к векторному расслоению $\mathcal{E}$. Из (5.69), (5.71) и (5.72) мы выводим, что $\mathcal{E}(m_0)$ глобально порождено для

$$m_0 = m_0(r, \gamma, \delta) := J(r, \gamma, \delta) + (1 + I(r, \delta))(2 - T_1(r, \gamma, \delta)) - 1. \quad (5.73)$$

Таким образом, мы имеем эпиморфизм $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}^{t_0} \rightarrow \mathcal{E}(m_0)$, где

$$t_0 = t_0(r, \gamma, \delta, N) := I(r, \delta)(T_2(r, \gamma, \delta) + m + N - 1)^{N-1}. \quad (5.74)$$

Следовательно, в силу (5.66) получаем эпиморфизм $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}^{t_0} \rightarrow \mathcal{I}(m_0)$. Этот эпиморфизм и теорема Безу показывают, что степень² приведенной замкнутой подсхемы

$$B_\delta^\varkappa(E^0, x, \mathbb{P}^{N-1}) = V_\delta^\varkappa(x)_{\text{red}} \quad (5.75)$$

в $\mathbb{P}^{N-1}$ удовлетворяет неравенству

$$\deg B_\delta^\varkappa(E^0, x, \mathbb{P}^{N-1}) \leq \deg V_\delta^\varkappa(x) \leq m_0^{t_0}.$$

Подставляя сюда (5.73) и (5.74) и используя соотношения (5.60), получаем следующий основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 7. Пусть E^0 – векторное расслоение ранга r на $\mathbb{P}^N$ с $c_1(E^0) = 0$, $\delta_A(E^0) = \delta = -\delta_B(E^0)$ и $\varkappa_A(E^0) = \varkappa$. Пусть l – прямая в $\mathbb{P}^N$ с $\delta_A(E^0|_l) = \delta$ и $\varkappa_A(E^0|_l) = \varkappa$, и пусть x – произвольная точка на l . Пусть $\mathbb{P}^{N-1}$ – база семейства прямых через x в $\mathbb{P}^N$. Тогда степень приведенной замкнутой подсхемы $B_\delta^\varkappa(E^0, x, \mathbb{P}^{N-1})$ в $\mathbb{P}^{N-1}$ удовлетворяет неравенству

$$\deg B_\delta^\varkappa(E^0, x, \mathbb{P}^{N-1}) \leq m_0(r, c_2(E^0), \delta)^{t_0(r, c_2(E^0), \delta, N)}, \quad (5.76)$$

где многочлены $m_0(x_1, x_2, x_3)$ и $t_0(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задаются равенствами (5.73) и (5.74) соответственно.

²Под степенью замкнутой приведенной подсхемы в $\mathbb{P}^{N-1}$ мы понимаем сумму степеней ее неприводимых компонент.

§ 6. Доказательство теоремы 1

6.1. В последующей части статьи мы фиксируем скрученный инд-грассманиан $\mathbf{G} = \varprojlim G(i_m, V^{n_m})$, задаваемый последовательностью вложений (1.1), и предполагаем, что $1 < i_m \leq n_m - i_m$ для всех m . Положим $G_m := G(i_m, V^{n_m})$ и $\tilde{\varphi}_m := \varphi_{m-1} \circ \dots \circ \varphi_1$. Мы фиксируем также самодвойственное векторное расслоение $\mathbf{E} = \varprojlim E_m$ на $\mathbf{G}$ (последнее означает, что $E_m \simeq E_m^\vee$ для каждого m) ранга $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}_{>0}$. Тогда

$$c_1(E_m) = 0, \quad \delta(E_m) = 2\delta_A(E_m), \quad m \geq 1. \quad (6.1)$$

Заметим, что теореме 1 достаточно доказать для самодвойственных расслоений $\mathbf{E}$. В самом деле, рассмотрим произвольное векторное расслоение конечно-го ранга $\mathbf{E}' = \varprojlim E'_m$ на $\mathbf{G}$. Положим $\mathbf{E} = \mathcal{E}nd \mathbf{E}'$. Так как $\mathbf{E}$ самодвойственно, мы можем считать, что теорема 1 верна для $\mathbf{E}$. Поэтому для любого m и любой прямой l в $G(i_m, V^{n_m})$ расслоение $(\mathcal{E}nd E'_m)|_l$ есть тривиальное расслоение. Теорема Гротендика для векторных расслоений на $\mathbb{P}^1$ немедленно влечет, что расслоение $E'_m|_l \otimes L_{m,l}$ является тривиальным расслоением для подходящего линейного расслоения $L_{m,l}$ на l . Так как $c_1(L_{m,l}) = -c_1(E'_m)/\text{rk } E'_m$ не зависит от l , линейные расслоения $L_{m,l}$ определяют линейное расслоение L_m на G_m . Теперь стандартный результат из [7] (предложение 1.4.1) показывает, что $E'_m \otimes L_m$ тривиально для всех m . Поэтому $\varprojlim (E'_m \otimes L_m)$ тривиально. Чтобы увидеть, что $\mathbf{E}'$ само является тривиальным, заметим, что линейные расслоения L_m определяют линейное расслоение $\mathbf{L} = \varprojlim L_m$ на $\mathbf{G}$. Поскольку $\mathbf{G}$ является скрученным грассманианом, то при любом m класс Черна $c_1(\mathbf{L}|_{G_m}) = c_1(L_m)$ должен делиться на $\deg(\varphi_n \circ \dots \circ \varphi_m)$ для всех $n > m$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \deg(\varphi_n \circ \dots \circ \varphi_m) = \infty$, то отсюда следует, что $c_1(L_m) = 0$, и, следовательно, $\mathbf{L}$ тривиально. Поэтому $\mathbf{E}' \simeq \varprojlim (E'_m \otimes L_m)$ тривиально.

6.2. Наблюдение о классе $c_2(\mathbf{E})$. Заметим, что вложения $\varphi_m: G_m \rightarrow G_{m+1}$ определяют гомоморфизмы $\varphi_m^*: A^2(G_{m+1}) \rightarrow A^2(G_m)$, и второй класс Черна расслоения $\mathbf{E}$ есть по определению проективная система $\{c_2(E_m) = \varphi_m^* c_2(E_{m+1})\}_{m \geq 1}$. Здесь

$$A(G_m) = \bigoplus_{i \geq 0} A^i(G_m)$$

обозначает кольцо Чжоу грассманиана G_m , и мы напомним некоторые стандартные факты о кольце $A(G_m)$ (ср. [12; гл. 14, § 7]):

- (i) $A^1(G_m) = \text{Pic}(G_m) = \mathbb{Z}[\mathbb{V}_m]$, $A^2(G_m) = \mathbb{Z}[\mathbb{W}_{1,m}] \oplus \mathbb{Z}[\mathbb{W}_{2,m}]$, где $\mathbb{V}_m, \mathbb{W}_{1,m}, \mathbb{W}_{2,m}$ – многообразия Шуберта:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_m &= \{V^{i_m} \in G_m \mid \dim(V^{i_m} \cap V_0^{n_m - i_m - 1}) \geq 1 \\ &\quad \text{для фиксированного подпространства } V_0^{n_m - i_m - 1} \text{ в } V^{n_m}\}, \\ \mathbb{W}_{1,m} &= \{V^{i_m} \in G_m \mid \dim(V^{i_m} \cap V_0^{n_m - i_m - 1}) \geq 1 \\ &\quad \text{для фиксированного подпространства } V_0^{n_m - i_m - 1} \text{ в } V^{n_m}\}, \\ \mathbb{W}_{2,m} &= \{V^{i_m} \in G_m \mid \dim(V^{i_m} \cap V_0^{n_m - i_m + 1}) \geq 2 \\ &\quad \text{для фиксированного подпространства } V_0^{n_m - i_m + 1} \text{ в } V^{n_m}\}; \end{aligned}$$

- (ii) $[\mathbb{V}_m]^2 = [\mathbb{W}_{1,m}] + [\mathbb{W}_{2,m}]$ в $A^2(G_m)$;
 (iii) существуют целые числа $a_{ij}(m) \geq 0$, $i, j = 1, 2$, такие, что

$$\begin{aligned}\varphi_m^*[\mathbb{W}_{1,m+1}] &= a_{11}(m)[\mathbb{W}_{1,m}] + a_{21}(m)[\mathbb{W}_{2,m}], \\ \varphi_m^*[\mathbb{W}_{2,m+1}] &= a_{12}(m)[\mathbb{W}_{1,m}] + a_{22}(m)[\mathbb{W}_{2,m}],\end{aligned}\quad (6.2)$$

$$a_{11}(m) + a_{12}(m) = a_{21}(m) + a_{22}(m) = (\deg \varphi_m)^2, \quad m \geq 1. \quad (6.3)$$

ЛЕММА 10. Для данного расслоения $\mathbf{E} = \varprojlim E_m$ существует бесконечная подпоследовательность последовательности грассманианов G_m такая, что координаты класса $c_2(E_m)$ в базисе $\{[\mathbb{W}_{1,m}], [\mathbb{W}_{2,m}]\}$ являются константами $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$ и $\lambda_2 \in \mathbb{Z}$. Более того, если $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, то $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$c_2(E_m) = \lambda_{1m}[\mathbb{W}_{1,m}] + \lambda_{2m}[\mathbb{W}_{2,m}]. \quad (6.4)$$

Рассмотрим (2×2) -матрицу $A(m) = (a_{ij}(m))$ и вектор-столбец $\Lambda_m = (\lambda_{1m}, \lambda_{2m})^t$. Соотношения (6.4) и (6.2) дают

$$\Lambda_m = A(m)\Lambda_{m+1}. \quad (6.5)$$

Положим $\gamma_m := \lambda_{1m} - \lambda_{2m}$. Тогда, подставляя (6.3) в (6.5), находим

$$\begin{aligned}\gamma_m &= (a_{11}(m) - a_{21}(m))\gamma_{m+1} = \gamma_{m+m'+1} \prod_{i=1}^{m'} (a_{11}(m+i) - a_{21}(m+i)), \\ m, m' &\geq 1.\end{aligned}\quad (6.6)$$

Предположим, что $\gamma_{m_0} \neq 0$ для некоторого $m_0 \geq 1$. Тогда (6.6) влечет $a_{11}(m) - a_{21}(m) \neq 0$, $\gamma_m \neq 0$, $m \geq m_0$. Кроме того, если $|a_{11}(m) - a_{21}(m)| > 1$ для бесконечного набора значений $m \geq m_0$, то правая часть в (6.6) неограниченно возрастает при $m' \rightarrow \infty$, приводя к противоречию. Следовательно, $|a_{11}(m) - a_{21}(m)| > 1$ для не более чем конечного числа значений $m \geq m_0$. Удаляя грассманианы G_m с этими значениями m из нашего инд-грассманиана $\mathbf{G}$ (и беря в качестве новых вложений соответствующие композиции старых вложений), мы можем считать, что $|a_{11}(m) - a_{21}(m)| = 1$ для всех $m \geq m_0$. Поскольку для бесконечного числа значений m числа $a_{11}(m) - a_{21}(m)$ имеют одинаковый знак, то последовательность $\{\gamma_m\}$ имеет бесконечную постоянную подпоследовательность. Следовательно, снова после удаления подходящих значений m в конструкции инд-грассманиана $\mathbf{G}$ мы можем считать, что

$$\gamma := \gamma_m = \lambda_{1m} - \lambda_{2m} \neq 0, \quad m \geq m_0. \quad (6.7)$$

Пусть $\gamma > 0$. (В случае $\gamma < 0$ рассуждения аналогичны.) Как показано в [7; § 5], при достаточно большом m (скажем, при $m \geq m_0$) оба числа λ_{1m} и λ_{2m} не могут одновременно быть ненулевыми числами одного знака. (Доказательство в [7] проведено для расслоений ранга 2, но оно годится для расслоений E_m произвольного ранга.) Это свойство вместе с (6.7) влечет неравенства

$$\gamma \geq \lambda_{1m} \geq 0, \quad 0 \geq \lambda_{2m} \geq -\gamma, \quad m \geq m_0.$$

Таким образом, существуют бесконечные постоянные подпоследовательности $\{\lambda_{1,m'} =: \lambda_1 \geq 0\}_{m' \geq m_0}$ и $\{\lambda_{2,m'} =: \lambda_2 \leq 0\}_{m' \geq m_0}$ соответственно последовательностей $\{\lambda_{1m}\}_{m \geq m_0}$ и $\{\lambda_{2m}\}_{m \geq m_0}$. Поэтому снова без ограничения общности мы можем считать, что последовательности $\{\lambda_{1m}\}_{m \geq m_0}$ и $\{\lambda_{2m}\}_{m \geq m_0}$ постоянны:

$$0 \leq \lambda_1 = \lambda_{1m}, \quad 0 \geq \lambda_2 = \lambda_{2m}, \quad m \geq m_0. \quad (6.8)$$

Всюду ниже мы предполагаем, что координаты класса $c_2(E_m)$ в базисе $\{[\mathbb{W}_{1,m}], [\mathbb{W}_{2,m}]\}$ постоянны для нашей фиксированной последовательности грассманианов G_m .

Напомним, что имеются два семейства проективных подпространств максимальной размерности в G_m : семейство $\mathbb{I}_1$, состоящее из подпространств

$$\mathbb{P}^{i_m} = \{V^{i_m} \in G_m \mid V^{i_m} \subset V_0^{i_m+1}\}, \quad V_0^{i_m+1} \in G(i_m+1, V^{n_m}),$$

и семейство $\mathbb{I}_2$, состоящее из подпространств

$$\mathbb{P}^{n_m-i_m} = \{V^{i_m} \in G_m \mid V^{i_m} \supset V_0^{i_m-1}\}, \quad V_0^{i_m-1} \in G(i_m-1, V^{n_m}).$$

Лемма 10 влечет нижеследующее.

СЛЕДСТВИЕ 1. В обозначениях леммы 10 мы имеем

$$\begin{aligned} c_2(E_m|_{\mathbb{P}^{i_m}}) &= \lambda_2, & \mathbb{P}^{i_m} &\in \mathbb{I}_1, \\ c_2(E_m|_{\mathbb{P}^{n_m-i_m}}) &= \lambda_1, & \mathbb{P}^{n_m-i_m} &\in \mathbb{I}_2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

6.3. Многообразие прямых максимального подскока расслоения E_m , проходящих через точку. Для фиксированного m рассмотрим естественную диаграмму

$$G_m = G(i_m, V^{n_m}) \xleftarrow{\pi_1} \Gamma_m \xrightarrow{\pi_2} \text{Fl}_m, \quad (6.10)$$

где $\Gamma_m := \text{Fl}(i_m-1, i_m, i_m+1, V^{n_m})$ и $\text{Fl}_m := \text{Fl}(i_m-1, i_m+1, V^{n_m})$ есть база семейства (проективных) прямых на G_m . Положим

$$Z_a(E_m) := \{l \in \text{Fl}_m \mid \delta_A(E_m|_l) \geq a\}, \quad B_a(E_m) := \pi_2^{-1}(Z_a(E_m)), \quad a \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Из полунепрерывности $\delta_A(E_m|_l)$ как функции от l следует, что $Z_a(E_m)$ замкнуто в Fl_m ; соответственно $B_a(E_m)$ замкнуто в Γ_m . Далее, положим

$$\Delta := \min\{a \mid \text{im}(\pi_1(B_a(E_m))) \neq G_m\} - 1. \quad (6.11)$$

Тогда $Y := \pi_1(B_{\Delta+1}(E_m)) \neq G_m$, $\pi_1(B_{\Delta}(E_m)) = G_m$ и множество

$$G'_m := G_m \setminus Y = \{x \in G_m \mid \Delta = \max\{\delta_A(E_m|_l) \mid l \text{ есть прямая на } G_m \text{ через } x\}\}$$

является плотным открытым подмножеством в G_m .

Обозначим $p_{\Delta, E_m} := \pi_1|_{B_{\Delta}(E_m)}$. Тогда множество $B_{\Delta}(E_m)' := p_{\Delta, E_m}^{-1}(G'_m)$ замкнуто в $\pi_1^{-1}(G'_m)$ и морфизм $p_{\Delta, E_m} : B_{\Delta}(E_m)' \rightarrow G'_m$ проективен и сюръективен. Аналогично, для каждого a , $1 \leq a \leq r$,

$$B_{\Delta}^a(E_m) := \{(x, l) \in B_{\Delta}(E_m) \mid l \in Z_{\Delta}(E_m), \kappa_A(E_m|_l) \geq a\}$$

является замкнутым подмножеством в $B_\Delta(E_m)$; соответственно множество $p_{\Delta, E_m}(B_\Delta^a(E_m))$ замкнуто в G_m . Поскольку $\varkappa_A(E_m|l) \geq 1$ для любой $l \in Z_\Delta(E_m)$, мы получаем, что $\pi_1(B_\Delta^1(E_m)) = G_m$.

Если $\pi_1(B_\Delta^{\mathbf{r}}(E_m)) \neq G_m$, мы полагаем

$$K := \min\{2 \leq a \leq \mathbf{r} \mid \pi_1(B_\Delta^a(E_m)) \neq G_m\} - 1, \quad T := \pi_1(B_\Delta^{K+1}(E_m)), \quad (6.12)$$

$$G_m^0 := G'_m \setminus T, \quad B_\Delta^K(E_m)^0 := \pi_1^{-1}(G_m^0) \cap B_\Delta^K(E_m); \quad (6.13)$$

если $\pi_1(B_\Delta^{\mathbf{r}}(E_m)) = G_m$, то полагаем

$$K := \mathbf{r}, \quad G_m^0 := G'_m, \quad B_\Delta^K(E_m)^0 := B_\Delta(E_m). \quad (6.14)$$

По определению G_m^0 есть плотное открытое подмножество в G'_m , а значит, и в G_m , и морфизм $p_{\Delta, E_m}^K := \pi_1|_{B_\Delta^K(E_m)^0} : B_\Delta^K(E_m)^0 \rightarrow G_m^0$ проективен и сюръективен.

6.4. Оценка коразмерности множества $B_\Delta^K(E_m)$. Полунепрерывность $\delta_A(E_m|l)$ (соответственно $\delta(E_m|l)$) как функции от l показывает, что минимальное значение $\delta_A(E_m|l)$ (соответственно $\delta(E_m|l)$) достигается на плотном открытом множестве прямых $l \in \text{Fl}_m$. В дальнейшем мы обозначаем это минимальное значение через $\delta_A^{\text{gen}}(E_m)$ (соответственно через $\delta^{\text{gen}}(E_m)$).

ЛЕММА 11. *Предположим, что $\delta_A^{\text{gen}}(E_m) > \frac{1}{2}\mathbf{r}$. Тогда существует подпучок $\mathcal{F}_m$ в E_m с $c_1(\mathcal{F}_m) > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства $\delta_A^{\text{gen}}(E_m) > \frac{1}{2}\mathbf{r}$ и зануления $c_1(E_m)$ следует, что для любой прямой $l \subset G_m$ тип расщепления $(\delta_1, \dots, \delta_{\mathbf{r}})$ расслоения $E|_l$ удовлетворяет неравенству $\delta_s - \delta_{s+1} \geq 2$ для некоторого s , $1 \leq s \leq \mathbf{r} - 1$. Поэтому выполнено условие теоремы 1.4.2 из [7] (являющейся вариантом леммы о спуске из [15; ч. II, лемма 2.1.2] для случая грассманианов), и эта теорема дает подпучок $\mathcal{F}_m$ в E_m . Поскольку E_m самодвойственно, зануление класса $c_1(E_m)$ влечет положительность числа δ_s , а значит, по построению пучка $\mathcal{F}_m$ мы имеем $c_1(\mathcal{F}_m) = \delta_1 + \dots + \delta_s > 0$.

ЛЕММА 12. *Для достаточно большого t не существует подпучков $\mathcal{F}_m \subset E_m$ с $c_1(\mathcal{F}_m) > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{d}_m := \deg \tilde{\varphi}_m$. Рассмотрим многочлен $P_m(t) := \tilde{d}_m t + 1$, и положим

$$\mathcal{H}_m := \{C \in \text{Hilb}^{P_m(t)} G_m \mid C \text{ есть гладкая неприводимая кривая степени } \tilde{d}_m \text{ на } G_m\}.$$

Из работы С. Стрёмме [16] известно, что $\mathcal{H}_m$ есть гладкое неприводимое многообразие размерности $n_m \tilde{d}_m + i_m(n_m - i_m) - 3$.

Предположим, что $\mathcal{F}_m$ есть подпучок в E_m с $c_1(\mathcal{F}_m) > 0$. Тогда

$$\text{codim}_{G_m} \text{Sing } \mathcal{F}_m \geq 2,$$

поскольку E_m локально свободен (см. [15; ч. II, следствие 1.1.9]). Более того, так как G_m является однородным пространством, $\mathcal{H}_m^* := \{C \in \mathcal{H}_m \mid C \cap \text{Sing } \mathcal{F}_m = \emptyset\}$ есть плотное открытое множество в $\mathcal{H}_m$.

Положим $a_m := \min_{C \in \mathcal{H}_m} \{\delta_A(E_m|_C)\}$. Так как $\delta_A(E_m|_C)$ полунепрерывна как функция от C , то $\mathcal{H}_m^0 := \{C \in \mathcal{H}_m \mid \delta_A(E_m|_C) = a_m\}$ есть плотное открытое подмножество в $\mathcal{H}_m$ и для любой проективной прямой $l \subset G_1$

$$\delta_A(E_1|_l) = \delta_A(E_m|_{C_1}) \geq a_m, \quad (6.15)$$

где $C_1 := \tilde{\varphi}_m(l) \in \mathcal{H}_m$. Теперь допустим, что $c_1(\mathcal{F}_m) \geq 1$, и рассмотрим произвольную кривую $C \in \mathcal{H}_m^* \cap \mathcal{H}_m^0$ такую, что $\delta_A(E_m|_C) = a_m$. Так как $\mathcal{F}_m|_C$ является локально свободным подпучком в $E_m|_C$ с $c_1(\mathcal{F}_m) \geq 1$, то, следовательно,

$$a_m = \delta_A(E_m|_C) \geq \delta_A(\mathcal{F}_m|_C) \geq \frac{c_1(\mathcal{F}_m|_C)}{\mathbf{r}} = \frac{\tilde{d}_m c_1(\mathcal{F}_m)}{\mathbf{r}} \geq \frac{\tilde{d}_m}{\mathbf{r}}.$$

Комбинируя это с (6.15), получаем $\delta_A(E_1|_l) \geq \tilde{d}_m/\mathbf{r}$, в частности,

$$b_1 := \max_{l' \in \mathcal{H}_1} \{\delta_A(E_1|_{l'})\} \geq \frac{\tilde{d}_m}{\mathbf{r}}.$$

Если $\mathcal{F}_m$ существует для бесконечного числа значений m , то правая часть в последнем неравенстве стремится к бесконечности при $m \rightarrow \infty$, поскольку $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{d}_m = \infty$. Противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для достаточно больших m $\delta_A^{\text{gen}}(E_m) \leq \frac{1}{2}\mathbf{r}$.

Зафиксируем точку $x \in G_m$ и для любого $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ рассмотрим локально замкнутое подмножество

$$B_a^0(x) := \{l \in \pi_1^{-1}(x) \mid \delta(E_m|_l) = a\}$$

в $\pi_1^{-1}(x)$. Пусть $B_a(x)$ есть его замыкание в $\pi_1^{-1}(x)$. Полунепрерывность $\delta(E_m|_l)$ влечет $B_a^0(x) = B_a(x) \setminus (\bigcup_{a' > a} B_{a'}(x))$, $a > 0$. Обозначим

$$\delta := \delta_A(E_m), \quad \varkappa := \varkappa_A(E_m).$$

Тогда

$$B_\delta(x) = B_\delta^0(x). \quad (6.16)$$

Кроме того, положим

$$B_\delta^\varkappa(x) := \{l \in B_\delta(x) \mid \varkappa_A(E_m|_l) = \varkappa\} \quad (6.17)$$

и заметим, что $B_\delta^\varkappa(x)$ является замкнутым подмножеством в $B_\delta(x)$. Следующий результат принадлежит А. Н. Тюрину (см. [2; ч. 2, § 2, леммы 3 и 4]).

ЛЕММА 13. Если $B_\delta^\varkappa(x) \neq \emptyset$, то $\text{codim}_{\pi_1^{-1}(x)} B \leq \mathbf{r}(\mathbf{r} - 1)\delta(E_m)$ для любой неприводимой компоненты B в $B_\delta^\varkappa(x)$.

Поскольку E_m самодвойственно, получаем, что $\delta(E_m) = 2\delta$, и, тем самым, лемма 13 влечет

$$\text{codim}_{\pi_1^{-1}(x)} B \leq 2\mathbf{r}(\mathbf{r} - 1)\delta \quad (6.18)$$

при условии, что $B_\delta^\varkappa(x) \neq \emptyset$.

Рассмотрим замкнутое подмножество

$$W := \{x \in G_m \mid B_{\delta_A^{\text{gen}}(E_m)}^0(x) = \emptyset\}$$

в G_m и положим

$$G_m^* := (G_m \setminus W) \cap G_m^0,$$

где G_m^0 было определено в (6.13) и (6.14). Ясно, что $W \cap l = \emptyset$ для общей прямой $l \subset G_m$, а следовательно, G_m^* есть плотное открытое подмножество в G_m и для любого $x \in G_m^*$ существует прямая $l \subset G_m$, проходящая через x , для которой $\delta_A(E_m|l) = \delta_A^{\text{gen}}(E_m)$.

Нам потребуется еще один результат А. Н. Тюринана. Из леммы 5 его статьи [2; ч. 2, § 2] непосредственно вытекает следующее.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Существует многочлен $F \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$ такой, что если E – самодвойственное векторное расслоение на $\mathbb{P}^3$ и P – произвольная плоскость в $\mathbb{P}^3$, то*

$$\delta_A(E|l) \leq F(\delta^{\text{gen}}(E), \chi(E|_P))$$

для произвольной прямой $l \subset \mathbb{P}^3$.

Теперь зафиксируем точку $x \in G_m$, и пусть $K_m(x)$ – подмногообразие в G_m , заметаемое проективными подпространствами максимальной размерности в G_m , проходящими через x . Хорошо известно, что $K_m(x)$ является конусом над прямым произведением $\mathbb{P}^{i_m-1} \times \mathbb{P}^{n_m-i_m-1}$. Из следствия 3 вытекает, что для любой прямой $l \in p_1^{-1}(x)$ выполнено неравенство

$$\delta_A(E_m|l) \leq F(\delta^{\text{gen}}(E_m), \chi(E_m|_P)), \quad (6.19)$$

где $F \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$ – некоторый многочлен и $P \subset K_m(x)$ – некоторая проективная плоскость. Класс плоскости P в кольце Чжоу $A(G_m)$ совпадает с классом плоскости, содержащейся в проективном подпространстве одного из семейств $\mathbb{I}_1$ или $\mathbb{I}_2$ на G_m . Следовательно, в силу того, что $c_1(E_m) = 0$, теорема Римана–Роха и следствие 1 влекут, что $\chi(E|_P)$ совпадает с $\mathbf{r} - \lambda_1$ или $\mathbf{r} - \lambda_2$. Подставляя это в (6.19) и учитывая следствие 2, мы видим, что существует константа Δ , не зависящая от m , ограничивающая $\delta_A(E_m|l)$ сверху для произвольной прямой $l \in p_1^{-1}(x)$ и произвольной точки $x \in G_m^*$.

Переходя от последовательности $(G_m, E_m)_{m \geq 1}$ к ее подходящей подпоследовательности $(G_{m'}, E_{m'})_{m' \geq 1}$ и заменяя исходную последовательность этой подпоследовательностью, мы получаем в силу (6.11), (6.12)–(6.14), леммы 13 и (6.18) следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Существуют константы Δ , K и $m_0 \geq 1$ такие, что для любого $m \geq m_0$ существует плотное открытое подмножество G_m^* в G_m такое, что для любой точки $x \in G_m^*$ выполняются следующие утверждения.*

(1) $\delta_A(E_m|l) \leq \Delta$, $\varkappa_A(E_m|l) \leq K$ для произвольной прямой $l \in B_m(x)$ и

$$\delta_A(E_m|l) = \Delta, \quad \varkappa_A(E_m|l) = K$$

для некоторой прямой $l \in B_m(x)$. Поэтому $B_\Delta^K(x) \neq \emptyset$ и

$$\text{codim}_{\pi_1^{-1}(x)} B \leq 2\mathbf{r}(\mathbf{r} - 1)\Delta$$

для любой неприводимой компоненты B множества $B_\Delta^K(x)$ в соответствии с леммой 13.

(2) Пусть $B_\Delta^K(E_m)^* := (p_{\Delta, E_m}^K)^{-1}(G_m^*)$. Тогда $p_{\Delta, E_m}^K : B_\Delta^K(E_m)^* \rightarrow G_m^*$ является проективным сюръективным морфизмом таким, что

$$(p_{\Delta, E_m}^K)^{-1}(x) = B_\Delta^K(x). \quad (6.20)$$

6.5. Завершающие утверждения. Нам остается доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8. В условиях предложения из п. 6.4 положим $\Delta > 0$. Тогда существует подпучок $\mathcal{F}_m$ в E_m с $c_1(\mathcal{F}_m) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим относительный грассманиан $g: G(K, E_m) \rightarrow G_m$ со слоем $g^{-1}(x) = G(K, E_m|_x)$ над $x \in G_m$. Положим $G(K, E_m)^* := g^{-1}(G_m^*)$. В соответствии с предложением из п. 6.4 для любой точки $(x, l) \in B_\Delta^K(E_m)^*$ существует подрасслоение

$$F(x, l) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\Delta)^K \quad (6.21)$$

в $E|_l$. Это дает морфизм

$$\Phi: B_\Delta^K(E_m)^* \rightarrow G(K, E_m)^*, \quad (x, l) \mapsto F(x, l)|_x, \quad (6.22)$$

который, очевидно, входит в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} B_\Delta^K(E_m)^* & \xrightarrow{\Phi} & G(K, E_m)^* \\ & \searrow p_{\Delta, E_m}^K & \downarrow g \\ & & G_m^* \end{array} \quad (6.23)$$

В остальной части доказательства мы предполагаем, что $i_m \geq 2$. Оставшийся случай $i_m = 1$ есть случай скрученного инд-проективного пространства, и мы оставляем его читателю в качестве упражнения. Заметим, что (поскольку $i_m \geq 2$) $G_m = G(i_m, V^{n_m})$ входит в диаграмму (3.9) для $V = V^{n_m}$, $i = i_m - 1$, и положим $p := p_{i_m-1}$, $q := q_{i_m-1}$; получим диаграмму

$$G_m \xleftarrow{p} \text{Fl}(i_m - 1, i_m, V^{n_m}) \xrightarrow{q} G(i_m - 1, V^{n_m}). \quad (6.24)$$

Зафиксируем подпространство $V_0^{n_m-1}$ в V^{n_m} и положим $Y := q^{-1}(G(i_m - 1, V_0^{n_m-1}))$. Проекция $\sigma := p|_Y: Y \rightarrow G_m$ есть не что иное как раздутие G_m с центром в подмногообразии

$$Z_0 := G(i_m, V_0^{n_m-1}), \quad \text{codim}_{G_m} Z_0 = i_m \geq 2. \quad (6.25)$$

Зафиксируем произвольную точку $x \in G_m^* \setminus Z_0$ и рассмотрим проективное подпространство

$$\mathbb{P}_x^{n_m-i_m} := \sigma(q^{-1}(q(\sigma^{-1}(x)))) \subset G_m, \quad (6.26)$$

проходящее через x . Заметим, что слой $B_\Delta^K(x) = (p_{\Delta, E_m}^K)^{-1}(x)$ проекции

$$p_{\Delta, E_m}^K: B_\Delta^K(E_m)^* \rightarrow G_m^*$$

лежит в $p_1^{-1}(x)$. Далее, полагая

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{n_m-i_m-1}(x) &:= \{\mathbb{P}^{i_m} \text{ принадлежит семейству } \mathbb{I}_1 \mid x \in \mathbb{P}^{i_m}\}, \\ \mathbb{P}^{i_m-1}(x) &:= \{\mathbb{P}^{n_m-i_m} \text{ принадлежит семейству } \mathbb{I}_2 \mid x \in \mathbb{P}^{n_m-i_m}\},\end{aligned}$$

рассмотрим изоморфизм

$$\mathbb{P}^{i_m-1}(x) \times \mathbb{P}^{n_m-i_m-1}(x) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{-1}(x), \quad (\mathbb{P}^{n_m-i_m}, \mathbb{P}^{i_m}) \mapsto l = \mathbb{P}^{n_m-i_m} \cap \mathbb{P}^{i_m}$$

и проекции

$$\mathbb{P}^{n_m-i_m-1}(x) \xleftarrow{\text{pr}_1} \pi_1^{-1}(x) \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbb{P}^{i_m-1}(x).$$

По построению морфизма σ база $\mathbb{P}_x^{n_m-i_m-1}$ семейства прямых через точку x , лежащих в подпространстве $\mathbb{P}_x^{n_m-i_m}$, есть слой проекции $\pi_1^{-1}(x) \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbb{P}^{i_m-1}(x)$ над некоторой точкой, определяемой точкой x .

Рассмотрим замкнутое подмножество

$$B_{\Delta,x}^K := B_{\Delta}^K(x) \cap \mathbb{P}_x^{n_m-i_m-1} \quad (6.27)$$

в $\mathbb{P}_x^{n_m-i_m-1}$. Предложение из п. 6.4 влечет

$$\text{codim}_{\mathbb{P}_x^{n_m-i_m-1}} X \leq 2\mathbf{r}(\mathbf{r}-1)\Delta \quad (6.28)$$

для любой неприводимой компоненты X в $B_{\Delta,x}^K$. Пусть

$$N := 2\mathbf{r}(\mathbf{r}-1)\Delta + 1. \quad (6.29)$$

Возьмем произвольное проективное подпространство $\mathbb{P}^{N-1} \subset \mathbb{P}_x^{n_m-i_m-1}$, и пусть $\mathbb{P}^N \subset \mathbb{P}_x^{n_m-i_m}$ – подпространство, заметаемое прямыми из $\mathbb{P}^{N-1}$. Положим $E^0 := E_m|_{\mathbb{P}^N}$. Тогда $\delta_A(E^0) = \Delta$, $\varkappa_A(E^0) = K$ по предложению из п. 6.4 и $c_2(E^0) = \lambda_1$ согласно (6.9). Вдобавок, сравнивая (5.61) с (6.27) и (6.20), получаем

$$B_{\Delta}^K(E^0, x, \mathbb{P}^{N-1}) = B_{\Delta,x}^K \cap \mathbb{P}^{N-1},$$

и (6.28) и (6.29) влекут

$$\deg B_{\Delta}^K(E^0, x, \mathbb{P}^{N-1}) = \deg B_{\Delta,x}^K$$

для общего выбора подпространства $\mathbb{P}^{N-1}$ в $\mathbb{P}_x^{n_m-i_m-1}$. Применяя теорему 7 к векторному расслоению E^0 с $\delta_A(E^0) = \Delta$ и $\varkappa_A(E^0) = K$, получаем

$$\deg B_{\Delta}^K(E^0, x, \mathbb{P}^{N-1}) \leq d,$$

где d – не зависящая от m константа. Таким образом,

$$\deg B_{\Delta,x}^K \leq d. \quad (6.30)$$

Далее, предположим, что m достаточно велико, так что оценка (6.28) для любой неприводимой компоненты в $B_{\Delta,x}^K$ вместе с условием $\lim_{m \rightarrow \infty} (n_m - i_m) = \infty$ дают связность $B_{\Delta,x}^K$. Но тогда $\deg X \leq d$ в силу (6.30). Без ограничения общности мы можем считать, что $\mathbb{P}_x^{n_m-i_m-1} = \text{Span } X$. Поэтому, применяя теорему 4 к X , получаем следующее утверждение: для достаточно большого m

любые две точки на X можно соединить цепочкой подпространств $\mathbb{P}^{k_0} \subset X$, где $k_0 > \dim G(K, E_m|_x)$. Поэтому все такие подпространства $\mathbb{P}^{k_0}$ отображаются при морфизме Φ в одну и ту же точку. Следовательно, $\Phi(X)$ – точка, а поскольку $B_{\Delta,x}^K$ связно, то $\Phi(B_{\Delta,x}^K) = \Phi(X)$. Это определяет морфизм

$$G_m^* \setminus Z_0 \rightarrow G(K, E_m|_x), \quad x \mapsto \Phi(B_{\Delta,x}^K),$$

а значит, задает подрасслоение $\mathcal{F}'_m$ в $E_m|_{G_m^* \setminus Z_0}$.

Следующая хорошо известная конструкция показывает, что $\mathcal{F}'_m$ продолжается до подпучка $\mathcal{F}_m$ в E_m . Эпиморфизм локально свободных пучков

$$E_m^\vee|_{G_m^* \setminus Z_0} \twoheadrightarrow (\mathcal{F}'_m)^\vee$$

определяет композицию вложений

$$\zeta: \mathbb{P}(\mathcal{F}'_m) \hookrightarrow \mathbb{P}(E_m|_{G_m^* \setminus Z_0}) \hookrightarrow \mathbb{P}(E_m).$$

Пусть U – замыкание $\zeta(\mathbb{P}(\mathcal{F}'_m))$ в $\mathbb{P}(E_m)$. Положим $A := \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_m)/G_m}(1)$, и пусть $\theta: \mathbb{P}(E_m) \rightarrow G_m$ – структурный морфизм. Применяя функтор $R\theta_*$ к точной тройке $0 \rightarrow \mathcal{I}_{U, \mathbb{P}(E_m)} \otimes A \rightarrow A \rightarrow A|_U \rightarrow 0$, получаем точную последовательность $E_m^\vee \xrightarrow{\varepsilon} \theta_*(A|_U) \rightarrow R^1\theta_*(\mathcal{I}_{U, \mathbb{P}(E_m)} \otimes A)$. Морфизм $\varepsilon|_{G_m^* \setminus Z_0}$ является эпиморфизмом, а значит, $\varepsilon^\vee: \mathcal{F}_m := (\theta_*(A|_U))^\vee \rightarrow E_m$ – мономорфизм и $\mathcal{F}_m|_{G_m^* \setminus Z_0} \simeq \mathcal{F}'_m$.

Остается показать, что $c_1(\mathcal{F}_m) > 0$. Согласно (6.21), если $x \in G_m^* \setminus Z_0$, то для любой точки $(x, l_0) \in B_{\Delta,x}^K$ имеем подрасслоение $\mathcal{F}(x, l_0) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\Delta)^K$ в $E_m|_l$. Следовательно, $c_1(\mathcal{F}(x, l_0)) > 0$, поскольку $\Delta > 0$. Прямая l_0 лежит в проективном подпространстве $\mathbb{P}_x^{n_m - i_m}$ в G_m , определенном в (6.26), поэтому определение (6.27) показывает, что $(y, l_0) \in B_{\Delta,y}^K$ для любого y в плотном открытом подмножестве $U := l_0 \cap (G_m^* \setminus Z_0)$ прямой l_0 . Поэтому $\mathcal{F}(x, l_0)|_U = \mathcal{F}_m|_U$, а значит, $\mathcal{F}(x, l_0)$ изоморфен локально свободному факторпучку пучка $\mathcal{F}_m|_{l_0}$, т.е. $\mathcal{F}(x, l_0) \simeq (\mathcal{F}_m|_{l_0})/\text{Torsion}(\mathcal{F}_m|_{l_0})$.

Из того, что пучок $\mathcal{F}_m$ не имеет кручения как подпучок в E_m , следует, что $\text{codim}_{G_m} \text{Sing } \mathcal{F}_m \geq 2$, так что $\text{codim}_{\text{Fl}_m} \pi_2(\pi_1^{-1}(\text{Sing } \mathcal{F}_m)) \geq 1$. Поэтому найдется такая гладкая аффинная кривая $C \subset \text{Fl}_m$ с отмеченной точкой $c \in C$, что

$$\pi_1(\pi_2^{-1}(c)) = l_0, \quad (C \setminus \{c\}) \subset (\text{Fl}_m \setminus \pi_2(\pi_1^{-1}(\text{Sing } \mathcal{F}_m))).$$

Рассмотрим линейчатую поверхность $S := \pi_2^{-1}(C) \xrightarrow{\pi_2} C$ и положим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_S &:= (\pi_1^* \mathcal{F}_m|_S) / \text{Torsion}(\pi_1^* \mathcal{F}_m|_S), & \tilde{l}_0 &:= \pi_2^{-1}(c), \\ \mathcal{F}_{\tilde{l}_0} &:= (\mathcal{F}_S|_{\tilde{l}_0}) / \text{Torsion}(\mathcal{F}_S|_{\tilde{l}_0}), & \tilde{l}_t &:= \pi_2^{-1}(t), \quad t \in C \setminus \{c\}. \end{aligned}$$

Из условия $\pi_1(\pi_2^{-1}(c)) = l_0$ вытекает, что $\pi_1|_{\tilde{l}_0}: \tilde{l}_0 \rightarrow l_0$ – изоморфизм, а следовательно, $(\pi_1|_{\tilde{l}_0})^* \mathcal{F}(x, l_0) \simeq \mathcal{F}_{\tilde{l}_0}$. Поэтому

$$c_1(\mathcal{F}(x, l_0)) = c_1(\mathcal{F}_{\tilde{l}_0}). \quad (6.31)$$

А из того, что $\mathcal{F}_m|_{\pi_1(\tilde{l}_t)}$ локально свободен для $t \in C \setminus \{c\}$ в силу включения $(C \setminus \{c\}) \subset (\text{Fl}_m \setminus \pi_2(\pi_1^{-1}(\text{Sing } \mathcal{F}_m)))$, следует, что

$$c_1(\mathcal{F}_S|_{\tilde{l}_t}) = c_1(\mathcal{F}_m), \quad t \in C \setminus \{c\}. \quad (6.32)$$

Мы утверждаем, что

$$c_1(\mathcal{F}_{\tilde{l}_0}) \leq c_1(\mathcal{F}_S|_{\tilde{l}_t}), \quad t \in C \setminus \{c\}. \quad (6.33)$$

Действительно, так как $\mathcal{F}_S$ не имеет кручения, то, используя фильтрацию пучка $\mathcal{F}_S$ с последовательными факторами ранга 1 без кручения и удаляя, если нужно, конечное число точек из $C \setminus \{c\}$, мы сведем доказательство неравенства (6.33) к случаю, когда $\mathrm{rk} \mathcal{F}_S = 1$. Тогда $\mathcal{F}_S \simeq \mathcal{I}_{Y,S} \otimes L$ для некоторого линейного расслоения L на S и некоторой подсхемы Y в S размерности ≤ 0 . Рассмотрим схему $Y_0 := Y \cap \tilde{l}_0$ длины $\chi(\mathcal{O}_{Y_0}) \geq 0$ с носителем в $\tilde{l}_0$. Тогда $\mathcal{F}_{\tilde{l}_0} \simeq L|_{\tilde{l}_0}(-\chi(\mathcal{O}_{Y_0}))$, следовательно,

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{F}_{\tilde{l}_0}) &= c_1(L|_{\tilde{l}_0}) - \chi(\mathcal{O}_{Y_0}) = c_1(L|_{\tilde{l}_t}) - \chi(\mathcal{O}_{Y_0}) \\ &= c_1(\mathcal{F}_S|_{\tilde{l}_t}) - \chi(\mathcal{O}_{Y_0}) \leq c_1(\mathcal{F}_S|_{\tilde{l}_t}), \quad t \in C \setminus \{c\}. \end{aligned}$$

Наконец, (6.31)–(6.33) влекут $c_1(\mathcal{F}_m) \geq c_1(\mathcal{F}(x, l_0)) > 0$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Для всех $m > 0$ E_m есть тривиальное векторное расслоение на G_m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для достаточно больших m имеет место неравенство $\Delta > 0$, то теорема 8 противоречит лемме 12. Следовательно, $\Delta = 0$. Покажем, что это равенство влечет тривиальность расслоения E_m .

Рассмотрим диаграмму (6.24). Заметим, что для любой точки $x \in G_m$ проективное подпространство $\mathbb{P}^{i_m-1}(x)$ в $G(i_m-1, V^{n_m})$, введенное в доказательстве теоремы 8, совпадает с $q(p^{-1}(x))$. Аналогично, $\mathbb{P}^{n_m-i_m}(y) := p(q^{-1}(y))$ есть проективное подпространство в G_m для $y \in G(i_m-1, V^{n_m})$. Более того, легко видеть, что конус $K(x) := \bigcup_{y \in \mathbb{P}^{i_m-1}(x)} \mathbb{P}^{n_m-i_m}(y)$ с вершиной в x , рассматриваемый как приведенная подсхема в G_m , имеет то же самое касательное пространство по Зарискому в точке x , что и G_m :

$$T_x K(x) = T_x G_m. \quad (6.34)$$

Поскольку $\Delta = 0$, в обозначениях доказательства теоремы 8 имеем $B_\Delta^K(x) = \pi^{-1}(x)$ и $K = \mathbf{r}$ для любой точки $x \in G_m^*$, т.е. расслоение $E_m|_l$ тривиально для любой проективной прямой $l \subset G_m$, проходящей через x . Отсюда следует, что расслоение $E_m|_{\mathbb{P}^{n_m-i_m}(y)}$ тривиально для любой точки $y \in \mathbb{P}^{i_m-1}(x)$ (см., например, [15; ч. I, теорема 3.2.1]), и, следовательно, $\mathbb{P}^{n_m-i_m}(y) \subset G_m^*$.

Мы утверждаем, что $G_m^* = G_m$. В самом деле, если $G_m^* \neq G_m$, то для любой точки $x \in (G_m \setminus G_m^*)$ и любой точки $y \in \mathbb{P}^{i_m-1}(x)$ имеем $\mathbb{P}^{n_m-i_m}(y) \subset (G_m \setminus G_m^*)$. Следовательно, $K(x) \subset (G_m \setminus G_m^*)$ и в силу (6.34)

$$T_x G_m = T_x K(x) \subset T_x (G_m \setminus G_m^*),$$

где мы рассматриваем $(G_m \setminus G_m^*)$ как приведенную подсхему в G_m . Отсюда $(G_m \setminus G_m^*) = G_m$ вопреки тому, что G_m^* есть плотное открытое подмножество в G_m .

Мы показали, что $G_m^* = G_m$ для достаточно большого m . Поскольку $\Delta = 0$, это означает, что $E_m|_l$ тривиально для любой прямой l в G_m . В силу [7; предложение 1.4.1] этого достаточно для тривиальности расслоения E_m для достаточно больших m , а значит, и для всех $m > 0$.

Список литературы

- [1] W. Barth, A. Van de Ven, “On the geometry in codimension 2 of Grassmann manifolds”, *Classification of algebraic varieties and compact complex manifolds*, Lecture Notes in Math., **412**, Springer-Verlag, Berlin, 1974, 1–35.
- [2] А. Н. Тюрин, “Конечномерные расслоения на бесконечномерных многообразиях”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:6 (1976), 1248–1268; англ. пер.: A. N. Tjurin, “Vector bundles of finite rank over infinite varieties”, *Math. USSR-Izv.*, **10**:6 (1976), 1187–1204.
- [3] E. Sato, “On the decomposability of infinitely extendable vector bundles on projective spaces and Grassmann varieties”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **17**:1 (1977), 127–150.
- [4] E. Sato, “On infinitely extendable vector bundles on G/P ”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **19**:1 (1979), 171–189.
- [5] J. Donin, I. Penkov, “Finite rank vector bundles on inductive limits of grassmannians”, *Int. Math. Res. Not.*, **34** (2003), 1871–1887.
- [6] I. Coandă, G. Trautmann, “The splitting criterion of Kempf and the Babylonian tower theorem”, *Comm. Algebra*, **34**:7 (2006), 2485–2488.
- [7] I. Penkov, A. S. Tikhomirov, “Rank-2 vector bundles on ind-Grassmannians”, *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin*, v. II, Progr. Math., **270**, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2009, 555–572.
- [8] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **52**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1977.
- [9] A. B. Altman, S. L. Kleiman, “Foundations of the theory of Fano schemes”, *Compositio Math.*, **34**:1 (1977), 3–47.
- [10] R. Braun, S. Müller-Stach, “Effective bounds for Nori’s connectivity theorem”, *Higher dimensional complex varieties* (Trento, Italy, 1994), de Gruyter, Berlin, 1996, 83–88.
- [11] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry*, v. I: *Classical setting: line bundles and linear series*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **48**, Springer-Verlag, Berlin, 2004; v. II: *Positivity for vector bundles, and multiplier ideals*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **49**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [12] У. Фултон, *Теория пересечений*, Мир, М., 1989; пер. с англ.: W. Fulton, *Intersection theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [13] D. Huybrechts, M. Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Aspects Math., **31**, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.
- [14] D. Eisenbud, *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **150**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [15] Ch. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, Progr. Math., **3**, Birkhäuser, Boston–Basel–Stuttgart, 1980.
- [16] S. A. Strømme, “On parametrized rational curves in Grassmann varieties”, *Space curves* (Rocca di Papa, 1985), Lecture Notes in Math., **1266**, Springer-Verlag, 1987, 251–272.

И. Б. Пенков (I. B. Penkov)

School of Engineering and Science,
Jacobs University Bremen, Germany
E-mail: i.penkov@jacobs-university.de

Поступила в редакцию

08.07.2009 и 19.07.2010

А. С. Тихомиров (A. S. Tikhomirov)

Ярославский государственный педагогический
университет им. К. Д. Ушинского
E-mail: astikhomirov@mail.ru