Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Некоторые подходы к суммированию многомерных расходящихся интегралов, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 8, 25–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm760>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 04:16:44

УДК 517

Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов

Некоторые подходы к суммированию многомерных расходящихся интегралов

В работе рассмотрены различные подходы к понятию суммирования (определения конечной части – f.p.) расходящихся интегралов, в которых подынтегральная функция представлена в виде произведения двух функций: одна из них имеет неинтегрируемую особенность, зависящую от параметра, в одной точке интегрирования, а другая абсолютно интегрируема. Исследованы способы суммирования: на основе разложения в ряд Тейлора с центром в особой точке абсолютно интегрируемой функции – f.p.; на основе аналитического продолжения по параметру особенности интеграла – a.f.p.; на основе интегрирования по частям – f.p.r. Даны формулы замены переменных в таких интегралах.

Библиография: 12 названий.

Введение

Расходящиеся интегралы уже давно используются при решении прикладных задач (см., например, [1], [2] – одномерные сингулярные интегралы и уравнения с ними), причем для многих из этих задач применение расходящихся интегралов приводит к интегральным уравнениям более простой структуры, чем при сведении их к интегральным уравнениям Фредгольма. Особенно это заметно в пространственных (трехмерных) задачах в аэродинамике [3]–[5], электродинамике [6], теории упругости [7]. Расходящиеся двумерные интегралы позволяют строить и более простые вычислительные методы решения прикладных задач, например метод дискретных замкнутых вихревых рамок в аэродинамике [3], [4]. Поэтому целесообразно провести широкие исследования по возможным методам суммирования расходящихся многомерных интегралов.

В работе рассмотрены различные подходы к понятию суммирования (определения конечной части – f.p.) расходящихся интегралов, в которых подынтегральная функция представлена в виде произведения двух функций: одна из них имеет неинтегрируемую особенность, зависящую от параметра, в одной точке интегрирования, а другая абсолютно интегрируема. Исследованы способы суммирования: на основе разложения в ряд Тейлора с центром в особой точке абсолютно интегрируемой функции – f.p.; на основе аналитического продолжения по параметру особенности интеграла – a.f.p.; на основе интегрирования по частям – f.p.r. Даны формулы замены переменных в таких интегралах.

§ 1. Некоторые одномерные интегралы

Излагаемый здесь материал является вспомогательным для изучения многомерных интегралов.

Рассмотрим одномерный зависящий от параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ интеграл

$$\int_0^R a(r) r^{-\lambda-1} dr, \quad (1.1)$$

где a — ограниченная на $[0, R]$ функция. Интеграл (1.1) абсолютно сходится при $\operatorname{Re} \lambda < 0$, а при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ в общем случае расходится. Допустим теперь, что

$$a \in C^{m,\alpha}, \quad m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (1.2)$$

где $C^{m,\alpha}$ обозначает класс функций, подчиненных условиям:

$$a \in C^m[0, R], \quad |a^{(m)}(r) - a^{(m)}(0)| \leq M r^\alpha, \quad 0 \leq r \leq R, \quad (1.3)$$

$M > 0$ — некоторая константа.

Для $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \lambda < m + \alpha$ определим конечную часть (f.p., finite part) интеграла (1.1) с помощью тейлоровских разложений [8], [9]: если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$, то

$$\begin{aligned} \text{f.p.} \int_0^R a(r) r^{-\lambda-1} dr &= \int_0^R \left[a(r) - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} a^{(k)}(0) r^k \right] r^{-\lambda-1} dr \\ &\quad + \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} a^{(k)}(0) \frac{R^{k-\lambda}}{k-\lambda}; \end{aligned} \quad (1.4)$$

если же $\lambda = l \in \mathbb{N}_0$, то

$$\begin{aligned} \text{f.p.} \int_0^R a(r) r^{-l-1} dr &= \int_0^R \left[a(r) - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} a^{(k)}(0) r^k \right] r^{-l-1} dr \\ &\quad + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^m \frac{1}{k!} a^{(k)}(0) \frac{R^{k-l}}{k-l} + \frac{1}{l!} a^{(l)}(0) \ln R. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Сходимость интегралов в правых частях (1.4) и (1.5) обосновывается чуть позже. Мы предпочли единообразную запись формул, в которых часть членов сокращается, если $[\operatorname{Re} \lambda] < m$ и соответственно $l < m$. В действительности в (1.4) достаточно суммировать по k от 0 до $[\operatorname{Re} \lambda]$, а в (1.5) — от 0 до l . При $\operatorname{Re} \lambda < 0$ (1.4) сводится к равенству

$$\text{f.p.} \int_0^R a(r) r^{-\lambda-1} dr = \int_0^R a(r) r^{-\lambda-1} dr.$$

Как мы сейчас покажем, из (1.3) следует неравенство

$$\left| a(r) - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} a^{(k)}(0) r^k \right| \leq \frac{M}{m!} r^{m+\alpha}, \quad 0 \leq r \leq R, \quad (1.6)$$

поэтому интегралы в правых частях (1.4) и (1.5) при $\operatorname{Re} \lambda < m + \alpha$ абсолютно сходятся. При $m = 0$ (1.6) очевидно. При $m \geq 1$ имеем по формуле Тейлора с интегральным остаточным членом

$$\begin{aligned} a(r) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} a^{(k)}(0) r^k &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^r (r-\rho)^{m-1} a^{(m)}(\rho) d\rho \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^r (r-\rho)^{m-1} [a^{(m)}(\rho) - a^{(m)}(0)] d\rho + \frac{1}{m!} a^{(m)}(0) r^m, \end{aligned}$$

откуда следует

$$a(r) - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} a^{(k)}(0) r^k = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^r (r-\rho)^{m-1} [a^{(m)}(\rho) - a^{(m)}(0)] d\rho. \quad (1.7)$$

Это формула Тейлора с интегрально-разностным остаточным членом. Теперь из (1.3) и (1.7) получаем (1.6):

$$\left| a(r) - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} a^{(k)}(0) r^k \right| \leq \frac{M}{(m-1)!} \int_0^r (r-\rho)^{m-1} \rho^\alpha d\rho \leq \frac{M}{m!} r^{m+\alpha}.$$

Из (1.4) и (1.5) легко усмотреть, что при $0 < \varepsilon < R$ справедливо равенство

$$\text{f.p.} \int_0^R a(r) r^{-\lambda-1} dr = \int_\varepsilon^R a(r) r^{-\lambda-1} dr + \text{f.p.} \int_0^\varepsilon a(r) r^{-\lambda-1} dr.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, приходим к следующим формулам: для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$, $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, $a \in C^{l,\alpha}$, $l = [\operatorname{Re} \lambda]$, $\operatorname{Re} \lambda - l < \alpha \leq 1$, имеем

$$\text{f.p.} \int_0^R a(r) r^{-\lambda-1} dr = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_\varepsilon^R a(r) r^{-\lambda-1} dr + \sum_{k=0}^l \frac{1}{k!} a^{(k)}(0) \frac{\varepsilon^{k-\lambda}}{k-\lambda} \right\}, \quad (1.8)$$

а для $\lambda = l \in \mathbb{N}_0$, $a \in C^{l,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, имеем

$$\begin{aligned} \text{f.p.} \int_0^R a(r) r^{-l-1} dr &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_\varepsilon^R a(r) r^{-l-1} dr \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} a^{(k)}(0) \frac{\varepsilon^{k-l}}{k-l} + \frac{1}{l!} a^{(l)}(0) \ln \varepsilon \right\}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь, как обычно, считается, что сумма равна нулю, если в ней нижний предел суммирования больше верхнего.

Отметим два принципиально важных следствия из определений (1.4) и (1.5). Во-первых, при условии (1.2) правая часть равенства (1.4), а стало быть, и определяемый f.p.-интеграл представляет собой аналитическую по λ функцию в области

$\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0 : \operatorname{Re} \lambda < m + \alpha\}$ и, более того, является аналитическим продолжением интеграла (1.1) из области $\operatorname{Re} \lambda < 0$ в указанную область. Во-вторых, для целочисленных точек $\lambda = l \in \mathbb{N}_0$ из (1.4) и (1.5) следует предельное соотношение

$$\text{f.p.} \int_0^R a(r) r^{-l-1} dr = \lim_{\lambda \rightarrow l} \frac{d}{d\lambda} \left[(\lambda - l) \text{f.p.} \int_0^R a(r) r^{-\lambda-1} dr \right]. \quad (1.10)$$

Для доказательства (1.10) заметим, что для аналитической в точке $\lambda = l$ функции f имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow l} \frac{d}{d\lambda} \left[(\lambda - l) f(\lambda) \right] = \lim_{\lambda \rightarrow l} f(\lambda) = f(l),$$

поэтому из (1.4) следует

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow l} \frac{d}{d\lambda} \left[(\lambda - l) \text{f.p.} \int_0^R a(r) r^{-\lambda-1} dr \right] &= \int_0^R \left[a(r) - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} a^{(k)}(0) r^k \right] r^{-l-1} dr \\ &+ \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^m \frac{1}{k!} a^{(k)}(0) \frac{R^{k-l}}{k-l} + \frac{1}{l!} a^{(l)}(0) \lim_{\lambda \rightarrow l} \frac{d}{d\lambda} (-R^{l-\lambda}). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\frac{d}{d\lambda} R^{l-\lambda} = -R^{l-\lambda} \ln R$, мы приходим к правой части (1.5), и (1.10) доказано.

Определения (1.4) и (1.5) связаны с выбором первообразной $r^{k-\lambda}/(k-\lambda)$ функции $r^{k-\lambda-1}$, $k-\lambda \neq 0$, и первообразной $\ln r$ функции r^{-1} . Если использовать другие первообразные, на константу отличающиеся от указанных, то $\text{f.p.} \int_0^R a(r) r^{-\lambda-1} dr$ хотя и сохраняет свойство быть аналитической по λ , но уже не будет аналитическим продолжением интеграла (1.1), а также нарушится свойство (1.10).

Перейдем к обсуждению формулы замены переменных $r = g(\rho)$, где $g \in C^1[0, R_*]$,

$$g(0) = 0, \quad g(R_*) = R, \quad g'(\rho) > 0, \quad 0 \leq \rho \leq R_*. \quad (1.11)$$

Для $\operatorname{Re} \lambda < 0$ имеем

$$\int_0^R a(r) r^{-\lambda-1} dr = \int_0^{R_*} a(g(\rho)) (g(\rho))^{-\lambda-1} g'(\rho) d\rho = \int_0^{R_*} a_*(\rho, \lambda) \rho^{-\lambda-1} d\rho, \quad (1.12)$$

где в целях представления интеграла в форме (1.1) мы ввели функцию

$$a_*(\rho, \lambda) = a(g(\rho)) \left(\frac{g(\rho)}{\rho} \right)^{-\lambda-1} g'(\rho). \quad (1.13)$$

Теперь можно поставить вопрос, сохраняет ли формула (1.12) силу для f.p. -интегралов, когда $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Оказывается, что ответ утвердительный только для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$, а при $\lambda = l \in \mathbb{N}_0$ в формуле (1.12) возникает поправочный член.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполнены условия (1.2), (1.11), и пусть $g \in C^{m+1, \alpha}$. Тогда при $\operatorname{Re} \lambda < m + \alpha$ справедлива формула

$$\text{f.p.} \int_0^R a(r) r^{-\lambda-1} dr = \text{f.p.} \int_0^{R*} a_*(\rho, \lambda) \rho^{-\lambda-1} d\rho + \Pi_*(\lambda), \quad (1.14)$$

где $a_*(\rho, \lambda)$ — определенная в (1.13) функция, а

$$\Pi_*(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0, \\ -\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right)^l a_*(\rho, \lambda) \Big|_{\rho=0, \lambda=l}, & \lambda = l \in \mathbb{N}_0. \end{cases} \quad (1.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва заметим, что ф.р.-интегралы (1.4) и (1.5) нами определены при разных λ независимо друг от друга для любой функции $a \in C^{m, \alpha}$. Поэтому определения можно использовать и для функций $a(r, \lambda)$, зависящих от λ как от параметра. Например, в определении ф.р. $\int_0^R a(r, \lambda) r^{-\lambda-1} dr$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$, в правой части (1.4) вместо $a^{(k)}(0)$ будут стоять $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^k a(r, \lambda) \Big|_{r=0}$. Далее, заметим, что при наложенных на a и g условиях $a_*(\rho, \lambda)$ как функция от ρ принадлежит $C^{m, \alpha}$, следовательно, ф.р.-интеграл в правой части (1.4) действительно определен. Оба ф.р.-интеграла в (1.14) представляют собой аналитические по λ функции в области $\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0 : \operatorname{Re} \lambda < m + \alpha\}$, которые в силу (1.12) совпадают для $\operatorname{Re} \lambda < 0$, а значит, и для всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$, $\operatorname{Re} \lambda < m + \alpha$. Это доказывает (1.14) для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$ с $\Pi_*(\lambda) = 0$. Пусть теперь $\lambda = l \in \mathbb{N}_0$, $l < m + \alpha$. Тогда справедлива формула (1.10), в правой части которой встречаются $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$, и там по доказанному можно провести замену переменных по формуле (1.14):

$$\begin{aligned} \text{f.p.} \int_0^R a(r) r^{-l-1} dr &= \lim_{\lambda \rightarrow l} \frac{d}{d\lambda} \left[(\lambda - l) \text{f.p.} \int_0^R a(r) r^{-\lambda-1} dr \right] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow l} \frac{d}{d\lambda} \left[(\lambda - l) \text{f.p.} \int_0^{R*} a_*(\rho, \lambda) \rho^{-\lambda-1} d\rho \right] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow l} \frac{d}{d\lambda} \left[(\lambda - l) \text{f.p.} \int_0^{R*} a_*(\rho, l) \rho^{-\lambda-1} d\rho \right] \\ &\quad + \lim_{\lambda \rightarrow l} \frac{d}{d\lambda} \left[(\lambda - l) \text{f.p.} \int_0^{R*} (a_*(\rho, \lambda) - a_*(\rho, l)) \rho^{-\lambda-1} d\rho \right]. \end{aligned}$$

Опять в силу (1.10) имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow l} \frac{d}{d\lambda} \left[(\lambda - l) \text{f.p.} \int_0^{R*} a_*(\rho, l) \rho^{-\lambda-1} d\rho \right] = \text{f.p.} \int_0^{R*} a_*(\rho, l) \rho^{-l-1} d\rho,$$

и мы приходим к формуле (1.14) с

$$\begin{aligned} \Pi_*(l) &= \lim_{\lambda \rightarrow l} \frac{d}{d\lambda} \left[(\lambda - l) \text{f.p.} \int_0^{R_*} (a_*(\rho, \lambda) - a_*(\rho, l)) \rho^{-\lambda-1} d\rho \right] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow l} \frac{d}{d\lambda} \left\{ (\lambda - l) \int_0^{R_*} \left[a_*(\rho, \lambda) - a_*(\rho, l) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)^k (a_*(\rho, \lambda) - a_*(\rho, l)) \right]_{\rho=0} \rho^k \right\} \rho^{-\lambda-1} d\rho \\ &\quad + (\lambda - l) \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)^k (a_*(\rho, \lambda) - a_*(\rho, l)) \Big|_{\rho=0} \frac{R^{k-\lambda}}{k-\lambda} \Big\}. \end{aligned}$$

На последнем шаге мы воспользовались определением (1.4). Подынтегральная функция мажорируется функцией с $\rho^{m+\alpha-\lambda-1}$, которая при $\text{Re } \lambda < m + \alpha$ интегрируема. Кроме того, при $\lambda \rightarrow l$ подынтегральная функция при каждом $r \in [0, R_*]$ стремится к нулю, и по теореме Лебега и сам интеграл стремится к нулю. Учитывая аналитичность при $\lambda = l$ как интеграла, так и членов под суммой с $k \neq l$, а также их стремление к нулю при $\lambda \rightarrow l$, получаем

$$\begin{aligned} \Pi_*(l) &= -\frac{1}{l!} \lim_{\lambda \rightarrow l} \left\{ \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)^k (a_*(\rho, \lambda) - a_*(\rho, l)) \right\}_{\rho=0} R^{l-\lambda} \Big\} \\ &= -\frac{1}{l!} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)^l a_*(\rho, \lambda) \Big|_{\rho=0, \lambda=l}. \end{aligned}$$

Мы пришли к форме (1.15) добавочного члена $\Pi_*(l)$. Для $l = 0$ и $l = 1$ формула (1.15) дает

$$\Pi_*(0) = a(0) \ln g'(0), \quad \Pi_*(1) = a'(0) \ln g'(0) + \frac{1}{2} a(0) g'(0)^{-2} g''(0). \quad (1.16)$$

ПРИМЕР 1.1. Пусть $a(r) \equiv 1$, тогда $a(0) = 1$, $a'(0) = 0$. По определению (1.5) с $l = 1$

$$\text{f.p.} \int_0^2 r^{-2} dr = -\frac{1}{2}.$$

Проведя замену $r = \rho + \rho^2$, $0 \leq \rho \leq 1$, приходим к f.p.-интегралу

$$\text{f.p.} \int_0^1 (\rho + \rho^2)^{-2} (1 + 2\rho) d\rho = \text{f.p.} \int_0^1 (1 + \rho)^{-2} (1 + 2\rho) \rho^{-2} d\rho = \text{f.p.} \int_0^1 a_*(\rho) \rho^{-2} d\rho,$$

где $a_*(\rho) = (1 + \rho)^{-2} (1 + 2\rho)$, $a_*(0) = 1$, $a'_*(0) = 0$, и формула (1.5) дает

$$\text{f.p.} \int_0^1 a_*(\rho) \rho^{-2} d\rho = \int_0^1 \left(\frac{1 + 2\rho}{(1 + \rho)^2} - 1 \right) \rho^{-2} d\rho - 1 = -\frac{3}{2}.$$

Это согласуется с (1.14), так как по (1.16) $\Pi_*(1) = 1$.

§ 2. Одномерные интегралы, аналитически зависящие от параметра

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_0^R a(r, \lambda) r^{-\lambda-1} dr, \quad (2.1)$$

в котором коэффициент $a(r, \lambda)$ при фиксированном $r \in [0, R]$ является аналитической функцией комплексного параметра λ (для простоты $\lambda \in \mathbb{C}$), а при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ $a(r, \lambda)$ как функция от r принадлежит $C^{m, \alpha}$, причем в неравенстве (см. (1.3))

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^m a(r, \lambda) - \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^m a(r, \lambda) \Big|_{r=0} \right| \leq M_\lambda r^\alpha, \quad 0 \leq r \leq R,$$

коэффициент M_λ ограничен на ограниченных подмножествах $\mathbb{C}$. Мы определим так называемую *аналитическую конечную часть* интеграла (2.1): для $\operatorname{Re} \lambda < m + \alpha$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$, снова положим

$$\begin{aligned} \text{a.f.p.} \int_0^R a(r, \lambda) r^{-\lambda-1} dr &= \text{f.p.} \int_0^R a(r, \lambda) r^{-\lambda-1} dr \\ &= \int_0^R \left[a(r, \lambda) - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^k a(r, \lambda) \Big|_{r=0} r^k \right] r^{-\lambda-1} dr \\ &\quad + \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^k a(r, \lambda) \Big|_{r=0} \frac{R^{k-\lambda}}{k-\lambda}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

а для $\lambda = l \in \mathbb{N}_0$, $l < m + \alpha$, теперь положим

$$\text{a.f.p.} \int_0^R a(r, l) r^{-l-1} dr = \lim_{\lambda \rightarrow l} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[(\lambda - l) \text{f.p.} \int_0^R a(r, \lambda) r^{-\lambda-1} dr \right]. \quad (2.3)$$

Выразив последний предел через коэффициент $a(r, \lambda)$, приходим к формуле

$$\begin{aligned} \text{a.f.p.} \int_0^R a(r, l) r^{-l-1} dr &= \int_0^R \left[a(r, l) - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^k a(r, l) \Big|_{r=0} r^k \right] r^{-l-1} dr \\ &\quad + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^m \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^k a(r, l) \Big|_{r=0} \frac{R^{k-l}}{k-l} + \frac{1}{l!} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^l a(r, l) \Big|_{r=0} \ln R \\ &\quad - \frac{1}{l!} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^l a(r, \lambda) \Big|_{r=0, \lambda=l}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Действительно, в правой части (2.3) можно считать, что $\lambda \notin \mathbb{N}_0$, и применяем формулу (2.2). Учитывая аналитичность при $\lambda = l$ как абсолютно сходящегося интеграла, так и членов с $k \neq l$ суммы в правой части (2.2), мы легко приходим к (2.4).

Определение а.ф.р. для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$ по-прежнему не связывает различные λ , тогда как для $\lambda = l \in \mathbb{N}_0$ следует помнить “происхождение” $a(r, l)$ из $a(r, \lambda)$. Более точное, но вместе с тем более неуклюжее обозначение левой части (2.3) выглядит так: а.ф.р. $\int_0^R a(r, \lambda) r^{-\lambda-1} dr \Big|_{\lambda=l}$.

Согласно (2.4) и (1.5) имеем

$$\begin{aligned} \text{а.ф.р. } \int_0^R a(r, l) r^{-l-1} dr &= \text{ф.р. } \int_0^R a(r, l) r^{-l-1} dr + \Pi(l), \\ \Pi(l) &= -\frac{1}{l!} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^l a(r, \lambda) \Big|_{r=0, \lambda=l}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В частности, если $a(r, \lambda)$ не зависит от λ , то

$$\text{а.ф.р. } \int_0^R a(r) r^{-l-1} dr = \text{ф.р. } \int_0^R a(r) r^{-l-1} dr.$$

Приведем формулы а.ф.р. также через вырезание ε -окрестности (см. (1.8), (1.9)): для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$, $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, $a(\cdot, \lambda) \in C^{l, \alpha}$, $l = [\operatorname{Re} \lambda]$ имеем

$$\begin{aligned} \text{а.ф.р. } \int_0^R a(r, \lambda) r^{-\lambda-1} dr &= \text{ф.р. } \int_0^R a(r, \lambda) r^{-\lambda-1} dr \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^R a(r, \lambda) r^{-\lambda-1} dr + \sum_{k=0}^l \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^k a(r, \lambda) \Big|_{r=0} \frac{\varepsilon^{-\lambda+k}}{-\lambda+k} \right\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

а для $\lambda = l \in \mathbb{N}_0$, $a \in C^{l, \alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, имеем

$$\begin{aligned} \text{а.ф.р. } \int_0^R a(r, l) r^{-l-1} dr &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^R a(r, l) r^{-l-1} dr \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^k a(r, l) \Big|_{r=0} \frac{\varepsilon^{-l+k}}{-l+k} + \frac{1}{l!} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^l a(r, l) \Big|_{r=0} \ln \varepsilon \right\} \\ &\quad - \frac{1}{l!} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^l a(r, l) \Big|_{r=0, \lambda=l}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Преимущества понятия а.ф.р. перед ф.р. проявляются при замене переменных — не возникает поправочного члена (он включен в определение а.ф.р.).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $a(r, \lambda)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в начале §2, а $g \in C^{m+1, \alpha}$ удовлетворяет условиям (1.11). Тогда при $\operatorname{Re} \lambda < m + \alpha$ как при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$, так и при $\lambda \in \mathbb{N}_0$ справедлива формула

$$\text{а.ф.р. } \int_0^R a(r, \lambda) r^{-\lambda-1} dr = \text{а.ф.р. } \int_0^{R*} a_*(\rho, \lambda) \rho^{-\lambda-1} d\rho, \quad (2.8)$$

где

$$a_*(\rho, \lambda) = a(g(\rho), \lambda) \left(\frac{g(\rho)}{\rho} \right)^{-\lambda-1} g'(\rho). \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$ а.ф.р. совпадает с ф.р. (см. определение (2.2)) и (2.8) уже установлено в теореме 1.1. Для $\lambda = l \in \mathbb{N}_0$ воспользуемся определением (2.3), в правой части которого замена

$$\text{а.ф.р.} \int_0^R a(r, \lambda) r^{-\lambda-1} dr = \text{ф.р.} \int_0^{R_*} a_*(\rho, \lambda) \rho^{-\lambda-1} d\rho, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0,$$

законна, после чего снова используем (2.3):

$$\lim_{\lambda \rightarrow l} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[(\lambda - l) \int_0^{R_*} a_*(\rho, \lambda) \rho^{-\lambda-1} d\rho \right] = \text{а.ф.р.} \int_0^{R_*} a_*(\rho, l) \rho^{-l-1} d\rho.$$

Тем самым (2.8) доказано и для $\lambda = l \in \mathbb{N}_0$.

В частности, формулу (1.14) теперь можно записать в виде

$$\begin{aligned} \text{а.ф.р.} \int_0^R a(r) r^{-\lambda-1} dr &= \text{а.ф.р.} \int_0^{R_*} a_*(\rho, \lambda) \rho^{-\lambda-1} d\rho, \\ a_*(\rho, \lambda) &= a(g(\rho)) \left(\frac{g(\rho)}{\rho} \right)^{-\lambda-1} g'(\rho). \end{aligned}$$

§ 3. Интегралы с радиально гладкими ядрами

Рассмотрим n -мерный интеграл

$$I(\lambda, \Omega, x) = \int_{\Omega} a(x, y, \lambda) |y - x|^{-\lambda-n} dy, \quad x \in \Omega,$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная (открытая) область с кусочно гладкой границей; λ — комплексный параметр, $\lambda \in \mathbb{C}$; как и в § 2, $\operatorname{Re} \lambda < m + \alpha$, $m \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha \leq 1$; функция $a(x, y, \lambda)$ непрерывна по $(x, y) \in \Omega \times \Omega$, $x \neq y$, абсолютно интегрируема по y на Ω и аналитична по λ .

При $\operatorname{Re} \lambda < 0$ интеграл является абсолютно сходящимся, а при $0 \leq \operatorname{Re} \lambda < m + \alpha$ определим его конечное значение сведением к одномерному, изученному в §§ 1 и 2.

Пусть S — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, $\Theta \in S$ и $B(x, R) \subset \Omega$. Обозначим

$$a_0(x, r, \lambda) = \int_S a(x, x + r\Theta, \lambda) dS_{\Theta}, \quad 0 \leq r = |y - x| \leq R, \quad \Theta = \frac{y - x}{|y - x|},$$

где точки $y = x + r\Theta$ с фиксированным r лежат на сфере радиуса r с центром в точке x . В предположении $a_0(x, \cdot, \lambda) \in C^{m, \alpha}$ и $\operatorname{Re} \lambda < m + \alpha$ определим (§§ 1, 2):

$$\begin{aligned} \text{ф.р.} I(\lambda, B(x, R), x) &= \text{ф.р.} \int_0^R a_0(x, r, \lambda) r^{-\lambda-1} dr, \\ \text{а.ф.р.} I(\lambda, B(x, R), x) &= \text{а.ф.р.} \int_0^R a_0(x, r, \lambda) r^{-\lambda-1} dr. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Теперь расширим определение на всю область Ω :

$$\begin{aligned} \text{f.p. } I(\lambda, \Omega, x) &= I(\lambda, \Omega \setminus B(x, R), x) + \text{f.p. } I(\lambda, B(x, R), x), \\ \text{a.f.p. } I(\lambda, \Omega, x) &= I(\lambda, \Omega \setminus B(x, R), x) + \text{a.f.p. } I(\lambda, B(x, R), x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

и аналогично для любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$. Определение не зависит от R , радиуса шара $B(x, R) \subset \Omega$. Более того, для любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} \text{f.p. } I(\lambda, \Omega, x) &= I(\lambda, \Omega \setminus \Omega', x) + \text{f.p. } I(\lambda, \Omega', x), & x \in \Omega', \\ \text{a.f.p. } I(\lambda, \Omega, x) &= I(\lambda, \Omega \setminus \Omega', x) + \text{a.f.p. } I(\lambda, \Omega', x), & x \in \Omega'. \end{aligned} \quad (3.3)$$

На основе (3.1), (3.2) и (2.2), (2.4) можно написать, полагая $[\text{Re } \lambda] = l$:

$$\begin{aligned} \text{a.f.p. } I(\lambda, \Omega, x) &= I(\lambda, \Omega \setminus B(x, R), x) + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} a_0^{(k)}(x, 0, \lambda) \frac{R^{-\lambda+k}}{-\lambda+k} \\ &\quad + P(x, R, \lambda) + \int_0^R r^{-\lambda-1} R_l(x, r, \lambda) dr, \\ P(x, R, \lambda) &= \begin{cases} \frac{1}{l!} a_0^{(l)}(x, 0, \lambda) \frac{R^{-\lambda+l}}{-\lambda+l}, & \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0, \\ \frac{1}{l!} a_0^{(l)}(x, 0, l) \ln R - \frac{1}{l!} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^l a_0(x, r, \lambda) \Big|_{r=0, \lambda=l}, & \lambda = l \in \mathbb{N}_0, \end{cases} \\ R_l(x, r, \lambda) &= a_0(x, r, \lambda) - \sum_{k=0}^l \frac{1}{k!} a_0^{(k)}(x, 0, \lambda) r^k. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Если же воспользоваться формулами (2.6), (2.7), то можно написать

$$\text{a.f.p. } I(\lambda, \Omega, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[I(\lambda, \Omega \setminus B(x, \varepsilon), x) + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} a_0^{(k)}(x, 0, \lambda) \frac{\varepsilon^{-\lambda+k}}{-\lambda+k} + P(x, \varepsilon, \lambda) \right]. \quad (3.5)$$

Аналогично определяется $\text{f.p. } I(\lambda, \Omega, x)$ — в $P(x, \varepsilon, \lambda)$ отпадает член с $\partial/\partial \lambda$.

Отметим, что $a_0(x, \cdot, \lambda) \in C^{m, \alpha}$ можно трактовать как некоторое условие радиальной (с центром в точке $x \in \Omega$) гладкости функции

$$a(x, y, \lambda) = a\left(x, x + r \frac{y-x}{|y-x|}, \lambda\right) = \bar{a}(x, r, \Theta, \lambda)$$

по переменной r ; по переменной $\Theta \in S$ мы в гладкости пока не нуждались. Однако, переходя к изучению замены переменных, мы предполагаем достаточную гладкость и по переменной Θ , с тем чтобы при замене $x = g(t)$, $y = g(s)$, $t, s \in \Omega_*$, получить радиальную гладкость преобразованной функции

$$a_*(t, s, \lambda) = a(g(t), g(s), \lambda) \left(\frac{|g(s) - g(t)|}{|s - t|} \right)^{-\lambda-n} \cdot |\det g'(s)|. \quad (3.6)$$

Точнее, мы нуждаемся в условии $a_{*,0}(t, \cdot, \lambda) \in C^{m,\alpha}$. Здесь

$$a_{*,0}(t, \rho, \lambda) = \int_S a_*(t, t + \rho\Theta, \lambda) dS_\Theta, \quad 0 \leq \rho \leq R_*, \quad B(t, R_*) \subset \Omega_*. \quad (3.7)$$

От $g(s)$ мы требуем гладкости $H^{m+1,\alpha}(\Omega_*)$, т.е. производные порядка $m+1$ от g гёльдеровские с показателем α , а также $\det g'(s) \neq 0$, $s \in \Omega_*$. Отображение $y = g(s)$ переводит Ω_* в Ω .

Из (3.2), (3.4) можно усмотреть, что f.p. $I(\lambda, \Omega, x)$ и a.f.p. $I(\lambda, \Omega, x)$ аналитические по λ в области $D = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < m + \alpha, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0\}$ и эти функции являются аналитическими продолжениями функции $I(\lambda, \Omega, x)$ из полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$ в область D . Опять для $\lambda = l \in \mathbb{N}_0$, $\operatorname{Re} \lambda < m + \alpha$, верны соотношения (ср. (1.10), (2.3))

$$\begin{aligned} \text{f.p. } I(l, \Omega, x) &= \lim_{\lambda \rightarrow l} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda - l) \text{f.p. } I(\lambda, \Omega, x), \\ \text{a.f.p. } I(l, \Omega, x) &= \lim_{\lambda \rightarrow l} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda - l) \text{a.f.p. } I(\lambda, \Omega, x). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Приводимая ниже теорема формально не следует из теорем 1.1 и 2.1, однако ее доказательство можно провести повторением рассуждений §§1 и 2 и поэтому опускается.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $a_0(x, \cdot, \lambda) \in C^{m,\alpha}$, $g(\cdot) \in H^{m+1,\alpha}(\Omega_*)$, $\det g'(s) \neq 0$ при $s \in \Omega_*$. Тогда для всех λ , $\operatorname{Re} \lambda < m + \alpha$, справедливы формулы замены переменных

$$\begin{aligned} \text{a.f.p. } \int_{\Omega} a(x, y, \lambda) |y - x|^{-\lambda-n} dy &= \text{a.f.p. } \int_{\Omega_*} a(g(t), g(s), \lambda) \\ &\quad \times |g(s) - g(t)|^{-\lambda-n} \cdot |\det g'(s)| ds, \\ \text{f.p. } \int_{\Omega} a(x, y) |y - x|^{-\lambda-n} dy &= \text{f.p. } \int_{\Omega_*} a(g(t), g(s)) \cdot |g(s) - g(t)|^{-\lambda-n} \\ &\quad \times |\det g'(s)| ds + \Pi_*(t, R, \lambda), \\ \Pi_*(t, R, \lambda) &= \begin{cases} 0, & \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0, \\ -\frac{1}{l!} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)^l a_{*,0}(t, \rho, \lambda) \Big|_{\rho=0, \lambda=l}, & \lambda = l \in \mathbb{N}_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $t \in \Omega_*$, $x = g(t) \in \Omega$.

Для интеграла справа в (3.9) формула (3.5) получит вид $([\operatorname{Re} \lambda] = l)$

$$\begin{aligned} \text{a.f.p. } \int_{\Omega_*} a(g(t), g(s), \lambda) |g(s) - g(t)|^{-\lambda-n} |\det g'(s)| ds \\ &= \text{a.f.p. } \int_{\Omega_*} a_*(t, s, \lambda) |s - t|^{-\lambda-n} ds \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega_* \setminus B(t, \varepsilon)} a_*(t, s, \lambda) |s - t|^{-\lambda-n} ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} a_{*,0}^{(k)}(t, 0, \lambda) \frac{\varepsilon^{-\lambda+k}}{-\lambda+k} + P_*(t, \varepsilon, \lambda) \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$P_*(t, \varepsilon, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{l!} a_{*,0}^{(l)}(t, 0, \lambda) \frac{\varepsilon^{-\lambda+l}}{-\lambda+l}, & \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0, \\ \frac{1}{l!} a_{*,0}^{(l)}(t, 0, l) \ln \varepsilon - \frac{1}{l!} \frac{\partial}{\partial \lambda} a_{*,0}^{(l)}(t, 0, \lambda) \Big|_{\lambda=l}, & \lambda = l \in \mathbb{N}_0, \end{cases} \quad (3.11)$$

$$a_{*,0}(t, \rho, \lambda) = \int_S a_*(t, t + \rho\Theta, \lambda) ds, \quad (3.12)$$

где $a_*(t, s, \lambda)$ определена в (3.6). Для f.p. $(\cdot)$ в формуле (3.10) в $P_*(t, \varepsilon, \lambda)$ не будет поправочного члена при $\lambda = l$.

Стоит еще раз вернуться к одномерному случаю ($n = 1$). Интеграл

$$I_1(\lambda, (a, b), x) = \int_a^b a(x, y, \lambda) |y - x|^{-\lambda-1} dy, \quad x \in (a, b),$$

содержит больше возможностей, нежели интеграл (2.1). Функцию $a(x, y, \lambda)$ предполагаем гладкой по y для $y \leq x$ и для $y \geq x$, причем односторонние пределы при $y \rightarrow x-$ и $y \rightarrow x+$ могут быть различными. Начнем с интеграла

$$I_1(\lambda, B(x, R), x) = \int_{x-R}^{x+R} a(x, y, \lambda) |y - x|^{-\lambda-1} dy, \quad x \in (a, b), \quad (3.13)$$

и сведем его к интегралу $\int_0^R a_0(x, r, \lambda) r^{-\lambda-1} dr$ с помощью замены $|y - x| = r$. Получим

$$\begin{aligned} I_1(\lambda, B(x, R), x) &= \int_{x-R}^x a(x, x - (y - x), \lambda) |y - x|^{-\lambda-1} dy \\ &\quad + \int_x^{x+R} a(x, x + (y - x), \lambda) |y - x|^{-\lambda-1} dy \\ &= \int_0^R [a(x, x - r, \lambda) + a(x, x + r, \lambda)] r^{-\lambda-1} dr = \int_0^R a_0(x, r, \lambda) r^{-\lambda-1} dr, \\ a_0(x, r, \lambda) &= a(x, x - r, \lambda) + a(x, x + r, \lambda), \quad 0 \leq r \leq R. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Теперь если $a_0(x, r, \lambda)$ по r принадлежит $C^{l, \alpha}$, $l = [\operatorname{Re} \lambda]$, в соответствии с § 2 будем по определению полагать (ср. (2.2) и (2.4)) при $\operatorname{Re} \lambda < m + \alpha$:

$$\begin{aligned} \text{a.f.p. } I_1(\lambda, B(x, R), x) &= \text{a.f.p. } \int_{x-R}^{x+R} a(x, y, \lambda) |y - x|^{-\lambda-1} dy \\ &= \text{a.f.p. } \int_0^R a_0(x, r, \lambda) r^{-\lambda-1} dr \\ &= \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} a_0^{(k)}(x, 0, \lambda) \frac{R^{-\lambda+k}}{-\lambda+k} + P_1(x, R, \lambda) + \int_0^R R_l(x, r, \lambda) r^{-\lambda-1} dr, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $P_1(x, R, \lambda)$ определено аналогично (3.4). При этом если функция $a(x, y, \lambda)$ и ее производные непрерывны при $y = x$, то

$$a_0^{(k)}(x, 0, \lambda) = a_{y=k}^{(k)}(x, y, \lambda) \Big|_{y=x} (1 + (-1)^k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Таким образом, $a_0^{(k)}(x, 0, \lambda) = 0$ при $k = 2p + 1, p = 0, 1, \dots$, и

$$a_0^{(k)}(x, 0, \lambda) = 2a_{y_k}^{(k)}(x, y, \lambda)|_{y=x}, \quad k = 2p, \quad p = 0, 1, \dots$$

Для интеграла $I_1(\lambda, (a, b), x)$ аналитическую конечную часть (а.ф.р.) определим по формуле

$$\text{а.ф.р. } I_1(\lambda, (a, b), x) = I_1(\lambda, (a, b) \setminus B(x, R), x) + \text{а.ф.р. } I_1(\lambda, B(x, R), x). \quad (3.16)$$

Так как $I_1(\lambda, (a, b) \setminus B(x, R), x)$ является аналитической по λ функцией там, где аналитична $a(x, y, \lambda)$, а а.ф.р. $I_1(\lambda, B(x, R), x)$ аналитична для $\lambda \in D$ и определена по (3.15) для $\lambda \in \mathbb{N}_0$, то опять для всех λ , $\operatorname{Re} \lambda < m + \alpha$, верно соотношение вида (3.8) для а.ф.р. $I_1(\lambda, (a, b), x)$. В силу этого для а.ф.р. $I_1(\lambda, (a, b), x)$ при $\operatorname{Re} \lambda < m + \alpha$ верна формула замены переменной, т.е. справедлива теорема 3.2.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $a_0(x, \cdot, \lambda) \in C^{m, \alpha}$ и дана замена переменной $y = g(s)$, $s \in (a_*, b_*)$, $g \in C^{m+1, \alpha}$ на $[a_*, b_*]$ и $g'(s) > 0$. Тогда для всех λ , $\operatorname{Re} \lambda < m + \alpha$, справедлива формула замены переменной:

$$\begin{aligned} \text{а.ф.р. } \int_a^b a(x, y, \lambda) |y - x|^{-\lambda-1} dy \\ = \text{а.ф.р. } \int_{a_*}^{b_*} a(g(t), g(s), \lambda) |g(s) - g(t)|^{-\lambda-1} g'(s) ds \\ = \text{а.ф.р. } I_1(\lambda, (a_*, b_*), t). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Заметим, что для а.ф.р.-интеграла, стоящего справа в (3.17), можно написать формулы вида (3.4) или (3.5), т.е.

$$\begin{aligned} \text{а.ф.р. } \int_{a_*}^{b_*} a(g(t), g(s), \lambda) |g(s) - g(t)|^{-\lambda-1} g'(s) ds \\ = \text{а.ф.р. } \int_{a_*}^{b_*} a_*(t, s, \lambda) |s - t|^{-\lambda-1} ds = I_1(\lambda, (a_*, b_*) \setminus B(t, r), t) \\ + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} a_{*,0}^{(k)}(t, 0, \lambda) \frac{R^{-\lambda+k}}{-\lambda+k} + P_1(t, R, \lambda) + \int_0^R \rho^{-\lambda-1} R_l(t, \rho, \lambda) d\rho, \end{aligned} \quad (3.18)$$

или

$$\begin{aligned} \text{а.ф.р. } I_1(\lambda, (a_*, b_*), t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[I_1(\lambda, (a_*, b_*) \setminus B(t, \varepsilon), t) \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} a_{*,0}^{(k)}(t, 0, \lambda) \frac{\varepsilon^{-\lambda+k}}{-\lambda+k} + P_1(t, \varepsilon, \lambda) \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$a_{*,0}(t, \rho, \lambda) = a_*(t, t - \rho, \lambda) + a_*(t, t + \rho, \lambda),$$

$$a_*(t, s, \lambda) = a(g(t), g(s), \lambda) \left(\frac{|g(s) - g(t)|}{|s - t|} \right)^{-\lambda-1} g'(s),$$

$$P_1(t, \varepsilon, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{l!} a_{*,0}^{(l)}(t, 0, \lambda) \frac{\varepsilon^{-\lambda+l}}{-\lambda+l}, & \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0, \\ \frac{1}{l!} a_{*,0}^{(l)}(t, 0, l) \ln \varepsilon - \frac{1}{l!} \frac{\partial}{\partial \lambda} a_{*,0}^{(l)}(t, \rho, \lambda) \Big|_{\rho=0, \lambda=l}, & \lambda = l \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Таким образом, если l – нечетное число, то в случае, когда $a_{yk}^{(k)}(x, y, \lambda)$ непрерывны по y , имеем (см. (3.15)):

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)^l a_{*,0}(t, \rho, \lambda) \right|_{\rho=0, \lambda=l} = 0, \quad l = 2p + 1, \quad p \in \mathbb{N}_0. \quad (3.20)$$

Наконец, рассмотрим интеграл

$$I_{1,0}(l, (a, b), x) = \int_a^b a(x, y, l)(y - x)^{-l-1} dy, \quad x \in (a, b),$$

который при нечетных l совпадает с $I_1(l, (a, b), x)$. Теперь формула (3.14) при четных l (обозначим $l = 2p, p \in \mathbb{N}_0$) для интеграла $I_{1,0}(l, B(x, R), x)$ получит вид

$$\begin{aligned} I_{1,0}(l = 2p, B(x, R), x) &= \int_0^R [a(x, x + r, l) - a(x, x - r, l)] r^{-l-1} dr \\ &= \int_0^R \bar{a}_0(x, r, l) r^{-l-1} dr, \\ \bar{a}_0(x, r, l) &= a(x, x + r, l) - a(x, x - r, l). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Снова, если $a_{yk}^{(k)}(x, y, \lambda)$ непрерывны при $y = x$, имеем

$$\left. \frac{\partial^k}{\partial r^k} \bar{a}_0(x, r, l) \right|_{r=0} = (1 - (-1)^k) \left. \frac{\partial^k}{\partial y^k} a(x, y, l) \right|_{y=x} = 0, \quad k = 2m, \quad m = 0, 1, \dots \quad (3.22)$$

Равенство (3.22) останется верным и для $\bar{a}_{*,0}(t, \rho, l)$, оно получается после замены переменной в

$$\text{a.f.p. } I_{1,0}(l = 2p, B(x, R), x) = \text{a.f.p. } \int_0^R \bar{a}_0(x, r, l) r^{-l-1} dr.$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\lambda = l$ – целое число и $a(x, \cdot, l) \in C^{m, \alpha}$, а также дана замена переменной $y = g(s)$, $s \in (a_*, b_*)$, $g \in C^{m+1, \alpha}$ и $g'(s) > 0$ на (a_*, b_*) . Тогда для всех целых $\lambda = l$ справедлива формула замены переменной

$$\begin{aligned} \text{a.f.p. } \int_a^b a(x, y, l)(y - x)^{-l-1} dy \\ = \text{a.f.p. } \int_{a_*}^{b_*} a(g(t), g(s), \lambda)(g(s) - g(t))^{-l-1} g'(s) ds, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где интеграл слева в (3.23) вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
 l = 2p + 1 : \quad \text{a.f.p.} \quad & \int_a^b a(x, y, l)(y - x)^{-l-1} dy \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{(a, b) \setminus B(x, \varepsilon)} a(x, y, l)(y - x)^{-l-1} dy \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=0}^p \frac{1}{(2k)!} 2 \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}} a(x, y, l) \Big|_{y=x} \frac{\varepsilon^{-l+2k}}{-l+2k} \right], \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l = 2p : \quad \text{a.f.p.} \quad & \int_a^b a(x, y, l)(y - x)^{-l-1} dy \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{(a, b) \setminus B(x, \varepsilon)} a(x, y, l)(y - x)^{-l-1} dy + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{(2k+1)!} \right. \\
 &\quad \left. \times 2 \frac{\partial^{2k+1}}{\partial y^{2k+1}} a(x, y, l) \Big|_{y=x} \frac{\varepsilon^{-l+(2k+1)}}{-l+(2k+1)} \right], \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

где $p = 0, 1, 2, \dots$.

Интегралы справа в (3.23) вычисляются по тем же формулам (3.24), (3.25) с заменой $a(x, y, l)$ на $a_*(t, s, l)$ (см. (3.19)).

Для вычисления производных $\frac{\partial^k}{\partial s^k} a_*(t, s, l) \Big|_{s=t}$ напомним [1], [4], что при достаточной гладкости функции $g(s)$ имеем равенство

$$\frac{\partial^k}{\partial s^k} \frac{g(s) - g(t)}{s - t} \Big|_{s=t} = g^{(k)}(t), \quad t \in (a_*, b_*). \quad (3.26)$$

§ 4. Интеграл как оператор

Рассуждения предыдущего параграфа для интеграла $I(\lambda, \Omega, x)$ обобщим теперь на интеграл

$$I(\lambda, \Omega, x, v) = \int_{\Omega} b(x, y, \lambda) |y - x|^{-\lambda-n} v(y) dy, \quad (4.1)$$

где $b(x, y, \lambda)$ такая же, как $a(x, y, \lambda)$ в $I(\lambda, \Omega, x)$, а $v \in C^{l, \alpha}(\Omega) \cap W^{l, 1}(\overline{\Omega})$, $l = [\text{Re } \lambda]$.

Интеграл $I(\lambda, \Omega, x, v)$ фактически приходится рассматривать при решении сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений [4], [8], [10]. В этом случае он рассматривается как оператор из одного пространства функций в другое. Гладкость функций, элементов этих пространств, зависит от λ . Интеграл $I(\lambda, \Omega, x, v)$ сводится к интегралу $I(\lambda, \Omega, x)$ введением функции $a(x, y, \lambda) = b(x, y, \lambda)v(y)$.

При $n \geq 2$ для рассмотрения $I(\lambda, \Omega, x, v)$ надо ввести функцию

$$\begin{aligned}
 a_0(x, r, \lambda) &= \int_S a(x, x + r\Theta, \lambda) dS_{\Theta} = \int_S b(x, x + r\Theta, \lambda) v(x + r\Theta) dS_{\Theta}, \\
 0 \leq r = |y - x| \leq R, \quad \Theta &= \frac{y - x}{|y - x|}. \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Теперь видно, что в определении а.ф.р. и ф.р. для $I(\lambda, \Omega, x, v)$ участвуют значения производных от функции v в точке x . Например, из (4.2) получаем

$$a_0(x, 0, \lambda) = v(x) \int_S b(x, x + r\Theta, \lambda) dS_\Theta \Big|_{r=0} = v(x)b_0(x, \lambda), \quad (4.3)$$

так как функция $v(y)$ является гладкой в точке $y = x$ как функция n переменных, а $b(x, y, \lambda)$ только радиально гладкая, как, например, $b(x, y, \lambda) = \frac{y_1 - x_1}{|y - x|}$, и тогда $b_0(x, \lambda) = 0$. Если $n = 2$, то $\frac{y_1 - x_1}{|y - x|} = \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, φ — полярный угол точки y относительно точки x . Далее, при определении а.ф.р. и ф.р. для $I(\lambda, \Omega, x, v)$ потребуются $\frac{\partial^k}{\partial r^k} a_0(x, r, \lambda) \Big|_{r=0}$, $k = 0, 1, \dots, l = [\text{Re } \lambda]$, и $\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^l a_0(x, r, \lambda) \Big|_{r=0, \lambda=l}$. Для вычисления этих величин имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^k a_0(x, r, \lambda) &= \int_S \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^k \left[b\left(x, x + r \frac{y-x}{|y-x|}, \lambda\right) v\left(x + r \frac{y-x}{|y-x|}\right) \right] ds \\ &= \int_S \left[\sum_{p=0}^k \binom{p}{k} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-p} b\left(x, x + r \frac{y-x}{|y-x|}\right) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^p v\left(x + r \frac{y-x}{|y-x|}\right) \right] ds, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^p v\left(x + r \frac{y-x}{|y-x|}\right) = \left(\nabla_y \cdot \frac{y-x}{|y-x|} \right)^p v(y) \Big|_{y=x+r \frac{y-x}{|y-x|}}, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^p v\left(x + r \frac{y-x}{|y-x|}\right) \Big|_{r=0} &= \left(\nabla_x \cdot \frac{y-x}{|y-x|} \right)^p v(x) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{y_i - x_i}{|y-x|} \right)^p \cdot v(x). \end{aligned}$$

Если $b(x, y, \lambda)$ по y также является гладкой функцией, то для вычисления

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-p} b\left(x, x + r \frac{y-x}{|y-x|}\right)$$

также можно воспользоваться формулой (4.5).

Более детально рассмотрим интегралы, встречающиеся в приложениях [4], [11]:

$$I_\Theta(\lambda, \Omega, x, v) = \int_\Omega f(x, \Theta) |y - x|^{-\lambda-n} v(y) dy, \quad (4.6)$$

где $\Theta = \frac{y-x}{|y-x|}$ – точка единичной сферы, функция $f(x, \Theta)$ интегрируема на сфере S . В этом случае

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^k a_0(x, r, \lambda) \Big|_{r=0} &= \int_S f(x, \Theta) \left(\nabla_x \cdot \frac{y-x}{|y-x|} \right)^k v(x) ds \\ &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k v(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \int_S f(x, \Theta) \frac{(y_{i_1} - x_{i_1}) \cdots (y_{i_k} - x_{i_k})}{|y-x|^k} ds, \\ k &= 0, 1, \dots, l, \quad l = [\operatorname{Re} \lambda], \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^l a_0(x, r, \lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Таким образом, формула (3.5) для интеграла ф.р. $I_\Theta(\lambda, \Omega, x, v)$ (в данном случае ф.р. $(\cdot) = \text{a.f.p.}(\cdot)$) получит вид

$$\begin{aligned} \text{f.p. } I_\Theta(\lambda, \Omega, x, v) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[I_\Theta(\lambda, \Omega \setminus B(x, \varepsilon), x, v) + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} a_0^{(k)}(x, 0, \lambda) \frac{\varepsilon^{-\lambda+k}}{-\lambda+k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{l!} a_0^{(l)}(x, 0, \lambda) \eta(\varepsilon, \lambda) \right], \\ \eta(\varepsilon, \lambda) &= \begin{cases} \frac{\varepsilon^{-\lambda+l}}{-\lambda+l}, & \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0, \\ \ln \varepsilon, & \lambda = l, l \in \mathbb{N}_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.8)$$

а вычисление $a_0^{(k)}(x, 0, \lambda)$ дано в (4.7).

В частности, возьмем $\lambda = 0$. В этом случае формула (4.8) получит вид

$$\begin{aligned} \text{f.p. } I_\Theta(0, \Omega, x, v) &= \text{f.p.} \int_\Omega \frac{f(x, \Theta)}{|y-x|^n} v(y) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega \setminus B(x, \varepsilon)} \frac{f(x, \Theta)}{|y-x|^n} v(y) dy + \ln \varepsilon \cdot v(x) \int_S f(x, \Theta) ds \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Если выполняется условие

$$\int_S f(x, \Theta) ds = 0, \quad (4.10)$$

то получаем сингулярный n -мерный интеграл [11], а при невыполнении условия (4.10) и $n = 2$ получаем интеграл, рассмотренный в [12].

Возьмем теперь $\lambda = 1$. В этом случае формула (4.8) получит вид

$$\begin{aligned} \text{f.p. } I_\Theta(1, \Omega, x, v) &= \text{f.p.} \int_\Omega \frac{f(x, \Theta)}{|y-x|^{n+1}} v(y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega \setminus B(x, \varepsilon)} \frac{f(x, \Theta)}{|y-x|^{n+1}} v(y) dy \right. \\ &\quad \left. + v(x) \int_S f(x, \Theta) ds \frac{\varepsilon^{-1}}{-1} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \int_S f(x, \Theta) \frac{y_i - x_i}{|y-x|} ds \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

В частности, если $n = 2$ и $f(x, \Theta) = 1$, то получаем гиперсингулярный двумерный интеграл, который встречается в аэродинамике [4]. Для него формула (4.11) получает вид

$$\text{f.p.} \int_{\Omega} \frac{v(y) dy}{|y - x|^3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega \setminus B(x, \varepsilon)} \frac{v(y) dy}{|y - x|^3} - \frac{2\pi v(x)}{\varepsilon} \right]. \quad (4.12)$$

Если $n = 2$, а $f(x, \Theta)$ произвольная, то (4.11) совпадает с формулой, полученной в [12].

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В ф.р. $I_{\Theta}(0, \Omega, x, v)$ достаточно полагать $v(y) \in H(\alpha)$, т.е. считать, что $v(y)$ есть гёльдеровская функция степени α , $0 < \alpha \leq 1$, на Ω , а в ф.р. $I_{\Theta}(1, \Omega, x, v)$ — полагать $v(y) \in H_1(\alpha)$, т.е. $\frac{\partial v(y)}{\partial y_i} \in H(\alpha)$ на Ω .

Рассмотрим теперь замену переменных $y = g(s)$ (такую же, как в §3) для интеграла ф.р. $I_{\Theta}(\lambda, \Omega, x, v)$. Если выполняются условия теоремы 3.1, то справедлива формула замены переменных

$$\begin{aligned} \text{a.f.p.} \int_{\Omega} f\left(x, \frac{y-x}{|y-x|}\right) |y-x|^{-\lambda-n} v(y) dy \\ = \text{a.f.p.} \int_{\Omega_*} f\left(g(t), \frac{g(s)-g(t)}{|g(s)-g(t)|}\right) |g(s)-g(t)|^{-\lambda-n} v(g(s)) |\det g'(s)| ds \\ = \text{a.f.p.} \int_{\Omega_*} a_*(t, s, \lambda) |s-t|^{-\lambda-n} ds, \end{aligned} \quad (4.13)$$

так как после замены переменных а.ф.р. $(\cdot)$ и ф.р. $(\cdot)$ отличаются на поправочный член.

Теперь а.ф.р. $\int_{\Omega_*} a_*(t, s, \lambda) |s-t|^{-\lambda-n} ds$ надо вычислять по формуле (3.10).

Опять рассмотрим частные случаи.

Пусть $\lambda = 0$. В этом случае формула (3.10) имеет вид

$$\begin{aligned} \text{a.f.p.} \int_{\Omega_*} a_*(t, s, 0) |s-t|^{-n} ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega_* \setminus B(t, \varepsilon)} a_*(t, s, 0) |s-t|^{-n} ds \right. \\ \left. + a_{*,0}^{(0)}(t, 0, 0) \ln \varepsilon - \frac{\partial}{\partial \lambda} a_{*,0}^{(0)}(t, 0, \lambda) \Big|_{\lambda=0} \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} a_{*,0}(t, r, 0) \Big|_{r=0} &= \int_S f\left(g(t), \frac{g(t+r\Theta)-g(t)}{|g(t+r\Theta)-g(t)|}\right) \\ &\times \left(\frac{|g(t+r\Theta)-g(t)|}{r} \right)^{-n} \cdot v(g(t+r\Theta)) |\det g'(t+r\Theta)| ds \Big|_{r=0} \\ &= v(g(t)) |\det g'(t)| \int_S f\left(g(t), \frac{g'(t) \frac{s-t}{|s-t|}}{|g'(t) \frac{s-t}{|s-t|}|}\right) \left| g'(t) \frac{s-t}{|s-t|} \right|^{-n} ds. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Из формул (4.13) и (4.15) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} a_{*,0}(t, 0, \lambda) \Big|_{\lambda=0} &= -v(g(t)) |\det g'(t)| \int_S f\left(g(t), \frac{g'(t) \frac{s-t}{|s-t|}}{|g'(t) \frac{s-t}{|s-t|}|}\right) \\ &\times \left| g'(t) \frac{s-t}{|s-t|} \right|^{-n} \ln \left| g'(t) \frac{s-t}{|s-t|} \right| ds. \end{aligned} \quad (4.16)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Пусть функция $f\left(x, \frac{y-x}{|y-x|}\right)$ обладает свойством нечетности по второму аргументу, т.е. $f\left(x, \frac{-(y-x)}{|y-x|}\right) = -f\left(x, \frac{y-x}{|y-x|}\right)$, тогда из формул (4.15) и (4.16) следует, что $a_{*,0}(t, r, 0)|_{r=0} = 0$, $\frac{\partial}{\partial \lambda} a_{*,0}(t, 0, \lambda)\Big|_{\lambda=0} = 0$. В этом случае для а.ф.р. $\int_{\Omega_*} a_*(t, s, 0)|s-t|^{-n} ds$ получаем

$$\text{а.ф.р. } \int_{\Omega_*} a_*(t, s, 0)|s-t|^{-n} ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_* \setminus B(t, \varepsilon)} a_*(t, s, 0)|s-t|^{-n} ds. \quad (4.17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Запишем формулу (4.14) в виде

$$\begin{aligned} & \text{а.ф.р. } \int_{\Omega_*} a_*(t, s, 0)|s-t|^{-n} ds \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega_* \setminus B(t, \varepsilon)} a_*(t, s, 0)|s-t|^{-n} ds + a_{*,0}(t, 0, 0) \ln \varepsilon \right] \\ &+ v(g(t)) |\det g'(t)| \int_S f\left(g(t), \frac{g'(t) \frac{s-t}{|s-t|}}{|g'(t) \frac{s-t}{|s-t|}|}\right) \\ &\times \left| g'(t) \frac{s-t}{|s-t|} \right|^{-n} \ln \left| g'(t) \frac{s-t}{|s-t|} \right| ds, \end{aligned} \quad (4.18)$$

и если обозначим значение предела как ф.р. $\int_{\Omega_*} a_*(t, s, 0)|s-t|^{-n} ds$, то формула (4.18) получит вид формулы (6) в [11; § 5]. Здесь ф.р. означает, как и ранее, “конечную часть в смысле тейлоровского разложения”.

Пусть теперь $\lambda = 1$, $n = 2$, $f(x, \Theta) = 1$. В этом случае формула (3.10) получит вид

$$\begin{aligned} & \text{а.ф.р. } \int_{\Omega_*} a_*(t, s, 1)|s-t|^{-1-2} ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega_* \setminus B(t, \varepsilon)} a_*(t, s, 1)|s-t|^{-1-2} ds \right. \\ &+ a_{*,0}(t, 0, 1) \frac{\varepsilon^{-1}}{-1} + \frac{\partial}{\partial r} a_{*,0}(t, r, 1) \Big|_{r=0} \ln \varepsilon \\ &\left. - \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial r} a_{*,0}(t, r, \lambda) \Big|_{r=0, \lambda=1} \right], \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} & a_{*,0}(t, r, 1) \Big|_{r=0} = v(g(t)) |\det g'(t)| \int_S \left| g'(t) \frac{s-t}{|s-t|} \right|^{-1-2} ds, \\ & \frac{\partial}{\partial r} a_{*,0}(t, r, 1) \Big|_{r=0} = \frac{\partial}{\partial r} \int_S \left(\frac{|g(t+r\Theta) - g(t)|}{r} \right)^{-1-2} \\ & \times v(g(t+r\Theta)) |\det g'(t+r\Theta)| ds \Big|_{r=0}, \\ & \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial r} a_{*,0}(t, r, 1) \Big|_{r=0, \lambda=1} = - \frac{\partial}{\partial r} \int_S \left(\frac{|g(t+r\Theta) - g(t)|}{r} \right)^{-1-2} \\ & \times \ln \frac{|g(t+r\Theta) - g(t)|}{r} v(g(t+r\Theta)) |\det g'(t+r\Theta)| ds \Big|_{r=0}. \end{aligned}$$

§ 5. Интегралы по кривой поверхности

Для приложений [3], [4], [6] интерес представляют также расходящиеся интегралы типа $I(\lambda, \Omega, x)$ по кривой поверхности. Рассмотрим сразу общий случай n -мерной поверхности σ , лежащей в $\mathbb{R}^p$, $p > n$, и заданной параметрически

$$\begin{aligned} y_i &= f_i(s_1, s_2, \dots, s_n), \quad i = 1, 2, \dots, p, \\ y &= (y_1, \dots, y_p) \in \sigma \subset \mathbb{R}^p, \quad s = (s_1, \dots, s_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где Ω — открытая область в $\mathbb{R}^n$, ограниченная, с кусочно гладкой границей. Преобразование $f: \Omega \rightarrow \sigma$ считаем взаимно однозначным и, более того, для любой точки $s \in \Omega$ хотя бы один минор порядка n матрицы Якоби

$$f'(s) = \left(\frac{\partial f_i(s)}{\partial s_j} \right) \Big|_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, n}} \quad (5.2)$$

где i — номер строки, j — номер столбца, отличен от нуля. Предполагаем пока $f_i(s) \in C^1(\bar{\Omega})$. При сделанных предположениях поверхность σ можно представить в окрестности любой точки $y \in \sigma$ в виде $y_{n+k} = g_k(y_1, \dots, y_n)$, $k = 1, \dots, p-n$, если минор $\left(\frac{\partial f_i(s)}{\partial s_j} \right) \Big|_{i,j=1, \dots, n}$ отличен от нуля.

Рассмотрим интеграл

$$I(\lambda, \sigma, x) = \int_{\sigma} A(x, y) |y - x|^{-\lambda-n} v(y) d\sigma_y, \quad x \in \sigma, \quad (5.3)$$

где λ — произвольное комплексное число, $\operatorname{Re} \lambda < m + \alpha$. Записав $I(\lambda, \sigma, x)$ в параметрических переменных, получим интеграл $I(\lambda, \Omega, t)$:

$$I(\lambda, \Omega, t) = \int_{\Omega} A(f(t), f(s)) |f(s) - f(t)|^{-\lambda-n} v(f(s)) J_f(s) ds, \quad (5.4)$$

где $t \in \Omega$, $x = f(t)$, $d\sigma_y = J_f(s) ds$ — дифференциал площади поверхности на σ в точке $y = f(s)$.

Возьмем функцию

$$\begin{aligned} a(t, s, \lambda) &= A(f(t), f(s)) \left(\frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|} \right)^{-\lambda-n} v(f(s)) J_f(s), \\ t, s &\in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \operatorname{Re} \lambda < m + \alpha, \quad m = 0, 1, \dots, \quad 0 < \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

Далее будем предполагать, что функция $A(x, y)$ абсолютно интегрируема на σ по y , а функция

$$\bar{a}(t, r, \Theta, \lambda) = a(t, t + r\Theta, \lambda),$$

где (r, Θ) — сферические координаты на Ω с центром в точке $t \in \Omega$, обладает теми же свойствами, что и функция $\bar{a}(x, r, \Theta)$ в § 3, т.е. радиально достаточно гладкая. Предполагаем также, что $f_i \in C^{m+1, \alpha}(\Omega)$, $i = 1, \dots, p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. *Аналитической конечной частью* (a.f.p.) интеграла $I(\lambda, \sigma, x)$ в (5.3) назовем a.f.p. интеграла $I(\lambda, \Omega, t)$:

$$\begin{aligned} \text{a.f.p. } I(\lambda, \sigma, x) &= \text{a.f.p. } \int_{\sigma} A(x, y) |y - x|^{-\lambda-n} v(y) d\sigma_y \\ &= \text{a.f.p. } \int_{\Omega} A(f(t), f(s)) |f(s) - f(t)|^{-\lambda-n} v(f(s)) J_f(s) ds \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega \setminus B(t, \varepsilon)} a(t, s, \lambda) |s - t|^{-\lambda-n} ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} a_0^{(k)}(t, 0, \lambda) \frac{\varepsilon^{-\lambda+k}}{-\lambda+k} + P(t, \varepsilon, \lambda) \right], \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $P(t, \varepsilon, \lambda)$ дано в (3.4), а $a_0(t, r, \lambda) = \int_{S_{n-1}} a(t, t + r\Theta, \lambda) dS_{n-1}$, $0 \leq r \leq R$, $B(t, R) \subset \Omega$.

Из теоремы 3.1 о замене переменных в a.f.p. интеграла вида $I(\lambda, \Omega, t)$ при любых λ получаем, что значение a.f.p. $I(\lambda, \sigma, x)$ не зависит от способа параметризации поверхности σ .

Действительно, если $y = \eta(\xi)$, $\xi \in \Omega_*$, $x = \eta(\zeta)$, $\zeta \in \Omega_*$, — другая параметризация поверхности σ , то за a.f.p. $I(\lambda, \sigma, x)$ по определению 5.1 надо взять величину

$$\begin{aligned} \text{a.f.p. } I(\lambda, \Omega_*, \zeta) &= \text{a.f.p. } \int_{\Omega_*} A(\eta(\zeta), \eta(\xi)) |\eta(\xi) - \eta(\zeta)|^{-\lambda-n} v(\eta(\xi)) J_{\eta}(\xi) d\xi, \\ \zeta &\in \Omega_*, \quad x = \eta(\zeta) \in \sigma. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Однако $I(\lambda, \Omega_*, \zeta)$ в (5.6) получается из $I(\lambda, \Omega, t)$ в (5.4) заменой переменных $s = f^{-1}(\eta(\xi))$, поэтому по теореме 3.1

$$\text{a.f.p. } I(\lambda, \Omega, t) = \text{a.f.p. } I(\lambda, \Omega_*, \zeta). \quad (5.7)$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 5.1. *Аналитическая конечная часть расходящегося поверхностного интеграла (5.3), определенная по формуле (5.5), не зависит от способа параметризации для любого λ .*

В доказательстве теоремы 5.1 существенно используется радиальная гладкость функции $a(t, s, \lambda)$. В эту функцию составной частью входит функция $\frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|}$. Покажем, что она не обращается в нуль при $s \rightarrow t$ и радиально (с центром в точке t) гладкая при $\frac{\partial f_i(s)}{\partial s_j} \in C^{1, \alpha}(\bar{\Omega})$, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, n$. Действительно,

$$\frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|} = \left[\sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(t)}{\partial t_j} \frac{s_j - t_j}{|s - t|} \right)^2 + O(|s - t|) \right]^{1/2}, \quad (5.8)$$

где величина $\alpha(t, \Theta) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i(t)}{\partial t_j} \frac{s_j - t_j}{|s - t|} \right)^2 > 0$ для любого $t \in \Omega$, а $\Theta = \frac{s - t}{|s - t|}$ является радиус-вектором точки $(n - 1)$ -мерной сферы S_{n-1} . Равенство $\alpha(t, \Theta) = 0$ означало бы, что все строки матрицы Якоби (которые являются n -мерными векторами) ортогональны вектору $\frac{s - t}{|s - t|} \in \mathbb{R}^n$ и поэтому все они параллельны $(n - 1)$ -мерной гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$. Поэтому все миноры порядка n матрицы $f'(t)$ равнялись бы нулю вопреки сделанному предположению.

ПРИМЕР 5.1. Рассмотрим интеграл, который часто встречается в приложениях [4]:

$$I^*(\lambda, \sigma, x) = \int_{\sigma} \frac{\omega(x)\omega(y)}{|y - x|^3} v(y) d\sigma_y, \quad x \in \sigma, \quad (5.9)$$

где $\omega(y)$ — единичная нормаль к поверхности σ в точке y . Взяв параметризацию (5.1), имеем

$$\omega(f(s)) = \frac{[\tau_1(s), \tau_2(s)]}{|[\tau_1(s), \tau_2(s)]|}, \quad (5.10)$$

где $\tau_i(s) = \left(\frac{\partial f_1(s)}{\partial s_i}, \frac{\partial f_2(s)}{\partial s_i}, \frac{\partial f_3(s)}{\partial s_i} \right)$, $i = 1, 2$, — два линейно независимых касательных вектора к σ в точке $y = f(s)$. Заметим, что

$$0 \leq 1 - \omega(f(t))\omega(f(s)) \leq C|s - t|^2, \quad t, s \in \Omega, \quad (5.11)$$

ибо функция $\omega(f(t))\omega(f(s))$ как функция от s достигает максимума равного единице в точке $s = t$ и, значит, ее первые производные по s_1 и s_2 при $s = t$ равны нулю. Следовательно, для функции $A(x, y) = \omega(x)\omega(y)$ имеем

$$A_*(t, s) = A(f(t), f(s)) = A_*(t, t) + A'_{*,s}(t, s)|_{s=t}(s - t) + O(|s - t|^2), \quad (5.12)$$

где $A_*(t, t) = 1$, $A'_{*,s}(t, s)|_{s=t} = 0$. Из (5.12) следует (5.11).

Таким образом, запишем

$$\begin{aligned} I^*(\lambda, \sigma, x) &= \int_{\sigma} \frac{v(y)}{|y - x|^3} d\sigma_y + \int_{\sigma} \frac{\omega(x)\omega(y) - 1}{|y - x|^3} v(y) d\sigma_y \\ &= I_1^*(\lambda, \sigma, x) + I_2^*(\lambda, \sigma, x). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Интеграл $I_2^*(\lambda, \sigma, x)$ является абсолютно сходящимся в силу (5.11), и поэтому рассмотреть надо только $I_1^*(\lambda, \sigma, x)$. Предположим, что уравнение поверхности σ имеет вид

$$\begin{aligned} y_3 = f(y_*) &= f(y_1, y_2), & x_3 = f(x_*) &= f(x_1, x_2), \\ y_* &= (y_1, y_2), & x_* &= (x_1, x_2) \in \Omega, \end{aligned}$$

где Ω – область с кусочно гладкой границей в плоскости переменных y_1, y_2 . Запишем интеграл $I_1^*(\lambda, \sigma, x)$ в виде

$$\begin{aligned}
 I_1^*(\lambda, \sigma, x) &= \int_{\sigma} \frac{v(y) dy}{|y - x|^3} \\
 &= \int_{\Omega} v_*(y_*) \frac{(\sqrt{|y_* - x_*|^2 + (f(y_*) - f(x_*))^2})^{-3}}{|y_* - x_*|^{-3}} |y_* - x_*|^{-3} J_f(y_*) dy_* \\
 &= \int_{\Omega} a_*(x_*, y_*, 1) |y_* - x_*|^{-1-2} dy_*, \tag{5.14} \\
 |y_* - x_*|^2 &= (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad v_*(y_*) = v(y_1, y_2, f(y_1, y_2)), \\
 J_f(y_*) &= (1 + f_{y_1}'^2(y_*) + f_{y_2}'^2(y_*))^{1/2}, \quad dy_* = dy_1 dy_2.
 \end{aligned}$$

Теперь, если воспользоваться формулой (3.10) при $\lambda = 1$, получим

$$\begin{aligned}
 \text{a.f.p.} \int_{\sigma} \frac{v(y)}{|y - x|^3} d\sigma_y &= \text{a.f.p.} \int_{\Omega} a_*(x_*, y_*, 1) |y_* - x_*|^{-1-2} dy_* \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega \setminus B(x_*, \varepsilon)} a_*(x_*, y_*, 1) |y_* - x_*|^{-1-2} dy_* + a_{*,0}(x_*, 0, 1) \frac{\varepsilon^{-1}}{-1} \right. \\
 &\quad \left. + a'_{*,0}(x_*, 0, 1) \ln \varepsilon - \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial r} a_{*,0}(x_*, r, \lambda) \Big|_{r=0, \lambda=1} \right], \tag{5.15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{*,0}(x_*, r, \lambda) &= \int_S a_* \left(x_*, x_* + r \frac{y_* - x_*}{|y_* - x_*|}, \lambda \right) dS, \\
 a_*(x_*, y_*, \lambda) &= v_*(y_*) \left(\sqrt{1 + \frac{(f(y_*) - f(x_*))^2}{|y_* - x_*|^2}} \right)^{-\lambda-2} \cdot \sqrt{1 + f_{y_1}'^2(y_*) + f_{y_2}'^2(y_*)}.
 \end{aligned}$$

Поэтому будем иметь

$$\begin{aligned}
 a_{*,0}(x_*, 0, 1) &= v_*(x_*) \sqrt{1 + f_{x_1}'^2(x_*) + f_{x_2}'^2(x_*)} \\
 &\quad \times \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sqrt{1 + (f'_{x_1}(x_*) \cos \varphi + f'_{x_2}(x_*) \sin \varphi)^2} \right)^{-3} d\varphi, \tag{5.16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \lambda} a_{*,0}(x_*, r, \lambda) \Big|_{\lambda=1} &= - \int_S a_* \left(x_*, x_* + r \frac{y_* - x_*}{|y_* - x_*|}, 1 \right) \\
 &\quad \times \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{f(x_* + r \frac{y_* - x_*}{|y_* - x_*|}) - f(x_*)}{r} \right)^2 \right) dS. \tag{5.17}
 \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial}{\partial r} a_{*,0}(x_*, r, 1) \right|_{r=0} &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \left(\frac{\partial v_*(x_*)}{\partial x_1} \cos \varphi + \frac{\partial v_*(x_*)}{\partial x_2} \sin \varphi \right) \right. \\
&\times A_1(x_*, \varphi) A_2(x_*, \varphi) + v_*(x_*) \left(-\frac{3}{2} \right) \\
&\times \left(1 + (f'_{x_1}(x_*) \cos \varphi + f'_{x_2}(x_*) \sin \varphi)^2 \right)^{-5/2} \\
&\times \left(\frac{\partial^2 f(x_*)}{\partial x_1^2} \cos^2 \varphi + \frac{\partial^2 f(x_*)}{\partial x_1 \partial x_2} \sin 2\varphi + \frac{\partial^2 f(x_*)}{\partial x_2^2} \sin^2 \varphi \right) A_2(x_*, \varphi) \\
&+ v_*(x_*) A_1(x_*, \varphi) \frac{1}{2} (1 + f'^2_{x_1}(x_*) + f'^2_{x_2}(x_*))^{-1/2} \\
&\times 2 \left[f'_{x_1}(x_*) \left(\frac{\partial^2 f(x_*)}{\partial x_1^2} \cos \varphi + \frac{\partial^2 f(x_*)}{\partial x_1 \partial x_2} \sin \varphi \right) \right. \\
&\left. + f'_{x_2}(x_*) \left(\frac{\partial^2 f(x_*)}{\partial x_2 \partial x_1} \cos \varphi + \frac{\partial^2 f(x_*)}{\partial x_2^2} \sin \varphi \right) \right] \Big\} d\varphi \\
&= -\frac{3}{2} v_*(x_*) \cdot \sqrt{1 + f'^2_{x_1}(x_*) + f'^2_{x_2}(x_*)} \\
&\times \int_{-\pi}^{\pi} \left[1 + (f'_{x_1}(x_*) \cos \varphi + f'_{x_2}(x_*) \sin \varphi)^2 \right]^{-5/2} \\
&\times \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial x_2} \sin \varphi \right)^2 f(x_*) d\varphi, \\
A_1(x_*, \varphi) &= (1 + (f'_{x_1}(x_*) \cos \varphi + f'_{x_2}(x_*) \sin \varphi)^2)^{-3/2}, \\
A_2(x_*, \varphi) &= \sqrt{1 + f'^2_{x_1}(x_*) + f'^2_{x_2}(x_*)}.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} a_{*,0}(x_*, r, \lambda) \right) \right|_{\lambda=1} \Big|_{r=0} &= - \left[v_*(x_*) \sqrt{1 + f'^2_{x_1}(x_*) + f'^2_{x_2}(x_*)} \right. \\
&\times \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{3}{2} B_1(x_*, \varphi) \frac{1}{2} \ln B_2(x_*, \varphi) \right. \\
&\left. + (B_2(x_*, \varphi))^{-5/2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial x_2} \sin \varphi \right)^2 f(x_*) \right) d\varphi \Big], \\
B_1(x_*, \varphi) &= (B_2(x_*, \varphi))^{-5/2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial x_2} \sin \varphi \right)^2 f(x_*), \\
B_2(x_*, \varphi) &= 1 + \left(\frac{\partial f(x_*)}{\partial x_1} \cos \varphi + \frac{\partial f(x_*)}{\partial x_2} \sin \varphi \right)^2.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Интересно рассмотреть интеграл $I_1^*(\lambda, \sigma, x)$ в следующей системе координат. Касательную плоскость к поверхности σ в точке x примем за параметрическую плоскость переменных $\tilde{y}_* = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ с началом координат в точке $x = \tilde{x}_*(0, 0)$, и пусть уравнение поверхности σ в системе координат $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3)$ (систему координат

$(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3)$ назовем “ x -канонической”) имеет вид $\tilde{y}_3 = \psi(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \psi(\tilde{y}_*)$. Тогда $\psi(\tilde{x}_*) = 0$, $\psi'_{\tilde{x}_1}(\tilde{x}_*) = \psi'_{\tilde{x}_2}(\tilde{x}_*) = 0$. Далее получим

$$\begin{aligned} a_{*,0}(\tilde{x}_*, 0, 1) &= 2\pi\tilde{v}_*(\tilde{x}_*) = 2\pi v(x), \\ \frac{\partial}{\partial r} a_{*,0}(\tilde{x}_*, 0, 1) &= -\frac{3}{2}v(x)\pi\left(\frac{\partial^2\psi(\tilde{x}_*)}{\partial\tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2\psi(\tilde{x}_*)}{\partial\tilde{x}_2^2}\right), \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda} a_{*,0}(\tilde{x}_*, r, \lambda)\right)\Big|_{\lambda=1}\Big|_{r=0} &= -v(x)\pi\left(\frac{\partial^2\psi(\tilde{x}_*)}{\partial\tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2\psi(\tilde{x}_*)}{\partial\tilde{x}_2^2}\right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Таким образом, формула (5.16) в “ x -канонической” системе координат получит вид:

$$\begin{aligned} \text{a.f.p.} \int_{\sigma} \frac{v(y) d\sigma_y}{|y-x|^3} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\tilde{\Omega} \setminus B(\tilde{x}_*, \varepsilon)} a_*(\tilde{x}_*, \tilde{y}_*, 1) |\tilde{y}_* - \tilde{x}_*|^{-1-2} d\tilde{y}_* - \frac{2\pi v(x)}{\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\pi v(x)}{2} B_3(\tilde{x}_*, \psi) \ln \varepsilon + \pi v(x) B_3(\tilde{x}_*, \psi) \right], \\ B_3(\tilde{x}_*, \psi) &= \frac{\partial^2\psi(\tilde{x}_*)}{\partial\tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2\psi(\tilde{x}_*)}{\partial\tilde{x}_2^2}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

где $\tilde{\Omega}$ – область в касательной к σ в точке x плоскости, в которую проектируется поверхность σ .

§ 6. Определение f.p.-интеграла интегрированием по частям

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с кусочно гладкой границей Γ . Орт внешней нормали к Γ в точке $y = (y_1, \dots, y_n)$ обозначим через $\bar{\omega}(y) = (\omega_1(y), \dots, \omega_n(y))$. Пусть на множестве $\{(x, y) : (x, y) \in \Omega \times \Omega, x \neq y\}$ дано слабо сингулярное гладкое ядро $K(x, y)$:

$$|K(x, y)| \leq M|y-x|^{-\nu}, \quad 0 \leq \nu < n. \quad (6.1)$$

Производные от $K(x, y)$, как правило, имеют более сильную особенность при $|y-x| \rightarrow 0$, типичными являются оценки

$$\left| \frac{\partial^m K(x, y)}{\partial y_1^{m_1} \dots \partial y_n^{m_n}} \right| \leq M_m |y-x|^{-\nu-m}, \quad (6.2)$$

$$m = 0, 1, \dots, \quad m = m_1 + \dots + m_n, \quad m_i \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Пусть $K(x, y)$ удовлетворяет (6.1). Для $v \in C^1(\bar{\Omega})$, $x \in \Omega$ полагаем

$$\text{f.p.p.} \int_{\Omega} \frac{\partial K(x, y)}{\partial y_i} v(y) dy = \int_{\Gamma} K(x, y) v(y) \omega_i(y) d\Gamma_y - \int_{\Omega} K(x, y) \frac{\partial v(y)}{\partial y_i} dy; \quad (6.3)$$

для $v \in C^2(\bar{\Omega})$, $x \in \Omega$ полагаем

$$\begin{aligned} \text{f.p.p.} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 K(x, y)}{\partial y_i \partial y_j} v(y) dy &= \int_{\Gamma} \frac{\partial K(x, y)}{\partial y_j} v(y) \omega_i(y) d\Gamma_y \\ &\quad - \int_{\Gamma} K(x, y) \frac{\partial v(y)}{\partial y_i} \omega_j(y) d\Gamma_y + \int_{\Omega} K(x, y) \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y_j \partial y_i} dy; \end{aligned} \quad (6.4)$$

для $v \in C^m(\overline{\Omega})$, $x \in \Omega$ полагаем

$$\text{f.p.p.} \int_{\Omega} \frac{\partial^m K(x, y)}{\partial y_1^{m_1} \dots \partial y_n^{m_n}} v(y) dy = (T_{\Gamma} v)(x) + (-1)^m \int_{\Omega} K(x, y) \frac{\partial^m v(y)}{\partial y_1^{m_1} \dots \partial y_n^{m_n}} dy, \quad (6.5)$$

где через $T_{\Gamma} v$ обозначена сумма поверхностных интегралов по Γ , соответствующая m -кратному интегрированию по частям.

Слева в (6.3)–(6.5) стоят расходящиеся интегралы, конечная часть (f.p.p. – finite part on parts) которых определена правой частью соответствующей формулы. Условия на v можно несколько ослабить, например правые части в (6.3) корректно определены для $v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$, где $W^{1,1}(\Omega)$ – соболевское пространство функций, первые частные производные которых абсолютно интегрируемы на Ω .

Из формулы (6.5) не видно, что значение $T_{\Gamma} v$ не зависит от порядка дифференцирования функции $K(x, y)$. Тем не менее справедливо следующее замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Если $K(x, y)$ удовлетворяет (6.1), а $v(y) \in C^{m-1}(\overline{\Omega}) \cap C^m(\Omega) \cap W^{m,1}(\Omega)$, то величина $T_{\Gamma} v$ не зависит от порядка дифференцирования $K(x, y)$ в определении (6.5). Чтобы убедиться в этом, возьмем такое число $\varepsilon > 0$, что шар $B(x, 2\varepsilon)$ радиуса 2ε с центром в точке x и его замыкание $\overline{B(x, 2\varepsilon)}$ лежат в Ω , и возьмем функцию $\psi \in C^{\infty}(\Omega)$ такую, что $\psi(y) = 0$ при $y \in B(x, \varepsilon)$, $\psi(y) = 1$ при $y \in \Omega \setminus B(x, 2\varepsilon)$. Тогда для $v^*(y) = \psi(y)v(y)$ имеем $T_{\Gamma} v^* = T_{\Gamma} v$, а (6.3)–(6.5) превращаются в равенства обычных интегралов с гладкой в $\Omega \times \overline{\Omega}$ функцией $K(x, y) \cdot v^*(y)$. Объемные интегралы в этих равенствах не меняются при изменении порядка дифференцирования в $K(x, y)$ и $v^*(y)$. Стало быть, не меняется и поверхностный интеграл $T_{\Gamma} v = T_{\Gamma} v^*$.

Пусть Ω_{ε} – окрестность точки x с кусочно гладкой границей $\Gamma(x, \varepsilon)$. Тогда в силу свойства $K(x, y)$ вне окрестности точки x получаем равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega_{\varepsilon}}} \frac{\partial^m K(x, y)}{\partial y_1^{m_1} \dots \partial y_n^{m_n}} v(y) dy &= (T_{\Gamma} v)(x) - (T_{\Gamma(x, \varepsilon)} v)(x) \\ &+ (-1)^m \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega_{\varepsilon}}} K(x, y) \frac{\partial^m v(y)}{\partial y_1^{m_1} \dots \partial y_n^{m_n}} dy. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Возьмем теперь Ω_{ε} такую, что $\text{diam } \Omega_{\varepsilon} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и перенесем $(T_{\Gamma(x, \varepsilon)} v)(x)$ в (6.6) влево. Тогда оставшаяся часть справа в (6.6) при $\varepsilon \rightarrow 0$ перейдет в правую часть в (6.5), так как $K(x, y)$ удовлетворяет (6.1). Таким образом, доказано равенство

$$\begin{aligned} \text{f.p.p.} \int_{\Omega} \frac{\partial^m K(x, y)}{\partial y_1^{m_1} \dots \partial y_n^{m_n}} v(y) dy \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega \setminus \overline{\Omega_{\varepsilon}}} \frac{\partial^m K(x, y)}{\partial y_1^{m_1} \dots \partial y_n^{m_n}} v(y) dy + (T_{\Gamma(x, \varepsilon)} v)(x) \right), \end{aligned} \quad (6.7)$$

где $x \in \Omega$.

Определение (6.5) и формула (6.7) естественным образом распространяются на ядра вида $L(K(x, y))$, где L – произвольный линейный дифференциальный оператор с гладкими коэффициентами. Например, по определению полагаем

$$\text{f.p.p.} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(y) \frac{\partial K(x, y)}{\partial y_i} v(y) dy = \sum_{i=1}^n \text{f.p.p.} \int_{\Omega} \frac{\partial K(x, y)}{\partial y_i} (a_i(y) v(y)) dy. \quad (6.8)$$

Отметим также, что из формулы (6.6) и определения (6.5) следует, что для любой области Ω_0 с кусочно гладкой границей, $x \in \Omega_0 \subset \Omega$, верно равенство

$$\begin{aligned} \text{f.p.p.} \int_{\Omega} L(K(x, y)) v(y) dy &= \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_0} L(K(x, y)) v(y) dy \\ &+ \text{f.p.p.} \int_{\Omega_0} L(K(x, y)) v(y) dy, \quad (6.9) \\ L(\cdot) &= \sum_{m \leq l} a_m(y) \frac{\partial^m \cdot}{\partial y_1^{m_1} \dots \partial y_n^{m_n}}, \quad a_m \in C^m(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 6.1. Так как $\frac{\partial}{\partial y_i} |y - x|^{-n+1} = (-n+1)(y_i - x_i) |y - x|^{-n-1}$, то по определению

$$\begin{aligned} \text{f.p.p.} \int_{\Omega} \frac{y_i - x_i}{|y - x|^{n+1}} v(y) dy &= \frac{1}{-n+1} \text{f.p.p.} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial y_i} |y - x|^{-n+1} \right) v(y) dy \\ &= \frac{1}{-n+1} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{v(y)}{|y - x|^{n-1}} d\Gamma_y - \int_{\Omega} \frac{1}{|y - x|^{n-1}} \frac{\partial v(y)}{\partial y_i} dy \right\}, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (6.10)$$

а по формуле (6.7)

$$\begin{aligned} \text{f.p.p.} \int_{\Omega} \frac{y_i - x_i}{|y - x|^{n+1}} v(y) dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{-n+1} \int_{\Omega \setminus B(x, \varepsilon)} \left(\frac{\partial}{\partial y_i} |y - x|^{-n+1} \right) v(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{-n+1} \int_{\Gamma(x, \varepsilon)} \frac{v(y)}{|y - x|^{n-1}} d\Gamma_y(x, \varepsilon) \right), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (6.11)$$

ПРИМЕР 6.2. Поскольку $\Delta_y |y - x|^{-\nu} = \nu(\nu+2-n) |y - x|^{-\nu-2}$ для $n-2 < \nu < n$, то в соответствии с (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \text{f.p.p.} \int_{\Omega} \frac{v(y) dy}{|y - x|^{\nu+2}} &= \frac{1}{\nu(\nu+2-n)} \text{f.p.p.} \int_{\Omega} (\Delta_y |y - x|^{-\nu}) v(y) dy = \frac{1}{\nu(\nu+2-n)} \\ &\times \left(\int_{\Omega} \frac{\Delta v(y)}{|y - x|^{\nu}} dy - \nu \int_{\Gamma} \frac{\langle y - x, \overline{\omega}(y) \rangle}{|y - x|^{\nu+2}} v(y) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} \frac{1}{|y - x|^{\nu}} \frac{\partial v(y)}{\partial \overline{\omega}} d\Gamma_y \right), \end{aligned} \quad (6.12)$$

а по формуле (6.7)

$$\begin{aligned} \text{f.p.p.} \int_{\Omega} \frac{v(y) dy}{|y-x|^{\nu+2}} &= \frac{1}{\nu(\nu+2-n)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega \setminus O(x, \varepsilon)} (\Delta_y |y-x|^{-\nu}) v(y) dy \right. \\ &\quad - \nu \int_{\Gamma(x, \varepsilon)} \frac{\langle y-x, \overline{\omega}(y) \rangle}{|y-x|^{\nu+2}} v(y) d\Gamma_y(x, \varepsilon) \\ &\quad \left. - \int_{\Gamma(x, \varepsilon)} \frac{1}{|y-x|^{\nu}} \frac{\partial v(y)}{\partial \overline{\omega}(y)} d\Gamma_y(x, \varepsilon) \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Во многих задачах надо делать замену переменных в интеграле. Пусть дано преобразование координат $y = g(s)$, $y_i = g_i(s_1, \dots, s_n)$, $i = 1, \dots, n$; $s = \gamma(y)$, $s_j = \gamma_j(y_1, \dots, y_n)$, $y \in \Omega$, $s \in \Omega_*$, где Ω_* — прообраз области Ω , а Γ_* — прообраз границы Γ , $y = g(\gamma(y))$, $s = \gamma(g(s))$, $\det g'(s) \neq 0$ для любого $s \in \Omega_*$, $g'(s) = \left(\frac{\partial g_i(s)}{\partial s_j} \right)_{i,j=1}^n$ — матрица частных производных, i — номер строки, j — номер столбца. Оказывается, для ф.р.р.-интеграла в (6.3) справедлива теорема 6.1.

ТЕОРЕМА 6.1. *При условии $g \in C^2(\Omega_*)$ верна формула замены переменных:*

$$\begin{aligned} \text{f.p.p.} \int_{\Omega} \frac{\partial K(x, y)}{\partial y_i} v(y) dy &= \text{f.p.p.} \int_{\Omega_*} \sum_{j=1}^n \frac{\partial K(g(t), g(s))}{\partial s_j} \frac{\partial \gamma_j(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=g(s)} \\ &\quad \times v(g(s)) |\det g'(s)| ds, \quad x \in \Omega, \quad t = \gamma(x) \in \Omega_*. \end{aligned} \quad (6.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ верна формула замены переменных:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} v(y) dy &= \int_{\Omega_*} \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=g(s)} v(g(s)) |\det g'(s)| ds \\ &= \int_{\Omega_*} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u(g(s))}{\partial s_j} \frac{\partial \gamma_j(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=g(s)} v(g(s)) |\det g'(s)| ds. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Крайние члены в (6.15) преобразуем интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u(y) v(y) \omega_i(y) d\Gamma - \int_{\Omega} u(y) \frac{\partial v(y)}{\partial y_i} dy &= \int_{\Gamma_*} u(g(s)) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \gamma_j(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=g(s)} \\ &\quad \times v(g(s)) \omega_j^*(g(s)) |\det g'(s)| ds \\ &\quad - \int_{\Omega_*} u(g(s)) \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial s_j} \left\{ \frac{\partial \gamma_j(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=g(s)} v(g(s)) |\det g'(s)| \right\} ds, \end{aligned} \quad (6.16)$$

где $\overline{\omega}^*(g(s)) = (\omega_1^*(g(s)), \dots, \omega_n^*(g(s)))$ — орт нормали к Γ_* в точке s .

В (6.16) нет производных от u , и это равенство предельным переходом расширяется на функции $u \in L^1(\Omega)$, непрерывные в некоторой пограничной полосе около Γ . В частности, (6.16) верно для $u(y) = K(x, y)$ с фиксированным $x \in \Omega$, а это в сочетании с (6.3) означает, что для $v \in C^1(\overline{\Omega})$ справедлива формула (6.14).

Следующий более общий результат доказывается аналогично теореме 6.1.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $g \in C^{l+1}(\overline{\Omega})$, а $L(\cdot)$ – линейный дифференциальный оператор порядка l , определенный в (6.9) коэффициентами $a_m \in C^m(\overline{\Omega})$, $m \leq l$. Пусть $L_*(\cdot) = \sum_{m \leq l} b_m(s) \frac{\partial^m \cdot}{\partial y_1^{m_1} \dots \partial y_n^{m_n}}$ – дифференциальный оператор, представляющий L в координатах s , т.е. для любой $u \in C^l(\overline{\Omega})$ имеем

$$L(u(y))|_{y=g(s)} = L_*(u_*(s)), \quad u_*(s) = u(g(s)). \quad (6.17)$$

Тогда для $v \in C^l(\overline{\Omega})$ справедлива формула замены переменных:

$$\begin{aligned} \text{f.p.p.} \int_{\Omega} [L_y(K(x, y))] v(y) dy &= \text{f.p.p.} \int_{\Omega_*} [L_{*,s}(K_*(x, y))] v_*(s) |\det g'(s)| ds, \\ K_*(t, s) &= K(g(t), g(s)), \quad v_*(s) = v(g(s)), \quad x = g(t) \in \Omega, \quad t \in \Omega_*. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Для коэффициентов $b_m(s)$ дифференциального оператора $L_*(\cdot)$ можно дать явные формулы.

ПРИМЕР 6.3. Запишем формулу замены переменных (6.18) для оператора Лапласа $\Delta_y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)^2$. Формула (6.17) для $\Delta_{*,s}$ известна из учебников по уравнениям математической физики:

$$\begin{aligned} \Delta_y u(y)|_{y=g(s)} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{j,k}(s) \frac{\partial^2 u_*(s)}{\partial s_j \partial s_k} + \sum_{j=1}^n b_j(s) \frac{\partial u_*(s)}{\partial s_j}, \\ b_{j,k} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \gamma_j(y)}{\partial y_i} \frac{\partial \gamma_k(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=g(s)} = \langle \nabla \gamma_j(y), \nabla \gamma_k(y) \rangle \Big|_{y=g(s)}, \\ b_j(s) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \gamma_j(y)}{\partial y_i^2} \Big|_{y=g(s)} = \Delta \gamma_j(y) \Big|_{y=g(s)}. \end{aligned}$$

Допустим, что $g \in C^3(\overline{\Omega})$. В соответствии с (6.18) для $v \in C^2(\overline{\Omega})$, $x = g(t) \in \Omega$, $t \in \Omega_*$, имеем формулу замены переменных:

$$\begin{aligned} \text{f.p.p.} \int_{\Omega} [\Delta_y K(x, y)] v(y) dy &= \text{f.p.p.} \int_{\Omega_*} \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{j,k}(s) \frac{\partial^2 K(g(t), g(s))}{\partial s_j \partial s_k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n b_j(s) \frac{\partial K(g(t), g(s))}{\partial s_j} \right\} v_*(s) |\det g'(s)| ds. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Подчеркнем, что ф.р.р.-интеграл (6.3) зависит не только от его ядра $\frac{\partial K(x, y)}{\partial y_i}$, но и от $K(x, y)$, первообразной этого ядра. Взяв вместо $K(x, y)$ первообразную $K(x, y) + C(x)$, где $C(x)$ – произвольная функция на Ω , получим иное значение ф.р.р.-интеграла. Аналогичное замечание в еще большей степени касается интегралов, определяемых формулами (6.4), (6.5) и (6.8).

Список литературы

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
3. *Belotserkovsky S. M., Lifanov I. K.* Method of discrete vortices. CRC Press, 1993.
4. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО “Янус”, 1995.
5. *Lifanov I. K.* Singular integral equations and discrete vortices. Utrecht: VSP, 1996.
6. *Захаров Е. В., Пименов Ю. В.* Численный анализ дифракции радиоволн. М.: Радио и связь, 1982.
7. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981.
8. *Saranen J., Vainikko G.* Periodic integral and pseudodifferential equations with numerical approximation. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
9. *Вайникко Г. М., Лифанов И. К.* О понятии конечной части расходящихся интегралов // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 9. С. 1233–1246.
10. *Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях. М.: ТОО “Янус-К”, 2001.
11. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
12. *Анфиногенов А. Ю., Лифанов И. К., Лифанов П. И.* О некоторых одно- и двумерных гиперсингулярных интегральных уравнениях // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 8. С. 3–46.

Институт математики
Хельсинского технологического университета,
Хельсинки, Финляндия;
Институт вычислительной математики РАН, Москва

Поступила в редакцию
29.10.2002