Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гайсин, Оценки роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 8, 55–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm761>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 10:24:13

УДК 517.53

А. М. Гайсин

Оценки роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых

Изучается связь между ростом целого ряда Дирихле с лакунами Фейера и его убыванием на кривых, уходящих в бесконечность.

В самой общей ситуации установлены наилучшие оценки.

Библиография: 32 названия.

В статье обсуждается одна классическая задача об асимптотическом поведении целых функций, представленных лакунарными степенными рядами.

Пусть $\{p_n\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty. \quad (1)$$

В этом случае говорят, что последовательность $\{p_n\}$ имеет *лакуны Фейера*. Аналогично, целая функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (2)$$

имеет лакуны Фейера, если последовательность $S(f) = \{n \geq 1 : c_n \neq 0\}$ имеет лакуны Фейера. В этом случае ряд (2) есть лакунарный степенной ряд вида

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}, \quad a_n = c_{p_n} \neq 0. \quad (3)$$

Хорошо известно, что целая функция с лакунами Фейера принимает каждое комплексное значение бесконечно много раз [1]. Этот замечательный факт и другие соображения наводят на мысль о наличии у целых функций $f(z)$, заданных рядами (3), хороших асимптотических свойств. Это подтверждается многочисленными исследованиями, которые проводились специалистами по теории функций в течение многих лет. Имеется обширная литература по данной тематике, далеко не полный перечень которой мы приводим в конце работы (см., например, [1]–[27]). В подавляющем большинстве этих работ в основном указаны достаточные условия, при выполнении которых справедливы утверждения:

а) при $r \rightarrow \infty$ вне некоторого исключительного множества $E \subset [0, \infty)$

$$\ln M(r; f) = (1 + o(1)) \ln m(r; f),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00655).

где

$$M(r; f) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad m(r; f) = \min_{|z|=r} |f(z)|;$$

или

- б) для любой кривой γ , уходящей в бесконечность, существует последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in \gamma$, такая, что при $\xi_n \rightarrow \infty$

$$\ln M(|\xi_n|; f) = (1 + o(1)) \ln |f(\xi_n)|.$$

Впервые задача б) была сформулирована Поля в работе [3] и решена для одного класса целых функций $f(z)$ вида (3), имеющих конечный порядок. В случае, когда функция $f(z)$ имеет конечный порядок или конечный нижний порядок, в последние годы получены окончательные результаты [17]–[19] (в [18], [19] соответствующие результаты установлены для более общих рядов – рядов Дирихле). Когда же целая функция $f(z)$ (даже имеющая лакуны Фейера) имеет произвольный рост, возникают существенные трудности, связанные с нерегулярным распределением точек последовательности $\{p_n\}$, и поэтому полученные до сих пор результаты были далеки от окончательных.

Цель работы – дать полное решение задачи Пойа.

Мы здесь ограничимся задачами типа б). Утверждения же типа а), означающие более сильную регулярность роста функции $f(z)$, требуют отдельного рассмотрения.

Сделаем краткий обзор результатов, имеющих непосредственное отношение к обсуждаемым здесь задачам. Прежде всего отметим следующий факт, установленный в работе [2]: для того чтобы любая целая функция вида (3) не была ограниченной на луче $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (1). Аналогичное утверждение имеет место и для рядов Дирихле [27].

Пусть L – класс всех непрерывных на $[0, \infty)$ функций $w = w(x)$ таких, что $0 < w(x) \uparrow \infty$, $x \rightarrow \infty$,

$$W = \left\{ w : w \in L, \int_1^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty \right\}, \quad \Omega = \left\{ w \in W : \frac{w(x)}{x} \downarrow 0, x \rightarrow \infty \right\}.$$

Последовательность $\{p_n\}$ называется *интерполяционной*, если найдется функция $w \in \Omega$, зависящая только от последовательности $\{p_n\}$, такая, что для любой последовательности $\{b_n\} \subset \mathbb{C}$, $|b_n| \leq 1$, существует целая функция экспоненциального типа $\varphi(z)$, обладающая свойствами:

$$\varphi(p_n) = b_n, \quad n \geq 1, \quad \max_{|z|=r} |\varphi(z)| = M(r; \varphi) \leq e^{w(r)}.$$

Это определение дано в работе [12], хотя интерполяционный метод был использован А. И. Павловым еще в работе [10], где он показал, что если

$$\text{с) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty, \quad \text{д) } \frac{n}{p_n} \downarrow, \quad (4)$$

то

$$d(f; \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim_{\substack{z \in \gamma \\ z \rightarrow \infty}}} \frac{\ln |f(z)|}{\ln M(|z|; f)} = 1, \quad (5)$$

где $f(z)$ – целая функция, заданная рядом (3), а γ – любая кривая, уходящая в бесконечность. Отметим, что в этой теореме равенство (5) получено без каких-либо ограничений на рост функции $f(z)$. Ранее равенство (5) было установлено Т. Ковари для последовательностей $\{p_n\}$ таких, что [6]

$$p_n > n(\ln n)^{1+\varepsilon}, \quad n \geq n_0, \quad \varepsilon > 0.$$

В [12] показано, что последовательности $\{p_n\}$, удовлетворяющие условиям (4), а также последовательности $\{p_n\}$, удовлетворяющие условию

$$p_n > cn \ln n [\ln \ln n]^{2+\eta}, \quad n \geq n_1, \quad c > 0, \quad \eta > 0,$$

являются интерполяционными. Последовательности $\{p_n\}$, $p_n > cn \ln n [\ln \ln n]^2$, вообще говоря, не интерполяционные [13].

Таким образом, никак не связанные на первый взгляд условия Павлова и Ковари означают не что иное, как условие интерполяционности в смысле Корева и Диксона.

Что же на самом деле означает условие интерполяционности?

В работе [13] установлен следующий критерий: для того чтобы последовательность $\{p_n\}$ была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $w \in \Omega$ такая, что:

$$\begin{aligned} \text{e) } n(t) &\leq w(t), \quad n(t) = \sum_{p_n < t} 1; \\ \text{f) } -\ln \prod_{\frac{p_n}{2} < p_k < 2p_n} \left| 1 - \frac{p_n}{p_k} \right| &\leq w(p_n), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

В статье [15] понятие интерполяционных последовательностей распространяется на произвольные вещественные последовательности $\{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, и для таких последовательностей аналог равенства (5) доказывается для более общих рядов – рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad (6)$$

сходящихся во всей плоскости.

Для интерполяционных последовательностей $\{\lambda_n\}$ автоматически выполняется условие [13], [15]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty. \quad (7)$$

Однако для интерполяционности последовательности $\{\lambda_n\}$ только этого условия недостаточно [13]. При выполнении условия (7) ряды (6) будем называть *рядами Дирихле с лакунами Фейера*.

Пусть $0 < \lambda_n \uparrow \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty, \quad Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right), \quad q(\lambda_n) = -\ln |Q'(\lambda_n)|. \quad (8)$$

Введем функцию $\alpha(t)$, полагая $\alpha(t) = 0$ при $0 \leq t < \lambda_1$ и $\alpha(t) = \max_{\lambda_n \leq t} q^+(\lambda_n)$ при $t \geq \lambda_1$, где $a^+ = \max(a, 0)$.

Справедлива следующая теорема [26].

ТЕОРЕМА А. Пусть выполнено условие (7). Если

$$\int_1^{\infty} \frac{\alpha(t)}{t^2} dt < \infty, \quad (9)$$

то

$$d(F; \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{\substack{s \in \gamma \\ s \rightarrow \infty}} \frac{\ln |F(s)|}{\ln M(\operatorname{Re} s)} = 1, \quad (10)$$

где $M(\sigma) = \sup_{|t| < \infty} |F(\sigma + it)|$, а γ — любая кривая, уходящая в бесконечность так, что если $s \in \gamma$ и $s \rightarrow \infty$, то $\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty$.

Условия (7), (9) означают следующее: существует функция $w \in W$ такая, что

- 1) $n(t) \leq w(t)$,
- 2) $q(\lambda_n) \leq w(\lambda_n)$, $n \geq 1$.

Эти же оценки следуют и из условий е), f) интерполяционности, но с функцией $w \in \Omega$. Так что условия теоремы А менее ограничительны, чем условия интерполяционности. Действительно, пусть $\Delta_j = \left[2j^2 - \left[\frac{2j^2}{j^2}\right], 2j^2\right]$ ($[a]$ — целая часть a), а $\{\lambda_n\}$ — возрастающая последовательность всех натуральных чисел из $\bigcup_j \Delta_j$. В [23] показано, что для этой последовательности условия (7) и (9) выполнены, хотя она не интерполяционная. Видим, что условия теоремы А более слабые, чем условия интерполяционности. Но для справедливости теоремы А условие (7) необходимо: для любой последовательности $\{\lambda_n\}$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty,$$

существует целая функция $F(s)$ вида (6), для которой $d(F; \mathbb{R}_+) \leq 0$, где $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ [2], [27].

До настоящего времени оставался открытым следующий вопрос: каковы минимальные ограничения на последовательность $\{\lambda_n\}$, при которых для любой целой функции $F(s)$, заданной рядом (6) и имеющей произвольный рост, было бы справедливо равенство $\inf_{\gamma \in \Gamma} d(F; \gamma) = 1$? Здесь $\Gamma = \{\gamma\}$ — семейство всех кривых γ , удовлетворяющих условиям теоремы А. Еще в работе [24] было высказано предположение о справедливости равенства $d(f; \mathbb{R}_+) = 1$ для любой целой функции с вещественными коэффициентами Тейлора, последовательность $\{p_n\}$ перемен знаков коэффициентов которой удовлетворяет лишь условию (1). В [24] было даже приведено доказательство этого сильного утверждения. Позднее обнаружилось, что

в доказательстве есть серьезный пробел, который М. Н. Шеремета не смог устранить, и гипотезу из [24] он сформулировал как открытую проблему. До сих пор существовала аналогичная гипотеза М. Н. Шереметы о справедливости равенства $d(f; \mathbb{R}_+) = 1$ или более общего равенства $\inf_{\gamma} d(f; \gamma) = 1$ для произвольных целых функций (3), имеющих лакуны Фейера. Однако до последнего времени не был известен ответ ни на одну из этих гипотез, формулировки которых в той или иной форме неоднократно приводились в разделах открытых проблем ряда выпусков журнала “Математичні студії” (Львов) последних лет. Следует отметить, что обе гипотезы по сути сводятся к одной и той же задаче из теории целых функций [28]. Положительный ответ на последнюю гипотезу полностью разрешил бы проблему Макинтайра, в которой утверждается, что при условии (1) любая целая функция (3) не имеет конечных асимптотических значений. Но в работе [25] возникла новая гипотеза о том, что условие (9) теоремы А не может быть ослаблено: если интеграл (9) расходится, то существует целая функция $f(z)$ с лакунами Фейера, для которой $\inf_{\gamma} d(f; \gamma) < 1$. Однако построение соответствующего примера даже для какой-то специальной последовательности $\{p_n\}$ оказалось весьма нелегким делом.

В настоящей работе построен следующий пример: для любой последовательности $\{p_n\}$ с лакунами Фейера, но для которой интеграл (9) расходится, имеется функция $f(z)$ вида (3) такая, что $d(f; \mathbb{R}_+) = 0$.

Основным результатом статьи является

ТЕОРЕМА. Пусть $d(f) = \inf_{\gamma} d(f; \gamma)$. Для того чтобы для любой целой функции f вида (3) имело место равенство $d(f) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы для последовательности $\{p_n\}$ выполнялись условия (1) и (9).

В общей ситуации, т.е. когда выполняется только условие (1), можно лишь утверждать, что $0 \leq d(f) \leq 1$ (см. следствие 2 из теоремы 2), причем обе оценки точные, а именно: для любой последовательности $\{p_n\}$ с лакунами Фейера, но для которой интеграл типа (9) расходится, имеются функции f_1, f_2 , имеющие вид (3), для которых $d(f_1) = 0, d(f_2) = 1$.

Таким образом, в статье дается отрицательный ответ на гипотезу М. Н. Шереметы и получено окончательное решение задачи b) Поля из [3].

§1. Формулировки результатов

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}, 0 < \lambda_n \uparrow \infty$, — последовательность, удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \lambda_n} = a < \infty. \quad (11)$$

Через $D(\Lambda)$ обозначим класс всех функций $F(s)$, представимых во всей плоскости рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it. \quad (12)$$

Из условия (11) следует, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0.$$

Так что ряд (12) сходится во всей плоскости абсолютно и равномерно, а его сумма $F(s)$ – целая функция [20]. Наряду с (12) введем в рассмотрение и ряд

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s}, \quad (13)$$

где последовательность $b = \{b_n\}$ комплексных чисел b_n ($b_n \neq 0$ при $n \geq N$) удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |b_n|}{\lambda_n} < \infty.$$

Тогда ряд (13) также сходится во всей плоскости, причем абсолютно и равномерно, а $F^*(s)$ – целая функция. В дальнейшем будем предполагать, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln(|b_n| + |b_n|^{-1}) < \infty. \quad (14)$$

Это позволит нам рассматривать также абсолютно сходящиеся во всей плоскости ряды Дирихле

$$\sum_{n=N}^{\infty} b_n^{-1} a_n e^{\lambda_n s}.$$

Пусть $\mu(\sigma)$ и $\mu_b^*(\sigma)$ – максимальные члены рядов (12) и (13) соответственно, т.е.

$$\mu(\sigma) = \max_{n \geq 1} \{|a_n| e^{\lambda_n \sigma}\}, \quad \mu_b^*(\sigma) = \max_{n \geq 1} \{|a_n| |b_n| e^{\lambda_n \sigma}\}.$$

Для нас особый интерес будет представлять случай, когда $b = \{Q'(\lambda_n)\}$, где Q – функция из (8). Но для упрощения записи далее вместо $\mu_b^*(\sigma)$ везде будем использовать символ $\mu^*(\sigma)$. Как и выше, W будет означать так называемый класс сходимости, т.е. множество всех положительных непрерывных и неограниченно возрастающих на $[0, \infty)$ функций $w = w(x)$ таких, что

$$\int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty.$$

В дальнейшем считаем, что все исключительные множества, вне которых будут получены наши асимптотические оценки, представляют собой объединение конечного или бесконечного числа отрезков вида $[a_n, a'_n]$, где $0 < a_1 < a'_1 < a_2 < a'_2 < \dots < a_n < a'_n \dots$. При этом исключительное множество имеет конечную меру, если $\sum_n (a'_n - a_n) < \infty$, и конечную логарифмическую меру, если $\sum_n \ln(a'_n/a_n) < \infty$.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{b_n\}$ – некоторая последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию (14), $\mu(\sigma)$ и $\mu^*(\sigma)$ – максимальные члены рядов (12) и (13) соответственно.

Для того чтобы для любой функции $F \in D(\Lambda)$ при $\sigma \rightarrow +\infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ конечной меры имело место асимптотическое равенство

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma), \quad (15)$$

необходимо и достаточно, чтобы для некоторой функции $w \in W$ выполнялись оценки

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \leq e^{w(\lambda_n)}, \quad n \geq N. \quad (16)$$

Эта теорема, хотя представляет и самостоятельный интерес, в случае $b = \{Q'(\lambda_n)\}$ имеет весьма эффективное применение при доказательстве основной теоремы.

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ имеет конечную верхнюю плотность D и конечный индекс конденсации δ , где

$$D = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n}, \quad \delta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|Q'(\lambda_n)|}.$$

Соответствующий класс целых функций $F(s)$, представимых во всей плоскости рядами Дирихле (12), будем обозначать через $B(\Lambda)$.

Отметим, что если, например, $\inf_n (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \tau > 0$, то $\delta < \infty$ (см., например, [21]).

Рассмотрим следующий измененный ряд:

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(\lambda_n) e^{\lambda_n s}, \quad (17)$$

где a_n — коэффициенты ряда (12), а $Q(z)$ — целая функция, определенная формулой из (8). Если последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет конечную верхнюю плотность, то $Q(z)$, а следовательно, и $Q'(z)$, является целой функцией экспоненциального типа и ряд (17) сходится во всей плоскости абсолютно и равномерно. Отметим, что если выполняется более сильное условие (7), то функции $N(t)$ и $\ln M(t; Q)$ принадлежат W [21], где

$$N(t) = \int_0^t \frac{n(x)}{x} dx, \quad n(x) = \sum_{\lambda_j \leq x} 1, \quad M(t; Q) = \max_{|z|=t} |Q(z)|. \quad (18)$$

Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ — семейство всех кривых γ , удовлетворяющих условиям теоремы А, $\mu(\sigma)$ и $\mu^*(\sigma)$ — максимальные члены рядов (12) и (17) соответственно.

В этих обозначениях связь роста и убывания суммы ряда (12) устанавливается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняется условие (7), $\gamma \in \Gamma$. Тогда для любой функции $F \in D(\Lambda)$ справедлива оценка

$$q(F) \leq d(F). \quad (19)$$

Здесь

$$d(F) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d(F; \gamma), \quad q(F) = \inf_e \lim_{\substack{\sigma \in e \\ \sigma \rightarrow \infty}} \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)},$$

$d(F; \gamma)$ — величина, определенная формулой (10), а точная нижняя грань и верхний предел в определении $q(F)$ вычисляются по всем множествам $e \subset \mathbb{R}_+$, каждое из которых получается удалением из $\mathbb{R}_+$ некоторой системы отрезков конечной суммарной длины.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\{b_n\} = \{Q'(\lambda_n)\}$. Если асимптотическое равенство (15) имеет место при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры, то $q(F) = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любой целой функции $F \in D(\Lambda)$, имеющей лакуны Фейера, справедливы оценки

$$0 \leq d(F) \leq 1, \quad (20)$$

где $d(F) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d(F; \gamma)$.

Оценки (20) неуклучшаемы. Действительно, с одной стороны, точность правой границы следует из теоремы А. С другой стороны, для любой последовательности $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющей условию (7) и имеющей конечный индекс конденсации, но для которой интеграл (9) расходится, существуют функции $F_1 \in B(\Lambda)$, $F_2 \in B(\Lambda)$, для которых $q(F_1) = d(F_1) = 1$, но $q(F_2) = d(F_2; \mathbb{R}_+) = 0$. Таким образом, смысл оценки (19) заключается в том, что величина $q(F)$ может равняться единице даже в том случае, когда условие (9) не выполняется. Соответствующий пример построен в §4. Доказательство существования функции $F \in B(\Lambda)$, для которой $d(F; \mathbb{R}_+) = 0$, — основной результат статьи. Этот факт устанавливается нами при доказательстве следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы для любой функции $F \in B(\Lambda)$ с лакунами Фейера было справедливо равенство $d(F) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (9).

Из теорем 1–3 легко получаются аналогичные утверждения для целых функций, заданных степенными рядами (3). Чтобы убедиться в этом, необходимо сделать замену $z = e^s$. Только следует иметь в виду, что при такой замене исключительные множества $E \subset [0, \infty)$ конечной меры переходят на исключительные множества $e \subset [0, \infty)$ конечной логарифмической меры.

Оценки (20) устанавливают связь между ростом и убыванием целой функции $F(s)$ на каждой кривой $\gamma \in \Gamma$. Действительно, из оценки $0 \leq d(F; \gamma)$ следует, что существуют функции $\varepsilon(r)$, $\varepsilon(r) \downarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, и последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in \gamma$, такие, что при $\xi_n \rightarrow \infty$

$$\ln |F(\xi_n)| > -\varepsilon(|\xi_n|) \ln M(\operatorname{Re} \xi_n). \quad (21)$$

Отметим, что аналогичная оценка для произвольных целых функций на фиксированном луче была установлена Бёрлингом в работе [29]: для любых $\varepsilon > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ (θ фиксировано) множество

$$\{r \in \mathbb{R}_+ : \ln |f(re^{i\theta})| > -(1 + \varepsilon) \ln M(r; f)\}$$

неограниченное.

Хейманом в работе [30] рассмотрена аналогичная задача в случае, когда вместо луча берется произвольная кривая, уходящая в бесконечность. Он показал, что если нижний порядок целой функции $f(z)$ конечен, то на всякой кривой γ , уходящей в бесконечность, для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{z_n\}$, $z_n \in \gamma$, $z_n \rightarrow \infty$, такая, что [30]

$$\ln |f(z_n)| > -(1 + \varepsilon) \ln M(|z_n|; f).$$

Там же утверждается, что эта оценка справедлива и для целых функций произвольного порядка.

Видим, что оценка (21) лучше соответствующих оценок Бёрлинга и Хеймана. Это объясняется тем, что в теореме 2 функция $F(s)$ имеет специальный вид, а именно является суммой ряда Дирихле с лагунами Фейера. Смысл оценки (21) в том, что при выполнении условия (7) сумма целого ряда Дирихле (12) не может сколько угодно быстро убывать на любой последовательности точек $\{\xi_n\}$, стремящейся к бесконечности вдоль кривой γ .

Таким образом, если из теоремы 2 вытекают неулучшаемые оценки для произвольных целых функций с лагунами Фейера на кривых, определенным образом уходящих в бесконечность, то теорема 3 дает полный ответ на поставленную в работе [3] проблему.

§ 2. Вспомогательные факты

Сформулируем и докажем ряд вспомогательных утверждений, необходимых нам в дальнейшем.

В статье по существу будет использована следующая лемма типа Бореля–Неванлинны.

ЛЕММА 1. Пусть $u \in L$, $w \in W$, а $v = v(\sigma)$ – решение уравнения

$$w(v) = e^{u(\sigma)}.$$

Тогда при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ конечной меры имеет место асимптотическое равенство

$$u(\sigma + dh(\sigma)) = u(\sigma) + o(1),$$

где $h = h(\sigma) = \frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}$, а d , $0 < d < \infty$, – фиксированная постоянная.

Лемма 1 доказана в работе [19].

ЛЕММА 2. Пусть $f(z) \not\equiv 0$ – целая функция, а $\lambda > 1$ – некоторая постоянная. Если $\sigma(r)$ – мера множества тех точек t из $(0, r)$, для которых

$$\ln \min_{|z|=t} |f(z)| > -\lambda \ln M(r; f), \quad (22)$$

то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sigma(r)}{r} \geq \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}.$$

Лемма 2 есть следствие теоремы 3.5.6 из [31; гл. 3, § 3.5]. Это следствие в [31] сформулировано неверно (правая часть (22) вместо $M(r; f)$ содержит величину $M(t; f)$), на что обратил наше внимание А. Ю. Попов.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $f(z)$ – целая функция вида (8), то существует последовательность $\{r_n\}$, $0 < r_n \uparrow \infty$, $r_{n-1} < r_n \leq 4r_{n-1}$, $n \geq 2$, такая, что $\ln |f(z)| > -20 \ln M(r_n; f)$, $|z| = r_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. В лемме 2 положим $\lambda = 5$. Тогда, применяя эту лемму к целой функции

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right),$$

получаем, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sigma(r)}{r} \geq \frac{2}{3},$$

т. е. $\sigma(r) > r/2$ при $r \geq 2^{n_0-1}$. Пусть $m(t; f) = \min_{|z|=t} |f(z)|$. Тогда в каждом отрезке $[2^{n-1}, 2^n]$, $n \geq n_0$, найдется точка x_n такая, что

$$\ln m(x_n; f) > -5 \ln M(2^n; f) > -5 \ln M(2x_n; f).$$

Но для нашей функции $f(z)$

$$\ln M(r; f) = 2r^2 \int_0^{\infty} \frac{n(t)}{t(t^2 + r^2)} dt, \quad n(t) = \sum_{\lambda_j \leq t} 1.$$

Следовательно,

$$\ln m(x_n; f) > -20 \cdot 2x_n^2 \int_0^{\infty} \frac{n(t)}{t[t^2 + 4x_n^2]} dt > -20 \ln M(x_n; f), \quad n \geq n_0.$$

Поскольку $x_{n+1} \leq 2^{n+1} = 4 \cdot 2^{n-1} \leq 4x_n$, $n \geq n_0$, то последовательность $\{r_n\}$, $r_n = x_{n+n_0-1}$, $n \geq 1$, удовлетворяет всем требованиям.

ТЕОРЕМА 4 (о двух константах). Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна в ее замыкании, а на границе области D для функции $f(z)$ имеют место оценки

$$|f(z)| \leq M, \quad z \in \partial D, \quad |f(z)| \leq m, \quad z \in E,$$

где E — некоторое подмножество границы области D , а m и M , $m \leq M$, — некоторые положительные постоянные. Тогда

$$|F(z)| \leq m^{\gamma(z)} M^{1-\gamma(z)}, \quad z \in D,$$

где $\gamma(z) = w(z; E, D)$ — гармоническая мера множества E относительно области D .

Теорема 4 доказана в работе [31].

ЛЕММА 3. Пусть γ — кривая, соединяющая точку z_0 с окружностью $\{z : |z - z_0| = R\}$, состоящая из конечного числа кусочно-гладких жордановых кривых, а $g(z)$ — функция, аналитическая в круге $D(z_0; R) = \{z : |z - z_0| < R\}$ и непрерывная в его замыкании $\overline{D}(z_0; R)$. Пусть

$$M = \max_{\overline{D}(z_0; R)} |g(t)|, \quad m = \max_{\gamma} |g(t)|.$$

Тогда при $0 < \beta \leq 1/5$ для всех z из круга $\overline{D}(z_0; \beta R)$ верна оценка:

$$|g(z)| \leq m^{1-2\beta} M^{2\beta}. \quad (23)$$

Доказательство леммы 3 основано на следующей теореме из [31]: пусть область D представляет собой круг $D(0; R)$ с выброшенным из него множеством E , состоящим из конечного числа кусочно-гладких кривых и конечного числа областей, ограниченных такими кривыми, а Δ — некоторое подмножество интервала $(0, R)$, имеющее меру δ . Если для любого $x \in \Delta$ на окружности $|z| = x$ есть хотя бы одна точка, принадлежащая множеству E , то

$$w(z; E, D) \geq \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left[\frac{R - |z|}{R + |z|} \left(\frac{\delta}{2R - \delta} \right) \right], \quad z \in D. \quad (24)$$

Докажем лемму. Пусть для удобства $z_0 = 0$. Тогда, полагая $\Delta = (0, R)$, $E = \gamma$, $D = D(0, R)$, из (24) получаем, что если $|z| \leq \beta R$, $0 < \beta < 1/2$, то

$$w(z; \gamma, D) \geq \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(1 - 2\beta) > 0.$$

Рассмотрим функцию

$$y(\beta) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(1 - 2\beta) - 1 + 2\beta.$$

Имеем $y(0) = y(1/2) = 0$. Проверяется, что при

$$0 < \beta < \beta_1 = \frac{\pi - \sqrt{-\pi^2 + 4\pi}}{2\pi}$$

функция $y = y(\beta)$ возрастает. Поскольку $1/5 < \beta_1$, то $y(\beta) > 0$ при $0 < \beta \leq 1/5$. Следовательно, $w(z; \gamma, D) > 1 - 2\beta$, если $|z| \leq \beta R$, $0 < \beta \leq 1/5$.

С учетом этой оценки, применяя теорему о двух константах, получаем требуемую оценку (23).

Лемма установлена.

ЛЕММА 4. Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок такой, что $\rho(r) \rightarrow 1$, $r^{1-\rho(r)} \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Если a_n , $n \geq 1$, — положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\frac{n}{a_n^{\rho(a_n)}} = \Delta, \quad 0 < \Delta < \infty,$$

то целая функция

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{a_n^2} \right)$$

обладает свойствами:

1) при $\varphi \neq \pm\pi/2$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |g(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}} = h(\varphi) = \pi\Delta |\cos \varphi|;$$

2) вне кружков $\{z : |z \pm a_n i| < 1\}$, $n \geq 1$,

$$\ln |g(re^{i\varphi})| > [h(\varphi) - \varepsilon] r^{\rho(r)}, \quad r > r_0(\varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Эта лемма есть частный случай теоремы 1.2.7 из [20; гл. I, § 2] (см. там же замечание к теореме 1.2.5).

ЛЕММА 5. Пусть $\alpha(r)$ – положительная неубывающая и непрерывная на $[0, \infty)$ функция порядка ρ , $0 < \rho < \infty$, принадлежащая классу сходимости, т.е.

$$\int_1^\infty \frac{\alpha(r)}{r^2} dr < \infty.$$

Тогда существует уточненный порядок $\rho(r)$ функции $\alpha(r)$ такой, что

$$\int_1^\infty r^{\rho(r)-\rho-1} dr < \infty. \quad (25)$$

Лемма доказана в [32]. Она утверждает, что уточненный порядок $\rho(r)$ кроме (25) удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\alpha(r)}{r^{\rho(r)}} = 1.$$

§3. Максимальный член адамаровской композиции двух рядов Дирихле

Пусть $F(s)$ – целая функция, определенная всюду сходящимся рядом Дирихле (12), показатели которого удовлетворяют условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = H < \infty.$$

В силу этого условия ряд (12), поскольку он сходится во всей плоскости, сходится во всей плоскости абсолютно. Пусть $\mu(\sigma)$ – максимальный член, а $\nu = \nu(\sigma)$ – центральный индекс ряда (12), т.е.

$$\mu(\sigma) = \max_{n \geq 1} \{|a_n| e^{\lambda_n \sigma}\}, \quad \nu = \nu(\sigma) = \max\{n \geq 1 : \mu(\sigma) = |a_n| e^{\lambda_n \sigma}\}.$$

Отметим на плоскости точки $P_n = (\lambda_n, -\ln |a_n|)$. Если для некоторого n коэффициент $a_n = 0$, то будем считать, что ордината точки P_n равна $+\infty$. Можно считать, что $a_1 \neq 0$. Из сходимости ряда (12) во всей плоскости имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} = -\infty.$$

Учитывая это, через $Q(F)$ обозначим выпуклую оболочку точек P_n , $n \geq 1$. Пусть $\gamma(x) = \inf\{y : (x, y) \in Q(F)\}$. Выпуклая ломаная линия L , описываемая уравнением $y = \gamma(x)$, $x \geq \lambda_1$, называется *выпуклым полигоном Ньютона* [20].

Ординату точки полигона Ньютона L с абсциссой λ_n обозначим через G_n . Для бесконечного множества значений n , в частности для $n = n_i$, $i = 1, 2, \dots$, имеем $G_n = -\ln |a_n|$. Точка P_n лежит либо на полигоне L (точка P_{n_i} обязательно лежит на полигоне), либо над ним.

Пусть точки P_{n_i} с координатами (λ_{n_i}, G_{n_i}) – вершины полигона L (очевидно, $n_1 = 1$). Угловой коэффициент звена, соединяющего точки P_{n_i} и $P_{n_{i+1}}$, равен

$$R_i = \frac{G_{n_{i+1}} - G_{n_i}}{\lambda_{n_{i+1}} - \lambda_{n_i}}, \quad i \geq 1.$$

Ясно, что $R_i \uparrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Следовательно [20; гл. II, § 6, п. 2]:

1) при $R_{i-1} \leq \sigma < R_i$ центральный индекс $\nu(\sigma) = n_i = \text{const}$ и

$$\ln \mu(\sigma) = \ln |a_{n_i}| + \lambda_{n_i} \sigma;$$

2) $\ln \mu(\sigma)$ — непрерывная функция; на участке $[R_{i-1}, R_i)$ она линейна, график ее на этом участке — прямая линия с угловым коэффициентом λ_{n_i} , причем $\lambda_{n_i} \uparrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Следовательно, $\ln \mu(\sigma)$ — выпуклая возрастающая функция от σ .

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — последовательность, удовлетворяющая условию (11), $F \in D(\Lambda)$, а

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n s}, \quad (26)$$

где последовательность $\{b_n\}$ подчинена условию (14). Тогда ряд (26) абсолютно сходится в полуплоскости $\text{Re } s < -b$. Адамаровская композиция рядов (12) и (26) есть ряд (13), т.е.

$$(F * G)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s} = F^*(s).$$

Ясно, что $F^* \in D(\Lambda)$. Как и выше, через $\mu(\sigma)$ обозначим максимальный член ряда (12), через $\mu^*(\sigma)$ — максимальный член ряда (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.

1. *Достаточность.* Пусть выполнено условие (16). Тогда существует функция $w^* \in W$ такая, что $\sqrt{x} \leq w^*(x)$ и $w(x) = o(w^*(x))$ при $x \rightarrow \infty$. Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(v) = 3 \ln \mu(\sigma).$$

Положим

$$R_v = \sum_{\lambda_j > v} |a_j| e^{\lambda_j \sigma}, \quad h = \frac{w^*(v)}{v}, \quad v = v(\sigma).$$

Пусть $m \geq 1$ таково, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m} < \infty.$$

В силу условия (11) такое m существует. Тогда

$$R_v \leq \mu(\sigma + h) \sum_{\lambda_n > v} e^{-h \lambda_n} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m} \right) \mu(\sigma + h) \exp \left[\max_{t \geq v} \varphi(t) \right],$$

где $\varphi(t) = m \ln t - ht$. Поскольку $\varphi'(t) = 0$ в точке t_0 ,

$$t_0 = \frac{m}{h} = m \frac{v}{w^*(v)} \leq m \sqrt{v} < v = v(\sigma)$$

при $\sigma \geq \sigma_0$, то

$$R_v \leq C \mu(\sigma + h) \exp\{-v(1 + o(1))h\}$$

при $\sigma \rightarrow \infty$. Отсюда, применяя лемму 1, получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E_1 \subset [0, \infty)$ конечной меры

$$R_v \leq C \mu(\sigma)^{1+o(1)} \exp\{-w^*(v)(1 + o(1))\} = \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))}, \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m}.$$

Значит, при $\sigma \geq \sigma_1$, $\sigma \notin E_1$, получаем, что $\lambda_{\nu(\sigma)} \leq v(\sigma)$, где $\nu = \nu(\sigma)$ – центральный индекс ряда (12). Тогда

$$\begin{aligned} \mu(\sigma) &= |a_{\nu}| e^{\lambda_{\nu} \sigma} = |a_{\nu} b_{\nu}| e^{\lambda_{\nu} \sigma} |b_{\nu}|^{-1} \\ &\leq \mu^*(\sigma) e^{w(v)} = \mu^*(\sigma) \mu(\sigma)^{o(1)}, \quad \sigma \rightarrow \infty, \quad \sigma \notin E_1. \end{aligned}$$

Итак, при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E_1 \subset [0, \infty)$ конечной меры

$$(1 + o(1)) \ln \mu(\sigma) \leq \ln \mu^*(\sigma). \quad (27)$$

Далее, поскольку $|b_n| \leq e^{w(\lambda_n)}$, $n \geq N$, то при $k \geq N$

$$\mu^*(\sigma) = |a_k b_k| e^{\lambda_k \sigma} \leq \mu(\sigma) e^{w(\lambda_k)}, \quad (28)$$

где $k = k(\sigma)$ – центральный индекс ряда (13).

Пусть $x = x(\sigma)$ – решение уравнения $w^*(x) = 3 \ln \mu^*(\sigma)$. Если

$$R_x^* = \sum_{\lambda_n > x} |a_n b_n| e^{\lambda_n \sigma},$$

то, применяя лемму 1, получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E_2 \subset [0, \infty)$ конечной меры

$$R_x^* \leq C [\mu^*(\sigma)]^{-2(1+o(1))}, \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m}.$$

Отсюда следует, что $\lambda_{k(\sigma)} \leq x(\sigma)$ при $\sigma \geq \sigma_2$, $\sigma \notin E_2$. Следовательно, из (28) получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E_2

$$\mu^*(\sigma) \leq \mu(\sigma) e^{w(x(\sigma))} = \mu(\sigma) [\mu^*(\sigma)]^{o(1)},$$

т. е.

$$(1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma) \leq \ln \mu(\sigma). \quad (29)$$

Из оценок (27), (29) окончательно получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне множества $E = E_1 \cup E_2$, имеющего конечную меру,

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma).$$

Достаточность доказана.

2. *Необходимость.* Условие (16) равносильно предложению: существует функция $\varphi \in W$ такая, что при $n \geq N$

- 1) $|b_n| \leq e^{\varphi(\lambda_n)}$,
- 2) $|b_n|^{-1} \leq e^{\varphi(\lambda_n)}$.

Действительно, то, что 1), 2) следуют из (16), очевидно. Обратно, из 1) и 2) имеем

$$|b_n| + |b_n|^{-1} \leq 2e^{\varphi(\lambda_n)}, \quad n \geq N.$$

Следовательно, (16) имеет место с мажорантой $w(x) = \ln 2 + \varphi(x)$. Так что если условие (16) не выполнено, то хотя бы для одной из последовательностей

$$\{\ln |b_n|\}_{n=N}^{\infty}, \quad \{-\ln |b_n|\}_{n=N}^{\infty}$$

не существует мажорантной последовательности вида $\{\varphi(\lambda_n)\}$, где $\varphi \in W$. Пусть для определенности последовательность $\{\ln |b_n|\}_{n=N}^{\infty}$ обладает этим свойством. Тогда

$$\int_{\lambda_N}^{\infty} \frac{\alpha(t)}{t^2} dt = \infty,$$

где $\alpha(t) = \max_{\lambda_n \leq t} \{\ln |b(\lambda_n)| : n \geq N\}$, $b(\lambda_n) = b_n$. Не теряя общности, можем считать, что $\alpha(t) > 0$ при $t \geq \lambda_N$.

Пусть $t_0 = \lambda_N$, а $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность всех точек разрыва функции $\alpha(t)$. Положим $\gamma(t) = \sqrt{a(t)}$, где

$$a(t) = \int_{\lambda_N}^t \frac{\alpha(x)}{x^2} dx.$$

Ясно, что $0 < a(t) \uparrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Пусть $\alpha(t) = \alpha_n$ при $t_n \leq t < t_{n+1}$, $n \geq 0$, $\gamma_s = \gamma(t_s)$, $s \geq 0$. Тогда

$$\gamma_s^2 = \int_{\lambda_N}^{t_s} \frac{\alpha(x)}{x^2} dx \leq \alpha_s \frac{1}{\lambda_N}.$$

Отсюда следует, что $\lambda_N \gamma_s \leq \alpha_s / \gamma_s$ и $\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha_s / \gamma_s = \infty$. Следовательно, существует подпоследовательность $\{n_j\}$ такая, что

$$\frac{\alpha(t_{n_j})}{\gamma_{n_j}} < \frac{\alpha(t_{n_{j+1}})}{\gamma_{n_{j+1}}}, \quad j \geq 1. \quad (30)$$

Положим

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta_1 = \gamma_{n_1}, & \text{если } \lambda_N \leq t < t_{n_1}, \\ \beta_j = \gamma_{n_j}, & \text{если } t_{n_j} \leq t < t_{n_{j+1}}, j \geq 1. \end{cases}$$

Видим, что функция $\beta(t)$ положительная, неубывающая и $\beta(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Кроме того, множество точек разрыва функции $\beta(t)$ содержится в $\{t_n\}$. Отсюда, учитывая (30), заключаем, что функция $g(t) = \alpha(t)\beta^{-1}(t)$ неубывающая и положительная на $[\lambda_N, \infty)$. Более того,

$$I = \int_{\lambda_N}^{\infty} \frac{g(t)}{t^2} dt = \infty.$$

Действительно, если $m_j = t_{n_j}$, то

$$I(m_j) = \int_{\lambda_N}^{m_j} \frac{g(t)}{t^2} dt \geq \frac{a(m_j)}{\gamma(m_j)} = \sqrt{a(m_j)}.$$

Следовательно, $I = \lim_{j \rightarrow \infty} I(m_j) = \infty$. Имея это в виду, рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, $n \geq 0$, где

$$x_n = \frac{G_{n+1} - G_n}{t_{n+1} - t_n}, \quad G_n = t_n I(t_n).$$

Проверяется, что

$$x_n = I(t_n) + \frac{t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{g(t)}{t^2} dt.$$

Значит, $x_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Из неубывания функции $g(t)$ также следует, что $x_n < x_{n+1}$, $n \geq 0$. Итак, $0 < x_n \uparrow \infty$, $n \rightarrow \infty$.

Пусть $y = \varphi_n(x)$ — уравнение прямой, проходящей через точки $P_n = (t_n; G_n)$ и $P_{n+1} = (t_{n+1}; G_{n+1})$. Поскольку $0 < x_n \uparrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, то последовательность $\{P_n\}$ есть вершины, а совокупность всех отрезков прямых $y = \varphi_n(x)$, соединяющих точки P_n и P_{n+1} , $n \geq 0$, есть выпуклый полигон Ньютона L для ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k s}, \quad s = \sigma + it, \quad (31)$$

где $a_1 = a_2 = \dots = a_{N-1} = e^{-G_1}$, а для $k \geq N$

$$a_k = \begin{cases} e^{-G_n}, & \text{если } k = j_n, \\ e^{-\varphi_n(\lambda_k) - 1}, & \text{если } j_n < k < j_{n+1}. \end{cases} \quad (32)$$

Здесь $\{j_n\}$ — последовательность индексов таких, что $t_n = \lambda_{j_n}$, $n \geq 0$. Заметим, что $t_0 = \lambda_N$, а $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность центральных индексов ряда (31), абсолютно сходящегося во всей плоскости.

Оценим максимальный член $\mu(\sigma)$ ряда (31) сверху. Для $x_{n-1} \leq \sigma < x_n$ имеем

$$\ln \mu(\sigma) = t_n(-I(t_n) + \sigma) < \frac{t_n t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{g(t)}{t^2} dt = \frac{\alpha_n}{\beta'_n}, \quad n \geq 1.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$g(t) \equiv \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} = \frac{\alpha_n}{\beta'_n}, \quad t_n \leq t < t_{n+1}.$$

С другой стороны,

$$\mu^*(\sigma) \geq |a_{j_n} b_{j_n}| e^{\lambda_{j_n} \sigma}, \quad \lambda_{j_n} = t_n.$$

Но $b_{j_n} = e^{\alpha(t_n)} = e^{\alpha_n}$. Следовательно, для $x_{n-1} \leq \sigma < x_n$ получаем, что

$$\ln \mu^*(\sigma) \geq \alpha_n - t_n I(t_n) + t_n \sigma = \alpha_n + \ln \mu(\sigma) > \alpha_n, \quad n \geq 1.$$

Таким образом, для $x_{n-1} \leq \sigma < x_n$

$$\frac{\ln \mu(\sigma)}{\ln \mu^*(\sigma)} \leq \frac{1}{\beta'_n}.$$

Поскольку $\beta'_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\ln \mu^*(\sigma)} = 0.$$

В случае, когда последовательность $\{-\ln |b_n|\}_{n=N}^\infty$ не имеет мажорантной последовательности $\{\varphi(\lambda_n)\}$, $\varphi \in W$, пример строится аналогично. Различие состоит только в выборе функций $F(s)$ и $F^*(s)$. Действительно, пусть $\alpha(t)$ (мы сохраним для удобства все основные обозначения) – наименьшая неубывающая мажоранта для последовательности $\{-\ln |b_n|\}_{n=N}^\infty$. Рассмотрим ряд

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a'_k e^{\lambda_n s},$$

где $a'_1 = a'_2 = \dots = a'_{N-1} = 1$, $a'_k = a_k b_k^{-1}$, $k \geq N$, причем коэффициенты a_k определим по тем же формулам (32). В силу условий (14), (32) этот ряд абсолютно сходится во всей плоскости, т.е. $F \in D(\Lambda)$. Тогда

$$F^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a'_k b_k e^{\lambda_n s} = \sum_{k=1}^{\infty} a''_k e^{\lambda_n s},$$

где

$$a''_k = \begin{cases} b_k, & \text{если } 1 \leq k \leq N-1, \\ a_k, & \text{если } k \geq N. \end{cases}$$

Ясно, что $F^* \in D(\Lambda)$. Те же рассуждения показывают, что в этом случае

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} = 0.$$

Необходимость установлена. Тем самым теорема полностью доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Ясно, что $d(F) \leq 1$. Установим оценку снизу.

Пусть $w(x) = \ln M(ex; Q)$, $w^*(x) = \beta(x)w(x)$, $0 < \beta(x) \uparrow \infty$, – некоторая функция из W . В силу условия (7) эта функция существует.

Пусть $v = v(\sigma)$ – решение уравнения $w^*(v) = 3 \ln \mu(\sigma)$,

$$h = h(\sigma) = \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)}.$$

Тогда из леммы 1 получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E'_\beta \subset [0, \infty)$ конечной меры

$$\mu(\sigma + \beta^{-1}h(\sigma)) = \mu(\sigma)^{1+o(1)}, \quad 0 < \beta \leq \frac{1}{5}. \quad (33)$$

Следовательно, при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E'_β

$$R_v = \sum_{\lambda_j > v} |a_j| e^{\lambda_j \sigma} \leq \mu(\sigma + h(\sigma)) \sum_{\lambda_j > v} e^{-h(\sigma) \lambda_j} < \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))}. \quad (34)$$

Пусть

$$P_a(s) = \sum_{\lambda_n \leq a} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it.$$

Тогда [21]

$$a_n = e^{-\alpha \lambda_n} \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi_n(t) P_a(t + \alpha) dt, \quad (35)$$

где

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{q'_a(\lambda_n)} \int_0^\infty \frac{q_a(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} e^{-\lambda t} d\lambda, \quad q_a(\lambda) = \prod_{\lambda_n \leq a} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \quad (36)$$

а C — любой замкнутый контур, охватывающий начало координат.

Положим $a = v(\sigma)$, а в качестве C возьмем контур $\{t : |t| = h(\sigma)\}$. Пусть $\alpha = \sigma + i\tau$, где τ такое, что $\alpha \in \gamma$. Поскольку для $\lambda_n \leq v(\sigma)$

$$\frac{1}{|q'_v(\lambda_n)|} \leq \frac{1}{|Q'(\lambda_n)|}, \quad n \geq 1,$$

то из (35), (36) получаем, что для любого $\lambda_n \leq v(\sigma)$

$$\begin{aligned} |a_n| |Q'(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma} &\leq h(\sigma) \left[\max_{|\xi - \alpha| \leq h(\sigma)} |F(\xi)| + \sum_{\lambda_j > v} |a_j| e^{\lambda_j(\sigma + h(\sigma))} \right] \\ &\times \int_0^\infty M(r + 2; q_v) e^{-h(\sigma)r} dr. \end{aligned} \quad (37)$$

Далее, учитывая определения величин $v = v(\sigma)$, $h = h(\sigma)$, при $\sigma \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \ln M(R; q_v) &= n(v) \ln \left(1 + \frac{R^2}{v^2}\right) + 2R^2 \int_0^v \frac{n(t)}{t(t^2 + R^2)} dt \\ &\leq \frac{n(v)}{v} R + 2N(v) = o(1)h(\sigma)R + o(1) \ln \mu(\sigma). \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая (33) и оценку типа (34), из (37) получаем, что для всех $\lambda_n \leq v(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E'_β

$$|a_n| |Q'(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma} \leq \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))} + \mu(\sigma)^{o(1)} \max_{|\xi - \alpha| \leq h(\sigma)} |F(\xi)|. \quad (38)$$

Пусть $\mu^*(\sigma)$ — максимальный член ряда

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(\lambda_n) e^{\lambda_n s}$$

(последовательность $\{Q'(\lambda_n)\}$ удовлетворяет условию (14)). Через $x = x(\sigma)$ обозначим решение уравнения $w^*(x) = 2 \ln \mu^*(\sigma)$. Тогда из леммы 1 получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E_1 \subset [0, \infty)$ конечной меры

$$R_x^* = \sum_{\lambda_j > x} |a_j| |Q'(\lambda_j)| e^{\lambda_j \sigma} \leq [\mu^*(\sigma)]^{-1(1+o(1))}. \quad (39)$$

Следовательно, из (34), (39) при $\sigma \geq \sigma_0$, $\sigma \notin E_1 \cup E'_\beta$, получаем, что

$$\lambda_{\mu(\sigma)} \leq v(\sigma), \quad \lambda_{k(\sigma)} \leq x(\sigma),$$

где $\nu(\sigma), k(\sigma)$ – центральные индексы рядов (12) и (17).

Далее,

$$|Q'(\lambda_n)| \leq \frac{2}{\lambda_n} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_n^2}{\lambda_j^2}\right) < M(\lambda_n; Q), \quad n \geq n_0.$$

Следовательно,

$$\mu^*(\sigma) = |a_k Q'(\lambda_k)| e^{\lambda_k \sigma} \leq \mu(\sigma) e^{w(x)},$$

где $x = x(\sigma)$, $k = k(\sigma)$. Значит, $(1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma) \leq \ln \mu(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow \infty$. Так что $w^*(x) = 2 \ln \mu^*(\sigma) < 3 \ln \mu(\sigma) = w^*(v)$, $\sigma \geq \sigma_1$. Это означает, что $\lambda_{k(\sigma)} \leq x(\sigma) < v(\sigma)$ при $\sigma \geq \sigma_1$, $\sigma \notin E_1 \cup E'_\beta$. С учетом этого из (38) получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне $E_1 \cup E'_\beta$

$$\mu^*(\sigma) < 1 + \mu(\sigma)^{o(1)} \max_{|\xi - \alpha| \leq h(\sigma)} |F(\xi)|, \quad (40)$$

где $\alpha = \sigma + i\tau$, $\alpha \in \gamma$.

Дальнейшие рассуждения основаны на лемме 3.

Пусть $\gamma(\alpha)$ – часть кривой, содержащейся в круге $\overline{D}(\alpha; h\beta^{-1})$, $0 < \beta \leq 1/5$, $h = h(\sigma)$. Она не обязательно кусочно-гладкая и жорданова. Поэтому поступаем следующим образом.

Пусть α_1 – какая-нибудь точка кривой $\gamma(\alpha)$, принадлежащая окружности $\partial \overline{D}(\alpha; h\beta^{-1})$. Соединим точку α_1 с α ломаной $l(\alpha)$ без самопересечений и такой, что

$$\rho(\xi) = \inf_{z \in \gamma(\alpha)} |F(z) - F(\xi)| \leq m_\alpha, \quad (41)$$

где $\xi \in l(\alpha)$, $m_\alpha = \max_{\gamma(\alpha)} |F(t)|$. Это можно сделать. Действительно, для любого $z \in \gamma(\alpha)$ существует окрестность $D(z; \nu_z)$, $\nu_z > 0$, такая, что

$$|F(z) - F(\xi)| \leq m_\alpha$$

для любого $\xi \in D(z; \nu_z)$. Поскольку $\gamma(\alpha)$ – компакт, то по лемме Гейне–Бореля из покрытия $\bigcup_{z \in \gamma(\alpha)} D(z; \nu_z)$ можно выделить конечное подпокрытие: $D(z_0; \nu_0)$, $D(z_1; \nu_1), \dots, D(z_n; \nu_n)$, где $z_i \in \gamma(\alpha)$, $\nu_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Можем считать, что $z_0 = \alpha$, $z_n = \alpha_1$. Соединим между собой центры всех попарно пересекающихся кружков $D(z_i; \nu_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, отрезками прямых. Отбрасывая, если это необходимо, конечное число отрезков, получим жорданову ломаную $l(\alpha)$, соединяющую точки α и α_1 . Заметим, что $l(\alpha)$ целиком содержится в объединении кружков $D(z_i; \nu_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Осталось проверить оценку (41).

Пусть $\xi \in l(\alpha)$. Тогда существует круг $D(z_i; \nu_i)$, содержащий эту точку. Поскольку $|F(z_i) - F(\xi)| \leq m_\alpha$, то $\rho(\xi) \leq m_\alpha$.

Вернемся теперь к оценке (40). Применяя лемму 3 для круга $\overline{D}(z_0; \beta^{-1}h)$ и кривой $l(\alpha)$, получаем

$$\begin{aligned} \max_{|\xi - \alpha| \leq h(\sigma)} |F(\xi)| &\leq \max_{l(\alpha)} |F(t)|^{1-2\beta} \max_{|t - \alpha| \leq \beta^{-1}h(\sigma)} |F(t)|^{2\beta} \\ &\leq |F(\xi_\alpha)|^{1-2\beta} M^{2\beta}(\sigma + \beta^{-1}h(\sigma)), \quad \xi_\alpha \in l(\alpha). \end{aligned}$$

Но из (41) следует, что

$$\rho(\xi_\alpha) = |F(\xi_\alpha) - F(z_\alpha)| \leq m_\alpha$$

для некоторой точки $z_\alpha \in \gamma(\alpha)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \max_{|\xi - \alpha| \leq h(\sigma)} |F(\xi)| &\leq [2m_\alpha]^{1-2\beta} M^{2\beta} (\sigma + \beta^{-1} h(\sigma)) \\ &= (2|F(z'_\alpha)|)^{1-2\beta} M^{2\beta} (\sigma + \beta^{-1} h(\sigma)), \end{aligned} \quad (42)$$

где $z'_\alpha \in \gamma_\alpha$.

Применяя лемму 1, имеем

$$\begin{aligned} \mu(\sigma) &\leq M(\sigma) = M(\sigma + \beta^{-1} h(\sigma)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{\lambda_n (\sigma + \beta^{-1} h(\sigma))} \\ &\leq \mu(\sigma + (1 + \beta^{-1}) h(\sigma)) \left[n(v(\sigma)) + \sum_{\lambda_n > v(\sigma)} e^{-h(\sigma) \lambda_n} \right] < \mu(\sigma)^{1+o(1)} \end{aligned} \quad (43)$$

при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E''_\beta \subset [0, \infty)$ конечной меры. Следовательно, с учетом оценок (42), (43) из (40) получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне множества $E_\beta = E_1 \cup E'_\beta \cup E''_\beta$ конечной меры

$$(1 + o(1)) \mu^*(\sigma) \leq 2|F(z'_\alpha)|^{1-2\beta} \mu(\sigma)^{(1+o(1))2\beta}, \quad z'_\alpha \in \gamma(\alpha).$$

Следовательно, при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E_β

$$\frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \leq (1 + o(1)) 2\beta + (1 - 2\beta) \frac{\ln |F(z'_\alpha)|}{\ln \mu(\sigma)}, \quad 0 < \beta \leq \frac{1}{5}.$$

Учитывая еще раз оценки (43), отсюда получаем, что

$$\overline{\lim}_{\substack{\sigma \in e_\beta \\ \sigma \rightarrow \infty}} \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \leq 2\beta + (1 - 2\beta) d(F; \gamma), \quad (44)$$

где $0 < \beta \leq 1/5$, $e_\beta = [0, \infty) \setminus E_\beta$. Следовательно, из (44) имеем

$$q(F) = \inf_e \overline{\lim}_{\substack{\sigma \in e \\ \sigma \rightarrow \infty}} \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \leq 2\beta + (1 - 2\beta) d(F; \gamma),$$

где величина $q(F)$ вычисляется по всем множествам $e \subset \mathbb{R}_+$, каждое из которых получается исключением из $\mathbb{R}_+$ некоторой системы отрезков конечной суммарной длины. Поскольку левая часть этого неравенства от β и γ не зависит, то, сначала устремляя β к нулю, а затем минимизируя правую часть по всем $\gamma \in \Gamma$, получаем требуемое неравенство (19).

Теорема полностью доказана.

Из теоремы 2 следует, что $0 \leq q(F) \leq 1$. Можно показать, что в условиях теоремы А справедливы равенства $q(F) = d(F) = 1$ (см. § 5). Возникает вопрос: возможна ли оценка $q(F) > 0$ при выполнении единственного условия (7) (при этом условие (9) вообще может не выполняться)?

Имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для любой последовательности Λ с лакунами Фейера, для которой интеграл (9) расходится, существует функция $F \in D(\Lambda)$ такая, что $q(F) = d(F) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть условие (9) не выполнено, т.е.

$$\int_1^\infty \frac{\alpha(t)}{t^2} dt = \infty.$$

Напомним, что $\alpha(t) = 0$ при $0 \leq t < \lambda_1$, $\alpha(t) = \max_{\lambda_n \leq t} \left\{ \ln^+ \frac{1}{|Q'(\lambda_n)|} \right\}$ при $\lambda_1 \leq t$. Функция $\alpha(t)$ неотрицательная, неубывающая, непрерывная справа. Пусть $\{t_n\}$, $0 < t_n \uparrow \infty$, $t_n = \lambda_{k_n}$, — последовательность всех точек разрыва $\alpha(t)$, причем $\alpha(t) = \alpha_n$ при $t_n \leq t < t_{n+1}$, $n \geq 1$. Существует подпоследовательность $\{t_{n_m}\}$ такая, что ступенчатая функция $b(t) = b_m$ при $\mu_m \leq t < \mu_{m+1}$, $\mu_m = t_{n_m}$, $b_m = \alpha(\mu_m)$, обладает свойствами:

$$0 \leq b(t) \leq \alpha(t), \quad \int_{\mu_1}^\infty \frac{b(t)}{t^2} dt < \infty.$$

Можно считать, что $\mu_m \geq 1$, $m \geq 1$.

Пусть $y = \gamma_1(x)$, $y = \gamma_2(x)$, $x \geq \mu_1$, — уравнения выпуклых полигонов Ньютона для рядов

$$g(s) = \sum_{m=1}^\infty c_m e^{\mu_m s}, \quad g^*(s) = \sum_{m=1}^\infty c_m Q'(\mu_m) e^{\mu_m s},$$

где $c_m = e^{-\mu_m \ln \mu_m}$. Ясно, что ряды сходятся во всей плоскости. Рассмотрим теперь ряды Дирихле

$$F(s) = \sum_{m=1}^\infty a_k e^{\lambda_k s}, \quad F^*(s) = \sum_{m=1}^\infty a_k Q'(\lambda_k) e^{\lambda_k s},$$

где

$$a_k = \begin{cases} c_m, & \text{если } \lambda_k = \mu_m, \\ e^{-\gamma(\lambda_k) - \beta(\lambda_k) - 1}, & \text{если } \lambda_k \neq \mu_m. \end{cases}$$

Здесь $\gamma(x) = \max(\gamma_1(x), \gamma_2(x))$, а $\beta(\lambda_k) = \ln^+ |Q'(\lambda_k)|$. Поскольку $\gamma(x)/x \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, то видно, что $F \in D(\Lambda)$, $F^* \in D(\Lambda)$, а так как при $\lambda_k \neq \mu_m$ имеют место оценки $|a_k| \leq e^{-\gamma_1(\lambda_k) - 1}$, $|a_k Q'(\lambda_k)| \leq e^{-\gamma_2(\lambda_k) - 1}$, то максимальные члены последних рядов совпадают с максимальными членами первых рядов соответственно [20; гл. 2, § 6, п. 2]:

$$\mu(\sigma) = \max_{m \geq 1} \{|c_m| e^{\mu_m \sigma}\}, \quad \mu^*(\sigma) = \max_{m \geq 1} \{|c_m B_m| e^{\mu_m \sigma}\},$$

где $B_m = Q'(\mu_m) = e^{b_m}$, $m \geq 1$. Поскольку $b_m \geq 0$, то

$$|B_m| + \frac{1}{|B_m|} \leq e^{b_m} + 1 \leq e^{\ln 2 + b(\mu_m)}, \quad m \geq 1.$$

Но $\ln 2 + b(\mu_m) \leq w(\mu_m)$, $m \geq 1$, где w — некоторая функция из W . Следовательно, из теоремы 1 получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры

$$\ln \mu^*(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma).$$

Следовательно, $q(F) = d(F) = 1$ (см. следствие 1).

Утверждение доказано.

§ 5. Доказательство теоремы 3

1. *Достаточность* доказана в [23]. Приведем другое доказательство, основанное на теоремах 1, 2.

Из условий (7), (9) следует, что

$$|Q'(\lambda_n)| + \frac{1}{|Q'(\lambda_n)|} \leq e^{w(\lambda_n)}, \quad n \geq 1,$$

для некоторой функции $w \in W$. Следовательно, применяя теорему 1, из (19) получаем, что

$$q(F) = d(F) = 1.$$

2. *Необходимость*. Пусть условие (9) не выполнено, т.е.

$$\int_1^\infty \frac{\alpha(t)}{t^2} dt = \infty. \quad (45)$$

Ясно, что $\alpha(t)$ — неотрицательная неубывающая ступенчатая функция, непрерывная справа. Пусть $\{t_n\}$, $0 < t_n \uparrow \infty$, — последовательность всех точек разрыва $\alpha(t)$, и пусть $\alpha(t) = \alpha_n$ при $t_n \leq t < t_{n+1}$, $n \geq 1$. Из условия (7) следует, что [21]

$$\int_1^\infty \frac{\ln M(r; Q)}{r^2} dr < \infty,$$

где $M(r; Q)$ — функция из формулы (18). Следовательно, существует уточненный порядок $\rho(r)$ такой, что [32]

$$2 \ln(1 + r^2) + 20 \ln M(r; Q) \leq r^{\rho(r)}, \quad r \geq 1, \quad \int_1^\infty r^{\rho(r)-2} dr < \infty. \quad (46)$$

Пусть $w = w(r)$ — функция из W такая, что $r^{\rho(r)} = o(w(r))$ при $r \rightarrow \infty$. Из (45), (46) следует, что множество индексов

$$J = \{n : n \geq 1, \alpha(t_n) > w(t_n)\}$$

не ограничено. Пусть $I_j = [\tau_j, \tau'_j)$, $\tau_j < \tau'_j$, $j \geq 1$, — максимальные интервалы, на которых $w(t) \geq \alpha(t)$. Ясно, что $I_i \cap I_j = \emptyset$, $i \neq j$. Положим $I = \bigcup_j I_j$,

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{если } t \notin I, \\ \min_{x \in I_j} \alpha(x), & \text{если } t \in I_j. \end{cases}$$

Подправленная таким образом функция $\alpha^*(t)$ неубывающая, непрерывная справа, $0 \leq \alpha^*(t) \leq \alpha(t)$. Поскольку $w \in W$, то

$$\int_I \frac{\alpha(t)}{t^2} dt \leq \int_I \frac{w(t)}{t^2} dt < \infty.$$

Следовательно, с учетом (45) заключаем, что

$$\int_1^\infty \frac{\alpha^*(t)}{t^2} dt = \infty. \quad (47)$$

Пусть $\{x_j\}$ – последовательность всех точек разрыва функции $\alpha^*(t)$. Поскольку функция $\alpha(t)$ ступенчатая, а $w(t)$ непрерывная и возрастающая, то $\{x_j\}$ есть подпоследовательность $\{t_n\}$, т.е. $x_j = \lambda_{n_j}$, $j \geq 1$. Пусть $\alpha^*(t) = \alpha_j^*$ при $x_j \leq t < x_{j+1}$. Из условия (47) следует (см. §3) существование неубывающей функции $g(t) = \alpha^*(t)\beta^{-1}(t)$ ($\beta(t)$ – неограниченная неубывающая на $[\lambda_1, \infty)$ функция, $\beta(t) > 0$, $\beta(t) \equiv \text{const} = \beta_j$ при $x_j \leq t < x_{j+1}$, $j \geq 1$) такой, что

$$\int_{\lambda_1}^\infty \frac{g(t)}{t^2} dt = \infty, \quad (48)$$

$$g(t) = \begin{cases} g_j, & \text{если } x_j \leq t < x_{j+1}, j \geq 1, \\ g_1, & \text{если } \lambda_1 \leq t < x_1, \end{cases}$$

где $g_j = \alpha_j^*/\beta_j$, $j \geq 1$, $0 < \beta_j \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$.

Далее, из леммы 2 и следствия 3 вытекает существование окружностей

$$K_n = \{z : |z| = r_n\}, \quad \lambda_1 < r_n \uparrow \infty, \quad r_{n-1} < r_n \leq 4r_n,$$

таких, что

$$\frac{1}{|Q(z)|} \leq M^{20}(r; Q), \quad |z| = r = r_n, \quad n \geq 1. \quad (49)$$

Пусть $X = \{x_j\}$, а $\Delta_j = (r'_j, r''_j)$, $r'_j = r_{n_j}$, $r''_j = r_{n_j+1}$, – все интервалы, каждый из которых содержит хотя бы одну точку из X . Здесь r_{n_j} – подпоследовательность последовательности r_n , фигурирующей в оценках (49). Пусть, далее, $G_j = d_j h_j$, где

$$d_j = \min_k \{x_k : x_k \in \Delta_j \cap \Lambda\}, \quad h_j = \int_{\lambda_1}^{d_j} \frac{g(t)}{t^2} dt. \quad (50)$$

Из условия (48) следует, что $h_j \uparrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$. В §3 было показано, что в этом случае

$$R_j = \frac{G_{j+1} - G_j}{d_{j+1} - d_j} \uparrow \infty. \quad (51)$$

Соединяя попарно все точки P_j и P_{j+1} , $j \geq 1$, отрезками прямых, получаем некоторый выпуклый полигон (ломаную) L . Если $y = \varphi(t)$ – уравнение L , то ясно, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = +\infty. \quad (52)$$

Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок, введенный выше, а $\{\nu_n\}$ – последовательность положительных чисел такая, что

$$\frac{n}{\nu \rho(\nu_n)} = 1, \quad n \geq 1.$$

Положим

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{\nu_n^2}\right).$$

Если $z = re^{i\varphi}$, $|\varphi| \leq \pi/4$, то согласно лемме 4 существует равномерный по φ предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |P(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}} = \pi \cos \varphi. \quad (53)$$

Рассмотрим теперь ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k s}, \quad s = \sigma + it, \quad (54)$$

коэффициенты которого определим следующим образом:

$$a_k = \begin{cases} \exp(-\lambda_k h_j) \frac{1}{Q'(\lambda_k)P(\lambda_k)}, & \text{если } \lambda_k \in \Delta_j, j \geq 1, \\ \frac{1}{\lambda_k} \exp(-\varphi_j(\lambda_k) - 1), & \text{если } \lambda_k \in \Delta'_j, j \geq 1, \\ 1, & \text{если } \lambda_1 \leq \lambda_k < r'_1, \end{cases}$$

где $\Delta_j = (r'_j, r''_j)$, $\Delta'_j = (r''_j, r'_{j+1})$, $y_j = \varphi_j(t)$ — уравнение прямой, проходящей через точки P_j и P_{j+1} .

По предположению последовательность Λ имеет конечный индекс конденсации, а $P(\lambda_k) \geq 1$, $k \geq 1$. Поскольку $h_i \uparrow \infty$ и выполняется условие (52), то ряд Дирихле (54) абсолютно сходится во всей плоскости, т.е. $F \in B(\Lambda)$.

Оценим функцию $F(s)$ на вещественной оси сверху.

Пусть Γ_n — контур, составленный отрезками лучей $\{\mu : \arg \mu = \pm \pi/4\}$, соединяющими окружности K_n и K_{n+1} , и дугами этих окружностей. Если

$$F_j(\sigma) = \sum_{\lambda_k \in \Delta_j} a_k e^{\lambda_k \sigma}, \quad j \geq 1,$$

то имеем

$$F_j(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \frac{e^{-\mu h_j + \mu \sigma}}{Q(\mu)P(\mu)} d\mu,$$

где $\Delta_j = (r'_j, r''_j)$, $r'_j = r_{n_j}$, $r''_j = r_{n_j+1}$, $C_j = \Gamma_{n_j}$, а величина h_j определена в (50).

Оценим теперь функцию $F_j(\sigma)$. Для этого сначала оценим функции $Q(\mu)$ и $P(\mu)$ на контуре C_j .

Поскольку $|Q(re^{\pm \frac{\pi}{4}i})| \geq 1$, то с учетом (49) и (53) на контуре C_j , $j \geq 1$, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$|\mu|(1 + |\mu|^2) \frac{1}{|Q(\mu)P(\mu)|} \leq \exp \left[2 \ln(1 + r^2) + 20 \ln M(r; Q) - \left(\pi \frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \right) r^{\rho(r)} \right],$$

где $|\mu| = r$, $r'_j \leq r \leq r''_j$, $j \geq j_0$.

Воспользуемся теперь оценкой из (46). Тогда

$$\max_{\mu \in C_j} \left(3|\mu|(1 + |\mu|^2) \frac{1}{|Q(\mu)P(\mu)|} \right) \leq A < \infty, \quad j \geq 1, \quad (55)$$

где A — постоянная, не зависящая от $j \geq 1$. Если

$$L_j(\mu) = \frac{e^{-\mu h_j + \mu \sigma}}{Q(\mu)P(\mu)},$$

то

$$|F_j(\sigma)| \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{C_j} |d\mu| \right) \max_{\mu \in C_j} |L_j(\mu)| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{C_j} |d\mu| \right) |L_j(\mu_j)|,$$

где μ_j — некоторая точка, принадлежащая контуру C_j .

Далее, поскольку $r'_j < r''_j < 4r'_j$, то

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C_j} |d\mu| \leq 3|\mu_j|, \quad j \geq 1.$$

Следовательно, учитывая оценку (55), имеем

$$\begin{aligned} |F_j(\sigma)| &\leq \frac{3|\mu_j|}{1 + |\mu_j|^2} \frac{1 + |\mu_j|^2}{|Q(\mu_j)P(\mu_j)|} \exp[-(\operatorname{Re} \mu_j)(h_j - \sigma)] \\ &\leq \frac{A}{1 + |\mu_j|^2} \exp(-\gamma_j h_j + \gamma_j \sigma), \end{aligned}$$

где $\gamma_j = \operatorname{Re} \mu_j$, $r'_j \leq \gamma_j \leq r''_j$, $j \geq 1$.

Таким образом,

$$|F(\sigma)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A}{1 + |\mu_j|^2} e^{-\gamma_j h_j + \gamma_j \sigma} + R(\sigma),$$

где

$$R(\sigma) = \sum_{\lambda_k \notin \Delta} |a_k| e^{\lambda_k \sigma}, \quad \Delta = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_j.$$

Отсюда получаем, что

$$|F(\sigma)| \leq B \exp \left[\max_{j \geq 1} (-\gamma_j h_j + \gamma_j \sigma) \right] + R(\sigma). \quad (56)$$

Поскольку $h_j \uparrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, то $\max_{j \geq 1} (-\gamma_j h_j + \gamma_j \sigma) = H(\sigma)$ существует при любом фиксированном $\sigma > 0$. Далее, при $\sigma \geq \sigma_0$ имеем: $0 < H(\sigma) = -\gamma_\nu h_\nu + \gamma_\nu \sigma \leq 4r'_\nu(-h_\nu + \sigma) < 4d_\nu(-h_\nu + \sigma)$, где $r'_\nu \leq \gamma_\nu \leq r''_\nu$, d_ν — ближайшая к r'_ν точка скачка функции $g(t)$ из интервала Δ_ν . Тогда из (56) получаем, что

$$|F(\sigma)| \leq B \exp \left[4 \max_{j \geq 1} (-d_j h_j + d_j \sigma) \right] + R(\sigma), \quad (57)$$

где d_j — ближайшая к r'_j точка скачка функции $g(t)$ из интервала $\Delta_j = (r'_j, r''_j)$.

Пусть $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$, где числа R_n определены формулой (51). Поскольку $R_n \uparrow \infty$, то из §3 следует, что для таких σ

$$\max_{j \geq 1} (-d_j h_j + d_j \sigma) = -d_n h_n + d_n \sigma = m(\sigma). \quad (58)$$

Коэффициенты ряда $R(\sigma)$ выбраны нами специальным образом, а именно они таковы, что построенная выше ломаная L является полигоном Ньютона для ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{\mu_m \sigma} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-d_j h_j} e^{d_j \sigma} + R(\sigma),$$

где $\{\mu_m\} = \{d_j\} \cup \{\lambda_k : \lambda_k \in \Lambda \setminus \Delta\}$

Следовательно, при $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$ из (7), (57), (58) получаем (см. §3), что

$$|F(\sigma)| \leq B e^{4m(\sigma)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} e^{m(\sigma)} \leq C e^{4m(\sigma)}. \quad (59)$$

Оценим $m(\sigma)$ сверху. Для $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$ имеем

$$m(\sigma) = -d_n h_n + d_n \sigma \leq \frac{d_n d_{n+1}}{d_{n+1} - d_n} \int_{d_n}^{d_{n+1}} \frac{g(t)}{t^2} dt \leq g(t'_n),$$

где t'_n — наибольшая точка скачка функции $g(t)$ из интервала (r'_n, r''_n) (на участке $[t'_n, d_{n+1})$ функция $g(t)$ постоянна!). Поскольку по построению

$$g(t) \equiv \frac{\alpha^*(t'_n)}{\beta(t'_n)}, \quad t'_n \leq t < d_{n+1},$$

то при $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$

$$m(\sigma) \leq g(t'_n) = \frac{\alpha^*(t'_n)}{\beta(t'_n)} \leq \frac{\alpha(t'_n)}{\beta(t'_n)}. \quad (60)$$

С другой стороны, для тех же σ имеем:

$$\ln \mu(\sigma) \geq \ln |a'_n| + t'_n \sigma,$$

где a'_n — коэффициент ряда (54), соответствующий показателю t'_n , а $\mu(\sigma)$ — максимальный член этого ряда. Поскольку $r'_n < t'_n < r''_n$, то с учетом (58), (53) для $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$ получаем, что

$$\begin{aligned} \ln \mu(\sigma) &\geq -t'_n h_n + t'_n \sigma + \ln \frac{1}{|Q'(t'_n)|} + \ln \frac{1}{|P(t'_n)|} \\ &\geq \frac{r'_n}{r''_n} m(\sigma) + \alpha(t'_n) + \ln \frac{1}{|P(t'_n)|} > \alpha(t'_n) - 2\pi(t'_n)^{\rho(t'_n)} \\ &= \alpha(t'_n) + o(1)w(t'_n) = (1 + o(1))\alpha(t'_n), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (61)$$

Здесь мы учли то, что $t'_n \in X$, т.е. $w(t'_n) \leq \alpha(t'_n)$.

Таким образом, для $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$ из (59)–(61) окончательно получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\ln |F(\sigma)|}{\ln \mu(\sigma)} \leq \frac{\ln C}{\ln \mu(\sigma)} + 4 \frac{m(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \leq o(1) + (1 + o(1)) \frac{1}{\beta(t'_n)}. \quad (62)$$

Далее, из (61) видно, что $\ln \mu(\sigma) \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow \infty$, а поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty,$$

то из результатов работы [27] вытекает, что $\sup_{\sigma > 0} |F(\sigma)| = \infty$.

Следовательно, из (62) окончательно получаем, что

$$d(F; \mathbb{R}_+) = \varlimsup_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\sigma)|}{\ln M(\sigma)} = 0.$$

Теорема полностью доказана.

В заключение автор благодарит В. В. Напалкова, И. Ф. Красичкова-Терновского и других участников семинара по теории функций комплексного переменного за обсуждение работы.

Список литературы

1. *Fejér L.* Über die Wurzel vom kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Gleichung // *Math. Ann.* 1908. P. 413–423.
2. *Macintyre A. J.* Asymptotic paths of integral functions with gap power series // *Proc. London Math. Soc.* (3). 1952. V. 2. №2. P. 286–296.
3. *Pólya G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen // *Math. Z.* 1929. V. 29. P. 549–640.
4. *Fuchs W. H. J.* Proof of a conjecture of G. Pólya concerning gap series // *Illinois J. Math.* 1963. V. 7. P. 661–667.
5. *Kővari T.* A gap-theorem for entire functions of infinite order // *Michigan Math. J.* 1965. V. 12. №2. P. 133–140.
6. *Kővari T.* On the asymptotic paths of entire functions with gap power series // *J. Anal. Math.* 1965. V. 15. P. 281–286.
7. *Sons L. R.* On the Macintyre conjecture // *Illinois J. Math.* 1970. V. 14. P. 613–629.
8. *Sons L. R.* An analogue of a theorem of W. H. J. Fuchs on gap series // *Proc. London Math. Soc.* (3). 1970. V. 21. №3. P. 525–539.
9. *Hayman W. K.* Angular value distribution of power series with gaps // *Proc. London Math. Soc.* (3). 1972. V. 24. P. 590–624.
10. *Павлов А. И.* О росте по кривым целых функций, заданных лакунарными степенными рядами // *Сиб. матем. журн.* 1972. Т. 13. №5. С. 1169–1181.
11. *Павлов А. И.* О росте на положительном луче целых функций с вещественными коэффициентами Тейлора // *Матем. заметки.* 1973. Т. 14. №4. С. 577–588.
12. *Korevaar J., Dixon M.* Interpolation, strongly nonspanning powers and Macintyre exponents // *Indag. Math. (N.S.).* 1978. V. 40. №2. P. 243–258.
13. *Berndtsson B.* A note on Pavlov–Korevaar–Dixon interpolation // *Indag. Math. (N.S.).* 1978. V. 81. P. 400–414.
14. *Murai T.* The deficiency of entire functions with Fejer gaps // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble).* 1983. V. 33. №3. P. 39–58.

15. *Гайсин А. М.* Асимптотическое поведение суммы целого ряда Дирихле на кривых // Исследования по теории приближений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1989. С. 3–15.
16. *Гайсин А. М.* Усиленная неполнота системы экспонент и проблема Макинтайра // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 7. С. 931–945.
17. *Skaskiv O. B.* On the Pólya conjecture concerning the maximum and minimum of the modulus of an entire function of finite order given by a lacunary power series // Anal. Math. 1990. V. 16. № 2. P. 143–157.
18. *Гайсин А. М.* Об одной гипотезе Поля // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 2. С. 73–92.
19. *Гайсин А. М.* Асимптотические свойства функций, заданных рядами экспонент // Дис. ... докт. физ.-матем. наук. Уфа, 1994.
20. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
21. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.
22. *Гайсин А. М.* Об одной теореме Хеймана // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39. № 3. С. 501–516.
23. *Гайсин А. М.* Асимптотическая оценка суммы ряда Дирихле на кривых // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 6. С. 810–816.
24. *Шеремета М. Н.* Об одном свойстве целых функций с вещественными тейлоровскими коэффициентами // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 3. С. 315–402.
25. *Gaisin A. M.* Behavior of logarithm of modulus of the sum of Dirichlet series on curves // J. Anal. 1995. V. 3. P. 205–211.
26. *Гайсин А. М.* Оценка ряда Дирихле с лакунами Фейера на кривых // Докл. РАН. 2000. Т. 370. № 6. С. 735–737.
27. *Евграфов М. А.* Об одной теореме единственности для рядов Дирихле // УМН. 1962. Т. 17. № 3. С. 169–175.
28. *Sheremeta M. M.* Five open problems in the theory of entire functions // Математичні студії. 1996. V. 6. P. 157–159.
29. *Beurling A.* Some theorems on boundedness of analytic functions // Duke Math. J. 1949. V. 16. P. 355–359.
30. *Hayman W. K.* How quickly can an entire function tend to zero along curve? // Enseign. Math. (2). 1978. V. 24. № 3–4. P. 215–223.
31. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.
32. *Бойчук В. С.* О некоторых свойствах уточненного порядка // Сиб. матем. журн. 1979. Т. 20. № 2. С. 229–236.

Институт математики
с вычислительным центром
Уфимского научного центра
УрО РАН, г. Уфа
E-mail: gaisin@imat.rb.ru

Поступила в редакцию
14.05.2001 и 12.05.2003