Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Туляков, Асимптотика типа Планшереля–Ротаха для решений линейных рекуррентных соотношений с рациональными коэффициентами, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 9, 111–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7618>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:50:53

УДК 517.929+517.53

Д. Н. Туляков

Асимптотика типа Планшереля–Ротаха для решений линейных рекуррентных соотношений с рациональными коэффициентами

В работе изучается асимптотика решений разностных по переменному n уравнений со спектральным параметром x . Предложен новый метод получения асимптотических разложений для базисных решений в перекрывающихся уходящих на бесконечность областях пространства переменных (n, x) . Согласование решений в пересечении рассматриваемых областей дает принципиальную возможность получить глобальную асимптотическую картину поведения решений уравнений в комплексной плоскости спектрального параметра x при выборе соответствующего масштаба, зависящего от n . Возможности метода продемонстрированы на примерах многочленов Эрмита и Мейкснера.

Библиография: 27 названий.

Ключевые слова: рекуррентные соотношения, асимптотика решений разностных уравнений, ортогональные многочлены, многочлены Эрмита, многочлены Мейкснера.

§ 1. Введение

Рассмотрим линейные рекуррентные соотношения

$$Q_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{p-1} a_{n,j}(x) Q_{n-j}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

где коэффициенты $a_{n,j}(x)$ полиномиальны по спектральному параметру x . Мы изучаем асимптотику решений $Q_n(x)$ для случаев стремления к бесконечности аргумента соотношения (номера n) и спектрального параметра x при различных соотношениях между их ростом. Такие асимптотики называют *асимптотиками типа Планшереля–Ротаха* (см. [1]). Впервые они появились в [2] (см. также [3]) для асимптотического описания многочленов Эрмита H_n при $n \rightarrow \infty$ и

$$\begin{aligned} \text{а) } x &= \sqrt{2n+1} \operatorname{ch} \varphi, & \varepsilon &\leq \varphi \leq \omega, \\ \text{б) } x &= \sqrt{2n+1} + n^{-1/6} t, & t &\in K \Subset \mathbb{C}, \\ \text{в) } x &= \sqrt{2n+1} \cos \varphi, & \varepsilon &\leq \varphi \leq \pi - \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.2)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-8033.2010.1), Программы № 1 ОМН РАН и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 09-01-12160-офи-м и № 10-01-00682).

для фиксированных положительных ε , ω и комплексного t . Напомним, что многочлены Эрмита можно определить рекуррентными соотношениями

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad H_0 = 1, \quad H_{-1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

В [2] асимптотики многочленов Эрмита были получены методом перевала из интегральных представлений для $H_n(x)$, и долгое время оставался открытым вопрос о получении подобных асимптотик для многочленов, не обладающих интегральными представлениями.

За последние 20 лет было разработано несколько методик получения и доказательства асимптотических формул типа Планшереля–Ротаха для ортогональных на действительной оси многочленов с использованием в качестве исходных данных положительных весов ортогональности (см., например, [4]–[8], [1]). При этом также был достигнут определенный прогресс в получении асимптотик многочленов, определяемых неэрмитовыми соотношениями ортогональности (см. [9]–[17]), а также многочленов, ортогональных относительно дискретных мер (см. [18]–[23]). Отметим, что именно неэрмитовы соотношения ортогональности сохраняют рекуррентные соотношения для ортогональных многочленов при рассмотрении комплексных весов ортогональности, сосредоточенных в комплексной плоскости.

В то же время достаточно общие методы, позволяющие получать подобные асимптотики исходя непосредственно из рекуррентных соотношений вида (1.1), еще не так развиты. Отметим одну из немногих важных работ в этом направлении – работу [24].

В настоящей работе мы строим метод получения асимптотических разложений для базисов решений разностных уравнений (1.1) в перекрывающихся уходящих на бесконечность областях пространства (n, x) . Согласование (“сшивки”) решений в пересечении рассматриваемых областей позволяет получить глобальную асимптотическую картину решений уравнений (1.1) в комплексной плоскости спектрального параметра x при выборе соответствующего масштаба, зависящего от n . Тем самым, предлагаемый метод ориентирован на получение глобальных асимптотик решений (1.1) с использованием в качестве исходных данных коэффициентов рекуррентных соотношений подобно тому, как метод наискорейшего спуска для матричной задачи Римана–Гильберта (предложенный в [7] и развитый в [8], [1]) решает эту задачу для ортогональных многочленов, стартуя с весов ортогональности. Отметим также предшествующие работы [25]–[27], посвященные локальным асимптотикам решений рекуррентных соотношений.

Условия на коэффициенты рекуррентного соотношения (1.1) носят общий характер. Кроме полиномиальности по параметру x мы предполагаем их аналитичность по параметру n , более того, в настоящей работе мы считаем их рациональными функциями от n . Рациональные коэффициенты для начальной задачи удобны тем, что они допускают разложение в асимптотический ряд с любой точностью, и нулевой ряд соответствует только функции 0. После получения асимптотики оказывается возможным провести анализ того, насколько можно возмутить коэффициенты (в каком порядке по n), чтобы главный член асимптотики остался прежним.

Автор выражает благодарность А. И. Аптекареву за полезные обсуждения и помощь в процессе работы над этой статьей.

§ 2. Описание метода и результаты

2.1. Постановка задачи и структура метода решения. В качестве удобной переформулировки рекуррентного соотношения (1.1) рассматривается векторное соотношение

$$F_{n+1} = A_n(x)F_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

где F_n – вектор-столбец, $A_n(x)$ – матрица $p \times p$, элементы которой суть полиномы по x с рациональными по n коэффициентами. За счет рациональности по n матрицу $A_n(x)$ можно считать определенной для всех значений $n \in \mathbb{C}$. Тем самым, законной является запись A_{n+t} , где $t \in \mathbb{C}$. Конкретные примеры в настоящей работе мы рассматриваем для случая, когда элементы матрицы A_n линейны по x , а ее определитель не зависит от x (см. пп. 2.6.1 и 2.6.2).

Основной задачей является построение (в виде асимптотических рядов) базисов решений уравнения (2.1) в областях плоскости (n, x) и их согласование в переходных зонах. Затем чтобы найти асимптотики конкретных полиномиальных (по x) решений (2.1) (например, ортогональных многочленов), мы рассматриваем базисы решений при малых n по сравнению с большими x и, вычисляя из начальных данных старшие коэффициенты этих конкретных полиномиальных решений, находим их представления через базисные решения.

Построение базисных решений будет состоять из решения двух задач.

1. *Задача нахождения диагонализующего преобразования V_n .* С помощью перехода к другому базису, зависящему от n , можно перейти к задаче, подобной исходной:

$$F_n = V_n U_n \implies U_{n+1} = (V_{n+1}^{-1} A_n V_n) U_n. \quad (2.2)$$

Наша цель – подобрать подходящие матрицы V_n (зависящие от x), для которых новая матрица перехода $V_{n+1}^{-1} A_n V_n$ близка к диагональной:

$$(V_{n+1}^{-1} A_n V_n) \approx D_n := \text{Diag}[V_{n+1}^{-1} A_n V_n]. \quad (2.3)$$

Здесь $\text{Diag}[B]$ обозначает диагональную часть матрицы B . Также введем обозначение внедиагональной матрицы $\{B\}$:

$$\text{Diag}[B], \{B\} : B = \text{Diag}[B] + \{B\}. \quad (2.4)$$

Подходящие матрицы V_n , кроме условия близости новой матрицы перехода $V_{n+1}^{-1} A_n V_n$ к диагональной, должны обладать следующими свойствами:

$$\|V_n\|, \frac{1}{|\det(V_n)|} = O(n^\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Степенной рост позволит оперировать разложениями V_n и V_n^{-1} по степеням n .

2. *Задача построения базиса решений (2.1) при условии, что подходящие V_n существуют и найдены.*

Обе перечисленные задачи решаются с помощью некоторых итерационных процедур над степенными разложениями. При этом процедура решения задачи 2 имеет универсальный характер, а решение задачи 1 существенно зависит от динамики изменения собственных значений λ_i матрицы A_n как функций от n, x .

Будем называть *областями хорошей диагонализуемости* связные компоненты открытого множества в пространстве (n, x) , в котором выполнено условие

$$\Xi := \left\{ (n, x) : \max_{i \neq j, 1 \leq i, j \leq k} \frac{|\lambda_i| + |\lambda_j|}{|\lambda_i - \lambda_j|} < C \right\} \quad (2.6)$$

для некоторого фиксированного $C > 1$. Множества, в которых неравенство (2.6) нарушается, будем называть *переходными зонами* Ξ^c . Ограничимся пока рассмотрением таких исходных данных $A_n(x)$, для которых существуют такие R и C , что при разбиении множества

$$\{(n, x) : n > R, |x| > R\}$$

на области и переходные зоны в каждой зоне неравенство (2.6) нарушается только для одной пары (i, j) .

В свою очередь решение задачи 1 в области хорошей диагонализуемости Ξ имеет также универсальный характер, и мы формулируем и доказываем достаточно общие результаты в этом случае. В то же время построение диагонализующего преобразования в переходных зонах Ξ^c носит специальный характер. В переходных зонах разностная задача нахождения диагонализующего преобразования сводится к дифференциальной задаче. Дальнейший анализ зависит от типа дифференциальной задачи. В настоящей работе мы рассматриваем лишь случаи, когда дифференциальная задача сводится к уравнению Эйри (определение см., например, в [3; § 1.81]).

Наконец, для решения основной задачи требуется согласование базисов, построенных в различных областях пространства (n, x) . Это оказывается возможным благодаря тому, что формальные ряды, представляющие базис решения в Ξ , имеют смысл и в более широкой области: если в условии (2.6) постоянную C заменить на $|x|^\alpha$ для некоторого $\alpha > 0$. Тем самым, в подобластях переходных зон Ξ^c , граничащих с Ξ , справедливы оба представления базиса решений, поэтому в силу однородности (2.1) по F существует функция, не зависящая от n , но зависящая от x , умножение на которую одного из решений не только выравнивает рост обоих решений, но и обеспечивает равенство последующих членов их асимптотических рядов. Успешное нахождение такой функции (в примерах применения рассматриваемого метода) является дополнительным контролем правильности найденных разложений решений (2.1) в различных областях (n, x) .

2.2. Построение решений с помощью V_n . Начнем с более простой задачи 2. Действительно, при помощи произвольной матрицы D_n тождественно преобразуем уравнение на U_n и запишем неявный итерационный метод для

него:

$$\begin{aligned} U_{n+1} - D_n U_n &= (V_{n+1}^{-1} A_n V_n - D_n) U_n, \\ U_{n+1}^{(s+1)} - D_n U_n^{(s+1)} &= (V_{n+1}^{-1} A_n V_n - D_n) U_n^{(s)}. \end{aligned}$$

Если D_n – диагональная матрица, то итерационное соотношение можно разрешить (сделать явным). Если D_n “достаточно близкая” к $V_{n+1}^{-1} A_n V_n$, то итерационный метод может сойтись. Далее сформулированы достаточное условие, конкретизирующее понятие “достаточно близкая”, итерационная формула и свойства ее неподвижной точки.

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть существует последовательность V_n такая, что справедливо (2.5) и для некоторого $n_0 \in \mathbb{Z}$ выполнено условие

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \|D_n^{-1} V_{n+1}^{-1} A_n V_n - E\| < \infty, \quad (2.7)$$

где для диагональной матрицы $D_n =: \text{diag}\{d_i(n)\}_{i=1}^p$ предполагается

$$|d_1| \leq \dots \leq |d_p|. \quad (2.8)$$

Определим следующий итерационный процесс:

$$F_n^{(s+1)} = V_n \left(\prod_{j=n_0}^{n-1} d_1(j) \vec{e}_1 - \sum_{k=n}^{\infty} \left[\prod_{j=n}^k D_j^{-1} \right] (V_{k+1}^{-1} A_k - D_k V_k^{-1}) F_k^{(s)} \right), \quad (2.9)$$

где $\vec{e}_1 := (1, 0, \dots, 0)^T$.

Тогда справедливо следующее.

А. Существует такое $n_1 \geq n_0$, что итерации с помощью соотношения (2.9) сходятся на пространстве последовательностей $\{F_n\}_{n_1}^{\infty}$ с конечной нормой, если норму определить как

$$\|\{F_n\}\| := \sup_n \|V_n^{-1} F_n\| \prod_{j=n_0}^{n-1} |d_1(j)|^{-1}. \quad (2.10)$$

В. Выполняются следующие свойства последовательности $\{F_n\}_m^{\infty}$ – неподвижной точки отображения (2.9):

- 1) последовательности $\{F_n\}_m^{\infty}$, построенные для разных нижних границ $m = n_1$ и $m = n_2$, согласованы – совпадают на общей части области определения;
- 2) если последовательность $\{F_n\}_m^{\infty}$ является неподвижной точкой отображения (2.9), то она на своей области определения удовлетворяет уравнению (2.1);
- 3) любая последовательность $\{F_n\}_m^{\infty}$, удовлетворяющая уравнению (2.1), единственным образом продолжается на меньшие индексы (до $n = n_0$);
- 4) если произведение $\prod_n |d_2(n)/d_1(n)|$ расходится, то в пространстве с нормой (2.10) существует единственное с точностью до постоянного множителя решение уравнения (2.1).

В связи с формулировкой теоремы 1 сделаем несколько замечаний. Если остаток ряда (2.7) есть $O(n^{-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, то для решения $\{F_n\}$ строится асимптотическое разложение. От ограничения (2.8) можно в некотором смысле избавиться – мы обсудим это детально в п. 3.1 после доказательства теоремы 1. Отметим, наконец, что утверждения теоремы 1 сохраняются, если условие (2.8) несколько ослабить, заменив на следующее¹:

$$\prod_n \left| \frac{d_i(n)}{d_j(n)} \right|_+ < \infty \quad \forall i < j.$$

2.3. Базис и общее решение. Теорема 1 дает процедуру, позволяющую по подходящей диагонализующей матрице V_n построить одно решение задачи (2.1). Остановимся на вопросе: как получать другие решения и как в итоге получить базис решений? Пусть построено решение $\{F_n\}$ из теоремы 1. Рассмотрим новую матрицу $\tilde{V}_n$, которая получается из V_n заменой первого столбца на

$$\left(\prod_{k=n_0}^{n-1} d_1^{-1}(k) \right) F_n =: \{\tilde{V}_n(j, 1)\}_{j=1}^p. \quad (2.11)$$

Тогда первый столбец матрицы $\tilde{V}_{n+1}^{-1} A_n \tilde{V}_n$ равен $d_1(n) \tilde{e}_1$. В результате в новом варианте уравнения (2.2) изменения всех, за исключением первой, координат вектора $\tilde{U}_n$:

$$\tilde{U}_{n+1} = (\tilde{V}_{n+1}^{-1} A_n \tilde{V}_n) \tilde{U}_n,$$

не будут зависеть от первой координаты, и мы получаем задачу на единицу меньшей размерности. Если она будет полностью решена (построен базис), то для нахождения первых координат (не входящих в подзадачу) нужно найти сумму уже известных величин – аналог неопределенного интеграла (первообразной). Постоянное слагаемое можно выбрать любым – это отражает свободу выбора базиса: базисное решение большего роста можно изменить, прибавив к нему базисное решение меньшего роста. Получится другой базис, но асимптотика останется такой же.

Происшедшее изменение элементов $\tilde{V}_{n+1}^{-1} A_n \tilde{V}_n$ по сравнению с $V_{n+1}^{-1} A_n V_n$ можно оценить, при этом окажется, что подматрица матрицы $\tilde{V}_{n+1}^{-1} A_n \tilde{V}_n$ будет снова близка к диагональной, а ее диагональные элементы близки к $d_2, \dots, d_p$. Это позволяет вновь построить решение с помощью теоремы 1.

Продолжаем этот процесс понижения размерности, на каждом шаге которого мы изменяем матрицу V_n и получаем независимое решение (2.1). В итоге приходим к матрице V_n , которая представляет общее решение (2.1) по формуле

$$F_n \approx V_n \prod_{k=k_0}^{n-1} D_k \vec{C}, \quad \vec{C} := (c_1, \dots, c_p)^T. \quad (2.12)$$

Если бы мы на каждом шаге брали точный результат сходимости процесса (2.9), в (2.12) было бы точное равенство.

¹Здесь и далее $|z|_+ := \max(1, |z|)$.

Следует отметить, что столбцы матрицы V_n можно умножать на любые ограниченные величины, зависящие от n – это не изменит порядок близости $V_{n+1}^{-1}A_nV_n$ к диагональной матрице. При этом изменятся $d_j(n)$, однако столбцы правой части (2.12) получат дополнительные множители, не зависящие от n . В примерах это свойство будет использоваться.

2.4. Нахождение V_n в областях Ξ . Задача 1 – нахождения диагонализующего преобразования V_n – гораздо более серьезная. Ее решение зависит от области в плоскости (n, x) . В областях хорошей диагонализуемости Ξ и даже в более широких областях решение может быть получено в достаточно общем классе матриц A_n . В этих областях начальные приближения к V_n строятся из собственных вектор-столбцов для матрицы $A_n(x)$ и к ним применяется несколько шагов процедуры уточнения.

2.4.1. Итерационный процесс для V_n . Итерационный процесс, уточняющий V_n , предъявить нетрудно. Пусть есть матрица V_n как функция от n , полученная на очередном шаге приближения. Напомним обозначения (см. (2.3) и (2.4)):

$$V_{n+1}^{-1}A_nV_n = D_n(E + S), \quad D_n := \text{Diag}[V_{n+1}^{-1}A_nV_n], \\ S := D_n^{-1}\{V_{n+1}^{-1}A_nV_n\} - E.$$

Примем в качестве нового приближения матрицу

$$\tilde{V}_n = V_n(E + X(n))$$

и подсчитаем новое $\tilde{S}$ в первом приближении, считая S и X малыми. Получим

$$\tilde{S} = D_n^{-1}\tilde{V}_{n+1}^{-1}A_n\tilde{V}_n - E = D_n^{-1}(E + X(n+1))^{-1}D_n(E + S)(E + X(n)) - E \\ = S + X(n) - D_n^{-1}X(n+1)D_n + O(X^2 + SX).$$

Отбросим $O(X^2 + SX)$ в полученном выражении и примем $X(n) \approx X(n+1)$. Так как $\text{Diag}[S] = 0$, то уравнение $S + X - D_n^{-1}XD_n = 0$ разрешимо. Получим для построения следующего приближения $\tilde{V}_n$ матрицу $X(n)$ с такими элементами:

$$X_{ii}(n) = 0; \quad X_{ij}(n) = \frac{d_i S_{ij}}{d_j - d_i}, \quad \text{где } d_i = D_n(i, i).$$

Тогда следующее приближение лучше предыдущего (т.е. имеет более высокий порядок малости невязки). В этом процессе матрица D_n меняется на каждом шаге итерации, что неудобно для получения оценок. Поэтому ниже (в п. 2.4.3) будет предъявлен несколько иной процесс.

2.4.2. Начальное приближение для V_n . Установим существование асимптотического разложения для V_n . В качестве начального приближения берется матрица из собственных вектор-столбцов матрицы $A_n(x)$, поэтому сначала изучим особенности собственных векторов и установим область, в которой существует голоморфный базис собственных векторов и двойственный ему базис с оценками сверху на их компоненты.

Пусть $\mathcal{D}(n, x) \neq 0$ – дискриминант характеристического многочлена матрицы $A_n(x)$, (λ_j) – ее собственные значения, а через $(\tilde{b}_j)$ обозначим собственные

векторы. $\mathcal{D}(n, x)$ является полиномом от x с рациональными по n коэффициентами. Избавимся от знаменателей (зависящих только от n) и далее под $\mathcal{D}(n, x)$ будем подразумевать только числитель, который, тем самым, представляет собой полином от n, x . Кроме того, если в результате $\mathcal{D}(n, x)$ окажется константой, считаем эту константу большей единицы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Любая матрица $A_n(x)$ с $\mathcal{D}(n, x) \neq 0$ обладает собственным базисом столбцов $(\vec{b}_i)_1^p$ и двойственным к нему базисом строк $(\vec{b}_i^{(*)})_1^p$ (т.е. $\vec{b}_j^{(*)} \vec{b}_j = 1$) с алгебраическими по n, x элементами, при этом существуют вещественные константы C, M, r, s такие, что в области

$$\Omega := \{(n, x) \in \mathbb{C}^2 \mid |n| > C, |\mathcal{D}(n, x)| > 1\} \quad (2.13)$$

элементы произведений $\vec{b}_j \vec{b}_j^{(*)}$ голоморфны и имеют оценки сверху

$$\vec{b}_j \vec{b}_j^{(*)} \in \mathcal{H}^{p \times p}(\Omega), \quad \|\vec{b}_j \vec{b}_j^{(*)}\| \leq M |x|_+^r |n|_+^s. \quad (2.14)$$

В дальнейшем будем предполагать (это некоторое дополнительное условие на $A_n(x)$), что векторы $(\vec{b}_i)_1^p$ и $(\vec{b}_i^{(*)})_1^p$ можно выбрать таким образом, что² их элементы также не имеют особенностей в Ω и имеют аналогичные (2.14) оценки сверху с другими M, r, s :

$$\vec{b}_j, \vec{b}_j^{(*)} \in \mathcal{H}^{p \times p}(\Omega), \quad \|\vec{b}_j\| \leq M_1 |x|_+^{r_1} |n|_+^{s_1}, \quad \|\vec{b}_j^{(*)}\| \leq M_2 |x|_+^{r_2} |n|_+^{s_2}. \quad (2.15)$$

Это (вероятно, не очень обременительное в силу (2.14)) дополнительное³ условие на матрицы $A_n(x)$ потребуется для использования аналитических свойств начального приближения матрицы V_n при доказательстве сходимости нескольких первых шагов итерационных процедур, определяющих V_n . (Детали – в формулировках теорем 2, 3.)

2.4.3. Итерационный процесс для степенных разложений V_n . Асимптотическое разложение для V_n будем искать путем введения дополнительного параметра t и поиска формального степенного ряда по t , решающего следующую задачу:

$$V_n = V_n^{(0)} + t\varphi_1(x, n) + t^2\varphi_2(x, n) + \dots, \quad V_{n+t}^{-1} A_n V_n \approx \text{diag}(\cdot). \quad (2.16)$$

В качестве начального приближения и одновременно первого члена разложения $V_n^{(0)}$ примем матрицу, составленную из найденных вектор-столбцов $(\vec{b}_i)_1^p$:

$$V_n^{(0)} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_p), \quad D := (V_n^{(0)})^{-1} A_n V_n^{(0)} = \text{diag}(\lambda_1(x, n), \dots, \lambda_p(x, n)). \quad (2.17)$$

Тогда при $V_n = V_n^{(0)}$ внедиагональные элементы матрицы $V_{n+t}^{-1} A_n V_n$ имеют порядок $O(t)$.

²С учетом следующей свободы в выборе базиса: каждый вектор $\vec{b}_j$ можно умножить на произвольную скалярную функцию, одновременно поделив $\vec{b}_j^{(*)}$ на ту же функцию.

³Автору не известны ни доказательство импликации (2.14) $\implies$ (2.15), ни контрпример к ней даже при $p = 2$.

Построим последовательность формальных рядов $V_n^{(l)}$, генерируемых следующим процессом (при сдвиге переменной n производим переразложение рядов):

$$S^{(l)} := (V_{n+t}^{(l)})^{-1} A_n V_n^{(l)}, \quad X_n^{(l)} := (X_{ij}^{(l)}), \quad \text{где} \quad \begin{cases} X_{ii}^{(l)} = 0; \\ X_{ij}^{(l)} = \frac{S_{ij}^{(l)}}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad i \neq j, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$V_n^{(l+1)} := V_n^{(l)} (E + X_n^{(l)})^{-1}.$$

Тогда ряды $V_n^{(l)}$ и $V_n^{(l+1)}$ совпадают с точностью до $o(t^l)$, ряды $S^{(l)}$ и $S^{(l+1)}$ совпадают с точностью до $o(t^{l+1})$.

Отметим, что шаг итерационного процесса (2.18) немного отличается от соответствующего шага итераций, рассмотренных в п. 2.4.1, который обеспечивает бóльшую скорость установления решения, однако использование процесса (2.18) будет для нас более удобным при доказательстве сходимости нескольких первых итераций не только в смысле совпадения формальных рядов.

2.4.4. Сходимость итераций для бесконечных рядов V_n . Покажем, что пользоваться рядами (2.16) как асимптотическими (т.е. обрывая их) при $|x| \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ можно и при конечном значении t , в частности нас интересует значение $t = 1$.

Введем некоторые функции от точки $(n_0, x) \in \Omega$, в терминах которых могут быть выражены показатель скорости сходимости для конечного числа итераций, конечные пределы изменения t в (2.16) и ограничения на константу C в (2.13).

Пусть R – расстояние от точки $(n_0, x) \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ по переменной n :

$$R := R(n_0, x) := \min_{n: (x, n) \in \partial\Omega} |n - n_0|, \quad R_0 < \frac{R}{2}. \quad (2.19)$$

Пусть $\widetilde{M}$, Δ таковы, что для начальных данных итерационного процесса (2.18) выполняются следующие оценки:

$$\Delta := \Delta(x, n_0, R_0) : \min_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j| > \Delta \quad \text{в круге} \quad |n - n_0| < R_0; \quad (2.20)$$

$$\widetilde{M} := \widetilde{M}(x, n_0, R_0) : \|(V_n^{(0)})^{-1} A_n V_n^{(0)}\| < \widetilde{M}, \quad n, \tilde{n} \in \{n \in \mathbb{C} : |n - n_0| \leq 2R_0\}. \quad (2.21)$$

Отметим, что отношение $\widetilde{M}/\Delta$ имеет тот же смысл, что и константа C в (2.6). Далее, для натурального $m \in \mathbb{N}$ определим параметр $d > 1$ и круги $\{K_l\}_{l=1}^m$:

$$(m+1)d < R_0, \quad R_l = R_0 - ld, \quad K_l := \{n \in \mathbb{C} : |n - n_0| \leq R_l\}.$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть точка (n_0, x) принадлежит Ω . Тогда:

1) существуют $r = r(\Delta, \widetilde{M})$, $r \in (0, d)$, и $q = q(\Delta, \widetilde{M}, r)$, $q \in (0, 1)$, такие, что

$$\|X_n^{(l)}\|, \|S^{(l)} - S^{(l-1)}\|, \|\{S^{(l)}\}\| = O(q^l) \quad \text{при} \quad n \in K_l, \quad t \in \{|t| \leq r\},$$

где константы в $O(q^l)$ зависят от Δ , $\widetilde{M}$, r , d ;

2) при $t \rightarrow 0$ имеем

$$\|V_n^{(l+1)} - V_n^{(l)}\| = O(t^{l+1}), \quad \|S^{(l+1)} - S^{(l)}\| = O(t^{l+1}), \quad \|\{S^{(l)}\}\| = O(t^{l+1}).$$

Отметим, что из теоремы 2 вытекает утверждение о том, что ряды для $V_n^{(l)}$ и $S^{(l)}$ устанавливаются, причем внедиагональные члены $S^{(l)}$ устанавливаются к 0.

Итак, подытожим. Точка $(n_0, x) \in \Omega$ определяет R – расстояние от этой точки до $\partial\Omega$ по переменной n . По положительному $R_0 < R/2$ определяются оценки $\widetilde{M}$ и Δ , ответственные за норму и за расстояние между собственными значениями соответственно. Выбираются положительные $d, r < d$ и натуральное m с условием $(m+1)d < R_0$. Величина m – число оцениваемых шагов итерационного процесса (2.18), d и r определяют области, в которых делаются оценки: d определяет, насколько уменьшаются круги по переменной n на каждом шаге оценки, r оценивает t . По выбранным величинам вычисляется $q < 1$, которое задает геометрическое убывание оценок для величин $\|X_n^{(l)}\|, \|S^{(l)} - S^{(l-1)}\|, \|\{S^{(l)}\}\|$.

2.4.5. *Свойства частичных сумм асимптотических рядов V_n .* Прямые оценки теоремы 2 не дают возможность оценить рост коэффициентов степенных рядов и ошибку (невязку в $V_{n+1}^{-1}A_nV_n$) от замены степенного ряда для $V_n^{(l)}$ на частичную сумму.

Для решения этой проблемы определим в области Ω величины $R, \widetilde{M}, \Delta$ (см. (2.19)–(2.21)) как функции точки, выбрав $R_0 = R/3$. Пусть Ω_1 – подобласть Ω , уходящая на бесконечность, которая для некоторого $\varepsilon > 0$ определена как

$$\Omega_1 := \left\{ (x, n) : \frac{\widetilde{M}}{R\Delta} = o(|x|^{-\varepsilon}) \right\}. \quad (2.22)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 3. Коэффициенты степенного ряда (2.16), генерируемого процедурой (2.18), обладают следующими асимптотическими свойствами:

$$\|\varphi_j(x, n)\| < O(|x|^{-j\varepsilon} \|V_n^{(0)}\|) = O(|x|^{-j\varepsilon} \widetilde{M})$$

равномерно в области Ω_1 . Для m -той частичной суммы

$$V_n^{[m]} := V_n^{(0)} + \sum_{j=1}^m \varphi_j(x, n), \quad (2.23)$$

полученной подстановкой $t = 1$ из ряда (2.16), равномерно в области Ω_1 выполняется

$$\|(V_{n+1}^{[m]})^{-1}A_nV_n^{[m]} - S^{(m)}\| < O\left(\frac{\widetilde{M}}{|x|^{m\varepsilon}\sqrt{|x|^{2\varepsilon}-1}}\right).$$

Это вместе с оценкой $\{S^{(m)}\}$ дает возможность использовать теорему 1.

Таким образом, теорема 3 описывает условие на область Ω_1 , в которой частичная сумма формального ряда, определяемого итерационным процессом (2.18), при $t = 1$ дает степенную величину отклонения $(V_{n+1}^{[m]})^{-1}A_nV_n^{[m]}$ от диагональной матрицы при $n \rightarrow \infty, (n, x) \in \Omega_1$. Обращаем внимание на то, что D_n из теоремы 1 отличается от D из (2.17).

2.4.6. *Построение общего решения при $(n, x) \in \Omega_1$ (итог).* Подытожим процедуру построения асимптотики решения (2.1) в Ω (2.13).

- 1) Берем начальное приближение $V_n^{(0)}$ (2.17).
- 2) Получаем для V_n несколько членов ряда (2.16) с помощью процедуры (2.18), (2.17).
- 3) Определяем области Ω_1 (см. (2.22)) применимости частных сумм (2.23) ряда (2.16).
- 4) Уточняем редукцией размерности (2.11) матрицу V_n , диагонализующую все базисные векторы. Для этого могут понадобиться решения из переходных зон.
- 5) Вычисляем произведение диагональных матриц D_n (2.3).
- 6) Получаем асимптотическое разложение для (2.12) – общего решения (2.1)

$$F_n \approx V_n \prod_{k=k_0}^{n-1} D_k \vec{C}, \quad \vec{C} := (c_1, \dots, c_p).$$

2.5. Переходная зона Ξ^c (случай $p = 2$). Основная идея построения приближенного решения задачи (2.1) в переходной зоне состоит в выборе соответствующего масштаба и в переходе от разностной (по n) задачи к дифференциальной. Вид дифференциального уравнения, описывающего асимптотику решения в переходной зоне, и способ обоснования этой асимптотики зависят от матрицы A_n в (2.1). Эта задача более деликатная, чем построение решения в области хорошей диагонализуемости Ξ , и мы пока не можем формулировать в переходной зоне результаты той же степени общности, что и для Ξ . В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением в переходной зоне матриц A_n размера 2×2 , на которые налагаем некоторое дополнительное ограничение (детали см. ниже), приводящее в дифференциальной задаче к уравнению Эйри.

2.5.1. Характерный масштаб и локальная переменная. Переходные зоны являются окрестностями ветвей алгебраической кривой $\mathcal{D}(n, x) = 0$. Зафиксируем ветвь дискриминантной кривой $n^*(x)$. Введем характерный масштаб в окрестности $n^*(x)$. Пусть

$$R^*(x) := R(n_1, x), \quad \text{где } n_1 : \widetilde{M}(n_1, x) \sim R(n_1, x)\Delta(n_1, x); \quad (2.24)$$

обозначения см. в (2.19)–(2.21). Знак $\sim$ понимается в дальнейшем как “о большое” в обе стороны.

То есть характерной длиной (рис. 1) становится такой порядок расстояния (по n) от точки границы $\partial\Omega$ до точек в Ω (с фиксированной координатой x), что $\widetilde{M}(x, n)/\Delta(x, n)$ – величина порядка этого расстояния (при удалении от $\partial\Omega$ расстояние растет, величина $\widetilde{M}(x, n)/\Delta(x, n)$ уменьшается). Данный выбор обусловлен тем, что граница $\partial\Omega$ находится целиком в переходной зоне и именно в ее окрестности происходит перестройка поведения решения при $n \rightarrow \infty$.

Поэтому, вводя вместо n в переходной зоне новую локальную переменную z , по порядку величины равную

$$z \sim \frac{n - n^*(x)}{R^*(x)}, \quad (2.25)$$

Рис. 1. Характерная длина: $|n_1 - n_2| \sim \widetilde{M}(x, n_1)/\Delta(x, n_1)$, $|n_2 - n^*| = o(|n_1 - n_2|)$

мы получим, что в плоскости (x, z) ветвь дискриминантной кривой переходит в ось $z = 0$, а окрестности этой ветви по переменной n перейдут в бесконечно малые окрестности.

2.5.2. *Начальная диагонализация матрицы A_n ($p = 2$).* Строим приближенное диагонализующее преобразование $\widetilde{V}_n$. При $n = n^*(x)$ собственные значения A_n совпадают: $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$. В соответствующей окрестности матрицу можно привести к виду, близкому к λE . Например, пусть

$$A_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a + d \pm \sqrt{\mathcal{D}}), \quad \mathcal{D} = (a - d)^2 + 4bc.$$

Значит, $|\lambda_1 - \lambda_2| = |\sqrt{\mathcal{D}}|$. В переходной зоне

$$\max |\lambda_1 - \lambda_2| = \Delta = O\left(\frac{\widetilde{M}}{R^*(x)}\right) \ll \widetilde{M},$$

поэтому

$$|\mathcal{D}| \ll \widetilde{M}^2, \quad |a + d| \approx 2\widetilde{M}.$$

Рассмотрим две возможности относительно $|a - d|$.

1) Если $|a - d| \ll \widetilde{M}$, то $|bc| \ll \widetilde{M}^2$. Приняв при подходящем k

$$\widetilde{V}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

получим

$$(\widetilde{V}_{n+1})^{-1} A_n \widetilde{V}_n = \begin{pmatrix} a & kb \\ k^{-1}c & d \end{pmatrix}.$$

Так как $|bc|$ мало, то можно выбрать k так, чтобы внедиагональные элементы были близки к нулю. Наконец, воспользуемся малостью $|a - d|$ и получим

$$(\widetilde{V}_{n+1})^{-1} A_n \widetilde{V}_n \approx \frac{a + d}{2} E.$$

2) Если же $|a - d| \gtrsim \widetilde{M}$, то $|4bc| \approx |a - d|^2 \neq 0$. В этом случае примем

$$\widetilde{V}_n = \begin{pmatrix} a - d & k \\ 2c & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

получим

$$(\widetilde{V}_{n+1})^{-1} A_n \widetilde{V}_n \approx (\widetilde{V}_n)^{-1} A_n \widetilde{V}_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + d & k \\ k^{-1} \mathcal{O} & a + d \end{pmatrix} \approx \frac{a + d}{2} E.$$

2.5.3. *Разностное уравнение для решения диагонализированной системы.* Напомним, что (см. (2.2))

$$U_{n+1} = (\widetilde{V}_{n+1}^{-1} A_n \widetilde{V}_n) U_n, \quad (2.28)$$

если $F_n = \widetilde{V}_n U_n$.

Мы показали, что невырожденными преобразованиями в переходной зоне можно добиться выполнения

$$(\widetilde{V}_{n+1})^{-1} A_n \widetilde{V}_n \approx \lambda^{(n)} E, \quad \lambda^{(n)} := \frac{a + d}{2}. \quad (2.29)$$

Скалярный множитель $\lambda^{(n)}$ легко учитывается, поэтому от него можно избавиться. Определим функцию-столбец:

$$u(z) : \quad U_n = \widetilde{V}_n^{-1} F_n = u(z) m \prod_n \lambda^{(n)}. \quad (2.30)$$

Далее, если мы рассмотрим матрицу невязки в (2.29) (считая все входящие в (2.29) величины известными), то мы также можем определить матрицу-функцию:

$$L : \quad (\widetilde{V}_{n+1})^{-1} A_n \widetilde{V}_n - \lambda^{(n)} E = \lambda^{(n)} \widetilde{d} L, \quad \text{где } \widetilde{d} = \frac{1}{R^*(x)}. \quad (2.31)$$

Теперь, переводя зависимость от n у L в зависимость от новой локальной переменной z , мы с помощью матрицы-функции $L(x, z)$ получаем соотношение, характеризующее функцию-столбец $u(z)$:

$$u(z + \widetilde{d}) = (E + \widetilde{d} L) u(z). \quad (2.32)$$

2.5.4. *Система дифференциальных уравнений первого порядка для $u(z)$.* Перепишем функционально-разностное уравнение (2.32):

$$\frac{[u(z + \widetilde{d}) - u(z)]}{\widetilde{d}} = L(z) u(z),$$

и перейдем к дифференциальному уравнению для определения вектора $u(z)$

$$u'(z) = R(z) u(z), \quad R \approx L, \quad R = ?. \quad (2.33)$$

Асимптотический ряд для R находится с помощью следующей итерационной процедуры:

$$R^{(s+1)}(z) := R^{(s)}(z) + L(z) - \sum_{k=1}^{\infty} F_k^{(s)}(z, 1) \widetilde{d}^{k-1}, \quad (2.34)$$

где, в свою очередь,

$$F_0^{(s)} = E, \quad F_{k+1}^{(s)}(z, T) = \int_0^T R^{(s)}(z + t\tilde{d}) F_k^{(s)}(z, t) dt.$$

Область применимости задается условием

$$\tilde{d}\|L\| = O(|x|^{-\varepsilon})$$

для некоторого $\varepsilon > 0$.

Обоснование процедуры для нахождения R и области применимости этого разложения формулируется в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 4. Пусть в круге радиуса $\rho := \rho(x)$ с центром в 0 плоскости z выполняется

$$\tilde{d}\|L\| < C|x|^{-\varepsilon}, \quad \tilde{d} = o(\rho), \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда для итераций, заданных соотношением (2.34) с начальными данными $R^{(0)} = 0$, верны оценки

$$\|R^{(s+1)} - R^{(s)}\| = O(\tilde{d}^{-1}|x|^{-(s+1)\varepsilon}) \quad \text{в круге } |z| < \theta\rho, \quad \theta < 1.$$

Константа в O зависит от C, θ, s .

СЛЕДСТВИЕ 1. Коэффициенты разложения $R^{(s)}$ по степеням $\tilde{d}$ устанавливаются.

2.5.5. Дифференциальное уравнение второго порядка. Получив матрицу $R(z)$ коэффициентов дифференциального уравнения первого порядка для вектора $u(z) = (u_1(z), u_2(z))$, мы можем перейти к скалярному дифференциальному уравнению второго порядка. Для системы

$$\begin{cases} u'_1 = R_{11}u_1 + R_{12}u_2, \\ u'_2 = R_{21}u_1 + R_{22}u_2 \end{cases}$$

имеем

$$\begin{cases} R_{12}u_2 = u'_1 - R_{11}u_1, \\ (u'_1 - R_{11}u_1)' = R_{12}R_{21}u_1 + ((\ln R_{12})' + R_{22})(u'_1 - R_{11}u_1). \end{cases}$$

Стандартной заменой коэффициент при первой производной можно обнулить:

$$g(z) : \quad u_2 = \frac{u'_1 - R_{11}u_1}{R_{12}}, \quad u_1 = \sqrt{R_{12}} \exp\left(\frac{1}{2} \int (R_{22} + R_{11}) dz\right) g, \quad (2.35)$$

и перейти к уравнению

$$g''(z) = q(z)g(z), \quad (2.36)$$

где

$$q = R_{12}R_{21} - \frac{1}{2}((\ln R_{12})' + R_{22} - R_{11})' + \frac{1}{4}((\ln R_{12})' + R_{22} - R_{11})^2. \quad (2.37)$$

Дальнейший анализ зависит от количества корней коэффициента $q(z)$, не стремящихся к бесконечности. В дальнейшем мы будем предполагать, что имеет место достаточно типичная ситуация: q имеет один корень, не стремящийся к бесконечности. Тогда асимптотику $u_1(z)$ можно записать через функции Ai и Bi – решения уравнения Эйри. Убедиться в наличии и количестве корней можно, проанализировав главный член асимптотики $q(z)$ для больших по модулю z и применив теорему Руше.

2.5.6. Дифференциальное уравнение Эйри. Пусть $q(z)$ действительно имеет один корень внутри круга, достаточно большого, но фиксированного (не зависящего от x) радиуса. Уравнение (2.36)

$$g''(z) = q(z)g(z)$$

имеет частные решения вида

$$f(z) \text{Ai}(h(z)), \quad f(z) \text{Bi}(h(z)), \quad (2.38)$$

если

$$h'(z) = f^{-2}(z), \quad f''(z) + f^{-3}(z)h(z) = q(z)f(z). \quad (2.39)$$

Найти асимптотические ряды для $f(z)$ и $h(z)$ можно с помощью следующей итерационной процедуры, начав с $f(z) = 1$ (или с любой другой константы). Пусть $Z^{(s)}$ – корень уравнения

$$q(Z^{(s)}) - \frac{f^{(s)''}(Z^{(s)})}{f^{(s)}(Z^{(s)})} = 0.$$

Тогда его можно выразить контурным интегралом:

$$Z^{(s)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \xi \frac{d}{d\xi} \ln \left(q(\xi) - \frac{f^{(s)''}(\xi)}{f^{(s)}(\xi)} \right) d\xi, \quad (2.40)$$

и закончить шаг итерации:

$$h^{(s)}(z) = \left[\frac{3}{2} \int_{Z^{(s)}}^z \sqrt{q(\xi) - \frac{f^{(s)''}(\xi)}{f^{(s)}(\xi)}} d\xi \right]^{2/3}, \quad f^{(s+1)}(z) = \frac{1}{\sqrt{h^{(s)'}(z)}}. \quad (2.41)$$

Тогда функции $h(z)$ и $f(z)$, получаемые на очередном шаге итерации, не будут иметь ветвлений.

Преимущество такой процедуры и такого представления решений в том, что если в матрице L (см. (2.31)) отсутствовали отрицательные степени z , то они не появятся и в разложениях R , f , h .

2.5.7. Полиномиально растущий диагонализующий базис в переходной зоне. В случае, когда уравнение (2.36) сводится к уравнению Эйри, мы (см. (2.35)) получаем для вектора $u(z)$ (выражающего посредством (2.30) решение F_n) представление

$$u(z) = \sqrt{R_{12}} \exp \left(\frac{1}{2} \int (R_{22} + R_{11}) dz \right) \begin{pmatrix} f(z) \text{Ai}(h(z)) \\ \left(\frac{yf + f'}{R_{12}} \text{Ai}(h(z)) + \frac{fh'}{R_{12}} \text{Ai}'(h(z)) \right) \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

где обозначено $y := (R_{22} - R_{11})/2 + R'_{12}/(2R_{12})$. Второе базисное решение получается заменой Ai на Bi .

Зная асимптотику функции Эйри, мы можем избавиться от экспоненциального роста в (2.42) и перейти к полиномиально растущему базису векторов, пропорциональных решениям. Это позволит применить теорему 1, когда мы исследуем решения рекуррентных соотношений, например ортогональные многочлены

$$\tilde{u}_A(z) = \exp\left(\frac{2}{3}h^{3/2}(z)\right) \begin{pmatrix} \text{Ai}(h(z)) \\ f_1 \text{Ai}(h(z)) + f_2 \text{Ai}'(h(z)) \end{pmatrix},$$

где обозначено $f_1 := (y + f'/f)/R_{12}$ и $f_2 := h'/R_{12}$. Второе базисное решение получается заменой Ai на Bi :

$$\tilde{u}_B(z) = \exp\left(-\frac{2}{3}h^{3/2}(z)\right) \begin{pmatrix} \text{Bi}(h(z)) \\ f_1 \text{Bi}(h(z)) + f_2 \text{Bi}'(h(z)) \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Решение (2.32) имеет представление

$$u(z) = \exp(E(z)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Ai}(h(z)) & \text{Bi}(h(z)) \\ \text{Ai}'(h(z)) & \text{Bi}'(h(z)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

$$E(z) = \frac{1}{2} \left(\ln R_{12} + \int (R_{22} + R_{11}) dz \right) + \ln f(z).$$

Необходимо пояснить, как правильно выбирать полиномиальный базис в различных секторах комплексной плоскости. На самом деле правая часть (2.43) имеет полиномиальный рост лишь в секторе $-\frac{\pi}{3} \leq \arg h(z) \leq \frac{\pi}{3}$.

Чтобы расширить область с полиномиальным поведением, нужно использовать вместо Bi две определенные линейные комбинации функций Эйри. Использование $\text{Ai} + i \text{Bi}$ дает полиномиальное поведение в секторе $\arg(h) \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$, $\text{Ai} - i \text{Bi}$ – в секторе $\arg(h) \in (-\pi, \pi)$, $\text{Ai} - i \text{Bi}$ – в секторе $\arg(h) \in (-\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. При этом используется экспоненциальный множитель из формулы (2.43) и та ветвь дробной степени h , для которой при $\arg(h) = 0$ выполнено $\arg(h^{3/2}) = 0$. В общих частях секторов для любой пары выбранных решений матрица, составленная из них, в некотором обобщенном смысле невырождена: определитель обратной матрицы имеет полиномиальный рост, как нам и нужно.

Приведем следующую сводку аргументов h для секторов, в которых две комбинации функций Эйри дают базис с полиномиальным поведением (для всех пар):

$$\begin{cases} \text{Ai}, & \text{Ai} + i \text{Bi}, & \left(-\frac{\pi}{3}, \pi\right), \\ \text{Ai}, & \text{Ai} - i \text{Bi}, & \left(-\pi, \frac{\pi}{3}\right), \\ \text{Ai} + i \text{Bi}, & \text{Ai} - i \text{Bi}, & \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right). \end{cases} \quad (2.45)$$

Для последней пары нужно использовать разные ветви $h^{3/2}$, при этом соответствующие сектора в (2.45) совпадают.

Окончательно получим формулы для V_n в переходной зоне, обеспечивающей диагонализуемость с нужной точностью (т.е. достаточной для применения теоремы 1 и нахождения F_n) в секторе $\arg h(z) \in (-\frac{\pi}{3}, -\pi)$:

$$V_n = \tilde{V}_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Ai}(h(z)) & \text{Ai}(h(z)) + i \text{Bi}(h(z)) \\ \text{Ai}'(h(z)) & \text{Ai}'(h(z)) + i \text{Bi}'(h(z)) \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{2}{3}h^{3/2}(z)\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{2}{3}h^{3/2}(z)\right) \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Если у получающейся функции $h(z)$ аргумент будет лежать в других границах, то в (2.46) меняем столбцы в соответствии с (2.45).

2.5.8. Построение решения в переходной зоне (итог). Подытожим процедуру построения асимптотики решения (2.1) в Ξ^c (см. (2.6)).

1) С помощью явных начальных диагонализующих преобразований $\tilde{V}_n$ (см. (2.26) или (2.27)) по формуле (2.31) строим матрицу L , в которой меняем зависимость от n на зависимость от локальной переменной z (см. (2.25)). При этом у нас также появляются новые величины, связанные с переменной x , – это характерный масштаб $R^*(x)$ (см. (2.24)) и параметр степенного разложения $\tilde{d} := 1/R^*(x)$.

2) С помощью итерационного процесса (2.34) по матрице L находим асимптотический (по $\tilde{d}$) ряд для матрицы R (см. (2.33)). По коэффициентам матрицы R строим функцию q (см. (2.37)), являющуюся коэффициентом дифференциального уравнения второго порядка (2.36), решение которого $g(z)$ по формулам (2.35) определяет вектор $u(z)$, который по (2.30) связан с решением $F_n(x)$ в переходной зоне (x, n) .

3) В типичном случае, когда $q(z)$ имеет единственный корень внутри большого круга, асимптотические свойства полученного в пп. 1), 2) базиса решений можно исследовать, зная асимптотику функций Эйри. В этом случае уравнение (2.36) сводится к уравнению Эйри, для чего по асимптотическому ряду для $q(z)$ с помощью итерационного процесса (2.40), (2.41) находим асимптотические ряды для функций $f(z)$ и $h(z)$ (см. (2.39)), которые по (2.38) выражают решения с помощью функций Ai и Bi .

4) В зависимости от коэффициента в главном члене разложения $h(z)$ нам могут понадобиться разные сектора изменения $\arg(h)$. Для нужного сектора выбираем пару решений, образующих полиномиальный базис с помощью (2.45) и соответствующего аналога (2.46).

2.6. Примеры. Здесь мы сформулируем результаты применения описанного метода к рекуррентным соотношениям некоторых классических ортогональных многочленов. Рассмотрим многочлены Эрмита и Мейкснера.

2.6.1. Асимптотика многочленов Эрмита (результат). Рекуррентные соотношения для многочленов Эрмита (1.3) в матричной форме (2.1) имеют вид (мы переобозначили $Q_n(x) := H_n(x)$)

$$\begin{pmatrix} Q_{n+1} \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_n \\ Q_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Нахождение двух старших коэффициентов по начальным условиям осуществляет выбор решения

$$Q_n(x) = (2x)^n \left(1 - \frac{n(n-1)}{4x^2} + O\left(\frac{n^4}{x^4}\right) \right). \quad (2.48)$$

Применение описанной выше процедуры приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 5. *Для многочленов Эрмита (определяемых (2.47)–(2.48)) справедливы следующие асимптотические разложения при фиксированном $\varepsilon > 0$ и $\text{Im}(x) \geq 0$:*

а) *при $2n < |x|^2 - |x|^{\varepsilon+2/3} + \text{Im}(x)$*

$$Q_{n-1}(x) = \frac{\exp(x^2/2 + o(x^{-2}))}{\sqrt{2}} \Pi_1; \quad (2.49)$$

б) *при $2n = x^2 + zx^{2/3}$, $|z| = O(|x|^{4/3-\varepsilon})$*

$$Q_{n-1}(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt[6]{2}} x^{n+2/3} \exp(\tilde{E}(z)) \text{Ai}(h(z)); \quad (2.50)$$

в) *при $2n > |x|^2 + |x|^{\varepsilon+2/3} - \text{Im}(x)$*

$$Q_{n-1}(x) = \frac{\exp(x^2/2 + o(x^{-2}))}{\sqrt{2}} (\Pi_1 + i\Pi_2). \quad (2.51)$$

Здесь

$$\Pi_1 := \frac{(x + \sqrt{x^2 - 2n})^{n-1/2}}{\sqrt[4]{x^2 - 2n}} \exp\left(-\frac{n + x\sqrt{x^2 - 2n}}{2}\right) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(x, n)\right), \quad (2.52)$$

где первый член ряда в (2.52) равен

$$\Phi_1(x, n) := \frac{-x(x^2 + 3n) + (x^2 - 8n)\sqrt{x^2 - 2n}}{24n(\sqrt[3]{x^2 - 2n})},$$

а общий член ряда при $|x^2 - 2n| < \frac{1}{2}|x|^2$ оценивается как

$$\Phi_k(x, n) = \mathcal{O}\left(\left(\frac{|x|}{|x^2 - 2n|^{3/2}}\right)^k\right).$$

Выражение для Π_2 получается из (2.52) сменой знака перед $\sqrt{x^2 - 2n}$, при этом в выражениях Π_1 и Π_2 $\arg(\sqrt[4]{x^2 - 2n}) \in [0, \pi/4]$ для $\text{Re}(x) \geq 0$. Затем,

$$\tilde{E}(z) = \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{8x^{2/3}} - \frac{17z}{60x^{4/3}} - \frac{5z^3 + 46}{120x^2} + \dots + O\left(\frac{|z|_+^{(k+3)/2}}{|x|^{2k/3}}\right), \quad (2.53)$$

$$h(z) := -\sqrt[3]{2}\left(\frac{z}{2} - \frac{1}{2x^{2/3}} - \frac{z^2}{15x^{4/3}} + \frac{2z}{15x^2} + \dots\right) + O\left(\frac{|z|_+^{(k+3)/2}}{|x|^{2k/3}}\right). \quad (2.54)$$

Формальные ряды в (2.52)–(2.54) мажорируются асимптотическими рядами при $n, x \rightarrow \infty$, т.е. нужно использовать конечные суммы с добавкой “о большое” от оценки первого отброшенного члена.

Сравним полученный результат с известными асимптотиками многочленов Эрмита. Отметим, что области (1.2) – области применения классических формул Планшереля–Ротаха (см. [2], [3]) – не перекрываются, в результате из них не вытекает глобальное асимптотическое описание многочленов Эрмита. В свою очередь, области применения асимптотических формул теоремы 5 “сшиваются”, что обеспечивается более широкими (по сравнению с (1.2)) областями применения формул а), б) и с). Другим известным результатом, дающим глобальное асимптотическое описание многочленов Эрмита, являются асимптотические формулы, полученные в [8] (см. также [1]) методом матричной задачи Римана–Гильберта. Отметим, что области а) и с) в асимптотиках [8] такие же, как в классических асимптотиках Планшереля–Ротаха в (1.2), а “сшивка” асимптотик в [8] происходит за счет расширения по сравнению с (1.2) области б) – области применения асимптотик, задаваемых функцией Эйри. Таким образом, теорема 5 и соответствующий результат из [8] дают глобальное асимптотическое описание многочленов Эрмита, но делают они это в разных масштабах.

2.6.2. Асимптотика многочленов Мейкснера (результат). Система полиномов Мейкснера задается двумя внешними параметрами σ и β с ограничениями $\beta > 0$, $0 < \sigma < 1$. Рекуррентные соотношения в матричной форме имеют вид

$$\begin{pmatrix} Q_{n+1} \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)\tilde{x} - \left(\frac{1}{\sigma} + 1\right)n - \beta & -\frac{n(n+\beta-1)}{\sigma} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_n \\ Q_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1.$$

Переобозначим параметры и сделаем замену переменной:

$$c := \frac{1}{\sigma}, \quad b := \beta - 1, \quad x := \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)\tilde{x} - \beta. \quad (2.55)$$

В новых обозначениях имеем

$$\begin{pmatrix} Q_{n+1} \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - (c+1)n & -cn(n+b) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_n \\ Q_{n-1} \end{pmatrix}, \quad Q_n(x) = x^n + \dots \quad (2.56)$$

Также введем обозначения

$$s := \sqrt{c}, \quad D := (x - (c+1)n)^2 - 4cn(n+b).$$

Ищем асимптотику полиномиального решения (2.56) со старшим коэффициентом единица. Применение описанной выше процедуры приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 6. Для многочленов Мейкснера (определяемых (2.56), (2.55)), справедливы следующие асимптотические разложения при фиксированном $\varepsilon > 0$ и $0 \leq \operatorname{Im}(x) = O(|x|^{1/3+\varepsilon})$:

а) при $n < \frac{|x|}{(s+1)^2} - |x|^{1/3+\varepsilon}$

$$Q_{n-1}(x) = K_0(x)\Pi_1(x, n); \quad (2.57)$$

b) при $n = \frac{x}{(s+1)^2} + zx^{1/3}$, $|z| = O(|x|^{2/3-\varepsilon})$

$$Q_{n-1}(x) = \frac{K_0(x)}{K_1(x)} \exp(E_1(z)) \operatorname{Ai}(h_1(z)); \quad (2.58)$$

c) при $\frac{|x|}{(s+1)^2} + |x|^{1/3+\varepsilon} < n < \frac{|x|}{(s-1)^2} - |x|^{1/3+\varepsilon}$

$$Q_{n-1}(x) = K_0(x)(\Pi_1(x, n) + i\Pi_2(x, n)); \quad (2.59)$$

d) при $n = \frac{x}{(s-1)^2} + zx^{1/3}$, $|z| = O(|x|^{2/3-\varepsilon})$

$$Q_{n-1}(x) = K_0(x) \exp(E_2(z)) \left(\frac{\operatorname{Ai}(h_2(z)) - i \operatorname{Bi}(h_2(z))}{2\bar{K}_2(x)} + \frac{\operatorname{Ai}(h_2(z)) + i \operatorname{Bi}(h_2(z))}{2K_2(x)} \right); \quad (2.60)$$

e) при $n > \frac{|x|}{(s-1)^2} + |x|^{1/3+\varepsilon}$

$$Q_{n-1}(x) = K_0(x) \left(\left(1 - \frac{\bar{K}_2(x)}{K_2(x)} \right) \Pi_1(x, n) + i\Pi_2(x, n) \right). \quad (2.61)$$

Здесь

$$\Pi_m(x, n) = \Psi_m(x, n)(1 + \Upsilon_m(x, n)), \quad m = 1, 2, \quad (2.62)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & \left(\frac{x - (c+1)n + \sqrt{D}}{2} \right)^{n-1/2} \left[\frac{2c(x+b)}{c-1} - x - (c-1)n - \sqrt{D} \right]^{\frac{2x+(b+1)(c+1)}{2(c-1)}} \\ & \times \frac{[2bc(n+b) + (x - (c+1)n + \sqrt{D})(x + (c+1)b)]^{b/2}}{\exp(n) \sqrt[4]{D}}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

выражение для Ψ_2 получается из (2.63) сменой знака перед $\sqrt{D}$, при этом в выражениях для Ψ_1 и Ψ_2 ветви многозначных функций выбираются так, что для вещественных $x \gg n \gg 1$ все степени и корни арифметические. Оценки для $\Upsilon_{1,2}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Upsilon_1(x, n) &= O \left(\max \left(\frac{|x|^2}{n^3}, \frac{|x|}{|n - n_1(x)|^2}, \frac{|x|}{|n - n_2(x)|^2} \right) \right), \\ \Upsilon_2(x, n) &= O \left(\max \left(\frac{1}{|x|}, \frac{|x|}{|n - n_1(x)|^2}, \frac{|x|}{|n - n_2(x)|^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Здесь $n_1(x)$, $n_2(x)$ обозначают корни многочлена D и имеют асимптотику $x/(\sqrt{c} \pm 1)^2 + O(1)$. Затем,

$$\begin{aligned} E_1(z) &= \frac{(s+1)^2 z^2}{2x^{1/3}} + \frac{\left(\frac{b(s+1)^2}{2} + \frac{(s+1)^2(s^2-10s+1)}{15s} \right) z}{x^{2/3}} + \dots + O \left(\frac{|z|_+^{(k+3)/2}}{|x|^{k/3}} \right), \\ h_1(z) &= -\sqrt[3]{\frac{(s+1)^4}{s}} \left(z + \frac{sb - (s^2 + s + 1)}{(s+1)^2 x^{1/3}} + \dots \right) + O \left(\frac{|z|_+^{(k+2)/2}}{|x|^{k/3}} \right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

и

$$\begin{aligned}
 E_2(z) &= \frac{(s-1)^2 z^2}{2x^{1/3}} + \frac{\left(\frac{b(s-1)^2}{2} - \frac{(s-1)^2(s^2+10s+1)}{15s}\right)z}{x^{2/3}} + \dots + O\left(\frac{|z|_+^{(k+3)/2}}{|x|^{k/3}}\right), \\
 h_2(z) &= \sqrt[3]{\frac{(s-1)^4}{s}} \left(z - \frac{sb + (s^2 - s + 1)}{(s-1)^2 x^{1/3}} + \dots\right) + O\left(\frac{|z|_+^{(k+2)/2}}{|x|^{k/3}}\right).
 \end{aligned}
 \tag{2.65}$$

Ряды в (2.62), (2.64), (2.65) мажорируются асимптотическими рядами при $n, x \rightarrow \infty$. Наконец, функции согласования асимптотик в различных областях имеют вид

$$\begin{aligned}
 K_1(x) &:= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \left[\frac{c-1}{2sx}\right]^{\frac{2x+(b+1)(c+1)}{2(c-1)}} \left[\frac{(s+1)^2}{sx^2}\right]^{\frac{b-1}{2}} e^{\frac{x}{(s+1)^2} - \frac{bc}{c-1}} \sqrt[3]{\frac{sx}{s+1}} e^{O(x^{-1})}, \\
 K_2(x) &:= i^{b-1 - \frac{2x+(b+1)(c+1)}{c-1}} K(x), \quad \bar{K}_2(x) := (-i)^{b-1 - \frac{2x+(b+1)(c+1)}{c-1}} K(x), \\
 K(x) &:= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \left[\frac{c-1}{2sx}\right]^{\frac{2x+(b+1)(c+1)}{2(c-1)}} \left[\frac{(s-1)^2}{sx^2}\right]^{\frac{b-1}{2}} e^{\frac{x}{(s-1)^2} - \frac{bc}{c-1}} \sqrt[3]{\frac{sx}{s-1}} e^{O(x^{-1})};
 \end{aligned}
 \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}
 \ln K_0(x) &:= -\frac{2x + (b+1)(c+1)}{2(c-1)} \ln\left(\frac{2x}{c-1}\right) - \frac{b}{2} \ln(2x^2) - \frac{bc}{c-1} \\
 &\quad + \frac{b^2 - b(b+1)c(c+1)}{2(c-1)x} \\
 &\quad + \left[\frac{6b^2 - c^2 + 1}{24} + \frac{c(bc + c + 2)(2bc + c - 1)}{12(c-1)}\right] \frac{b}{x^2} + O(x^{-3}).
 \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 6 демонстрирует, как при фиксированном x меняются представления многочленов Мейкснера с ростом n от (2.57) к (2.61), причем соседние представления согласованы в переходных зонах. Отметим, что при увеличении $\text{Im}(x) > 0$ в формуле (2.59) член Π_1 будет доминировать над Π_2 , в результате чего формула (2.59) превратится в формулу (2.57). То же самое произойдет с формулой (2.61), в которой также K_2 будет доминировать над $\bar{K}_2$. Отметим специальный вид формулы (2.61) при $\text{Im}(x) = 0$. В этом случае

$$\frac{\bar{K}_2}{K_2} = \exp\left\{-i\pi\left(b - 1 - \frac{2x + (b+1)(c+1)}{c-1}\right)\right\},$$

поэтому при

$$x = k(c-1) - b - c, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \gg 0,
 \tag{2.67}$$

коэффициент при доминирующем члене Π_1 зануляется, и многочлены (для любых n) становятся малыми в окрестностях этих точек, что отражает тот факт, что в этой зоне нули ортогональных многочленов притягиваются к точкам x (2.67), в которых сосредоточены массы меры ортогональности. (При обращении преобразования (2.55) точки (2.67) переходят в натуральные.)

§ 3. Обоснование результатов

3.1. Доказательство теоремы 1 и предложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Начнем с доказательства пункта А – сходимости итерационного процесса (2.9). Во-первых, проверим, что если у $F^{(s)} = \{F_n^{(s)}\}_{n_1}^\infty$ норма конечна, то норма $F^{(s+1)}$ тоже конечна:

$$\begin{aligned} \|F^{(s+1)}\| &\leq \sup_{n \geq n_1} \left(\|\vec{e}_1\| \right. \\ &\quad \left. + \prod_{j=n_0}^{n-1} |d_1(j)|^{-1} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\prod_{j=n}^{k-1} \|D_j^{-1}\| \right) \|D_k^{-1} V_{k+1}^{-1} A_k V_k - E\| \|V_k^{-1} F_k^{(s)}\| \right) \\ &\leq \sup_{n \geq n_1} \left(1 + \left(\sum_{k=n}^{\infty} \|D_k^{-1} V_{k+1}^{-1} A_k V_k - E\| \right) \|F^{(s)}\| \right) < \infty. \end{aligned}$$

Во-вторых, можно выбрать n_1 так, чтобы остаток ряда (2.7) был меньше $1/2$. Тогда получаем

$$\frac{\|F^{(s+1)} - F^{(s)}\|}{\|F^{(s)} - F^{(s-1)}\|} \leq \sum_{k=n_1}^{\infty} \|D_k^{-1} V_{k+1}^{-1} A_k V_k - E\| \leq \frac{1}{2},$$

что гарантирует сходимость метода итераций для такого n_1 .

Перейдем к пункту В – свойствам неподвижной точки отображения (2.9).

1) Анализ формулы (2.9) показывает, что $F_n^{(s+1)}$ зависит только от тех $F_k^{(s)}$, для которых $k \geq n$.

2) Из (2.9) следует

$$\begin{aligned} V_{n+1}^{-1} F_{n+1}^{(s+1)} - D_n V_n^{-1} F_n^{(s+1)} &= \left(\prod_{j=n_0}^n d_1(j) \vec{e}_1 - D_n \prod_{j=n_0}^{n-1} d_1(j) \vec{e}_1 \right) \\ &\quad - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\prod_{j=n+1}^k D_j^{-1} \right] (V_{k+1}^{-1} A_k - D_k V_k^{-1}) F_k^{(s)} \\ &\quad + \sum_{k=n}^{\infty} \left[\prod_{j=n+1}^k D_j^{-1} \right] (V_{k+1}^{-1} A_k - D_k V_k^{-1}) F_k^{(s)} \\ &= 0 + (V_{n+1}^{-1} A_n - D_n V_n^{-1}) F_n^{(s)}. \end{aligned}$$

Если $F^{(s)} = F^{(s+1)} = F$, то

$$V_{n+1}^{-1} F_{n+1} = V_{n+1}^{-1} A_n F_n,$$

что равносильно (2.1).

3) Это свойство очевидным образом следует из невырожденности A_n .

4) Пусть $\{F_n\}_m^\infty$ удовлетворяет (2.1) и имеет конечную норму (2.10). Составим последовательность $\{G_n\}_m^\infty$:

$$G_n := V_n^{-1} F_n + \sum_{k=n}^{\infty} \left[\prod_{j=n}^k D_j^{-1} \right] (V_{k+1}^{-1} A_k - D_k V_k^{-1}) F_k.$$

Из (2.8) следует

$$\|\{V_n G_n\}_m^\infty\| < \infty. \quad (3.1)$$

Из построения G_n проверяется, что

$$G_{n+1} = D_n G_n, \quad (3.2)$$

если $F_{k+1} = A_k F_k$. Теперь, если произведение в условии пункта В, 4) расходится, то среди решений (3.2) только решения, пропорциональные $\vec{e}_1$, дают конечную норму в (3.1). С учетом того, что выбором $\{G_n\}$ последовательность $\{F_n\}$ определяется однозначно, получаем справедливость пункта В, 4).

Теорема 1 доказана.

Пункт А теоремы 1 существенно использует минимальность $|d_1|$ среди модулей всех диагональных элементов. Таким образом, эта теорема приспособлена для случая сохранения (нестрогого) порядка среди абсолютных величин диагональных элементов $|d_j(n)|$ при $n \in [n_0, +\infty)$. Дополним этот результат модификацией пункта А теоремы 1 для конечного вправо промежутка изменения номеров n последовательности $\{F_n\}$ с фиксацией условия на правой границе. Тогда решение уравнения (2.9) в случае нахождения диагонализующей последовательности V_n может быть построено, если на рассматриваемом диапазоне $n \in [n_0, +\infty)$ порядок элементов $\{j \mid j = 1, \dots, p\}$, расположенных по возрастанию абсолютных величин диагональных элементов $|d_j(n)|$, меняется конечное число раз. В этом случае диапазон $n \in [n_0, +\infty)$ разбиваем на конечное число частей, к последней части применяем пункт А теоремы 1, к остальным – лемму 1 (модификацию пункта А теоремы 1), представленную ниже.

ЛЕММА 1. Пусть последовательность $\{\tilde{F}_n\}_{n_1}^N$ удовлетворяет (2.1) и граничному условию $\tilde{F}_N = V_N \vec{f}$, матрицы D_n диагональные с элементами $d_j(n)$, $|d_1| \leq \dots \leq |d_p|$, и пусть

$$q := \sum_{n=n_1}^{N-1} \|D_n^{-1} V_{n+1}^{-1} A_n V_n - E\| < 1. \quad (3.3)$$

Тогда итерации с помощью соотношения

$$F_n^{(s+1)} = V_n \left(\prod_{j=n}^{N-1} D_n^{-1} \vec{f} - \sum_{k=n}^{N-1} \left[\prod_{j=n}^k D_j^{-1} \right] (V_{k+1}^{-1} A_k - D_k V_k^{-1}) F_k^{(s)} \right) \quad (3.4)$$

на пространстве последовательностей $\{F_n\}_{n_1}^N$ с нормой (2.10) сходятся к $\{\tilde{F}_n\}$ с геометрической скоростью со знаменателем q . При этом если

$$|\langle \vec{f}, \vec{e}_1 \rangle| - \frac{q}{1-q} \|\vec{f}\| := c > 0,$$

то

$$|\langle V_n^{-1} \tilde{F}_n, \vec{e}_1 \rangle| > c \prod_{k=n}^{N-1} |d_1(k)|^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова, как в доказательстве теоремы 1, получаем сходимость из неравенства

$$\frac{\|F^{(s+1)} - F^{(s)}\|}{\|F^{(s)} - F^{(s-1)}\|} \leq \sum_{k=n_1}^{N-1} \|D_k^{-1} V_{k+1}^{-1} A_k V_k - E\| = q.$$

Начнем итерационный процесс с нулевой последовательности. Тогда для $n \in \mathbb{Z} \cap [n_1, N)$ имеем $F_n^{(0)} = 0$, $F_n^{(1)} = V_n (\prod_{j=n}^{N-1} D_n^{-1}) \vec{f}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|F^{(s+1)} - F^{(s)}\| &\leq q^s \|F^{(1)}\| = q^s \|\vec{f}\| \prod_{k=n_0}^{N-1} |d_1(k)|^{-1}, \\ \langle V_n^{-1} F_n^{(1)}, \vec{e}_1 \rangle &= \langle \vec{f}, \vec{e}_1 \rangle \prod_{k=n}^{N-1} d_1^{-1}(k). \end{aligned}$$

Отсюда и из определения нормы (2.10) следует второе утверждение леммы.

Перейдем к доказательству предложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ. Если $\mathcal{D}(n, x) \neq 0$, то все λ_j различны. Построим полиномы $P_j(t)$ с интерполяционными данными $P_j(\lambda_i) = \delta_j^i$ (где δ – символ Кронекера) и рассмотрим матрицы $P_j(A_n(x))$. Коэффициенты полиномов $P_j(t)$ суть полиномы от собственных значений, деленные на дискриминант $\mathcal{D}$. Значит, особенности матричных элементов матриц $P_j(A_n(x))$ есть дискриминантная кривая $\mathcal{D}(n, x) = 0$ и конечное число значений n , в которых обращаются в 0 знаменатели элементов $A_n(x)$ (из вида $A_n(x)$ вытекает, что эти значения не зависят от x). Кроме того, если удалиться от особенностей, то абсолютные величины элементов матриц $P_j(A_n(x))$ оцениваются сверху степенным образом от n, x . Матрица $P_j(A_n(x))$ обладает теми же собственными векторами, что и $A_n(x)$, причем собственному вектору $\vec{b}_j$ соответствует собственное значение 1, а векторам $\vec{b}_i$ для всех $i \neq j, i = 1, \dots, p$, соответствует собственное значение 0. Отсюда следует, что $P_j(A_n(x))$ имеет ранг 1 и след 1 и поэтому представляет собой произведение $\vec{b}_j \vec{b}_j^{(*)}$ столбца на строку. Вектор-строки $(\vec{b}_i^{(*)})_1^p$ образуют двойственный базис к базису $(\vec{b}_i)_1^p$.

3.2. Доказательство теоремы 2. Сформулируем и докажем более общее и более точное утверждение, из которого теорема 2 непосредственно следует.

ТЕОРЕМА 2*. Пусть точка $(n_0, x) \in \Omega$ и величины $R, R_0, \widetilde{M}, \Delta(n_0, x)$ определены в (2.19)–(2.21). Возьмем некоторое $m \in \mathbb{N}$ и положительное d с условием $(m+1)d < R_0$ и по ним построим радиусы $R_l = R_0 - ld$ и круги $K_l := \{n \in \mathbb{C} \mid |n - n_0| \leq R_l\}$ для $l = 1, 2, \dots, m$. Возьмем положительное $r < d$. Обозначим

$$k := \frac{4r}{(2\sqrt{d} + \sqrt{d-r})(\sqrt{d} + \sqrt{d-r})}, \quad M := \sqrt{p} \frac{\widetilde{M}}{\Delta}, \quad y := \frac{Mr}{R_0}.$$

Также обозначим для краткости $\tilde{p} = 2 - 2/p$. Если выполняются условия

$$y \leq \frac{1}{\tilde{p} + 4},$$

$$M \leq \begin{cases} \frac{(1 - 4y)^2}{(\sqrt{2(k+2)y} + \sqrt{k+2(2-k)y})^2} & \text{при } y < \frac{2(k+2)}{k\tilde{p}^2 + 4(k+2)(\tilde{p}+2)}, \\ \frac{\tilde{p}(1 - (\tilde{p}+4)y)}{(\tilde{p}+2)k+4} & \text{при } y > \frac{2(k+2)}{k\tilde{p}^2 + 4(k+2)(\tilde{p}+2)}, \end{cases}$$

то для величин $\|X_n^{(l)}\|$, $\|S^{(l)} - S^{(l-1)}\|$, $\|\{S^{(l)}\}\|$ в кругах K_l для произвольных комплексных t , $|t| \leq r$, справедливы оценки

$$\|\{S^{(l)}\}\| < \tilde{p} \frac{\Delta}{\sqrt{p}} \frac{q^l(1-q)y}{1-q-y+q^l y}, \quad \|X_n^{(l)}\| < \frac{q^l(1-q)y}{1-q-y+q^l y},$$

$$\|S^{(l)} - S^{(l-1)}\| < \frac{2\tilde{M}y}{1-q-2y} \frac{q^{l-1}(1-q)^2(1-q-y-q^{l-1}y)}{(1-q-y+q^{l-1}y)(1-q-y+q^l y)},$$

где

$$q = \begin{cases} kM + (\tilde{p}+2)y & \text{при } (4 + (\tilde{p}+2)k)M + \tilde{p}(\tilde{p}+4)y < \tilde{p}, \\ \frac{1}{2}(1 + kM - \sqrt{(1 - kM - 4y)^2 - 8(k+2)My}) & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Отметим, что из теоремы 2* вытекает утверждение о том, что ряды для $V_n^{(l)}$ и $S^{(l)}$ устанавливаются, причем внедиагональные члены $S^{(l)}$ устанавливаются к 0. Действительно, ряды $V_n^{(l)}$ и $S^{(l)}$ по переменной t , генерируемые процедурой (2.18), не зависят от выбора d и r в теореме 2*. Устремив d к 0, можно сделать m (границу для l) произвольно большим. Фиксируя d и устремляя r к 0, получаем $k = O(r)$, $y = O(r)$. Тогда либо

$$q = kM + (\tilde{p}+2)y = O(r),$$

либо

$$q = \frac{1}{2}(1 + kM - \sqrt{(1 - kM - 4y)^2 - 8(k+2)My})$$

$$= \frac{2Mk + 8My + 4y(1 - 2y)}{1 + kM + \sqrt{(1 - kM - 4y)^2 - 8(k+2)My}} = O(r).$$

В обоих случаях $q = O(r)$, поэтому

$$\|\{S^{(l)}\}\| = O(r^{l+1}), \quad \|S^{(l+1)} - S^{(l)}\| = O(r^{l+1}),$$

$$\|V_n^{(l+1)} - V_n^{(l)}\| = \|V_n^{(l+1)} X_n^{(l)}\| = O(r^{l+1})$$

при $|t| < r$, т.е.

$$\|V_n^{(l+1)} - V_n^{(l)}\| = O(t^{l+1}), \quad \|S^{(l+1)} - S^{(l)}\| = O(t^{l+1}), \quad \|\{S^{(l)}\}\| = O(t^{l+1}).$$

Нам понадобятся несколько вспомогательных лемм.

ЛЕММА 2. Пусть функция $f(z)$ со значениями в банаховом пространстве голоморфна в круге $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ и $\|f(z)\| \leq 1$ в K . Тогда для любых $a, b \in \text{int } K$ верна оценка

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \frac{2\rho}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}, \quad \text{где } \rho = \left| \frac{b - a}{1 - \bar{a}b} \right|. \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем каждый член разности через формулу Коши и сделаем замену переменных $w = (z - a)/(1 - \bar{a}z)$. Получим

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} f(z) \left[\frac{1}{z - b} - \frac{1}{z - a} \right] dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \frac{(b - a)f(z) dw}{(a - b)w + (1 - \bar{a}b)w^2}.$$

В силу определения ρ дробь $\frac{b-a}{1-\bar{a}b}$ равна $\rho e^{i\varphi}$ для некоторого φ . Поскольку $\rho < 1$, то $\rho = \frac{2v}{v^2+1}$ для некоторого $v < 1$. Сделаем замену

$$w = e^{i\varphi} \frac{u + v}{1 + vu}$$

и тождественно преобразуем:

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{\rho e^{i\varphi}}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \frac{f(z) dw}{w(w - \rho e^{i\varphi})} = \frac{v}{\pi i} \oint_{|u|=1} \frac{f(z) du}{u^2 - v^2} \\ &= \frac{v}{\pi i} \oint_{|u|=1} f(z) du \left[\frac{1}{u^2 - v^2} + \frac{v^2}{1 - v^2 u^2} \right]. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое не изменяет значение интеграла, так как подынтегральная функция не имеет особенностей внутри контура. Теперь оцениваем интеграл по норме, пользуясь ограничением на норму $f(z)$:

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\| &\leq \frac{v}{\pi} \oint_{|u|=1} \left| \frac{(1 - v^4)\|f(z)\| du}{(u^2 - v^2)(1 - v^2 u^2)} \right| \leq \frac{v}{\pi} \oint_{|u|=1} \frac{(1 - v^4)u(-i du)}{(u^2 - v^2)(1 - v^2 u^2)} \\ &= 2v \left(\text{Res}_{u=v} + \text{Res}_{u=-v} \right) \left(\frac{(1 - v^4)u}{(u^2 - v^2)(1 - v^2 u^2)} \right) = 2v. \end{aligned}$$

Выразив v через ρ , получим нужный результат. Неравенство неумлучшаемо.

ЛЕММА 3. Пусть A – любая квадратная матрица размера p . Тогда для нормы внедиагональной части матрицы A справедлива оценка

$$\|\{A\}\| \leq \frac{2p-2}{p} \|A\| = \tilde{p} \|A\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть θ обозначает примитивный комплексный корень степени p из 1, $\Theta = \text{diag}(1, \theta, \dots, \theta^{p-1})$ – диагональная матрица с выписанными элементами. Мы можем записать произвольный элемент матрицы $\{A\}$ в специальном виде, позволяющем выразить $\{A\}$ через A с помощью матричных

операций:

$$\begin{aligned}
 \{A\}_{ij} &= A_{ij} - A_{ij}\delta_j^i = A_{ij} - \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} A_{ij} \theta^{k(i-j)} \\
 \Rightarrow \{A\} &= A - \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \Theta^k A \Theta^{-k} = \frac{p-1}{p} A - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \Theta^k A \Theta^{-k} \\
 \Rightarrow \|\{A\}\| &\leq \frac{p-1}{p} \|A\| + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \|\Theta\|^k \|A\| \|\Theta^{-1}\|^k = \frac{2p-2}{p} \|A\|.
 \end{aligned}$$

Оценка достигается для матрицы $\mathbf{2} - pE$, где $\mathbf{2}$ – матрица, заполненная двойками.

ЛЕММА 4. Пусть A – любая квадратная матрица размера p , $z_1, \dots, z_p$ – произвольные комплексные числа с условием $|z_i - z_j| \geq \Delta$ для $i \neq j$. Определим матрицу X по формуле

$$X := (X_{ij}), \quad \text{где} \quad \begin{cases} X_{ii} = 0, \\ X_{ij} = \frac{A_{ij}}{z_i - z_j}, \quad i \neq j. \end{cases}$$

Тогда

$$\|X\| \leq \frac{\sqrt{p}\|A\|}{\Delta}. \quad (3.6)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\{B\} = \{A\}$, то в (3.6) можно $\|A\|$ заменить на $\|B\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Имеем

$$\|X\| \leq \sqrt{\text{Tr}(XX^*)} \leq \frac{\sqrt{\text{Tr}(AA^*)}}{\Delta} \leq \frac{\sqrt{p}\|A\|}{\Delta},$$

что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству теоремы 2*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2*. По предположению

$$\|(V_{\tilde{n}}^{(0)})^{-1} A_n V_n^{(0)}\| < \widetilde{M}$$

при $|n - n_0| \leq 2R_0$, $|\tilde{n} - n_0| \leq 2R_0$. Матрица $(V_{\tilde{n}}^{(0)})^{-1} A_n V_n^{(0)}$ равна $S^{(0)}$ при $\tilde{n} = n + t$ и равна D при $\tilde{n} = n$. Следовательно, по лемме 2 имеем

$$\|S^{(0)}\| < \widetilde{M}, \quad \|S^{(0)} - D\| < \frac{2\rho\widetilde{M}}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}, \quad \rho \leq \frac{2R_0|t|}{4R_0^2 - R_0(R_0 + |t|)}$$

при $|n - n_0| \leq R_0$, $|t| \leq R_0$. Поскольку

$$|t| \leq d < \frac{R_0}{m+1} < (\sqrt{3} - 1)R_0, \quad \text{то} \quad \|S^{(0)} - D\| < \frac{\widetilde{M}|t|}{R_0}.$$

Так как D диагональна, то $\{S^{(0)}\} = \{S^{(0)} - D\}$. Применив леммы 3 и 4, получим

$$\|S^{(0)}\| < \widetilde{M}, \quad \|S^{(0)} - D\| < \frac{\widetilde{M}|t|}{R_0}, \quad \|\{S^{(0)}\}\| < \frac{2\widetilde{M}|t|}{R_0}, \quad \|X_n^{(0)}\| < \frac{\sqrt{p}\widetilde{M}|t|}{R_0\Delta}$$

в круге K_0 .

Тем самым, мы доказали оценки на $\|X_n^{(l)}\|$ и $\|\{S^{(l)}\}\|$ для $l = 0$ (базу индукции). Присоединим к доказываемым формулам следующую формулу, которая для $l = 0$ тривиально выполняется:

$$\begin{aligned} \|S^{(l)} - S^{(0)}\| &\leq \frac{\widetilde{M}(1-q)(1-q-y-q^l y)}{(1-q-2y)(1-q-y+q^l y)} - \widetilde{M} \\ &= \frac{2\widetilde{M}y(1-q^l)(1-q-y)}{(1-q-2y)(1-q-y+q^l y)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

в круге K_l .

Для проведения индуктивного перехода преобразуем итерационные формулы (2.18) к следующему виду, исключив $V_n^{(l)}$ из рассмотрения:

$$\begin{aligned} S^{(0)} &:= (V_{n+t}^{(0)})^{-1} V_n^{(0)} D, \quad [X_n^{(l)}, D] = -\{S^{(l)}\}, \\ S^{(l+1)} &:= (E + X_{n+t}^{(l)}) S^{(l)} (E + X_n^{(l)})^{-1}. \end{aligned}$$

Теперь получим оценки при переходе от индекса l к $l+1$. Проведем сначала тождественные преобразования:

$$\begin{aligned} S^{(l+1)} - S^{(l)} &= (E + X_{n+t}^{(l)}) S^{(l)} (E + X_n^{(l)})^{-1} - S^{(l)} \\ &= (X_{n+t}^{(l)} S^{(l)} - S^{(l)} X_n^{(l)}) (E + X_n^{(l)})^{-1}, \\ \{S^{(l+1)}\} &= \{S^{(l+1)} - S^{(l)} + \{S^{(l)}\}\}, \\ S^{(l+1)} - S^{(l)} + \{S^{(l)}\} &= (X_{n+t}^{(l)} S^{(l)} - S^{(l)} X_n^{(l)} + \{S^{(l)}\} + \{S^{(l)}\} X_n^{(l)}) (E + X_n^{(l)})^{-1} \\ &= ((X_{n+t}^{(l)} - X_n^{(l)}) S^{(l)} + [X_n^{(l)}, S^{(l)} - D] + \{S^{(l)}\} X_n^{(l)}) (E + X_n^{(l)})^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, предполагая, что $\|X_n^{(l)}\| < 1$, получаем

$$\begin{aligned} \|S^{(l+1)} - S^{(l)}\| &< \frac{\|S^{(l)}\|(\|X_{n+t}^{(l)}\| + \|X_n^{(l)}\|)}{1 - \|X_n^{(l)}\|}, \quad \|S^{(l+1)}\| < \|S^{(l)}\| \frac{1 + \|X_{n+t}^{(l)}\|}{1 - \|X_n^{(l)}\|}, \\ \|\{S^{(l+1)}\}\| &\leq \widetilde{p} \|S^{(l+1)} - S^{(l)} + \{S^{(l)}\}\|, \\ \|X_n^{(l+1)}\| &\leq \frac{\sqrt{p}}{\Delta} \|S^{(l+1)} - S^{(l)} + \{S^{(l)}\}\|, \\ \|S^{(l+1)} - S^{(l)} + \{S^{(l)}\}\| &\leq \frac{\|X_{n+t}^{(l)} - X_n^{(l)}\| \|S^{(l)}\| + 2\|X_n^{(l)}\| \|S^{(l)} - D\| + \|\{S^{(l)}\}\| \|X_n^{(l)}\|}{1 - \|X_n^{(l)}\|}. \end{aligned}$$

Если найдена оценка для $\|X_n^{(l)}\|$ в K_l , то $\|X_n^{(l)}\|$ и $\|X_{n+t}^{(l)}\|$ в K_{l+1} имеют такую же оценку. Для оценки $\|X_{n+t}^{(l)} - X_n^{(l)}\|$ в K_{l+1} применим лемму 2. Имеем

$$\|X_{n+t}^{(l)} - X_n^{(l)}\| \leq \frac{q^l(1-q)y}{1-q-y+q^l y} \frac{2\rho}{1+\sqrt{1-\rho^2}}, \quad \rho \leq \frac{R_l|t|}{R_l^2 - R_{l+1}(R_{l+1} + |t|)},$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \frac{2\rho}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}} &\leq \frac{2R_l r}{R_l^2 - R_{l+1}(R_{l+1} + r) + \sqrt{d(R_l + R_{l+1} + r)(d - r)(R_l + R_{l+1})}} \\ &\leq \frac{2R_l r}{d(R_l + R_{l+1}) - R_{l+1}r + (R_l + R_{l+1})\sqrt{d(d - r)}} \\ &= \frac{2R_l r}{(\sqrt{d} + \sqrt{d - r})(R_l\sqrt{d} + R_{l+1}\sqrt{d - r})}. \end{aligned}$$

Поскольку $R_l - R_{l+1} = d < R_m$, то при $l < m$ (т.е. пока нужно делать индуктивный переход) $R_l < 2R_{l+1}$, поэтому последняя рассмотренная дробь не превосходит величины k . Поэтому

$$\|X_{n+t}^{(l)} - X_n^{(l)}\| \leq k \frac{q^l(1 - q)y}{1 - q - y + q^l y} \quad \text{в круге } K_{l+1}.$$

Используя неравенство треугольника, из (3.7) получаем

$$\begin{aligned} \|S^{(l)}\| &\leq \|S^{(l)} - S^{(0)}\| + \|S^{(0)}\| < \frac{\widetilde{M}(1 - q)(1 - q - y - q^l y)}{(1 - q - 2y)(1 - q - y + q^l y)}, \\ \|S^{(l)} - D\| &\leq \|S^{(l)} - S^{(0)}\| + \|S^{(0)} - D\| \\ &< \frac{\Delta}{\sqrt{p}} \left(\frac{2My(1 - q^l)(1 - q - y)}{(1 - q - 2y)(1 - q - y + q^l y)} + y \right) \end{aligned}$$

в круге K_l и аналогично

$$\begin{aligned} \|S^{(l+1)} - S^{(0)}\| &\leq \|S^{(l)} - S^{(0)}\| + \|S^{(l+1)} - S^{(l)}\| \\ &< \frac{2\widetilde{M}y(1 - q^l)(1 - q - y)}{(1 - q - 2y)(1 - q - y + q^l y)} \\ &\quad + \frac{\widetilde{M}(1 - q)(1 - q - y - q^l y)}{(1 - q - 2y)(1 - q - y + q^l y)} \frac{2q^l(1 - q)y}{1 - q - y + q^{l+1}y} \\ &< \frac{2\widetilde{M}y(1 - q - y)}{(1 - q - 2y)(1 - q - y + q^l y)} \left(\frac{q^l(1 - q)^2}{1 - q - y + q^{l+1}y} + (1 - q^l) \right) \\ &= \frac{2\widetilde{M}y(1 - q^{l+1})(1 - q - y)}{(1 - q - 2y)(1 - q - y + q^{l+1}y)} \end{aligned}$$

в круге K_{l+1} . Тем самым, нами сделан индуктивный переход для $\|S^{(l)} - S^{(l-1)}\|$ и $\|S^{(l)} - S^{(0)}\|$. Переход для $\|X_n^{(l)}\|$ и $\|\{S^{(l)}\}\|$ делается оценкой $\|S^{(l+1)} - S^{(l)} + \{S^{(l)}\}\|$, для которой все необходимое уже получено:

$$\|S^{(l+1)} - S^{(l)} + \{S^{(l)}\}\| \leq \frac{q^l(1 - q)y}{1 - q - y + q^{l+1}y} (k\|S^{(l)}\| + 2\|S^{(l)} - D\| + \|\{S^{(l)}\}\|)$$

в круге K_{l+1} .

Осталось убедиться, что

$$k\|S^{(l)}\| + 2\|S^{(l)} - D\| + \|\{S^{(l)}\}\| \leq \frac{\Delta}{\sqrt{p}} q.$$

Подставив оценки и учтя соотношение между M и $\widetilde{M}$, в качестве достаточного условия получим следующее неравенство (плюс условие, что все знаменатели положительны):

$$k \frac{M(1-q)(1-q-y-q^l y)}{(1-q-2y)(1-q-y+q^l y)} + 2 \left(\frac{2My(1-q^l)(1-q-y)}{(1-q-2y)(1-q-y+q^l y)} + y \right) + \widetilde{p} \frac{q^l(1-q)y}{1-q-y+q^l y} \leq q. \quad (3.8)$$

Рассмотрим неравенство

$$k \frac{M(1-q)(1-q-y-hy)}{(1-q-2y)(1-q-y+hy)} + 2 \left(\frac{2My(1-h)(1-q-y)}{(1-q-2y)(1-q-y+hy)} + y \right) + \widetilde{p} \frac{h(1-q)y}{1-q-y+hy} \leq q. \quad (3.9)$$

После избавления от знаменателей получится соотношение, куда h входит линейным образом. Поскольку $1-q-2y > 0$, то $q^l \in [0, 1]$, поэтому если неравенство (3.9) верно для $h = 0$ и $h = 1$, то оно верно для $h = q^l$, что совпадает с (3.8). Значит, при этих условиях (3.8) верно для всех $l \geq 0$.

Таким образом, для завершения индуктивного перехода достаточно проверить, что условия на M , y и выбор q всегда обеспечивают выполнение системы неравенств

$$1-q-2y > 0, \quad k \frac{M(1-q)}{1-q-2y} + \frac{4My}{1-q-2y} + 2y \leq q, \quad kM + 2y + \left(2 - \frac{2}{p}\right)y \leq q.$$

Проверка завершает доказательство теоремы 2*.

3.3. Доказательство теоремы 3. Сформулируем и докажем более общее и более точное утверждение, из которого теорема 3 непосредственно следует.

ТЕОРЕМА 3*. Определим для точки $(n_0, x) \in \Omega$ величины $R, \widetilde{M}, \Delta$ по формулам (2.19)–(2.21), выбрав $R_0 = R/3$. Если Ω_1 – подобласть Ω , уходящая на бесконечность, в которой для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$\frac{\widetilde{M}}{R\Delta} = o(|x|^{-\varepsilon}),$$

то формальная сумма

$$V_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x, n), \quad (3.10)$$

полученная подстановкой $t = 1$ из степенного ряда (2.16), генерируемого процедурой (2.18), обладает следующими асимптотическими свойствами в области Ω_1 . Обозначим через $V_n^{[m]}$ m -ю частичную сумму (2.23) ряда (3.10). Тогда в области Ω_1

$$\|\varphi_j(x, n)\| < \frac{1-q}{1-q-y} |x|^{-j\varepsilon} \|V_n^{(0)}\|, \\ \|(V_{n+1}^{[m]})^{-1} A_n V_n^{[m]} - S^{(m)}\| < \widetilde{M} \frac{1-q}{1-q-2y} \frac{(1-q)(1-q^2-y^2)}{(1+q)(1-q-y)^2 |x|^{m\varepsilon} \sqrt{|x|^{2\varepsilon} - 1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений $R, \widetilde{M}, \Delta$ следует, что

$$\widetilde{M} \geq \|D\| \geq \frac{\Delta}{2},$$

поэтому в условиях теоремы 3 имеем $R^{-1} = o(|x|^{-\varepsilon})$. Следовательно, выбрав $r = |x|^\varepsilon$, получим $R/r \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$ в Ω_1 . Значит, для достаточно больших $|x|$ для любого фиксированного m $R/r > 3(m+1)$, что позволяет выбрать d . При этом $y = o(1)$, $M = o(1)$, поэтому для достаточно больших $|x|$ в области Ω_1 возможно применение теоремы 2 с $r = |x|^\varepsilon$.

Из (2.18) имеем

$$V_n^{(m)} = V_n^{(0)}(E + X_n^{(0)})^{-1}(E + X_n^{(1)})^{-1} \dots (E + X_n^{(m)})^{-1}$$

при $|t| < r$. Коэффициент при t^m в разложении $V_n^{(m)}$ установившийся, т.е. он равен $\varphi_m(x, n)$. Оценивая его по формуле Коши и используя результаты теоремы 2*, получим оценку

$$\|\varphi_m(x, n)\| < \|V_n^{(0)}\| |x|^{-m\varepsilon} \prod_{l=0}^m \left(1 - \frac{q^l(1-q)y}{1-q-y+q^ly}\right)^{-1} < \frac{1-q}{1-q-y} |x|^{-m\varepsilon} \|V_n^{(0)}\|.$$

Обозначим $\pi_m(t) = (E + X_n^{(0)})^{-1}(E + X_n^{(1)})^{-1} \dots (E + X_n^{(m)})^{-1}$. Тогда при $t = 1$

$$\begin{aligned} V_n^{(m)} - V_n^{[m]} &= V_n^{(0)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=r} \pi_m(t) dt \left(\frac{1}{t-1} - \sum_{l=0}^m \frac{1}{t^{l+1}} \right) \\ &= V_n^{(m)}(E + X_n^{(m)}) \dots (E + X_n^{(0)}) \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=|x|^\varepsilon} \frac{\pi_m(t) dt}{(t-1)t^{m+1}} =: V_n^{(m)} H_n. \end{aligned}$$

Оценим норму H_n :

$$\|H_n\| < \prod_{l=0}^m \frac{1 + \|X_n^{(l)}\|}{1 - \|X_n^{(l)}\|} \cdot \frac{1}{2\pi} \oint_{|t|=|x|^\varepsilon} \frac{|dt|}{|t-1||t|^{m+1}} < \frac{\prod_{l=0}^m \frac{1 + \|X_n^{(l)}\|}{1 - \|X_n^{(l)}\|}}{|x|^{m\varepsilon} \sqrt{|x|^{2\varepsilon} - 1}}.$$

Оценка на H_n верна для n , лежащих в круге радиуса $R_m > 1$, поэтому та же оценка годится для H_{n+1} . Отсюда

$$\begin{aligned} \|(V_{n+1}^{[m]})^{-1} A_n V_n^{[m]} - S^{(m)}\| &= \|(E + H_{n+1})^{-1} S^{(m)}(E + H_n) - S^{(m)}\| \\ &< \frac{\|S^{(m)}\|(\|H_{n+1}\| + \|H_n\|)}{1 - \|H_{n+1}\|} \\ &< \widetilde{M} \frac{1-q}{1-q-2y} \frac{(1-q)(1-q^2-y^2)}{(1+q)(1-q-y)^2 |x|^{m\varepsilon} \sqrt{|x|^{2\varepsilon} - 1}}. \end{aligned}$$

Теорема 3* доказана.

3.4. Доказательство теоремы 4. Доказательство теоремы 4 опирается на следующую лемму, применяемую к случаю $K = 0$, $\lambda = 1$.

ЛЕММА 5. Пусть матричная функция $F(x, \lambda)$ задается условиями

$$\frac{d}{dx}F(x, \lambda) = (K(x) + \lambda L(x))F(x, \lambda), \quad F(0, \lambda) = E, \quad M(x) := F(x, 0). \quad (3.11)$$

Тогда $F(x, \lambda)$ представляется в виде степенного ряда с бесконечным радиусом сходимости

$$F(x, \lambda) = M(x) \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x) \lambda^k,$$

где

$$F_0 = E, \quad F_{k+1}(x) = \int_0^x M^{-1}(t) L(t) M(t) F_k(t) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть y – любое число,

$$C = \sup \|M^{-1}(x) L(x) M(x)\|$$

на отрезке $\{x = \theta y \mid \theta \in [0, 1]\}$. Тогда по индукции

$$\|F_i(x)\| \leq C^i |x|^i (i!)^{-1}. \quad (3.12)$$

Следовательно, ряд абсолютно сходится при всех x , λ (если K , L определены не везде, то годится любая звездная область по x). Прямая подстановка дает верное равенство, что и требуется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Изучим отображение (2.34) как функциональное отображение $R^{(s)} \rightarrow R^{(s+1)}$. Подставим вместо $R^{(s)}$ функцию $R^{(s)} + \delta R^{(s)}$ и подсчитаем вариацию $\delta R^{(s+1)}$:

$$\delta R^{(s+1)}(z) = \delta R^{(s)}(z) - \delta F_1^{(s)}(z, 1) - \sum_{k=1}^{\infty} \delta F_{k+1}^{(s)}(z, 1) \tilde{d}^k,$$

где $\delta F_1^{(s)}(z, T) = \int_0^T \delta R^{(s)}(z + t\tilde{d}) dt$ и

$$\begin{aligned} \delta F_{k+1}^{(s)}(z, T) &= \int_0^T (R^{(s)}(z + t\tilde{d}) + \delta R^{(s)}(z + t\tilde{d})) \delta F_k^{(s)}(z, t) dt \\ &\quad + \int_0^T \delta R^{(s)}(z + t\tilde{d}) F_k^{(s)}(z, t) dt. \end{aligned}$$

Если в круге $|z| < \rho_s$ выполнено

$$\|R^{(s)}\| < M, \quad \|R^{(s)} + \delta R^{(s)}\| < M,$$

то в круге $|z| < \rho_s - \tilde{d}$ справедливо

$$\|\delta F_k(z, t)\| < \|\delta R^{(s)}\| \frac{M^{k-1} t^k}{(k-1)!}.$$

Это доказывается индукцией по k и оценкой (3.12) для F_k из леммы 5.

Разность $\delta R^{(s)} - \delta F_1^{(s)}$ оценим в круге $|z| < \theta \rho_s$ при помощи следующих преобразований (так как длина промежутка интегрирования равна единице):

$$\delta R^{(s)}(z) - \delta F_1^{(s)}(z, 1) = \int_0^1 [\delta R^{(s)}(z) - \delta R^{(s)}(z + t\tilde{d})] dt.$$

Теперь применяем лемму 2 к разности в интеграле:

$$\|\delta R^{(s)} - \delta F_1^{(s)}\| < \|\delta R^{(s)}\| \int_0^1 t \tilde{d} \frac{(1 + o(1))}{1 - \theta^2} \rho_s^{-1} dt = O(\tilde{d} \|\delta R^{(s)}\|).$$

Окончательно получаем

$$\|\delta R^{(s+1)}\| < \|\delta R^{(s)}\| (e^{M\tilde{d}} - 1 + O(\tilde{d}))$$

в круге $|z| < \theta \rho_s$. Приняв

$$\rho_s := \theta^s \rho, \quad M := 2C|x|^{-\varepsilon} \tilde{d}^{-1}, \quad \delta R^{(s)} := R^{(s+1)} - R^{(s)},$$

получаем следующее утверждение: если в круге $|z| < \theta^s \rho$ обе величины $\|R^{(s+1)}\|$ и $\|R^{(s)}\|$ не превышают $(2C|x|^{-\varepsilon} \tilde{d}^{-1})$, то в круге $|z| < \theta^{(s+1)} \rho$ справедливо

$$\|R^{(s+2)} - R^{(s+1)}\| < \|R^{(s+1)} - R^{(s)}\| \cdot O(2C|x|^{-\varepsilon}).$$

Тогда для $s = 0$ неравенства верны по условию теоремы: $R^{(0)} = 0$, $R^{(1)} = L$. Далее все неравенства будут выполнены по индукции для любого s , если $|x|$ достаточно большое (свое для каждого s). Переобозначив θ^s через θ , получим утверждение теоремы.

Для проверки следствия 1 заметим, что формулы для $R^{(s)}$ не зависят от радиусов кругов, в которых мы их рассматриваем. Поэтому после разложения

$$R^{(s)}(z + t\tilde{d}) = R^{(s)}(z) + t\tilde{d}(R^{(s)}(z))' + \frac{\tilde{d}^2 t^2 (R^{(s)}(z))''}{2} + \dots$$

и аналогичного разложения для всех $F_k^{(s)}$ получаем для каждого s разложение $R^{(s)}$ в ряд по $\tilde{d}$ с коэффициентами, зависящими только от z и определяемыми формулой для $L(z)$ (2.31). Используя в теореме 4 радиус ρ , не зависящий от x , получим

$$|R^{(s+1)} - R^{(s+1)}| = O(\tilde{d}^s),$$

поэтому первые s членов разложения у $R^{(s+1)}$ такие же, как и у $R^{(s)}$.

§ 4. Примеры (получение асимптотик)

4.1. Получение асимптотики многочленов Эрмита. Получим асимптотические разложения теоремы 5. На первом этапе находим корни

$$\lambda_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 2n}$$

характеристического многочлена матрицы перехода

$$A_n = \begin{pmatrix} 2x & -2n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и области хорошей отделимости собственных значений

$$\Xi = \left\{ n < \frac{(1-\varepsilon)|x|^2}{2} \right\} \cup \left\{ n > \frac{(1+\varepsilon)|x|^2}{2} \right\}.$$

В этих областях (следуя п. 2.4.6) находится приближение для V_n .

Начальное приближение есть

$$V_n^{(0)} = \begin{pmatrix} x + \sqrt{x^2 - 2n} & x - \sqrt{x^2 - 2n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итерационное уточнение (2.18) дает для V_n разложение в следующие формальные ряды:

$$\begin{pmatrix} x + \sqrt{x^2 - 2n} - \frac{nt}{2(\sqrt{x^2 - 2n})^3} + \frac{n(5x - \sqrt{x^2 - 2n})t^2}{8(\sqrt{x^2 - 2n})^6} + \dots \\ 1 - \frac{x + \sqrt{x^2 - 2n}}{4(\sqrt{x^2 - 2n})^3}t + \frac{3x^2 - n + 3x\sqrt{x^2 - 2n}}{8(\sqrt{x^2 - 2n})^6}t^2 + \dots \\ x - \sqrt{x^2 - 2n} + \frac{nt}{2(\sqrt{x^2 - 2n})^3} + \frac{n(5x + \sqrt{x^2 - 2n})t^2}{8(\sqrt{x^2 - 2n})^6} + \dots \\ 1 + \frac{x - \sqrt{x^2 - 2n}}{4(\sqrt{x^2 - 2n})^3}t + \frac{3x^2 - n - 3x\sqrt{x^2 - 2n}}{8(\sqrt{x^2 - 2n})^6}t^2 + \dots \end{pmatrix}.$$

Одновременно получаются диагональные элементы матрицы S (2.18), которая при $t = 1$ переходит в D_n (2.3):

$$\begin{aligned} d_1(n) &= x + \sqrt{x^2 - 2n} + \frac{x + \sqrt{x^2 - 2n}}{2(\sqrt{x^2 - 2n})^2}t + \frac{3x^2 - 5n + 3x\sqrt{x^2 - 2n}}{4(\sqrt{x^2 - 2n})^5}t^2 + \dots, \\ d_2(n) &= x - \sqrt{x^2 - 2n} + \frac{x - \sqrt{x^2 - 2n}}{2(\sqrt{x^2 - 2n})^2}t - \frac{3x^2 - 5n - 3x\sqrt{x^2 - 2n}}{4(\sqrt{x^2 - 2n})^5}t^2 + \dots. \end{aligned}$$

Перенормируем столбцы V_n так, чтобы элементы второй строки стали равны 1 (см. конец п. 2.3). В результате $d_{1,2}(n)$ изменятся, а V_n станет удобно записываться через них:

$$V_n = \begin{pmatrix} d_1(n) & d_2(n) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} d_1(n) &= x + \sqrt{x^2 - 2n} + \frac{x + \sqrt{x^2 - 2n}}{2(\sqrt{x^2 - 2n})^2}t - \frac{2x^2 + n + 2x\sqrt{x^2 - 2n}}{4(\sqrt{x^2 - 2n})^5}t^2 + \dots, \\ d_2(n) &= x - \sqrt{x^2 - 2n} + \frac{x - \sqrt{x^2 - 2n}}{2(\sqrt{x^2 - 2n})^2}t + \frac{2x^2 + n - 2x\sqrt{x^2 - 2n}}{4(\sqrt{x^2 - 2n})^5}t^2 + \dots. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Асимптотика решений получается нахождением асимптотического разложения по t для произведения

$$V_n \begin{pmatrix} \Pi_1(n) & 0 \\ 0 & \Pi_2(n) \end{pmatrix}, \quad \Pi_m := \prod_k^{n/t-1} d_m(tk), \quad m = 1, 2,$$

что дает матрицу из двух столбцов-решений. (Здесь числовые произведения суть аналоги неопределенных интегралов.) Определим также $\vec{\Pi}_m$, $m = 1, 2$, как

$$\vec{\Pi}_m = V_n \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & \Pi_2 \end{pmatrix} \vec{e}_m = \Pi_m V_n \vec{e}_m.$$

В результате получается формальное разложение, из которого подстановкой $t = 1$ получается (2.52):

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{(x + \sqrt{x^2 - 2n})^{n/t-1/2}}{\sqrt[4]{x^2 - 2n}} \exp \left(-\frac{n + x\sqrt{x^2 - 2n}}{2t} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x(x^2 + 3n) + (8n - x^2)\sqrt{x^2 - 2n}}{24n(\sqrt{x^2 - 2n})^3} t + \frac{5x(x - \sqrt{x^2 - 2n})}{16(\sqrt{x^2 - 2n})^6} t^2 + \dots \right), \\ \Pi_2 &= \frac{(x - \sqrt{x^2 - 2n})^{n/t-1/2}}{\sqrt[4]{x^2 - 2n}} \exp \left(-\frac{n - x\sqrt{x^2 - 2n}}{2t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{x(x^2 + 3n) + (x^2 - 8n)\sqrt{x^2 - 2n}}{24n(\sqrt{x^2 - 2n})^3} t + \frac{5x(x - \sqrt{x^2 - 2n})}{16(\sqrt{x^2 - 2n})^6} t^2 + \dots \right). \end{aligned}$$

С помощью теоремы 2 определим, когда можно пользоваться разложениями (4.1), (4.2) для $t = 1$ и (2.52). Имеем

$$R = \frac{1}{2}|x^2 - 2n_0| - \frac{1}{2} \approx \frac{1}{2}|x^2 - 2n_0|.$$

Далее, $\Delta : 2\sqrt{x^2 - 2n} > \Delta$ при $|n - n_0| < R/3$, что дает

$$\Delta = 2\sqrt{\frac{2}{3}R}.$$

Положим $\sqrt{x^2 - 2n} = \theta_1\sqrt{R}$, $\sqrt{x^2 - 2\tilde{n}} = \theta_2\sqrt{R}$, тогда $\frac{2}{3} < |\theta_j|^2 < \frac{10}{3}$, в итоге получаем

$$\begin{aligned} \|(V_n^{(0)})^{-1} A_n V_n^{(0)}\| &< \sqrt{\text{Tr}((V_n^{(0)})^{-1} A_n V_n^{(0)})[(V_n^{(0)})^{-1} A_n V_n^{(0)}]^*]} \\ &= |\theta_2|^{-1} \sqrt{(|x|^2 + |\theta_2|^2 R)(|\theta_1|^2 + |\theta_2|^2)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\widetilde{M} < \sqrt{6|x|^2 + 7R},$$

поэтому разложениями (4.2), (2.52) можно пользоваться, если

$$|2n - x^2| > |x|^{2/3+\varepsilon}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$.

Для переходной зоны можно построить эталонную непрерывную систему, с которой произвести сравнение. Перейдем к другому базису и к непрерывной переменной z вместо n по следующим формулам (см. (2.27), (2.25)):

$$\tilde{V}_n = \begin{pmatrix} x & \sqrt[3]{x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2n = x^2 + zx^{2/3}. \quad (4.3)$$

Перемножая матрицы в (2.28) и подставляя z , имеем

$$U_{n+1} = x \left[E + x^{-2/3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -z & 0 \end{pmatrix} \right] U_n,$$

что сравнением с (2.30) приводит к разностному уравнению (2.32):

$$U_n = x^n u(z) \implies u(z + 2x^{-2/3}) = \left[E + x^{-2/3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -z & 0 \end{pmatrix} \right] u(z)$$

с матрицей L

$$L(z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -z & 0 \end{pmatrix}.$$

Уточняя правую часть для соответствия смещению (т.е. итерационным процессом (2.34)), перейдем от L к R . Получим непрерывную систему (2.33):

$$u'(z) = \begin{pmatrix} \frac{z}{4x^{2/3}} - \frac{1}{3x^{4/3}} - \frac{z^2}{8x^2} + \dots & \frac{1}{2} - \frac{z}{6x^{4/3}} + \frac{1}{6x^2} + \dots \\ -\frac{z}{2} + \frac{1}{2x^{2/3}} + \frac{z^2}{6x^{4/3}} - \frac{z}{3x^2} + \dots & \frac{z}{4x^{2/3}} - \frac{1}{6x^{4/3}} - \frac{z^2}{8x^2} + \dots \end{pmatrix} u(z).$$

Решение этой системы (первая координата) согласно (2.35), (2.38) имеет формальное представление

$$u_1^{(A)}(z) = \exp\left(\frac{z^2}{8x^{2/3}} - \frac{5z}{12x^{4/3}} - \frac{z^3}{24x^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{2z}{15x^{4/3}} - \frac{2}{15x^2} + \dots\right) \\ \times \text{Ai}\left(-\sqrt[3]{2}\left(\frac{z}{2} - \frac{1}{2x^{2/3}} - \frac{z^2}{15x^{4/3}} + \frac{2z}{15x^2} + \dots\right)\right)$$

и второе линейно независимое решение $u_1^{(B)}$, получающееся из этого заменой Ai на Bi .

Использовать такие разложения можно при $|z| = O(|x|^{2/3-\varepsilon})$ для некоторого $\varepsilon > 0$ – требование $\tilde{d}\|L\| = O(|x|^{-\varepsilon})$ (см. теорему 4). Однако на самом деле разложения работают в более широкой области

$$|z| = O(|x|^{4/3-\varepsilon}).$$

Чтобы в этом убедиться, можно сделать сопряжение с помощью не зависящей от n (т.е. от z) диагональной матрицы с элементами $|x|^{2/3-\varepsilon}$ и 1.

Итак, линейно независимые решения непрерывной системы имеют вид

$$u^{(A)} = e^{E(z)} \begin{pmatrix} \text{Ai}(h(z)) \\ f_1 \text{Ai}(h(z)) + f_2 \text{Ai}'(h(z)) \end{pmatrix}, \\ u^{(B)} = e^{E(z)} \begin{pmatrix} \text{Bi}(h(z)) \\ f_1 \text{Bi}(h(z)) + f_2 \text{Bi}'(h(z)) \end{pmatrix},$$

где разложения для f_1 и f_2 таковы:

$$f_1 = \frac{R_{22} - R_{11}}{2R_{12}} - \frac{f'}{fR_{12}} + \frac{R'_{12}}{2R_{12}^2} = \frac{1}{10x^{4/3}} + \dots + O\left(\frac{|z|_+^{(k-2)/2}}{|x|^{2k/3}}\right),$$

$$f_2 = \frac{1}{f^2 R_{12}} = -\sqrt[3]{2}\left(1 + \frac{z}{15x^{4/3}} - \frac{1}{15x^2} + \dots\right) + O\left(\frac{|z|_+^{k/2}}{|x|^{2k/3}}\right),$$

а разложение для

$$E(z) = \frac{1}{2}\left(\ln R_{12} + \int (R_{22} + R_{11}) dz\right) + \ln f(z)$$

имеет вид

$$E(z) = \frac{z^2}{8x^{2/3}} - \frac{17z}{60x^{4/3}} - \frac{5z^3 + 16}{120x^2} + \dots + O\left(\frac{|z|_+^{k+3/2}}{|x|^{2k/3}}\right).$$

Следует учесть, что построенные решения растут экспоненциально. После вынесения экспоненциального множителя получим столбцы, пропорциональные решениям, которые имеют степенное поведение:

$$\exp\left(-E(z) + \frac{2}{3}h^{3/2}(z)\right)u^{(A)} = \exp\left(\frac{2}{3}h^{3/2}(z)\right)\begin{pmatrix} \text{Ai}(h(z)) \\ f_1 \text{Ai}(h(z)) + f_2 \text{Ai}'(h(z)) \end{pmatrix},$$

$$\exp\left(-E(z) - \frac{2}{3}h^{3/2}(z)\right)u^{(B)} = \exp\left(-\frac{2}{3}h^{3/2}(z)\right)\begin{pmatrix} \text{Bi}(h(z)) \\ f_1 \text{Bi}(h(z)) + f_2 \text{Bi}'(h(z)) \end{pmatrix}.$$

Второй столбец обладает степенным поведением только в секторе $\arg(h) \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

Чтобы расширить область с полиномиальным поведением, нужно использовать вместо Bi две определенные линейные комбинации функций Эйри.

Окончательно получим формулы для V_n в переходной зоне, обеспечивающей диагонализуемость с нужной точностью в секторе $\arg(z) \in (-\pi, \frac{\pi}{3})$, где $2n = x^2 + zx^{2/3}$:

$$V_n = \tilde{V}_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Ai}(h(z)) & \text{Ai}(h(z)) + i \text{Bi}(h(z)) \\ \text{Ai}'(h(z)) & \text{Ai}'(h(z)) + i \text{Bi}'(h(z)) \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{2}{3}h^{3/2}(z)\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{2}{3}h^{3/2}(z)\right) \end{pmatrix}.$$

Найденные ранее разложения годились для областей $|z| > |x|^\varepsilon$. Таким образом, есть масштабы, в которых справедливы оба результата, и их сравнение позволяет найти соответствие между базами. Коэффициенты соответствия не зависят от n , но могут зависеть от x , что действительно и происходит.

Пусть $\text{Im}(x) \geq 0$. Тогда $\arg(z)$ из (4.3) при всех $n \in \mathbb{R}_+$ меняется между $\arg(x^{-2/3}) = -\frac{2}{3}\arg(x)$ и $\arg(-x^{4/3}) = -\pi + \frac{4}{3}\arg(x)$. Разность этих значений равна $\pi - 2\arg(x)$ и не превосходит π по модулю при $\arg(x) \in (0, \pi)$, что показывает согласованность понятий “между” для подсчитанных аргументов и для

направлений в комплексной плоскости. Значит, все возможные при этом значения $\arg(z)$ лежат в интервале $(-\pi, \frac{\pi}{3})$. Наименьшее принимаемое значение $|z|$ равно $|x|^{4/3} |\sin(2 \arg(x))|$, если $\cos(2 \arg(x)) > 0$, и $|x|^{4/3}$, если иначе. Формулы переходной зоны применимы в случае $|z| = O(|x|^{4/3-\varepsilon})$, т.е. $\arg(x) < |x|^{-\varepsilon}$ или $\arg(x) > \pi - |x|^{-\varepsilon}$. В этих случаях $\min(|z|) \sim \operatorname{Im}(x) \sqrt[3]{|x|}$. Формулы хорошей диагонализуемости (4.1), (4.2), (2.52) применимы в случае $|z| \geq |x|^\varepsilon$.

Таким образом, для случаев $\operatorname{Im}(x) = O(|x|^{1-\varepsilon})$ найдется интервал значений n , на котором возможно применение формул переходной зоны, а для случаев $\operatorname{Im}(x) = O(|x|^{\varepsilon-1/3})$ без этих формул уже нельзя обойтись. Теперь найдем соответствие между решениями переходной зоны

$$x^n \exp\left(E(z) - \frac{2}{3} h^{3/2}(z)\right) V_n \vec{e}_1, \quad x^n \exp\left(E(z) + \frac{2}{3} h^{3/2}(z)\right) V_n \vec{e}_2 \quad (4.4)$$

и базисными решениями (2.52). Ограничимся случаем окрестности положительной полуоси, т.е. когда $\arg(x)$ близок к 0. Второй случай, когда $\arg(x)$ близок к π , аналогичен.

В этом случае при малых n (до переходной зоны и при входе в нее) $\arg(z) \approx -\pi$, при больших n (при выходе и после переходной зоны) $\arg(z) \approx 0$. В условиях переходной зоны

$$h(z) = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2z} + o(|z| + 1),$$

т.е. $\arg(h(z)) \in [0, \pi]$. Этот интервал входит в интервал $(-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ асимптотического представления второго решения. В результате получаем соответствие второго решения (4.4) с коэффициентом

$$\frac{-i\sqrt{\pi}}{\sqrt[6]{2}} x^{2/3} \exp\left(-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x^2} + \dots\right)$$

и второго решения (2.52) как на входе, так и на выходе переходной зоны.

Для первого решения (4.4) ситуация другая. На входе $\arg(h) \approx 0$, и устанавливается соответствие первого решения (4.4) с коэффициентом

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt[6]{2}} x^{2/3} \exp\left(-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x^2} + \dots\right)$$

и первого решения (2.52). На выходе $\arg(h) \approx \pi$, и надо представить столбец решений в виде следующей комбинации:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Ai}(h(z)) \\ \operatorname{Ai}'(h(z)) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \operatorname{Ai}(h(z)) + i \operatorname{Bi}(h(z)) \\ \operatorname{Ai}'(h(z)) + i \operatorname{Bi}'(h(z)) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \operatorname{Ai}(h(z)) - i \operatorname{Bi}(h(z)) \\ \operatorname{Ai}'(h(z)) - i \operatorname{Bi}'(h(z)) \end{pmatrix},$$

и писать асимптотические формулы, считая $\arg(h) \approx \pi$ для первого слагаемого и $\arg(h) \approx -\pi$ для второго. Тем самым, в смысле соответствия формальных рядов получили

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt[6]{2}} x^{2/3} \exp\left(-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x^2} + \dots\right) \begin{pmatrix} \operatorname{Ai}(h(z)) \\ \operatorname{Ai}'(h(z)) \end{pmatrix} = \vec{\Pi}_1 + i \vec{\Pi}_2.$$

Для многочленов Эрмита определяем поведение нескольких старших коэффициентов и используем их как начальные условия для разложения по найденному базису, считая x достаточно большим ($\hat{n} \ll |x|^\varepsilon$):

$$Q_{\hat{n}}(x) = (2x)^{\hat{n}} \left(1 - \frac{\hat{n}(\hat{n}-1)}{4x^2} + O\left(\frac{\hat{n}^4}{x^4}\right) \right),$$

что приводит к

$$\begin{pmatrix} Q_n(x) \\ Q_{n-1}(x) \end{pmatrix} = \frac{\exp(x^2/2 + o(x^{-2}))}{\sqrt{2}} \vec{\Pi}_1 + o\left(x^{2\hat{n}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right) \vec{\Pi}_2.$$

Отсюда в итоге вытекают асимптотические формулы (2.49)–(2.51) теоремы 5.

4.2. Получение асимптотики многочленов Мейкснера. Получим асимптотические разложения теоремы 6. На первом этапе находим корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(x - (c+1)n \pm \sqrt{D}), \quad D := (x - (c+1)n)^2 - 4cn(n+b),$$

характеристического многочлена матрицы перехода

$$A_n = \begin{pmatrix} x - (c+1)n & -cn(n+b) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и области хорошей отделимости собственных значений

$$\Xi = \{(n, x) : |x - (\sqrt{c} - 1)^2 n| > \varepsilon|n|, |x - (\sqrt{c} + 1)^2 n| > \varepsilon|n|\}.$$

В этих областях (следуя п. 2.4.6) находится приближение для V_n :

$$V_n = \begin{pmatrix} B & \tilde{B} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} B &\leftrightarrow \tilde{B}, \\ \sqrt{D} &\leftrightarrow -\sqrt{D}, \end{aligned}$$

где $\tilde{B}$ получается из B заменой $\sqrt{D}$ на $-\sqrt{D}$, а B имеет разложение

$$B = \frac{x - (c+1)n + \sqrt{D}}{2} + t\tilde{\varphi}_1(x, n) + t^2\tilde{\varphi}_2(x, n) + \dots, \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1 := & \frac{(c+1)x^2 - 2(c^2 + c + 1)nx + (1-c)^2(c+1)n^2 + bcx - 3bc(c+1)n}{2D} \\ & + \frac{xc + x - nc^2 - n + bc}{2\sqrt{D}}. \end{aligned}$$

Вычисляя произведения диагональных элементов новой матрицы перехода (см. матрицу D_n (2.3)) и подставив $t = 1$, получаем разложение для общего решения

$$\begin{pmatrix} Q_n \\ Q_{n-1} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} B & \tilde{B} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & \Pi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \Pi_1 &\leftrightarrow \Pi_2, \\ \sqrt{D} &\leftrightarrow -\sqrt{D}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где Π_2 получается из Π_1 заменой $\sqrt{D}$ на $-\sqrt{D}$ (таким же образом связаны выражения для $\psi_k^{(1)}$ и $\psi_k^{(2)}$), а Π_1 имеет разложение

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \left(\frac{x - (c+1)n + \sqrt{D}}{2} \right)^{n-1/2} \left[\frac{2c(x+b)}{c-1} - x - (c-1)n - \sqrt{D} \right]^{\frac{2x+(b+1)(c+1)}{2(c-1)}} \\ & \times \frac{[2bc(n+b) + (x - (c+1)n + \sqrt{D})(x + (c+1)b)]^{b/2}}{\exp(n) \sqrt[4]{D}} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^{(1)}\right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где оценки для общего члена ряда имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_k^{(1)}(x, n) &= O\left(\max\left(\frac{|x|^{k+1}}{n^{2k+1}}, \frac{|x|^{(k+1)/2}}{|n - n_1(x)|^{(3k+1)/2}}, \frac{|x|^{(k+1)/2}}{|n - n_2(x)|^{(3k+1)/2}}\right)\right), \\ \psi_k^{(2)}(x, n) &= O\left(\max\left(|x|^{-k}, \frac{|x|^{(k+1)/2}}{|n - n_1(x)|^{(3k+1)/2}}, \frac{|x|^{(k+1)/2}}{|n - n_2(x)|^{(3k+1)/2}}\right)\right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Оценка остаточного члена такая же, как у первого отброшенного члена. Члены ряда в (4.7) представляют собой довольно громоздкие выражения. Здесь мы приведем выражение для первого члена при равном нулю значении параметра b многочленов Мейкснера:

$$\begin{aligned} \psi_1^{(1)}(x, n)|_{b=0} &= \frac{1}{12nx\sqrt{D^3}}[\Phi_1 x\sqrt{D} - \tilde{\Phi}_1], \\ \Phi_1 &:= (7c^2 - 2c + 7)n^2 - 8(c+1)xn + x^2, \\ \tilde{\Phi}_1 &:= (c^2 + 4c + 1)(c-1)^2n^4 - 3(c^2 - 6c + 1)(c+1)xn^3 \\ &\quad - 8(c^2 + c + 1)x^2n^2 - 3(c+1)x^3n - x^4. \end{aligned}$$

С помощью теоремы 3 определим, когда можно пользоваться этими разложениями. Именно из этой теоремы и выводятся оценки (4.8). Пусть $n_{1,2}$ – корни D :

$$n_{1,2} = n_{1,2}(x) = \left(\frac{\sqrt{c(x+b)} \mp \sqrt{x+bc}}{c-1} \right)^2 = \frac{x}{(\sqrt{c} \pm 1)^2} + O(1),$$

так что $|n_1| < |n_2|$. Обозначим

$$m := \min(|n_1 - n_0|, |n_2 - n_0|), \quad R = m + O(1).$$

Для $n : |n - n_0| < R/3$ имеем

$$|D| = (c-1)^2 |n_1 - n| |n_2 - n| \asymp \max(|x|, m)$$

и, далее,

$$\Delta = (c-1) \sqrt{\frac{2}{3} R \max\left(\frac{2}{3} R, |n_2 - n_1| - \frac{4}{3} R\right)} \asymp \max(|x|, m).$$

Следовательно,

$$\|(V_n^{(0)})^{-1} A_n V_n^{(0)}\| < \sqrt{\text{Tr}((V_n^{(0)})^{-1} A_n V_n^{(0)})[(V_n^{(0)})^{-1} A_n V_n^{(0)}]^*} \asymp \max(|x|, m).$$

Поэтому разложениями для B и Π_1 можно пользоваться, если

$$\frac{\max(|x|, m)}{m^3} = o(|x|^{-2\tilde{\varepsilon}})$$

для некоторого $\tilde{\varepsilon} > 0$, что равносильно

$$|n - n_1| > |x|^{1/3+\varepsilon}, \quad |n - n_2| > |x|^{1/3+\varepsilon}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$.

Для переходных зон (таких зон две – в окрестности точки n_1 и в окрестности точки n_2) можно построить эталонные непрерывные системы, с которыми следует произвести сравнение. В окрестности точки n_1 перейдем к другому базису и к непрерывной переменной z вместо n по следующим формулам:

$$\tilde{V}_n = \begin{pmatrix} x - \frac{(c+1)n}{2} & \sqrt[3]{x^2} \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad s = \sqrt{c}, \quad n = \frac{x}{(1+s)^2} + z\sqrt[3]{x}. \quad (4.9)$$

Для окрестности точки n_2 (она рассмотрена ниже) в формулах надо сделать замену s на $-s$.

Обращаясь к (2.28), имеем

$$U_{n+1} = \frac{sx}{(1+s)^2} \left[E - \frac{(s+1)^2}{2s\sqrt[3]{x}} \right. \\ \left. \times \left(4sz - \frac{2s}{x^{1/3}} + \frac{4(b+1)s^2}{x^{1/3}} \left(\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{z}{x^{2/3}} \right) + \frac{z(s^2-1)^2}{x} (1 - zx^{1/3}) \frac{(s^2+1)}{x^{2/3}} (zx^{1/3} - 1) \right) \right] U_n,$$

что сравнением с (2.30) приводит к разностному уравнению (2.32) с соответствующей матрицей L и соответствующим шагом дискретизации $\tilde{d}$. Далее, итерационным процессом (2.34) перейдем от L к R и получим непрерывную систему (2.33).

Как и в первом примере (т.е. в п. 4.1), мы находим разложение для матрицы R непрерывной системы (ввиду громоздкости оно не приводится). Затем переходим к скалярному дифференциальному уравнению (2.36)

$$g''(z) = q(z)g(z),$$

коэффициент которого имеет разложение по степеням $x^{-1/3}$:

$$q = -\frac{z(s+1)^4}{s} + \frac{(s+1)^2(s^2+s-sb+1)}{sx^{1/3}} - \frac{(s+1)^6(s^2-10s+1)z^2}{12s^2x^{2/3}} + \dots$$

Наконец, строим два решения $u^{(A)}$ и $u^{(B)}$ этого уравнения:

$$u^{(A)} = e^{E(z)} \begin{pmatrix} \text{Ai}(h(z)) \\ f_1 \text{Ai}(h(z)) + f_2 \text{Ai}'(h(z)) \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

$$u^{(B)} = e^{E(z)} \begin{pmatrix} \text{Bi}(h(z)) \\ f_1 \text{Bi}(h(z)) + f_2 \text{Bi}'(h(z)) \end{pmatrix},$$

где итерационная процедура (2.34) дает формальные разложения

$$E(z) = \frac{(s+1)^2 z^2}{2x^{1/3}} + \frac{(\frac{b(s+1)}{2} + \frac{(s+1)^2(s^2-10s+1)}{15s})z}{x^{2/3}} + \dots,$$

$$h(z) = -\sqrt[3]{\frac{(s+1)^4}{s}} \left(z + \frac{sb - (s^2 + s + 1)}{(s+1)^2 x^{1/3}} + \frac{(s^4 - 8s^3 - 18s^2 - 8s + 1)z^2}{60sx^{2/3}} + \dots \right),$$

а для коэффициентов f_1 и f_2 справедливы разложения

$$f_1 = \frac{13s^2 - 10s + 13}{15x^{2/3}} - \frac{17s^4 - 35s^3 - 116s^2 - 35s + 17}{525sx^{4/3}} \left((s+1)^2 z - \frac{s^2 + s + 1 - sb}{x^{1/3}} \right) + \dots,$$

$$f_2 = -2\sqrt[3]{\frac{s^2}{(s+1)^2}} \left(1 - \frac{(2s-1)(s-2)(s+1)^2 z}{15sx^{2/3}} + \frac{s(3s^2 + 5s + 3)b + 2s^4 + 2s^3 - s^2 + 2s + 2}{15sx} + \dots \right).$$

Эти разложения можно использовать при $|z| = O(|x|^{1/3-\varepsilon})$ для некоторого $\varepsilon > 0$ – требование $\tilde{d}\|L\| = O(|x|^{-\varepsilon})$. Однако на самом деле разложения работают в более широкой области $|z| = O(|x|^{2/3-\varepsilon})$. Разложения для B , Π_1 годились для областей $|z| > |x|^\varepsilon$. Таким образом, снова есть масштабы, в которых справедливы оба результата, и их сравнение позволяет найти соответствие между базами.

Для нахождения соответствия прежде всего требуется четко определить ветви многозначных функций в выражениях для Π_1 и области, в которых они рассматриваются. Итак, мы считаем $|x| \gg 1$, и пусть для определенности $\text{Im}(x) \geq 0$. Тогда $\arg(x)$, $\arg(n_1)$, $\arg(n_2)$ принадлежат $[0, \pi]$. Рассмотрим

$$D = (c-1)^2(n-n_1)(n-n_2).$$

Определим $\sqrt{D}$ в n -плоскости с разрезом по отрезку $[n_1, n_2]$ так, что при $n \rightarrow \infty$ выполняется $\sqrt{D} \sim -(c-1)n$. Интересующие нас значения n вещественны и находятся ниже разреза. Для согласования и при вещественных n_1, n_2 для $n \in (n_1, n_2)$ выбираем $\sqrt{D}$ по нижнему берегу. Для $\sqrt[4]{D}$ проводится дополнительный разрез (n_2, ∞) параллельно действительной оси.

Для корректного возведения в нецелую степень выберем фиксацию аргумента каждого подвыражения. Для удобства сравнения с ортогональными полиномами фиксируем аргумент для ситуации $n \ll |x|$ и далее непрерывно продолжаем на $n \in \mathbb{R}_+$. Имеем

$$\frac{x - (c+1)n + \sqrt{D}}{2} \sim x,$$

$$2bc(n+b) + (x - (c+1)n + \sqrt{D})(x + (c+1)b) \sim 2x^2,$$

$$\frac{x - (c+1)n - \sqrt{D}}{2} \sim \frac{cn(n+b)}{x},$$

$$2bc(n+b) + (x - (c+1)n - \sqrt{D})(x + (c+1)b) \sim 2c(n+b)^2,$$

$$\begin{aligned}\frac{2c(x+b)}{c-1} - x - (c-1)n - \sqrt{D} &\sim \frac{2x}{c-1}, \\ \frac{2c(x+b)}{c-1} - x - (c-1)n + \sqrt{D} &\sim \frac{2cx}{c-1}.\end{aligned}$$

Выбор аргумента производим в соответствии с аргументом x : при $\arg(x) = 0$ все выражения положительны, аргумент равен 0. Далее продолжаем аргумент по непрерывности на $\arg(x) \in [0, \pi]$. Никакое из выражений не обращается в 0, если $n(n+b)(x+b)(x+bc) \neq 0$.

Так же поступим для вычисления аргументов этих выражений в окрестностях корней D . При этом надо учесть взаимное расположение луча $\mathbb{R}_+$ и разреза $[n_1, n_2]$. Получаем при $n = \frac{x}{(s+1)^2} + o(|x|)$ (первая зона)

$$\begin{aligned}\frac{x - (c+1)n \pm \sqrt{D}}{2} &= \frac{2sx}{(s+1)^2} + o(|x|), \quad \arg(\cdot) \approx \arg(x), \\ 2bc(n+b) + (x - (c+1)n \pm \sqrt{D})(x + (c+1)b) &= \frac{2sx^2}{(s+1)^2} + o(|x|^2), \\ \arg(\cdot) &\approx 2\arg(x), \\ \frac{2c(x+b)}{c-1} - x - (c-1)n \mp \sqrt{D} &= \frac{2sx}{s^2-1} + o(|x|), \quad \arg(\cdot) \approx \arg(x).\end{aligned}$$

Получаем при $n = \frac{x}{(s-1)^2} + o(|x|)$ (вторая зона)

$$\begin{aligned}\frac{x - (c+1)n \pm \sqrt{D}}{2} &= \frac{-2sx}{(s-1)^2} + o(|x|), \quad \arg(\cdot) \approx \arg(x) \pm \pi, \\ 2bc(n+b) + (x - (c+1)n \pm \sqrt{D})(x + (c+1)b) &= \frac{-2sx^2}{(s-1)^2} + o(|x|^2), \\ \arg(\cdot) &\approx 2\arg(x) \pm \pi, \\ \frac{2c(x+b)}{c-1} - x - (c-1)n \mp \sqrt{D} &= \frac{-2sx}{s^2-1} + o(|x|), \quad \arg(\cdot) \approx \arg(x) \mp \pi.\end{aligned}$$

Рассмотрим первую переходную зону. Она соответствует меньшим значениям n . Формулы для матрицы перехода V_n в первой переходной зоне, обеспечивающей диагонализуемость с нужной точностью в секторе $\arg(z) \in (-\pi, \frac{\pi}{3})$, где $n = \frac{x}{(1+s)^2} + z\sqrt[3]{x}$:

$$\begin{aligned}V_n &:= \tilde{V}_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Ai}(h(z)) & \text{Ai}(h(z)) + i\text{Bi}(h(z)) \\ \text{Ai}'(h(z)) & \text{Ai}'(h(z)) + i\text{Bi}'(h(z)) \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{2}{3}h^{3/2}(z)\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{2}{3}h^{3/2}(z)\right) \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{4.11}$$

обозначение для $\tilde{V}_n$ см. в (4.9).

Напомним, что мы приняли $\text{Im}(x) \geq 0$. Тогда $\arg(z)$ при всех $n \in \mathbb{R}_+$ меняется между $\arg(x^{-1/3}) = -\frac{1}{3}\arg(x)$ и $\arg(-x^{2/3}) = -\pi + \frac{2}{3}\arg(x)$. Разность этих

значений равна $\pi - \arg(x)$ и не превосходит π по модулю при $\arg(x) \in (0, \pi)$, что показывает согласованность понятий “между” для подсчитанных аргументов и для направлений в комплексной плоскости. Значит, все возможные при этом значения $\arg(z)$ лежат в интервале $(-\pi, \frac{\pi}{3})$. Наименьшее принимаемое значение $|z|$ по порядку равно $\sim |x|^{2/3} |\sin(\arg(x))|$, если $\cos(\arg(x)) > 0$, и $\sim |x|^{2/3}$, если иначе. Формулы переходной зоны применимы в случае $|z| = O(|x|^{2/3-\varepsilon})$, т.е. $\arg(x) < |x|^{-\varepsilon}$. В этих случаях $\min(|z|) \sim \operatorname{Im}(x)/\sqrt[3]{|x|}$. Разложения зоны хорошей диагонализуемости (4.5)–(4.7) применимы в случае $|z| \geq |x|^\varepsilon$.

Таким образом, для случаев $\operatorname{Im}(x) = O(|x|^{1-\varepsilon})$ найдется интервал значений n , на котором возможно применение формул переходной зоны, а для случаев $\operatorname{Im}(x) = O(|x|^{\varepsilon+1/3})$ без этих формул нельзя обойтись. Выписывая разложения для масштабов, где применимы оба вида формул, и учитывая выбор аргументов, получим соответствие. Получим следующий коэффициент соответствия между решениями переходной зоны

$$\begin{aligned} F_n^{(1)}(x) &:= \left(\frac{sx}{(s+1)^2} \right)^n \exp \left(E(z) - \frac{2}{3} h^{3/2}(z) \right) V_n \vec{e}_1, \\ F_n^{(2)}(x) &:= \left(\frac{sx}{(s+1)^2} \right)^n \exp \left(E(z) + \frac{2}{3} h^{3/2}(z) \right) V_n \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

и базисными решениями $\vec{\Pi}_{1,2}$:

$$\begin{aligned} K_1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{(s+1)^2}{sx} \right)^{-1/2} \left[\frac{c-1}{2sx} \right]^{\frac{2x+(b+1)(c+1)}{2(c-1)}} \left[\frac{(s+1)^2}{sx^2} \right]^{b/2} \\ &\quad \times \exp \left(\frac{x}{(s+1)^2} - \frac{bc}{c-1} \right) \sqrt[3]{\frac{sx}{s+1}}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \langle F_n^{(1)}(x), \vec{e}_2 \rangle &= 2e^{E(z)} \left(\frac{sx}{(s+1)^2} \right)^n \operatorname{Ai}(h(z)) =: G(x, n) \operatorname{Ai}(h(z)), \\ \langle F_n^{(2)}(x), \vec{e}_2 \rangle &= G(x, n) [\operatorname{Ai}(h(z)) + i \operatorname{Bi}(h(z))]. \end{aligned}$$

Связь решений дается с помощью следующих тождеств между формальными рядами:

$$\begin{aligned} 2iK_1(x)\Pi_2(x, n) &\stackrel{\arg(z) \approx -\pi}{=} G(x, n) [\operatorname{Ai}(h(z)) + i \operatorname{Bi}(h(z))] \stackrel{\arg(z) \approx 0}{=} 2iK_1\Pi_2(x, n), \\ 2K_1(x)\Pi_1(x, n) &\stackrel{\arg(z) \approx -\pi}{=} 2G(x, n) \operatorname{Ai}(h(z)) \\ &= G(x, n) [[\operatorname{Ai}(h(z)) + i \operatorname{Bi}(h(z))] + [\operatorname{Ai}(h(z)) - i \operatorname{Bi}(h(z))]] \\ &\stackrel{\arg(z) \approx 0}{=} 2K_1(x) [\Pi_1(x, n) + i\Pi_2(x, n)]. \end{aligned}$$

В этом случае при малых n (до переходной зоны и при входе в нее) $\arg(z) \approx -\pi$, при больших n (при выходе и после переходной зоны) $\arg(z) \approx 0$. В условиях переходной зоны $\arg(h(z)) \in [0, \pi]$. Этот интервал входит в интервал $(-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ асимптотического представления второго решения. В результате получаем соответствие второго решения (4.12) с выписанным коэффициентом и

второго решения (4.6) как на входе, так и на выходе переходной зоны. Для первого решения (4.12) аналогично первому примеру. На входе $\arg(h) \approx 0$, и устанавливается соответствие с первым решением (4.6) с выписанным коэффициентом. На выходе $\arg(h) \approx \pi$, и надо представить столбец решений в виде следующей комбинации:

$$\begin{pmatrix} \text{Ai}(h(z)) \\ \text{Ai}'(h(z)) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Ai}(h(z)) + i \text{Bi}(h(z)) \\ \text{Ai}'(h(z)) + i \text{Bi}'(h(z)) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Ai}(h(z)) - i \text{Bi}(h(z)) \\ \text{Ai}'(h(z)) - i \text{Bi}'(h(z)) \end{pmatrix},$$

и писать асимптотические формулы, считая $\arg(h) \approx \pi$ для первого слагаемого и $\arg(h) \approx -\pi$ для второго.

Теперь вторая переходная зона. Большинство формул можно получить из формул для первой переходной зоны, заменив s на $-s$. Однако во многих местах придется возводить отрицательные числа в дробные степени, поэтому нужно указывать правильные значения аргументов.

Имеем

$$U_{n+1} = -\frac{sx}{(s-1)^2} \left[E + \frac{(s-1)^2}{2s\sqrt[3]{x}} \times \left(-4sz + \frac{2s}{x^{1/3}} + \frac{4(b+1)s^2}{x^{1/3}} \left(\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{z}{x^{2/3}} \right) + \frac{z(s^2-1)^2}{x} (1-zx^{1/3}) \frac{-1}{x^{2/3}} (zx^{1/3}-1) \right) \right] U_n;$$

здесь новая непрерывная переменная z :

$$n = \frac{x}{(s-1)^2} + z\sqrt[3]{x},$$

приводит к дифференциальному уравнению (2.36) с коэффициентом

$$q = \frac{z(s-1)^4}{s} - \frac{(s-1)^2(s^2-s+1+sb)}{sx^{1/3}} - \frac{(s-1)^6(s^2+10s+1)z^2}{12s^2x^{2/3}} + \dots.$$

Базис решений этого уравнения (см. (4.10)) получается из следующих разложений:

$$E(z) = \frac{(s-1)^2z^2}{2x^{1/3}} + \frac{(15sb-2(s^2+10s+1))(s-1)^2z}{30sx^{2/3}} + \dots,$$

$$h(z) = \sqrt[3]{\frac{(s-1)^4}{s}} \left(z - \frac{(s^2-s+1)+sb}{(s-1)^2x^{1/3}} - \frac{(s-1)^2(s^2+10s+1)z^2}{60sx^{2/3}} + \dots \right),$$

а для коэффициентов f_1 и f_2 справедливы разложения

$$f_1 = \frac{13s^2+10s+13}{15x^{2/3}} + \frac{17s^4+35s^3-116s^2+35s+17}{525sx^{4/3}} \left((s-1)^2z - \frac{s^2-s+1+sb}{x^{1/3}} \right) + \dots,$$

$$f_2 = -2\sqrt[3]{\frac{s^2}{(s-1)^2}} \left(1 + \frac{(2s+1)(s+2)(s-1)^2z}{15sx^{2/3}} + \frac{s(3s^2-5s+3)b-2s^4+2s^3+s^2+2s-2}{15sx} + \dots \right).$$

Эти разложения также работают в области $|z| = O(|x|^{2/3-\varepsilon})$. Коэффициенты соответствия между решениями переходной зоны

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-sx}{(s-1)^2} \right)^n \exp \left(E(z) - \frac{2}{3} h^{3/2}(z) \right) V_n \vec{e}_1, \\ & \left(\frac{-sx}{(s-1)^2} \right)^n \exp \left(E(z) + \frac{2}{3} h^{3/2}(z) \right) V_n \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

и базисными решениями $\vec{\Pi}_{1,2}(x, n)$ для функций $\text{Ai}(h(z))$, $\text{Ai}(h(z)) + i \text{Bi}(h(z))$, $\text{Ai}(h(z)) - i \text{Bi}(h(z))$ из (4.11) выражаются через величины

$$K_2(x) = i^{b-1-\frac{2x+(b+1)(c+1)}{c-1}} K_3(x), \quad \bar{K}_2(x) = (-i)^{b-1-\frac{2x+(b+1)(c+1)}{c-1}} K_3(x),$$

$$\begin{aligned} K_3(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{(s-1)^2}{sx} \right)^{-1/2} \left[\frac{c-1}{2sx} \right]^{\frac{2x+(b+1)(c+1)}{2(c-1)}} \left[\frac{(s-1)^2}{sx^2} \right]^{b/2} \\ &\quad \times \exp \left(\frac{x}{(s-1)^2} - \frac{bc}{c-1} \right) \sqrt[3]{\frac{sx}{s-1}} \end{aligned}$$

и имеют вид

$$\begin{aligned} 2\bar{K}_2(x)\Pi_1(x, n) &\stackrel{\arg(z) \approx -\pi}{\approx} G(x, n) [\text{Ai}(h(z)) - i \text{Bi}(h(z))] \stackrel{\arg(z) \approx 0}{\approx} 2\bar{K}_2(x)\Pi_1(x, n), \\ 2i\bar{K}_2(x)\Pi_2(x, n) &\stackrel{\arg(z) \approx -\pi}{\approx} G(x, n) [\text{Ai}(h(z)) + i \text{Bi}(h(z))], \\ G(x, n) \text{Ai}(h(z)) &\stackrel{\arg(z) \approx 0}{\approx} iK_2(x)\Pi_2(x, n), \end{aligned}$$

где теперь

$$G(x, n) := 2e^{E(z)} \left(\frac{-sx}{(s-1)^2} \right)^n.$$

Наконец (так как старший коэффициент ортогональных многочленов в новых переменных (2.55) равен единице), определим коэффициент соответствия между Q_{n-1} и Π_1 , подставив $n \ll |x|$ в Π_1 :

$$Q_{n-1}(x) = K_0(x)\Pi_2(x, n),$$

где

$$\begin{aligned} \ln K_0(x) &:= -\frac{2x+(b+1)(c+1)}{2(c-1)} \ln \left(\frac{2x}{c-1} \right) - \frac{b}{2} \ln(2x^2) - \frac{bc}{c-1} \\ &\quad + \frac{b^2 - b(b+1)c(c+1)}{2(c-1)x} \\ &\quad + \left[\frac{6b^2 - c^2 + 1}{24} + \frac{c(bc+c+2)(2bc+c-1)}{12(c-1)} \right] \frac{b}{x^2} + O(x^{-3}). \end{aligned}$$

Эта асимптотическая формула и замыкает цепочку асимптотик теоремы 6.

Список литературы

- [1] P. A. Deift, *Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann–Hilbert approach*, Courant Lect. Notes Math., **3**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [2] M. Plancherel, W. Rotach, “Sur les valeurs asymptotiques des polynomes d’Hermite $H_n(x) = (-I)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-\frac{x^2}{2}})$ ”, *Comment. Math. Helv.*, **1**:1 (1929), 227–254.

- [3] Г. Cегё, *Ортогональные многочлены*, Физматлит, М., 1962; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959.
- [4] D. S. Lubinsky, *Strong asymptotics for extremal errors and polynomials associated with Erdős-type weights*, Pitman Res. Notes Math. Ser., **202**, Longman Scientific and Technical, Harlow, NY; Wiley, New York, 1989.
- [5] E. A. Rakhmanov, “Strong asymptotics for orthogonal polynomials”, *Methods of approximation theory in complex analysis and mathematical physics* (Leningrad, 1991), Lecture Notes in Math., **1550**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 71–97.
- [6] V. Totik, *Weighted approximation with varying weight*, Lecture Notes in Math., **1569**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [7] P. Deift, X. Zhou, “A steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation”, *Ann. of Math.* (2), **137**:2 (1993), 295–368.
- [8] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou, “Strong asymptotics of orthogonal polynomials with respect to exponential weights”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **52**:12 (1999), 1491–1552.
- [9] С. П. Суетин, “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций”, *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 81–114; англ. пер.: S. P. Suetin, “Uniform convergence of Padé diagonal approximants for hyperelliptic functions”, *Sb. Math.*, **191**:9 (2000), 1339–1373.
- [10] J. Baik, P. Deift, K. T.-R. McLaughlin, P. Miller, X. Zhou, “Optimal tail estimates for directed last passage site percolation with geometric random variables”, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **5**:6 (2001), 1207–1250.
- [11] А. И. Аптекарев, “Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций”, *Матем. сб.*, **193**:1 (2002), 3–72; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Sharp constants for rational approximations of analytic functions”, *Sb. Math.*, **193**:1 (2002), 1–72.
- [12] S. Kamvissis, K. D. T.-R. McLaughlin, P. D. Miller, *Semiclassical soliton ensembles for the focusing nonlinear Schrödinger equation*, Ann. of Math. Stud., **154**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2003.
- [13] A. I. Aptekarev, W. Van Assche, “Scalar and matrix Riemann–Hilbert approach to the strong asymptotics of Padé approximants and complex orthogonal polynomials with varying weight”, *J. Approx. Theory*, **129**:2 (2004), 129–166.
- [14] С. П. Суетин, “О сильной асимптотике многочленов, ортогональных относительно комплексного веса”, *Матем. сб.*, **200**:1 (2009), 81–96; англ. пер.: S. P. Suetin, “Strong asymptotics of polynomials orthogonal with respect to a complex weight”, *Sb. Math.*, **200**:1 (2009), 77–93.
- [15] В. Г. Лысов, “Сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для системы стильтесовских функций с весом Лагерра”, *Матем. сб.*, **196**:12 (2005), 99–122; англ. пер.: V. G. Lysov, “Strong asymptotics of the Hermite–Padé approximants for a system of Stieltjes functions with Laguerre weight”, *Sb. Math.*, **196**:12 (2005), 1815–1840.
- [16] V. Lysov, F. Wielonsky, “Strong asymptotics for multiple Laguerre polynomials”, *Constr. Approx.*, **28**:1 (2008), 61–111.
- [17] А. И. Аптекарев, Р. Ф. Хабибуллин, “Асимптотические ряды для многочленов, ортогональных относительно комплексного переменного веса”, Тр. ММО, **68**, УРСО, М., 2007, 3–43; англ. пер.: A. Aptekarev, R. Khabibullin, “Asymptotic expansions for polynomials orthogonal with respect to a complex non-constant weight function”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2007, 1–37.
- [18] Е. А. Рахманов, “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов дискретной переменной”, *Матем. сб.*, **187**:8 (1996), 109–124; англ. пер.:

- E. A. Rakhmanov, "Equilibrium measure and the distribution of zeros of the extremal polynomials of a discrete variable", *Sb. Math.*, **187**:8 (1996), 1213–1228.
- [19] И. И. Шарапудинов, "Асимптотические свойства ортогональных многочленов Хана дискретной переменной", *Матем. сб.*, **180**:9 (1989), 1259–1277; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, "Asymptotic properties of orthogonal Hahn polynomials in a discrete variable", *Math. USSR-Sb.*, **68**:1 (1991), 111–132.
- [20] И. И. Шарапудинов, "Некоторые свойства ортогональных многочленов Мейкснера", *Матем. заметки*, **47**:3 (1990), 135–137.
- [21] И. И. Шарапудинов, "Об асимптотике и весовых оценках полиномов Мейкснера, ортогональных на сетке $\{0, \delta, 2\delta, \dots\}$ ", *Матем. заметки*, **62**:4 (1997), 603–616; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, "Asymptotics and weighted estimates of meixner polynomials orthogonal on the grid $\{0, \delta, 2\delta, \dots\}$ ", *Math. Notes*, **62**:4 (1997), 501–512.
- [22] J. Baik, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, P. D. Miller, *Discrete orthogonal polynomials. Asymptotics and applications*, Ann. of Math. Stud., **164**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.
- [23] В. Н. Сорокин, "Обобщенные многочлены Полачека", *Матем. сб.*, **200**:4 (2009), 113–130; англ. пер.: V. N. Sorokin, "Generalized Pollaczek polynomials", *Sb. Math.*, **200**:4 (2009), 577–595.
- [24] J. S. Geronimo, O. Bruno, W. Van Assche, "WKB and turning point theory for second-order difference equations", *Spectral methods for operators of mathematical physics* (Bedlewo, Poland, 2002), Oper. Theory Adv. Appl., **154**, Basel, Birkhäuser, 2004, 101–138.
- [25] А. И. Аптекарев, "Асимптотика ортогональных многочленов в окрестности концов интервала ортогональности", *Матем. сб.*, **183**:5 (1992), 43–62; англ. пер.: A. I. Aptekarev, "Asymptotics of orthogonal polynomials in a neighborhood of the endpoints of the interval of orthogonality", *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **76**:1 (1993), 35–50.
- [26] Д. Н. Туляков, "О локальной асимптотике отношения ортогональных полиномов в окрестности крайней точки носителя меры ортогональности", *Матем. сб.*, **192**:2 (2001), 139–160; англ. пер.: D. N. Tulyakov, "Local asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials in the neighbourhood of an end-point of the support of the orthogonality measure", *Sb. Math.*, **192**:2 (2001), 299–321.
- [27] Д. Н. Туляков, "Разностные уравнения с базисами степенного роста, возмущенные спектральным параметром", *Матем. сб.*, **200**:5 (2009), 129–158; англ. пер.: D. N. Tulyakov, "Difference equations having bases with powerlike growth which are perturbed by a spectral parameter", *Sb. Math.*, **200**:5 (2009), 753–781.

Д. Н. Туляков (D. N. Tulyakov)

Институт прикладной математики

им. М. В. Келдыша РАН

E-mail: dnt@mail.nnov.ru

Поступила в редакцию

05.08.2009 и 15.06.2010