Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Рахманов, К асимптотике многочленов Эрмита–
Паде для двух марковских функций, *Матем. сб.*, 2011,
том 202, номер 1, 133–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7619>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 18:20:48

УДК 517.53

Е. А. Рахманов

К асимптотике многочленов Эрмита–Паде для двух марковских функций

В работе решена задача о предельном распределении нулей многочленов, совместно ортогональных на двух отрезках Δ_1 и Δ_2 вещественной прямой, таких, что $\Delta_1 \subset \Delta_2$, в предположении, что на отрезке Δ_1 отношение весов есть марковская функция, порожденная третьим отрезком Δ_3 , не пересекающим Δ_2 .

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: аппроксимации Эрмита–Паде, совместно ортогональные многочлены, слабая асимптотика, векторная задача равновесия.

§ 1. Введение

Рассмотрим пару марковских функций $\hat{f}_1, \hat{f}_2$, заданных их рядами Лорана в точке $z = \infty$,

$$\hat{f}_j(z) = \int_{\Delta_j} \frac{f_j(t)}{z-t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{j,k}}{z^{k+1}}, \quad j = 1, 2,$$

где $\Delta_j \subset \mathbb{R}$ – конечные отрезки и $f_j > 0$ почти всюду на Δ_j . Соответствующий многочлен Эрмита–Паде (II-го рода) $Q_{2n}(x) = x^{2n} + \dots$ определяется следующими соотношениями совместной ортогональности:

$$\int_{\Delta_1} Q_{2n}(x) q_1(x) f_1(x) dx = 0 \quad \forall q_1 \in \mathbb{P}_{n-1}, \quad (1)$$

$$\int_{\Delta_2} Q_{2n}(x) q_2(x) f_2(x) dx = 0 \quad \forall q_2 \in \mathbb{P}_{n-1} \quad (2)$$

(подробнее см. [1]–[4]); $\mathbb{P}_m$ – пространство многочленов степени $\leq m$.

Пусть

$$\chi_n = \chi(Q_{2n}) := \sum_{Q_{2n}(\zeta)=0} \delta_\zeta$$

– считающая мера нулей для многочлена Q_{2n} . Нас интересуют условия, при которых существует слабый предел

$$\frac{1}{n} \chi_n \xrightarrow{*} \chi, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

и (явный) вид предельного распределения χ . Это предельное распределение зависит прежде всего от взаимного распределения отрезков Δ_1 и Δ_2 .

Два случая взаимного расположения отрезков Δ_1 и Δ_2 разобраны в [3]. Если отрезки не перекрываются, т.е. $\overset{\circ}{\Delta}_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ (случай Анжелеско), то предел (3) существует без дополнительных ограничений на функции f_1, f_2 и предельное распределение допускает представление $\chi = \lambda_1 + \lambda_2$ в терминах некоторой двумерной векторной задачи равновесия для вектор-меры (λ_1, λ_2) . Далее, если $\Delta_1 = \Delta_2$, то утверждение (3) не удастся доказать без дополнительных ограничений на функции f_1, f_2 . Стандартным является предложенное Е. М. Никишиным (см. [5], [6]) условие

$$\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \hat{f}_3(x) = \int_{\Delta_3} \frac{f_3(t) dt}{x-t}, \quad x \in \Delta_1 \cap \Delta_2, \quad (4)$$

где Δ_3 – отрезок, не пересекающий $\Delta_1 \cup \Delta_2$, и $f_3 > 0$ почти всюду на D_3 . В таком случае для $\Delta_1 = \Delta_2$ предел в (3) существует и описывается также некоторой двумерной векторной задачей равновесия, которая отлична от задачи, соответствующей случаю $\overset{\circ}{\Delta}_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ (см. [3]).

В настоящей работе мы рассматриваем задачу существования и характеристики предела в (3) для случая, когда $\Delta_1 \subset \Delta_2$, $\overset{\circ}{\Delta}_2 \cap \Delta_3 = \emptyset$. Соответствующая задача равновесия рассмотрена в следующем параграфе; она обобщает упомянутые выше задачи равновесия, относящиеся к случаям Анжелеско и Никишина.

§ 2. Векторная задача равновесия.

Основной результат работы. Сходимость потенциалов

В общей форме векторная задача равновесия рассматривается в работе [3], где имеются дальнейшие ссылки на оригинальные работы (в частности, см. [1]). Здесь приводится интересующий нас частный случай.

Мы используем стандартные обозначения: $M(F)$ – множество положительных борелевских мер μ с компактным носителем $S_\mu \subset F$,

$$V^\mu(z) = \int \log \frac{1}{|x-z|} d\mu(x)$$

– логарифмический потенциал меры μ ,

$$[\mu, \nu] = \int V^\mu d\nu = \int V^\nu d\mu$$

– взаимная энергия мер μ и ν , $|\mu| = \mu(\mathbb{C})$ – норма меры.

Для вектор-компакта $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, где F_i , $i = 1, 2, 3$, – объединение конечного числа отрезков на вещественной прямой и множества F_i не имеют общих внутренних точек, введем класс вектор-мер

$$\vec{M}(\vec{F}) = \{(\mu_1, \mu_2, \mu_3) : \mu_i \in M(F_i), |\mu_1| \leq 1, |\mu_1| + |\mu_2| = 2, |\mu_2| = |\mu_3| + 1\}.$$

Рассмотрим следующий функционал энергии:

$$J(\vec{\mu}) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}[\mu_i, \mu_j], \quad A = \|A_{ij}\|_{i,j=1}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

ЛЕММА 1. Существует единственная мера $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \vec{M}(\vec{F})$, минимизирующая энергию в этом классе:

$$J(\vec{\lambda}) = \min_{\mu \in \vec{M}(\vec{F})} J(\vec{\mu}). \quad (6)$$

Прежде чем переходить к доказательству леммы 1, сформулируем основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА. Пусть $\Delta_1 \subset \Delta_2$ и функции f_1, f_2 удовлетворяют условию (4). Тогда предел (3) существует и $\chi = \lambda_1 + \lambda_2$, где $F_1 = \Delta_2 \setminus \Delta_1$, $F_2 = \Delta_1$, $F_3 = \Delta_3$.

Утверждение теоремы частично перекрывается с утверждением, анонсированным в работе [7] (см. также [8] и ссылки в этой работе).

Продолжим сейчас обсуждение задачи равновесия (5), (6). Приведем характеристику равновесной (экстремальной) меры $\vec{\lambda}$ в терминах векторных потенциалов

$$W_j(x; \vec{\mu}) = \sum_{i=1}^3 A_{ij} V^{\mu_i}(x), \quad \vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \vec{M}.$$

ЛЕММА 2. Если $|\lambda_1| \in (0, 1)$, то экстремальная мера $\vec{\lambda}$ в (6) однозначно определяется следующими условиями равновесия:

$$W_j(x; \vec{\lambda}) \begin{cases} = w_j = w_j(\vec{\lambda}), & x \in S_{\lambda_j}, \\ \geq w_j, & x \in F_j, \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, \quad (7)$$

$$w_1(\vec{\lambda}) = w_2(\vec{\lambda}) + w_3(\vec{\lambda}). \quad (8)$$

В случае $|\lambda_1| = 0$ (множество F_1 “мало”) задача равновесия вырождается в двумерную задачу Никишина. Если $|\lambda_1| = 1$ (множество F_2 “мало” или множество F_3 “мало”), то задача вырождается в двумерную задачу Анжелеско.

Утверждения лемм 1 и 2 являются некоторыми обобщениями утверждений А и В теоремы 1 в [3]. Точнее, задача (6) минимизации энергии J в классе $\vec{M}(\vec{F})$ близка к аналогичной задаче минимизации в классе

$$\vec{M}_\theta(\vec{F}) = \{(\mu_1, \mu_2, \mu_3) : \mu_i \in M(F_i), |\mu_1| = \theta, |\mu_2| = 2 - \theta, |\mu_3| = 1 - \theta\}.$$

В [3] доказывается, что при каждом фиксированном $\theta \in [0, 1]$ существует единственная мера $\vec{\lambda}_\theta \in \vec{M}_\theta(\vec{F})$, для которой

$$J(\vec{\lambda}_\theta) = \min_{\mu \in \vec{M}_\theta(\vec{F})} J(\mu); \quad (9)$$

для этой меры выполняются соотношения (7), которыми она однозначно определяется. Итак, в [3] θ фиксировано, в то время как сейчас этот параметр является переменной, значение которой должно быть найдено из условия минимизации энергии. Для доказательства леммы 1 эта разница несущественна. Существование и единственность решения $\vec{\lambda}$ задачи (6) доказывается в точности тем же способом, что и для задачи (9) (множество $\vec{M}(\vec{F})$ выпукло так же, как и $\vec{M}_\theta(\vec{F})$). Для $\theta_0 = |\lambda_1|$ имеем $\vec{\lambda} \in \vec{M}_{\theta_0}(\vec{F})$. Отсюда получаем $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_{\theta_0}$ и, следовательно, выполняются соотношения (7).

Переходим к лемме 2. Если $\theta_0 = 0$ или $\theta_0 = 1$, то доказательство сводится к ссылке на ту же теорему 1 в [3]. Для $\theta_0 \in (0, 1)$ мы должны показать, что (8) эквивалентно следующему соотношению:

$$J(\vec{\lambda}_{\theta_0}) = \min_{\theta \in (0,1)} J(\vec{\lambda}_\theta) \quad (10)$$

(ясно, что соотношения (9) и (10) в совокупности эквивалентны (6) с $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_{\theta_0}$). Эквивалентность (7) и (10) вытекает из непосредственно проверяемого тождества (его скалярный вариант имеется в [9])

$$J(\vec{\lambda} + t(\vec{\mu} - \vec{\lambda})) - J(\vec{\lambda}) = 2t \sum_{j=1}^3 \int W_j(x; \lambda) d(\mu_j - \lambda_j) + t^2 J(\vec{\mu} - \vec{\lambda}),$$

где $t \in [0, 1]$, $\vec{\mu}, \vec{\lambda} \in \vec{M}(\vec{F})$. Отметим, что это тождество позволяет непосредственно доказать лемму 2.

Введем еще специальный символ для обозначения сходимости полиномов, соответствующих слабо сходящимся дискретным мерам. Пусть $P_n \in \mathbb{P}_n$ – последовательность полиномов, имеющих единичный старший коэффициент, и $\frac{1}{n}\chi(P_n) \xrightarrow{*} \mu$. В таком случае будем писать $|P_n|^{1/n} \xrightarrow{P} \exp\{-V^\mu\}$. Сходимость $\xrightarrow{*}$ есть сходимость в среднем, равномерная со стороны верхних значений, в частности, для любого отрезка Δ и любой меры σ на Δ с условием $\sigma'(x) > 0$ почти всюду на Δ имеем

$$\max_{\Delta} |P_n(x)|^{1/n} \rightarrow \max_{\Delta} e^{-V^\mu(x)}, \quad \left(\int_{\Delta} |P_n(x)| d\sigma(x) \right)^{1/n} \rightarrow \max_{\Delta} e^{-V^\mu(x)}$$

(см., например, [1]).

§ 3. Доказательство теоремы

Продолжим функцию f_1 с отрезка Δ_1 на отрезок $\Delta_2 \supset \Delta_1$, полагая $f_1 \equiv 0$ на $\Delta_2 \setminus \Delta_1$. Теперь интеграл по Δ_1 в (1) можно понимать как интеграл по Δ_2 . Складывая соотношения (1) и (2), получаем

$$\int_{\Delta_2} Q_{2n}(x) L_n(x) f(x) dx = 0 \quad \forall L_n \in \mathcal{L}_n, \quad (11)$$

где $f(x) = f_1(x)$, $x \in \Delta_1$, $f(x) = f_2(x)$, $x \in \Delta_2 \setminus \Delta_1$ и $\mathcal{L}_n$ – класс всех функций L_n вида

$$L_n(x) = \begin{cases} q_2(x) \hat{f}_3(x) + q_1(x), & x \in \Delta_1, \\ q_2(x), & x \in \Delta_2 \setminus \Delta_1, \end{cases} \quad q_1, q_2 \in \mathbb{P}_{n-1}. \quad (12)$$

Далее мы обозначаем через N_P множество нулей произвольного многочлена P . Пусть $G \in \mathbb{P}_{2n-2}$ – многочлен вида $G = \omega \Omega$, где $\omega \in \mathbb{P}_m$, $m \leq n-1$, $N_\omega \subset \Delta_2 \setminus \Delta_1$, $\Omega \in \mathbb{P}_{2n-m-2}$, $N_\Omega \subset \Delta_1$. Покажем, что для всякого такого многочлена G существует (единственная) функция $L_n = L_n(x; G)$ вида (12),

которая делится на G , т.е. функция $L_n(x; G)/G(x)$ голоморфна в нулях G . Построение этой функции осуществляется следующим образом. Согласно (12) для построения функции L_n нужно указать пару многочленов $q_1, q_2 \in \mathbb{P}_{n-1}$; полагаем

$$q_2 = q\omega, \quad (13)$$

где ω фиксировано выше как часть G , а пара $q \in \mathbb{P}_{n-m-1}$, $q_1 \in \mathbb{P}_{n-2}$ определяется из интерполяционной задачи

$$\frac{q_2 \hat{f}_3 + q_1}{\Omega} \in H(N_\Omega), \quad (14)$$

т.е. рациональная функция $-q_1/q_2$ с частично фиксированными полюсами интерполирует $\hat{f}_3$ в нулях Ω . Полиномы q_1, q_2 , решающие задачу интерполяции (13), (14), удовлетворяют известным соотношениям

$$\int_{\Delta_3} q(x)p(x) \left(\frac{\omega}{\Omega} f_3 \right) (x) dx = 0 \quad \forall p \in \mathbb{P}_{n-m-2}, \quad (15)$$

$$(q_2 \hat{f}_3 + q_1)(x) = \frac{\Omega(x)}{q(x)} \int_{\Delta_3} q^2(t) \left(\frac{\omega}{\Omega} f_3 \right) (t) \frac{dt}{x-t}, \quad x \notin \Delta_3 \quad (16)$$

(см., например, [10]). Вес $\omega f_3/\Omega > 0$ почти всюду на Δ_3 (считаем, что Δ_3 находится справа от Δ_2), так что из соотношений ортогональности (15) вытекает, что $N_q \subset \Delta_3$. Далее, обозначим

$$I(x) = I(x, G) = \int_{\Delta_3} q^2(t) \left(\frac{\omega}{\Omega} f_3 \right) (t) \frac{dt}{x-t}, \quad x \notin \Delta_3$$

(эта функция не меняет знак на Δ_2). Теперь положим

$$L_n(x; G) = \begin{cases} (\omega q)(x), & x \in \Delta_2 \setminus \Delta_1, \\ (\Omega I/q)(x), & x \in \Delta_1. \end{cases} \quad (17)$$

Тогда функция L_n вида (12) и делится на многочлен $G = \omega\Omega$. Отметим, что функция $L_n(x; G)/G(x)$ может менять знак на Δ_2 только в двух точках – концевых точках Δ_1 . Отсюда вытекает, что все нули знаменателя Эрмита–Паде, кроме, быть может, пяти, принадлежат Δ_2 .

ЛЕММА 3. Пусть последовательность многочленов $G_{2n-2} = \omega_n \Omega_n \in \mathbb{P}_{2n-2}$ такова, что $\deg \omega_n \leq n-1$ и

$$\frac{1}{n} \chi(\omega_n) \xrightarrow{*} \mu_\omega, \quad \frac{1}{n} \chi(\Omega_n) \xrightarrow{*} \mu_\Omega.$$

Тогда для соответствующей последовательности $L_n = L_n(x; G_{2n-2})$ (см. (17), где ω, q, Ω, I заменяются на $\omega_n, q_n, \Omega_n, I_n$) имеем:

- (i) $\frac{1}{n} \chi(q_n) \xrightarrow{*} \mu_q$, причем $2V^{\mu_q} + V^{\mu_\omega} - V^{\mu_\Omega} \begin{cases} = w, & x \in S_{\mu_q}, \\ \geq w, & x \in \Delta_3; \end{cases}$
- (ii) $|I_n(x)|^{1/n} \rightarrow e^{-w}$ равномерно по $x \in \Delta_1$;
- (iii) $|L_n(x)|^{1/n} \xrightarrow{P} \begin{cases} \exp\{-V^{\mu_q}(x) - V^{\mu_\omega}(x)\}, & x \in \Delta_2 \setminus \Delta_1, \\ \exp\{-V^{\mu_\Omega}(x) + V^{\mu_q}(x) - w\}, & x \in \Delta_1. \end{cases}$

Утверждения (i) и (ii) леммы являются следствиями общей теоремы об асимптотике ортогональных многочленов с переменным весом (см. [10]); (iii) следует из (i), (ii) и замечания о сходимости $\xrightarrow{P}$ в § 2.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы. Выделим слабо сходящуюся подпоследовательность

$$\frac{1}{n}\chi(Q_{2n}) \xrightarrow{*} \chi, \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \Lambda. \quad (18)$$

Обозначим

$$\mu_\omega = \chi|_{\Delta_2 \setminus \Delta_1}, \quad \mu_\Omega = \chi|_{\Delta_1}. \quad (19)$$

Имеем

$$\theta := |\mu_\omega| \leq 1, \quad |\mu_\Omega| = 2 - \theta.$$

Введем еще равновесную меру μ_q на Δ_3 в поле $\frac{1}{2}V^{\mu_\omega - \mu_\Omega}$ с нормой $|\mu_q| = 1 - \theta$,

$$W_3(x) := 2V^{\mu_q}(x) + V^{\mu_\omega - \mu_\Omega}(x) \begin{cases} = w_3 = \text{const}, & x \in S_{\mu_q}, \\ \geq w_3, & x \in \Delta_3. \end{cases} \quad (20)$$

Теорема будет доказана, если мы докажем теперь, что $\vec{\lambda} = (\mu_\omega, \mu_\Omega, \mu_q)$ – равновесная вектор-мера с $F_1 = \Delta_2 \setminus \Delta_1$, $F_2 = \Delta_1$, $F_3 = \Delta_3$. Для этого согласно лемме 2 достаточно доказать следующие три соотношения:

$$W_1(x) := 2V^{\mu_\omega}(x) + V^{\mu_\Omega + \mu_q}(x) \begin{cases} = w_1 = \text{const}, & x \in S_{\mu_\omega}, \\ \geq w_1, & x \in \Delta_2 \setminus \Delta_1; \end{cases} \quad (21)$$

$$W_2(x) := 2V^{\mu_\Omega} + V^{\mu_\omega - \mu_q} \begin{cases} = w_2 = \text{const}, & x \in S_{\mu_\Omega}, \\ \geq w_2, & x \in \Delta_1; \end{cases} \quad (22)$$

$$w_1 = w_2 + w_3. \quad (23)$$

Положим

$$H(x) = \begin{cases} e^{-W_2(x)}, & x \in \Delta_2 \setminus \Delta_1, \\ e^{-W_1(x) - w_3}, & x \in \Delta_1. \end{cases}$$

Соотношения (22), (23) в совокупности эквивалентны следующему:

$$H(x) \begin{cases} = M = e^{-w_1} = e^{-(w_2 + w_3)}, & x \in S_\chi, \\ \leq M, & x \in \Delta_2. \end{cases} \quad (24)$$

Предположим, что (24) не выполняется. Тогда найдется точка $x_0 \in S_\chi$ такая, что $H(x_0) < M = \max_{\Delta} H(x)$. Значит, найдется окрестность $\Delta_0 = (a, b)$ точки x_0 такая, что

$$\max_{\Delta_0} H(x) = M_0 < M.$$

Из условия $x_0 \in S_\chi$ следует, что число нулей полинома Q_{2n} в Δ_0 неограниченно растет. Пусть $S_n \in \mathbb{P}_6$ – полином с нулями на Δ_0 (степени 6), который делит Q_{2n} :

$$Q_{2n}(x) = S_n(x)G_{2n-6}(x).$$

Далее, мы можем представить $G_{2n-6}(x)$ в виде

$$G_{2n-6}(x) = \omega_n \Omega_n$$

(нули ω_n лежат на $\Delta_2 \setminus \Delta_1$, нули Ω_n лежат на Δ_1 ; те ≤ 5 нулей многочлена Q_{2n} , которые не лежат на Δ_2 , можно отнести, например, к ω_n) и в силу (18) и (19) получаем

$$\frac{1}{n} \chi(\omega_n) \xrightarrow{*} \mu_\omega, \quad \frac{1}{n} \chi(\Omega_n) \xrightarrow{*} \mu_\Omega.$$

Условия леммы 3 выполнены и для функции $L_{n-2}(x) = L_n(x; G_{2n-6})$ имеем соотношения (i)–(iii). Далее, в силу (17) имеем

$$Q_{2n}(x)L_{n-2}(x) = \begin{cases} S_n(x)\omega_n^2(x)q_n(x)\Omega_n(x), & x \in \Delta_2 \setminus \Delta_1, \\ \frac{S_n(x)\Omega_n^2(x)I_n(x)}{q_n(x)}, & x \in \Delta_1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $Q_{2n}L_{n-2}$ меняет знак на $\Delta_2 \setminus \Delta_0$ не более чем в двух точках – концевых точках интервала $\Delta_0 = (a, b)$. Положим

$$L_n(x) = (x-a)^{s_1}(x-b)^{s_2}L_{n-2}(x) \in \mathcal{L}_n,$$

где $s_1 = 1$, если $Q_{2n}L_{n-2}$ меняет знак в точке a , и $s_1 = 0$ в противном случае; то же самое справедливо и для s_2 . Таким образом, произведение $Q_{2n}L_n$ не меняет знак на $\Delta_2 \setminus \Delta_0$.

Из леммы 3 и определений следует, что

$$Q_{2n}L_n \xrightarrow{P} H, \quad x \in \Delta_2.$$

Следовательно,

$$\left| \int_{\Delta_2 \setminus \Delta_0} Q_{2n}(x)L_n(x)f(x) dx \right|^{1/n} \rightarrow M.$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Delta_0} Q_{2n}(x)L_n(x)f(x) dx \right|^{1/n} \\ \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Delta_0} |Q_{2n}(x)L_n(x)f(x)| dx \right)^{1/n} = M_0 < M. \end{aligned}$$

Тем самым, при достаточно больших n получаем

$$\left| \int_{\Delta_2 \setminus \Delta_0} Q_{2n}(x)L_n(x)f(x) dx \right| > \left| \int_{\Delta_0} Q_{2n}(x)L_n(x)f(x) dx \right|,$$

что противоречит равенству

$$\int_{\Delta_2} Q_{2n}(x)L_n(x)f(x) dx = 0.$$

Теорема доказана.

Список литературы

- [1] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **157**, МИАН, М., 1981, 31–48; англ. пер.: А. А. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “On convergence of simultaneous Padé approximants for systems of functions of Markov type”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **157** (1983), 31–50.
- [2] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988; англ. пер.: Е. М. Nikishin, V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Transl. Math. Monogr., **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [3] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин, “Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа”, *Матем. сб.*, **188**:5 (1997), 33–58; англ. пер.: А. А. Gonchar, E. A. Rakhmanov, V. N. Sorokin, “Hermite–Padé approximants for systems of Markov-type functions”, *Sb. Math.*, **188**:5 (1997), 671–696.
- [4] H. Stahl, “Asymptotics of Hermite–Padé polynomials and related convergence results – a summary of results”, *Nonlinear numerical methods and rational approximation* (Wilrijk, 1987), Math. Appl., **43**, Reidel, Dordrecht, 1988, 23–53.
- [5] Е. М. Никишин, “О совместных аппроксимациях Паде”, *Матем. сб.*, **113(155)**:4(12) (1980), 499–519; англ. пер.: Е. М. Nikishin, “On simultaneous Padé approximants”, *Math. USSR-Sb.*, **41**:4 (1982), 409–425.
- [6] Е. М. Никишин, “Об асимптотике линейных форм для аппроксимаций Паде”, *Изв. вузов. Матем.*, 1986, № 2, 33–41; англ. пер.: Е. М. Nikishin, “The asymptotic behavior of linear forms for joint Padé approximations”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **30**:2 (1986), 43–52.
- [7] А. И. Аптекарев, “Асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для пары функций с точками ветвления”, *Докл. РАН*, **422**:4 (2008), 443–445; англ. пер.: А. И. Aptekarev, “Asymptotics of Hermite–Padé approximants for two functions with branch points”, *Dokl. Math.*, **78**:2 (2008), 717–719.
- [8] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, “Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде”, *Матем. сб.*, **201**:2 (2010), 29–78; англ. пер.: А. И. Aptekarev, V. G. Lysov, “Systems of Markov functions generated by graphs and the asymptotics of their Hermite–Padé approximants”, *Sb. Math.*, **201**:2 (2010), 183–234.
- [9] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций”, *Матем. сб.*, **134(176)**:3(11) (1987), 306–352; англ. пер.: А. А. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium distributions and degree of rational approximation of analytic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **62**:2 (1989), 305–348.
- [10] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов”, *Матем. сб.*, **125(167)**:1(9) (1984), 117–127; англ. пер.: А. А. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials”, *Math. USSR-Sb.*, **53**:1 (1986), 119–130.

Е. А. Рахманов (E. A. Rakhmanov)
 University of South Florida, Tampa, FL, USA;
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: rakhmano@shell.cas.usf.edu

Поступила в редакцию
 06.08.2009 и 05.08.2010