Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Кочергин, Невырожденные неподвижные точки и перемешивание в потоках на двумерном торе, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 8, 83–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm762>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 11:52:47

УДК 517.987.5+517.938

А. В. Кочергин

Невырожденные неподвижные точки и перемешивание в потоках на двумерном торе

Усилен результат Я. Г. Синая и К. М. Ханина о перемешивании в специальном потоке над поворотом окружности с функцией, имеющей асимметричные логарифмические особенности.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение и формулировка результатов

Начало активным исследованиям метрических свойств потоков на двумерном торе было положено работой А. Н. Колмогорова [1] и его докладом на Математическом конгрессе в Амстердаме в 1954 г. [2]. В частности, он показал, что в типичном случае гладкий поток на двумерном торе без неподвижных точек и с гладкой инвариантной мерой гладко сопряжен с иррациональной обмоткой тора и тем самым представляет собой условно периодическое движение. Кроме того, он высказал утверждение, что в специальном потоке, построенном по повороту окружности и гладкой функции f , можно добиться слабого перемешивания за счет резонансных соотношений между углом поворота и членами ряда Фурье функции f .

Но получить сильное перемешивание в гладких и даже липшицевых потоках на двумерном торе без неподвижных точек нельзя [3]. Его можно добиться либо непрерывной заменой времени [4], либо встраиванием в поток вырожденных неподвижных точек [5].

Перемешивание в таких потоках (впрочем, как и слабое перемешивание) возникает за счет различного времени возвращения соседних точек, в результате чего со временем маленький прямоугольник сильно растягивается вдоль траекторий. В первом случае разность накапливается в результате резонансных соотношений между отображением последования и функцией возвращения. При наличии вырожденных особых точек такое растяжение образуется за счет различного замедления движения точек в окрестности неподвижной точки.

Заметим, что замедления движения точек в окрестности невырожденного седла, вообще говоря, не хватает для перемешивания [6]: разбегание точек при прохождении с одной стороны от неподвижной точки компенсируется при прохождении с другой стороны.

В работе В. И. Арнольда [7] естественным образом возникли примеры потоков на двумерном торе, фазовое пространство которых распадается на ячейки, ограниченные замкнутыми сепаратрисами невырожденных особых точек и заполненные периодическими траекториями, и эргодическую компоненту, в которой траектория проходит вблизи неподвижной точки с одной стороны чаще, чем с другой.

Поток на эргодической компоненте изоморфен специальному потоку, построенному по повороту окружности и функции, имеющей асимметричные логарифмические особенности. В работе [6] была высказана гипотеза о том, что такие потоки могут перемешивать. Я. Г. Синай и К. М. Ханин [8] доказали это при некотором ограничении на скорость аппроксимации угла поворота.

В настоящей работе ослаблены эти ограничения в общем асимметричном случае. Кроме того, сформулирована теорема о перемешивании для любых иррациональных углов поворота в специальном потоке над поворотом окружности с *сильно асимметричной* функцией с логарифмическими особенностями. Доказательство этой теоремы будет дано в следующей публикации.

Приведем необходимые определения и точные формулировки.

Будем говорить, что функция $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}_+$, по которой строится специальный поток, имеет логарифмические особенности, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) f имеет K особых точек $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_K$;
- 2) $f \in C^1(\mathbb{S}^1 \setminus \bigcup_{i=1}^K \bar{x}_i)$;
- 3) существует такое $c > 0$, что для любого x из области определения $f(x) \geq c > 0$;
- 4) для каждого $i = 1, \dots, K$

$$f'(x) = -\frac{1}{\{x - \bar{x}_i\}}(A_i + o(1)), \quad x \rightarrow \bar{x}_i + 0, \quad (1.1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\{\bar{x}_i - x\}}(B_i + o(1)), \quad x \rightarrow \bar{x}_i - 0, \quad (1.2)$$

причем $A_i, B_i > 0$.

Обозначим

$$A = \sum_{i=1}^K A_i, \quad B = \sum_{i=1}^K B_i.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию f назовем *симметричной*, если

$$A = B,$$

асимметричной, если

$$A \neq B,$$

и *сильно асимметричной*, если для каждого i

$$\operatorname{sgn}(A_i - B_i) = \operatorname{sgn}(A - B) \neq 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно показать, что из условий (1.1) и (1.2) на f' следуют условия на f :

$$f(x) = \ln \frac{1}{\{x - \bar{x}_i\}}(A_i + o(1)) \quad \text{при } x \rightarrow \bar{x}_i + 0, \quad (1.3)$$

$$f(x) = \ln \frac{1}{\{\bar{x}_i - x\}}(B_i + o(1)) \quad \text{при } x \rightarrow \bar{x}_i - 0. \quad (1.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На самом деле, достаточно потребовать выполнения условий $A_i \geq 0, B_i \geq 0$ вместо $A_i > 0, B_i > 0$.

Мы будем рассматривать поворот окружности $\mathbb{S}^1$ на иррациональный угол ρ : $T_\rho x := x + \rho \pmod{1}$. Для краткости, если это не вызовет недоразумений, вместо T_ρ будем писать просто T .

Пусть $\rho = [k_1, \dots, k_s, \dots]$ – разложение ρ в цепную дробь [9]. Через p_s/q_s обозначим s -ю подходящую к ρ дробь.

ТЕОРЕМА 1.1. Если f – асимметричная функция с логарифмическими особенностями, а иррациональный угол ρ удовлетворяет условию

$$\ln k_{n+1} = o(\ln q_n), \quad (*)$$

то специальный поток, построенный по повороту T_ρ и функции f , перемешивает.

В работе [8] Я. Г. Синая и К. М. Ханина на ρ наложено более сильное условие: $k_{n+1} \leq \text{const} \cdot n^{1+\gamma}$, где $0 < \gamma < 1$.

Нетрудно показать, что если для некоторого $\gamma > 0$, может быть и большего единицы, при всех n выполнено неравенство $k_{n+1} \leq \text{const} \cdot n^{1+\gamma}$, то число ρ удовлетворяет условию (*).

Некоторое усовершенствование методов настоящей работы позволяет доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.2. Если f – сильно асимметричная функция с логарифмическими особенностями, а ρ – произвольный иррациональный угол, то специальный поток, построенный по повороту T_ρ и функции f , перемешивает.

Доказательство этой теоремы будет приведено в следующей публикации.

§ 2. Определения и достаточное условие перемешивания

2.1. Напомним некоторые понятия.

Пусть $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – окружность. Координатой точки на окружности будем считать класс вещественных чисел с одинаковой дробной частью, как это следует из определения $\mathbb{S}^1$.

Функции $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ будем рассматривать как функции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с периодом 1.

Расстоянием между точками $x, y \in \mathbb{S}^1$ будем называть длину меньшей из двух дуг с концами в этих точках и будем обозначать его $|x - y|$.

На окружности $\mathbb{S}^1$ задано положительное направление. Интервалом (x, y) будем называть дугу, которая получается при движении в положительном направлении от x к y . Длина такого интервала равна $\{y - x\}$. Аналогично определяются отрезки и полуинтервалы.

Пусть расстояние $|x - y| < 1/2$; будем говорить, что точка x левее, чем y , если $|x - y| = \{y - x\}$. Исходя из этого определяется понятие левой и правой полукрестностей с радиусом меньшим $1/2$.

Лебеговскую меру на окружности будем обозначать μ , в интегралах по этой мере будем употреблять символ dx .

Длину отрезка или интервала $C \subset \mathbb{S}^1$ будем обозначать $|C|$.

Пусть $T: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ – сохраняющий лебеговскую меру μ автоморфизм, $f \in L_1(\mathbb{S}^1)$, $f(x) \geq c > 0$ при всех $x \in \mathbb{S}^1$.

Фазовым пространством *специального потока* служит множество

$$Y = \{(x, y) : x \in \mathbb{S}^1, \quad 0 \leq y < f(x)\},$$

мера μ_2 на Y порождается прямым произведением $dx \, dy$, причем она нормируется так, что $\mu_2(Y) = 1$. Мы для определенности будем считать, что $\int_{\mathbb{S}^1} f(x) \, dx = 1$.

Специальным потоком, построенным по T и функции f , называется однопараметрическая группа преобразований $\{S^t\}$ пространства Y , сохраняющая меру μ_2 и действующая при $t \geq 0$ по формуле

$$S^t(x, y) = \left(T^n x, y + t - \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \right), \quad (2.1)$$

где n однозначно находится из двойного неравенства

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \leq y + t < \sum_{k=0}^n f(T^k x). \quad (2.2)$$

При $t < 0$ действие определяется очевидным образом как обратное отображение.

Геометрически можно представлять себе пространство Y как множество точек между осью абсцисс и графиком $y = f(x)$, а действие потока — как движение с единичной скоростью по вертикальной прямой с переходом из точки $(x, f(x))$ в точку $(Tx, 0)$.

Множество $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ будем называть основанием пространства Y и иногда для простоты, если это не вызовет недоразумений, отождествлять его с окружностью $\mathbb{S}^1$. В частности, для точек основания вместо $S^t(x, 0)$ будем иногда писать просто $S^t x$.

Поток $\{S^t\}$ называется *перемешивающим*, если для любых двух измеримых множеств $Q_1, Q_2 \subset Y$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_2(S^t Q_1 \cap Q_2) = \mu_2(Q_1) \cdot \mu_2(Q_2).$$

2.2. Перемешивание в потоке над поворотом окружности может возникать только за счет того, что изначально соседние точки, за разное время проходя вертикаль от “пола” до “потолка”, через некоторое время разбегаются достаточно далеко вдоль траекторий. В результате маленький горизонтальный прямоугольник оказывается почти равномерно распределенным вдоль длинной и узкой полосы, идущей вдоль траекторий. Эта полоска равномерно как бы наматывается на фазовое пространство.

Основным инструментом изучения перемешивающих свойств специального потока будут служить *биркгофовы суммы*: для $r \in \mathbb{N}$

$$f^r(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f(T^k x), \quad f^{-r}(x) = -f^r(T^{-r}x), \quad f^0(x) \equiv 0. \quad (2.3)$$

Действительно, для любого момента времени t и любого целого r

$$S^t x = S^{t-f^r(x)}(T^r x). \quad (2.4)$$

Это означает, что с помощью функции f^r можно описывать растяжение отрезков разбиения окружности вдоль траекторий, причем почти равномерному размещению отрезка разбиения по фазовому пространству соответствует сильное и почти равномерное растяжение биркгофовых сумм.

Тождество (2.4) легко следует из определения специального потока и следующих очевидных *свойств биркгофовых сумм*:

- а) $f^{r+1}(x) > f^r(x)$;
- б) $f^{r+s}(x) = f^r(x) + f^s(T^r x)$.

2.3. Сформулируем определения и теоремы, с помощью которых докажем, что поток перемешивает. Аналогичные, но формально отличающиеся определения и теоремы использованы в работах [4], [5], [10] и [11].

Пусть $C \subset \mathbb{S}^1$, φ – вещественная функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $\varphi|C$ назовем ε -*равномерно распределенной* (ε -р.р.) в отрезке $[a, b]$, если для любого отрезка $[c, d] \subset [a, b]$ выполняется неравенство

$$\mu(\varphi^{-1}([c, d]) \cap C) > \mu(C) \frac{(d - c)}{(b - a)} (1 - \varepsilon). \quad (2.5)$$

(Через $\varphi|C$ обозначаем ограничение функции φ на множество C .)

Пусть $\varepsilon > 0$, $H > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $\varphi|C$ называется (ε, H) -*равномерно распределенной*, если существует такой отрезок $[a, b]$, что

$$b - a > H \quad (2.6)$$

и $\varphi|C$ является ε -р.р. в отрезке $[a, b]$.

Для почти каждого $x \in \mathbb{S}^1$ и $t > 0$ через $\mathcal{R}(t, x)$ обозначим одноточечное множество, в которое входит такое целое r , что

$$f^r(x) \leq t < f^{r+1}(x).$$

Иначе говоря, если $r \in \mathcal{R}(t, x)$, то r – это число скачков, которое совершит точка $(x, 0)$ под действием потока S^t за время t .

Для любого измеримого множества $X \subset \mathbb{S}^1$ обозначим

$$\mathcal{R}(t, X) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{R}(t, x).$$

Следующее достаточное условие перемешивания доказывается так же, как аналогичные теоремы в [10] и [11].

ТЕОРЕМА 2.1 (достаточное условие перемешивания). Пусть для некоторого $t_0 > 0$ и для любого $t > t_0$ заданы:

- конечное частичное разбиение ξ_t окружности $\mathbb{S}^1$, элементами которого являются отрезки $\xi_t = \{C_i^{(t)}\}$, причем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \max_{C_i^{(t)} \in \xi_t} |C_i^{(t)}| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu([\xi_t]) = 1$$

(через $[\xi_t]$ обозначено объединение элементов ξ_t);

- положительные функции $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, $H(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Если для любого $t > t_0$ и любого номера $r \in \mathcal{R}(t, [\xi_t])$, а также для любого $C \in \xi_t$ биркгофова сумма $f^r|_C$ $(\varepsilon(t), H(t))$ -равномерно распределена, то специальный поток, построенный по повороту окружности T и функции f , перемешивает.

В этой работе мы будем использовать другое, легче проверяемое достаточное условие перемешивания, в котором требование

$$\dots \text{ для любого номера } r \in \mathcal{R}(t, [\xi_t]) \dots$$

заменяется требованием

$$\dots \text{ для любого номера } r \in (t/2, 2t) \dots$$

Это *модифицированное* достаточное условие легко следует из предыдущего и из эргодической теоремы Биркгофа.

В §6 для случая $\ln k_{n+1} = o(\ln q_n)$ мы построим бесконечно возрастающую при $r \rightarrow +\infty$ последовательность чисел $e(r)$ и для каждого достаточно большого t такое частичное разбиение ξ_t , что при $t \rightarrow +\infty$ будут выполнены условия:

$$\mu([\xi_t]) \rightarrow 1, \quad (2.7)$$

$$\max_{C \in \xi_t} |C| \rightarrow 0, \quad (2.8)$$

$$\max_{r \in (t/2, 2t)} \max_{C \in \xi_t} \sup_{x \in C} \left| \frac{(f^r)'(x)}{(B-A)e(r)} - 1 \right| \rightarrow 0, \quad (2.9)$$

$$\max_{r \in (t/2, 2t)} \min_{C \in \xi_t} e(r) \cdot |C| \rightarrow +\infty. \quad (2.10)$$

Легко видеть, что при этом выполнены условия сформулированного выше модифицированного достаточного условия перемешивания.

В случае *сильно асимметричной функции f без ограничений на угол поворота* потребуются более тонкие оценки и более тонкий метод построения разбиения.

§3. Предварительная оценка биркгофовых сумм $(f^r)'$

Рассмотрим вспомогательные функции $u, v: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, которые можно рассматривать как функции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с периодом 1:

$$u(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1],$$

$$v(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \in [0, 1).$$

Для $i = 1, \dots, K$ положим

$$u_i(x) = u(x - \bar{x}_i), \quad v_i(x) = v(x - \bar{x}_i).$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Существует такая последовательность $\alpha(r)$, что*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \alpha(r) = 0 \quad (3.1)$$

и для всех x , кроме особых точек f^r , выполняется равенство

$$(f^r)'(x) = \sum_{i=1}^K (u_i^r(x)(A_i + \alpha_i^-(r, x)) + v_i^r(x)(B_i + \alpha_i^+(r, x))), \quad (3.2)$$

где

$$|\alpha_i^\pm(r, x)| \leq \alpha(r). \quad (3.3)$$

Доказательство теоремы опирается на две леммы. При их формулировке и доказательстве удобно считать, что в особых точках функция f определена и для всех i

$$f(\bar{x}_i) = 0.$$

ЛЕММА 3.1. *Функцию f можно представить в виде*

$$f = \sum_{i=1}^K (g_i + h_i), \quad (3.4)$$

где g_i, h_i удовлетворяют условиям:

- 1) для $i = 1, \dots, K$ $g_i \in C^1(\bar{x}_i, 1 + \bar{x}_i]$, $h_i \in C^1[\bar{x}_i, 1 + \bar{x}_i)$;
- 2) при $x \rightarrow \bar{x}_i + 0$

$$g_i'(x) = \frac{1}{\{x - \bar{x}_i\}}(-A_i + o(1)), \quad (3.5)$$

при $x \rightarrow \bar{x}_i - 0$

$$h_i'(x) = \frac{1}{\{\bar{x}_i - x\}}(B_i + o(1)). \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\delta > 0$ так, что δ меньше половины минимального расстояния между соседними особыми точками, и выделим вокруг особых точек попарно отделенные друг от друга δ -окрестности $U_1, \dots, U_K$: $U_i = (\bar{x}_i - \delta, \bar{x}_i + \delta)$.

Для $i = 1, \dots, K$ построим функции g_i так, чтобы

$$g_i|_{\overset{\circ}{U}_i^+} = f|_{\overset{\circ}{U}_i^+}, \quad g_i|_{U_i^-} = 0, \quad g_i \in C^1(\bar{x}_i, \bar{x}_i + 1], \quad g_i|_{U_j} = 0, \quad i \neq j,$$

и для $i = 1, \dots, K - 1$ построим h_i так, чтобы

$$h_i|_{\overset{\circ}{U}_i^-} = f|_{\overset{\circ}{U}_i^-}, \quad h_i|_{U_i^+} = 0, \quad h_i \in C^1[\bar{x}_i, \bar{x}_i + 1), \quad h_i|_{U_j} = 0, \quad i \neq j$$

($U_i^+ = [\bar{x}_i, \bar{x}_i + \delta)$, $\overset{\circ}{U}_i^+ = (\bar{x}_i, \bar{x}_i + \delta)$), аналогично определяются U_i^- и $\overset{\circ}{U}_i^-$).

Теперь положим

$$h_K = f - \sum_{i=1}^K g_i - \sum_{i=1}^{K-1} h_i.$$

Автоматически получается, что

$$h_K|_{\overset{\circ}{U}_K^+} = f|_{\overset{\circ}{U}_K^+}, \quad h_K|_{U_K^-} = 0,$$

а значит, (3.6) верно для h_K .

Разложение (3.4) следует из определения h_K . Соотношения (3.5) и (3.6), а также гладкость функций $g_1, \dots, g_K$ и $h_1, \dots, h_{K-1}$ следуют из их определения.

Осталось доказать, что $h_K \in C^1[\bar{x}_K, 1 + \bar{x}_K)$. По построению гладкость может нарушаться только в особых точках f .

Рассмотрим окрестность U_j , $j \leq K-1$. По построению $g_i|_{U_j} = 0$, $h_i|_{U_j} = 0$ при $i \neq j$, $i \leq K-1$, а также $g_K|_{U_j} = 0$. Кроме того,

$$(f - g_j - h_j)|_{U_j} = 0,$$

поэтому $h_K|_{U_j} = 0$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2 (об аппроксимации производных биркгофовых сумм). *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер r_0 , что при $r \geq r_0$ для каждого $x \in \mathbb{S}^1$ (и каждого i)*

$$|(g_i^r)'(x) - A_i u_i^r(x)| < \varepsilon |u_i^r(x)|, \quad |(h_i^r)'(x) - B_i v_i^r(x)| < \varepsilon v_i^r(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть только одну пару функций, например g_i^r и u_i , и для определенности считать, что $\bar{x}_i = 0$. Индекс i для краткости будем опускать.

Фиксируем $\varepsilon > 0$.

Возьмем числа $\delta_1 > \delta_2 > 0$, для которых выполнены условия:

1) для любого $x \in (0, \delta_1)$

$$|g'(x) - Au(x)| < \frac{\varepsilon}{2} |u(x)|, \quad (3.7)$$

что возможно в силу условия (3.5);

2)

$$\int_{\delta_1}^1 |g'(x) - Au(x)| dx < \frac{\varepsilon}{8} \int_{\delta_2}^{\delta_1} |u(x)| dx, \quad (3.8)$$

что возможно в силу расходимости (в точке $x = 0$) интеграла $\int_0^1 |u(x)| dx$.

Обозначим $I_1 = [\delta_1, 1]$, $I_2 = [\delta_2, \delta_1]$, $I_3 = (0, \delta_1)$, χ_1, χ_2, χ_3 — характеристические функции этих промежутков (рассматриваемых как промежутки окружности). Очевидны следующие соотношения (почти всюду):

$$\begin{aligned} (g')^r &= (\chi_1 g')^r + (\chi_3 g')^r, \\ u^r &= (\chi_1 u)^r + (\chi_3 u)^r, \end{aligned}$$

откуда

$$|(g')^r - Au^r| \leq |(\chi_1 g' - A\chi_1 u)^r| + |(\chi_3 g' - A\chi_3 u)^r|. \quad (3.9)$$

(Там, где это не вызовет недоразумений, мы опускаем аргументы.)

Так как функции $\chi_1 g'$, $\chi_1 u$, $\chi_2 g'$, $\chi_2 u$ ограничены, кусочно непрерывны и гладкие на участках непрерывности, то в силу строгой эргодичности поворота окружности найдется такое r_0 , что при $r \geq r_0$

$$|(\chi_1 g' - A\chi_1 u)^r| \leq 2r \int_{\delta_1}^1 |g'(x) - Au(x)| dx$$

и (с учетом знакопостоянства u , из которого следует равенство $|u^r| = |u|^r$)

$$|(\chi_2 u)^r| \geq \frac{r}{2} \int_{\delta_2}^{\delta_1} |u(x)| dx.$$

Сопоставив последние два соотношения с (3.8), получим неравенство

$$|(\chi_1 g' - A\chi_1 u)^r| < \frac{\varepsilon}{2} |(\chi_2 u)^r|.$$

В силу знакопостоянства u из включений $I_2 \subset I_3 \subset (0, 1]$ следуют неравенства $|(\chi_2 u)^r| \leq |(\chi_3 u)^r| \leq |u^r|$, откуда имеем

$$|(\chi_1 g' - A\chi_1 u)^r| < \frac{\varepsilon}{2} |u^r|. \quad (3.10)$$

Второе слагаемое из правой части (3.9) оценим с помощью (3.7): в силу знакопостоянства u почти всюду

$$|(\chi_3 g' - A\chi_3 u)^r| < \frac{\varepsilon}{2} |(\chi_3 u)^r| \leq \frac{\varepsilon}{2} |u^r|.$$

Подставив в (3.9) последнее неравенство и (3.10), получим требуемое неравенство

$$|(g')^r - Au^r| < \varepsilon |u^r|$$

почти всюду, что и требовалось доказать.

§ 4. Геометрия множества особых точек

4.1. Напомним некоторые факты из теории цепных дробей [9].

Пусть $\rho = [k_1, \dots, k_s, \dots]$ — разложение ρ в цепную дробь. Через p_s/q_s обозначим s -ю подходящую к ρ дробь. Известно, что p_s и q_s определяются рекуррентно:

$$\begin{aligned} p_{s+1} &= k_{s+1}p_s + p_{s-1}, \quad s \geq 1, & p_{-1} &= 1, \quad p_0 = 1, \\ q_{s+1} &= k_{s+1}q_s + q_{s-1}, \quad s \geq 1, & q_{-1} &= 0, \quad q_0 = 1. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\delta_s = q_s \rho - p_s,$$

тогда можно записать

$$\rho = \frac{p_s}{q_s} + \frac{\delta_s}{q_s}.$$

Известно, что $\delta_s = (-1)^s |\delta_s|$,

$$\frac{1}{q_{s+1} + q_s} < |\delta_s| < \frac{1}{q_{s+1}},$$

откуда

$$\frac{1}{q_{s+1}} \left(\frac{k_{s+1}}{k_{s+1} + 1} \right) < |\delta_s| < \frac{1}{q_{s+1}}.$$

Пусть

$$q_m \leq r < q_{m+1}. \quad (4.1)$$

Равенство

$$r = l_m q_m + \dots + l_0 q_0 \quad (4.2)$$

с целыми неотрицательными коэффициентами $l_m, \dots, l_0$ назовем *стандартным разложением* r , если выполнены следующие условия:

$$1 \leq l_m \leq k_{m+1}, \quad (4.3)$$

$$0 \leq l_n \leq k_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, m-1, \quad (4.4)$$

$$l_{n-1} q_{n-1} + \dots + l_0 q_0 < q_n, \quad n = 1, \dots, m. \quad (4.5)$$

Стандартное разложение однозначно определяется условиями (4.1), (4.2) и (4.5). Условия (4.3) и (4.4) являются следствиями; мы их фиксируем, так как они в дальнейшем часто фигурируют в оценках.

Если r представлено в виде (4.2) и при этом l_m может быть нулем, т.е. может быть, что $r < q_m$, то такое разложение назовем *квазистандартным*. Его мы будем использовать в случае, когда для r задан более широкий диапазон и неизвестно, какое слагаемое будет старшим.

4.2. Фиксируем точку $x_0 = 0$; она является особой точкой вспомогательных функций u и v , определенных в § 3.

Для любого натурального r пусть

$$X(r) = \{T^{-m} x_0, m = 0, 1, \dots, r-1\}$$

— множество особых точек функций u^r и v^r . Иногда, если это не вызовет недоразумений, мы будем обозначать это множество просто X .

Пусть q_s — знаменатель s -й подходящей к ρ дроби, $s > 2$. Рассмотрим множество точек

$$X(q_s) = \{T^{-m} x_0, m = 0, 1, \dots, q_s - 1\}.$$

Занумеруем эти точки в порядке следования в положительном направлении на окружности вычетами по модулю q_s , начиная с точки x_0 . Таким образом,

$$x_i = T^{-m_i} x_0 = \left\{ x_0 + \frac{i}{q_s} - \frac{m_i \delta_s}{q_s} \right\}, \quad (4.6)$$

$$0 \leq m_i \leq q_s - 1, \quad i \equiv -m_i p \pmod{q_s}.$$

Точки x_i , $i = 0, \dots, q_s - 1$, назовем *узловыми точками ранга s* . Иногда, если это необходимо, будем обозначать их $x_i^{(s)}$.

Обозначим

$$\Delta_s = \min_{0 \leq i \leq q_s - 1} \{x_{i+1} - x_i\}.$$

ЛЕММА 4.1. 1) Если $1 \leq k \leq q_s - 1$, то для любого i

$$\frac{k}{q_s} - \frac{1}{q_{s+1}} < \{x_{i+k} - x_i\} < \frac{k}{q_s} + \frac{1}{q_{s+1}}. \quad (4.7)$$

2) Для любого i расстояние $\{x_{i+1} - x_i\}$ между соседними узловыми точками удовлетворяет условиям

$$\{x_{i+1} - x_i\} = \Delta_s \quad \text{или} \quad \{x_{i+1} - x_i\} = \Delta_s + |\delta_s|, \quad (4.8)$$

где

$$\Delta_s = \frac{1}{q_s}(1 - q_{s-1}|\delta_s|); \quad (4.9)$$

кроме того, справедливы следующие неравенства:

$$k_{s+1}|\delta_s| < \Delta_s < (k_{s+1} + 1)|\delta_s|, \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{2q_s} < \Delta_s < \Delta_s + \delta_s < 2\Delta_s < \frac{2}{q_s}. \quad (4.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $x_i = T^{-m_i}x_0$, $x_{i+k} = T^{-m_{i+k}}x_0$, $0 \leq m_i, m_{i+k} \leq q_s - 1$, $-m_i p_s \equiv i \pmod{q_s}$, $-m_{i+k} p_s \equiv i + k \pmod{q_s}$. Тогда

$$\{x_{i+k} - x_i\} = \{(m_i - m_{i+k})\rho\} = \left\{ -(m_{i+k} - m_i) \left(\frac{p_s}{q_s} + \frac{\delta_s}{q_s} \right) \right\} = \frac{k}{q_s} + \frac{m_i - m_{i+k}}{q_s} \delta_s,$$

где

$$k \equiv -(m_{i+k} - m_i)p_s \pmod{q_s}, \quad |m_i - m_{i+k}| \leq q_s - 1, \quad 0 < k \leq q_s - 1.$$

Учитывая, что $|\delta_s| < 1/q_{s+1}$, получаем (4.7).

2) Согласно (4.6)

$$\begin{aligned} x_i &= \left\{ x_0 + \frac{i}{q_s} - \frac{m_i \delta_s}{q_s} \right\}, \quad -i \equiv m_i p_s \pmod{q_s}, \\ x_{i+1} &= \left\{ x_0 + \frac{i+1}{q_s} - \frac{m_{i+1} \delta_s}{q_s} \right\}, \quad -(i+1) \equiv m_{i+1} p_s \pmod{q_s}, \\ 0 &\leq m_i, m_{i+1} \leq q_s - 1, \end{aligned}$$

откуда

$$\{x_{i+1} - x_i\} = \frac{1}{q_s} - \frac{(m_{i+1} - m_i)}{q_s} \delta_s, \quad (m_{i+1} - m_i)p_s \equiv -1 \pmod{q_s}. \quad (4.12)$$

Из соотношения (см. [9; с. 12])

$$q_s p_{s-1} - p_s q_{s-1} = (-1)^s$$

следует, что $(-1)^s p_s q_{s-1} \equiv -1 \pmod{q_s}$, поэтому в силу взаимной простоты p_s и q_s имеем

$$m_{i+1} - m_i \equiv (-1)^s q_{s-1} \pmod{q_s}.$$

Поскольку $-(q_s - 1) \leq m_{i+1} - m_i \leq q_s - 1$, то $m_{i+1} - m_i$ может принимать только два значения:

$$m_{i+1} - m_i = (-1)^s q_{s-1}$$

или

$$m_{i+1} - m_i = (-1)^s (q_{s-1} - q_s).$$

Кроме того, $\delta_s = (-1)^s |\delta_s|$. Подставляя последние три соотношения в (4.12), получаем два возможных значения для $\{x_{i+1} - x_i\}$. Меньшее из этих значений есть Δ_s .

Неравенство (4.10) получается из (4.9) и неравенства $q_{s+1} < 1/|\delta_s| < q_{s+1} + q_s$:

$$\begin{aligned} k_{s+1} &= \frac{q_{s+1} - q_{s-1}}{q_s} < \frac{\Delta_s}{|\delta_s|} = \frac{1}{q_s} \left(\frac{1}{|\delta_s|} - q_{s-1} \right) \\ &< \frac{q_{s+1} + q_s - q_{s-1}}{q_s} = \frac{k_{s+1} q_s + q_s}{q_s}. \end{aligned}$$

Неравенство $2\Delta_s < 2/q_s$ следует сразу из (4.9), а неравенство $1/(2q_s) < \Delta_s$ получается из (4.9) и цепочки неравенств $2q_{s-1}|\delta_s| < (q_s + q_{s-1})|\delta_s| \leq q_{s+1}|\delta_s| < 1$.

Лемма доказана.

4.3. Пусть

$$r = l_s q_s, \quad 1 \leq l_s \leq k_{s+1}.$$

Рассмотрим множество

$$X^{(s)} = X^{(s)}(l_s q_s) = \{T^{-k} x_0, 0 \leq k \leq l_s q_s - 1\}.$$

Разобьем его на подмножества

$$\begin{aligned} X_i &= X_i^{(s)}(x_0, l_s q_s) = \{x_0 - (m_i + j q_s) \rho : \\ &\quad 0 \leq j \leq l_s - 1, i \equiv -m_i p_s \pmod{q_s}, 0 \leq m_i < q_s - 1\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Эти подмножества назовем *сгустками* ранга s , порожденными точкой x_0 . Номер i будем считать вычетом по модулю q_s .

Через $[X_i]$ обозначим наименьший отрезок, содержащий X_i , а через $|X_i|$ — длину этого отрезка.

4.4. Пусть теперь $l_s q_s < r < q_{s+1}$. Представим r в виде

$$r = l_s q_s + r', \quad 1 \leq l_s \leq k_{s+1}, \quad 0 < r' < q_s.$$

Разобьем множество $X = X(r)$ точек вида $T^{-k} x_0, 0 \leq k \leq r - 1$, на подмножества

$$\begin{aligned} \widehat{X}_i &= \widehat{X}_i^{(s)}(r) = \{x_{i,j} = x_0 - (m_i + j q_s) \rho : \\ &\quad 0 \leq m_i \leq q_s - 1, i \equiv -m_i p_s \pmod{q_s}, 0 \leq m_i + j q_s < r\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Номер i множества будем считать вычетом по модулю q_s . Сами множества $\widehat{X}_i$ будем называть *расширенными сгустками ранга s* , порожденными точкой x_0 .

Через $[\hat{X}_i]$ обозначим наименьший отрезок, содержащий все точки сгустка $\hat{X}_i$, а через $|\hat{X}_i|$ — длину этого отрезка.

Точки сгустков X_i , т.е. точки вида

$$x_{i,j} = x_0 - (m_i + jq_s)\rho, \quad 0 \leq j \leq l_s - 1,$$

будем называть *основными точками* ранга s , а в каждом сгустке будем их называть основными точками сгустка.

Точки расширенных сгустков, не являющиеся основными, т.е. точки $x_{i,l_s} \in \hat{X}_i$, назовем *дополнительными*.

Опишем свойства сгустков, из которых станет ясен сам термин.

ЛЕММА 4.2 (о свойствах сгустков). 1) *Сгусток X_i можно представить в виде*

$$X_i = \{x_{i,j} = x_i - j\delta_s, \quad 0 \leq j \leq l_s - 1\},$$

где x_i — узловые точки, определенные в соответствии с (4.6).

2) *Каждый сгусток состоит из l_s точек, расположенных на окружности с шагом $|\delta_s|$. Узловая точка x_i является одним из концов отрезка $[X_i]$: левым при нечетном s , правым при четном s .*

3) *Расширенный сгусток $\hat{X}_i$ либо совпадает с X_i (при $m_i \geq r'$), либо отличается на одну точку вида $x_i - l_s\delta_s$.*

4) *Второй индекс j из (4.13) нумерует точки сгустка по порядку: слева направо при нечетном s , справа налево — при четном.*

5) *Отрезки $[\hat{X}_i]$ попарно не пересекаются. Сгустки X_i занумерованы индексом i в порядке следования на окружности в положительном направлении.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\{x_0 - (m_i + jq_s)\rho\} = \{x_0 - m_i\rho - j(p_s + \delta_s)\} = \{x_0 - m_i\rho - j\delta_s\} = \{x_i - j\delta_s\},$$

где x_i — узловая точка, определенная в соответствии с (4.6), откуда следует п. 1). Остальные точки сгустка X_i получаются из x_i как арифметическая прогрессия с шагом $-\delta_s$. Расширенные сгустки $\hat{X}_i$, для которых $m_i < r'$, состоят из $l_s + 1$ точек, поскольку для них индекс j изменяется от 0 до l_s . Аналогично, те расширенные сгустки, для которых $r' \leq m_i \leq q_s - 1$, состоят из l_s точек, т.е. совпадают с X_i .

Отсюда следует, что расстояние между крайними точками расширенного сгустка равно либо $l_s|\delta_s|$, либо $(l_s - 1)|\delta_s|$, что не превосходит $k_{s+1}|\delta_s|$, откуда, учитывая (4.10), получаем

$$|\hat{X}_i| < \Delta_s. \quad (4.15)$$

Все сгустки расположены по одну сторону от одноименных узловых точек, причем точка x_i является концом отрезка $[\hat{X}_i]$, поэтому условие $[\hat{X}_i] \cap [\hat{X}_j] = \emptyset$ при $i \neq j$ следует из неравенства (4.15).

Теперь можно рассматривать порядок следования отрезков $[\hat{X}_i]$ на окружности, а их нумерация совпадает с нумерацией входящих в них узловых точек.

Лемма доказана.

4.5. Представим теперь r' в виде

$$r' = l_{s-1}q_{s-1} + r''.$$

Если $l_{s-1} > 0$, то из множества дополнительных точек, а их r' , выделим сгустки $X_i^{(s-1)}$ ранга $s-1$:

$$X_i^{(s-1)} = X_i^{(s-1)}(r) = X_i^{(s-1)}(l_{s-1}q_{s-1}) - l_s\delta_s.$$

Этих сгустков будет q_{s-1} по l_{s-1} точек в каждом. К некоторым из них, их r'' , добавляются дополнительные точки. Если $l_{s-1} = 0$, то основные сгустки $X_i^{(s-1)}$ ранга $s-1$ будут пусты, непустыми будут некоторые из расширенных.

Продолжая процесс, получаем разбиение множества $X = X(r) = \{T^{-j}x_0, j = 0, 1, \dots, r-1\}$ на классы сгустков:

ЛЕММА 4.3. *Множество $X = X(r) = \{T^{-j}x_0, j = 0, 1, \dots, r-1\}$ представимо в виде:*

$$\begin{aligned} X = X(r) &= \bigsqcup_{n=0}^s X^{(n)} \quad (X^{(n_1)} \cap X^{(n_2)} = \emptyset, \quad n_1 \neq n_2), \\ \widehat{X}^{(n)} &= \widehat{X}^{(n+1)} \setminus X^{(n+1)}, \quad n = 0, 1, \dots, s-1, \\ X^{(n)} &= \bigsqcup_{i=0}^{q_s-1} X_i^{(n)}, \\ X_i^{(n)} &= \{x_{i,j}^{(n)}, j = 0, 1, \dots, l_n-1\}, \\ X^{(n)} &= X^{(n)}(r) = X^{(n)}(l_n q_n) - r_{n+1}\rho, \end{aligned}$$

где

$$r_{n+1} = l_s q_s + \dots + l_{n+1} q_{n+1}, \quad n < s, \quad r_{s+1} = 0.$$

§ 5. Разложение биркгофовых сумм u^r и v^r

5.1. Основная оценка. Приведем сначала выкладки, на основе которых будут строиться оценки биркгофовых сумм.

ЛЕММА 5.1. *Пусть $h > 0, x > 0$. Тогда*

$$\frac{1}{x+h} + \dots + \frac{1}{x+kh} = \frac{1}{h} \ln \frac{t_0+k}{t_0+1} + \frac{1}{h} R_k(t_0), \quad t_0 = \frac{x}{h}, \quad (5.1)$$

$$0 < R_k(t_0) < \frac{1}{1+t_0}. \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. К функции $\varphi(t) = 1/(x + th)$ на отрезке $[1, k]$ можно применить формулу суммирования Эйлера, точнее, следствие из нее [12; с. 223]:

$$\sum_{j=1}^k \varphi(j) = \varphi(1) + \int_1^k \varphi(t) dt + \int_1^k \{t\} \varphi'(t) dt.$$

Из этой формулы получим (5.1), где

$$R_k(t_0) = \frac{1}{1+t_0} - \int_1^k \frac{\{t\} dt}{(t_0+t)^2}.$$

Очевидно, что

$$0 < \int_1^k \frac{\{t\} dt}{(t_0+t)^2} < \int_1^k \frac{dt}{(t_0+t)^2} < \frac{1}{1+t_0},$$

откуда и получаем (5.2).

Лемма доказана.

5.2. Рассмотрим вспомогательные функции $u, v: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, определенные в § 3, которые можно рассматривать как функции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с периодом 1 и

$$u(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1],$$

$$v(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \in [0, 1).$$

Особая точка этих функций $x_0 = 0$.

Пусть $p/q = p_s/q_s$ — подходящая к ρ дробь, $s > 10$. Как и выше, $x_0, x_1, \dots, x_{q-1}$ — узловые точки, т.е. точки вида $T^{-m_i} x_0$, $0 \leq i \leq q-1$, занумерованные вычетами по модулю q в порядке следования в положительном направлении по окружности (см. (4.6)).

Нетрудно видеть, что

$$v^q(x) = \sum_{i=0}^{q-1} v(x - x_i). \quad (5.3)$$

ЛЕММА 5.2. Пусть $x_{i-1} < x < x_i$. Тогда v^q и u^q могут быть представлены в одной из двух форм:

$$v^q(x) = v(x - x_i) + q \ln q + \theta q, \quad (5.4)$$

$$\theta = \theta(v, q, x), \quad |\theta| < 4 \quad \text{при} \quad 0 < \{x_i - x\} \leq \Delta_s,$$

$$u^q(x) = u(x - x_{i-1}) + q \ln q + \theta q, \quad (5.5)$$

$$\theta = \theta(u, q, x), \quad |\theta| < 4 \quad \text{при} \quad 0 < \{x - x_{i-1}\} \leq \Delta_s$$

или

$$v^q(x) = q \ln q + \tilde{\theta} q, \quad \tilde{\theta} = \tilde{\theta}(v, q, x), \quad |\tilde{\theta}| < 4 \quad \text{при} \quad \{x_i - x\} > \Delta_s, \quad (5.6)$$

$$u^q(x) = q \ln q + \tilde{\theta} q, \quad \tilde{\theta} = \tilde{\theta}(u, q, x), \quad |\tilde{\theta}| < 4 \quad \text{при} \quad \{x - x_{i-1}\} > \Delta_s. \quad (5.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\Delta x = \{x_i - x\}$, $\Delta x_1 = \{x_{i+1} - x_i\}$. Тогда

$$v^q(x) = \frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x + \Delta x_1} + \sum_{k=2}^{q-1} \frac{1}{\Delta x + \{x_{i+k} - x_i\}}.$$

Согласно (4.7) для $k = 2, \dots, q-1$

$$\frac{1}{\Delta x + \frac{k+1}{q}} < \frac{1}{\Delta x + \{x_{i+k} - x_i\}} < \frac{1}{\Delta x + \frac{k-1}{q}}.$$

В силу непрерывности $\sum_{k=2}^{q-1} \frac{1}{\Delta x + \frac{k-1}{q} + t}$ по t при $t \in [0, 2/q]$ можно считать, что

$$\sum_{k=2}^{q-1} \frac{1}{\Delta x + \{x_{i+k} - x_i\}} = \sum_{k=2}^{q-1} \frac{1}{\Delta x_2 + \frac{k-1}{q}},$$

где $\Delta x < \Delta x_2 < \Delta x + 2/q$. Из основной оценки (5.1) и (5.2) получаем

$$v^q(x) = \frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x + \Delta x_1} + q \ln \frac{q-2+t_2}{1+t_2} + q R_{q-2}(t_2),$$

где $t_2 = q\Delta x_2$, $0 < t_2 < 4$, $0 < R_{q-2}(t_2) < 1/(1+t_2)$.

Оценим величины

$$\theta = \frac{1}{q(\Delta x + \Delta x_1)} + \ln \frac{q-2+t_2}{q(1+t_2)} + R_{q-2}(t_2)$$

и

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{q\Delta x} + \theta.$$

Нетрудно проверить, что при $q > 10$

$$-2 < \ln \frac{q-2+t_2}{q(1+t_2)} < 0.$$

Кроме того,

$$0 < R_{q-2}(t_2) < \frac{1}{1+t_2} < 1.$$

В силу (4.11) $\Delta x_1 > 1/(2q)$, откуда, учитывая, что $\Delta x > 0$,

$$0 < \frac{1}{q(\Delta x + \Delta x_1)} < 2.$$

Таким образом, $-2 < \theta < 3$.

Во втором случае при $\Delta x > \Delta_s$ в силу $\Delta_s > 1/(2q)$ получим

$$0 < \frac{1}{q\Delta x} + \frac{1}{q(\Delta x + \Delta x_1)} < 3,$$

т.е. $|\tilde{\theta}| < 4$.

Аналогично оцениваются (5.5) и (5.7).

Лемма доказана.

Пусть $r = l_s q_s + r'$, где $0 < r' < q_s$. Разобьем v^r на два слагаемых:

$$v^r(x) = v^{l_s q_s}(x) + v^{r'}(x + l_s q_s \rho).$$

В свою очередь,

$$v^{l_s q_s}(x) = \sum_{j=0}^{l_s-1} v^{q_s}(x + j q_s \rho).$$

Учитывая равенство $q_s \rho = p_s + \delta_s$ и периодичность v , а также (5.3), имеем

$$v^{l_s q_s}(x) = \sum_{j=0}^{l_s-1} v^{q_s}(x + j \delta_s) = \sum_{j=0}^{l_s-1} \sum_{i=0}^{q_s-1} v(x - x_{i,j}), \quad (5.8)$$

$$v^r(x) = v^{l_s q_s}(x) + v^{r'}(x + l_s \delta_s). \quad (5.9)$$

Таким образом, множество особых точек функции $v^{l_s q_s}$ состоит из всех сгустков ранга s , а множество особых точек функции $v^{r'}(x + l_s \delta_s)$ — из дополнительных точек вида x_{i,l_s} расширенных сгустков.

Аналогично представляется и u^r .

5.3. Введем новые обозначения. Пусть $n \leq s$. Если $l_n \geq 1$, т.е. $X^{(n)} \neq \emptyset$, то обозначим через $x_n^+(x)$ ближайшую к x справа точку из $X^{(n)}$, а через $x_n^-(x)$ — ближайшую к x слева точку из $X^{(n)}$.

Если $x_n^+(x) \in (x, x + \Delta_n]$, то положим

$$I_n^+(x) = v(x - x_n^+(x)). \quad (5.10)$$

Если $l_n = 0$, т.е. $X^{(n)} = \emptyset$, или $x_n^+(x) > x + \Delta_n$, то

$$I_n^+ = 0.$$

Аналогично, если $x_n^-(x) \in [x - \Delta_n, x)$, то положим

$$I_n^-(x) = u(x - x_n^-(x)). \quad (5.11)$$

Если $l_n = 0$, т.е. $X^{(n)} = \emptyset$, или $x_n^-(x) < x - \Delta_n$, то

$$I_n^- = 0.$$

Если $l_n > 1$, то положим

$$Z_n^+(x) = \sum_{x_n^+(x) < x_{i,j}^{(n)} \leq x + \Delta_n} v(x - x_{i,j}^{(n)}), \quad (5.12)$$

$$Z_n^-(x) = \sum_{x - \Delta_n \leq x_{i,j}^{(n)} < x_n^-(x)} u(x - x_{i,j}^{(n)}), \quad (5.13)$$

при этом сумма берется только для $x_{i,j}^{(n)} \in X^{(n)}$.

Для $l_n \leq 1$ положим

$$Z_n^+ = 0, \quad Z_n^- = 0.$$

5.4. Разложим теперь функции $v^{l_s q_s}$ и $u^{l_s q_s}$.

Положим

$$e(l_s q_s) = l_s q_s \ln q_s. \quad (5.14)$$

ЛЕММА 5.3. *Функции $v^{l_s q_s}$, $u^{l_s q_s}$ можно представить в виде*

$$v^{l_s q_s}(x) = e(l_s q_s) + I_s^+(x) + Z_s^+(x) + P_s^+(x), \quad (5.15)$$

$$u^{l_s q_s}(x) = e(l_s q_s) + I_s^-(x) + Z_s^-(x) + P_s^-(x), \quad (5.16)$$

где

$$|P_s^\pm(x)| < 4l_s q_s. \quad (5.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть одну из функций. Имеем

$$v^{l_s q_s}(x) = \sum_{j=0}^{l_s-1} v^{q_s}(x + j\delta).$$

Пусть $l_s > 1$. Фиксируем j . В промежуток $(x, x + \Delta_s]$ может попасть не более одной точки вида $x_{i,j} = x_i - j\delta_s$. Если попадет одна, то представим $v^{q_s}(x + j\delta_s)$ в соответствии с (5.4), если ни одной – то используем (5.6). Получим

$$v^{q_s}(x + j\delta_s) = \sum_{i: x_{i,j} \in (x, x + \Delta_s]} v(x - x_{i,j}) + q_s \ln q_s + \theta(v_j, q_s, x)$$

(в сумме не более одного слагаемого), где $v_j(x) = v(x + j\delta_s)$, $|\theta(v_j, q_s, x)| < 4$. Суммируя по j , получаем

$$v^{l_s q_s}(x) = \sum_{x_{i,j} \in (x, x + \Delta_s] \cap X_{(s)}} v(x - x_{i,j}) + l_s q_s \ln q_s + P_s^+(x), \quad (5.18)$$

где

$$P_s^+(x) = \sum_j \theta(v_j, q_s, x).$$

Неравенство (5.17) очевидно. Кроме того, согласно (5.10) и (5.12)

$$\sum_{x_{i,j} \in (x, x + \Delta_s]} v(x - x_{i,j}) = I_s^+(x) + Z_s^+(x).$$

Сравнивая (5.14), (5.18) и последнее равенство, получаем (5.15).

Если $l_s = 1$, то разложим v^{q_s} в соответствии с (5.4) и первое слагаемое обозначим $I_s^+(x)$.

Абсолютно так же получается разложение (5.16) для $u^{l_s q_s}$.

Лемма доказана.

Перейдем к слагаемым $v^{r'}(x + l_s \delta_s)$ и $u^{r'}(x + l_s \delta_s)$ (см. (5.9)).

Особые точки этих функций являются дополнительными точками расширенных густков. Представим r' в виде

$$r' = l_{s-1} q_{s-1} + r'', \quad 0 \leq l_{s-1} \leq k_s, \quad 0 \leq r'' < q_{s-1}.$$

Тогда

$$v^{r'}(x + l_s \delta_s) = v^{l_{s-1} q_{s-1}}(x + l_s \delta_s) + v^{r''}(x + l_s \delta_s + l_{s-1} \delta_{s-1}).$$

Если $l_{s-1} = 0$, то положим

$$I_{s-1}^\pm(x) = 0, \quad Z_{s-1}^\pm(x) = 0, \quad P_{s-1}^\pm(x) = 0.$$

Если же $l_{s-1} > 0$, то по аналогии представим $v^{l_{s-1} q_{s-1}}(x + l_s \delta_s)$ в виде

$$v^{l_{s-1} q_{s-1}}(x + l_s \delta_s) = l_{s-1} q_{s-1} \ln q_{s-1} + I_{s-1}^+(x) + Z_{s-1}^+(x) + P_{s-1}^+(x).$$

Функция $I_{s-1}^+(x)$ имеет вид

$$I_{s-1}^+(x) = v(x - x_{s-1}^+(x)),$$

где $x_{s-1}^+(x)$ — ближайшая справа от x точка из множества $X^{(s-1)}$ точек сгустков ранга $s-1$. Функция $Z_{s-1}^+(x)$ определяется с помощью точек сгустков ранга $s-1$ так же, как $Z_s^+(x)$ определяется через сгустки ранга s .

Для стандартного разложения $r = l_s q_s + \dots + l_0 q_0$ получим

$$\begin{aligned} v^r(x) &= e(r) + \sum_{n=0}^s Z_n^+(x) + \sum_{n=0}^s I_n^+(x) + P^+(x), \\ u^r(x) &= e(r) + \sum_{n=0}^s Z_n^-(x) + \sum_{n=0}^s I_n^-(x) + P^-(x), \end{aligned}$$

где

$$e(r) = \sum_{n=1}^s l_n q_n \ln q_n, \quad P^\pm(x) = \sum_{n=1}^s P_n^\pm(x).$$

Очевидно, что в силу (5.17)

$$|P^\pm(x)| \leq 4 \sum_{n=1}^s l_n q_n \leq 4r. \quad (5.19)$$

Функция $\sum_{n=0}^s I_n^+(x)$ имеет не более чем по одной особой точке в каждом множестве $X^{(n)}$ ранга n . Множество $X \setminus X^{(s)}$ состоит из дополнительных точек расширенных сгустков ранга s , поэтому не более двух главных особых точек могут принадлежать ближайшему к x справа расширенному сгустку ранга s (если x лежит внутри сгустка, то ближайший справа — этот самый сгусток).

Выделим две главные особенности: положим

$$I^+(x) = I_s^+(x) + v(x - x^{++}(x)), \quad (5.20)$$

где $x^{++}(x)$ — ближайшая к x справа из всех точек вида $x_n^+(x)$ для $n = 0, \dots, s-1$, т.е. всех особых точек суммы $\sum_{n=0}^{s-1} I_n^+(x)$. Кроме того, обозначим

$$I_{\text{ост}}^+(x) = \sum_{n=0}^s I_n^+(x) - I^+(x).$$

Аналогично определим функции $I^-(x)$ и $I_{\text{ост}}^-(x)$.

Окончательно получаем разложение функций v^r и u^r .

ЛЕММА 5.4. Если $r = l_s q_s + \dots + l_0 q_0$, $1 \leq l_s \leq k_{s+1}$, — стандартное разложение и $x \notin X(r)$, то

$$\begin{aligned} v^r(x) &= e(r) + Z^+(x) + I^+(x) + I_{\text{ост}}^+(x) + P^+(x), \\ u^r(x) &= e(r) + Z^-(x) + I^-(x) + I_{\text{ост}}^-(x) + P^-(x), \end{aligned}$$

где

$$Z^+(x) = \sum_{n=0}^s Z_n^+(x), \quad Z^-(x) = \sum_{n=0}^s Z_n^-(x).$$

При этом справедливы оценки

$$|P^\pm(x)| \leq 4r, \quad (5.21)$$

$$0 < I^\pm(x) < \frac{2}{|x^\pm(x) - x|}, \quad (5.22)$$

где $x^+(x)$ и $x^-(x)$ — ближайшие к x справа и слева соответственно особые точки функций v^r и u^r ;

$$|I_{\text{ост}}^\pm(x)| < 3q_s \ln(\ln q_s); \quad (5.23)$$

для любого $x \in \mathbb{S}^1$ и $n = 0, 1, \dots, s$

$$Z_n^\pm(x) = 0, \quad l_n \leq 1, \quad (5.24)$$

$$Z_n^\pm(x) < 2q_{n+1}(\ln l_n + 1), \quad l_n > 1; \quad (5.25)$$

если расстояние от x до ближайшего сгустка $X_i^{(n)}$ больше чем Δ и $l_n \geq 1$, то

$$Z_n^\pm(x) \leq \frac{l_n - 1}{\Delta}. \quad (5.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (5.21) следует из (5.17). Оценка (5.22) следует из определения $I^\pm(x)$.

Оценим функцию $I_{\text{ост}}^+(x)$. Для этого рассмотрим сумму $\sum_{n=0}^{s-1} I_n^+(x)$. Она состоит не более чем из s слагаемых вида $v(x - x_{i,l_s})$, имеющих в качестве особых точек дополнительные точки расширенных сгустков ранга s , которые отстоят друг от друга не менее чем на $1/(2q_s)$. Используя (5.1) и (5.2), получаем

$$0 < \sum_{n=0}^{s-1} I_n^+(x) < \frac{1}{\{x^{++}(x) - x\}} + 2q_s(\ln s + 1),$$

но $1/\{x^{++}(x) - x\}$ входит в состав $I^+(x)$, поэтому

$$0 < I_{\text{ост}}^+(x) < 2q_s(\ln s + 1).$$

Учитывая, что $q_s > 2^{\frac{s-1}{2}}$, получаем при достаточно больших s неравенство (5.23).

Равенство (5.24) следует из определения $Z_n^\pm(x)$. Для получения оценки (5.25) заметим, что при $l_n > 1$ функция $Z_n^\pm(x)$ состоит не более чем из $l_n - 1$ слагаемых

вида $v(x - x_{i,j}^{(n)})$, причем ближайшее из них отстоит от x на $\Delta x + |\delta_n|$, где $\Delta x = \{x_n^+(x) - x\}$. Поэтому

$$Z_n^+(x) \leq \sum_{j=1}^{l_n-2} \frac{1}{\Delta x + j|\delta_n|}.$$

В силу основной оценки (5.1) и (5.2) получаем

$$Z_n^+(x) \leq \frac{1}{|\delta_n|} \left(\ln \frac{t + l_n}{t + 1} + 1 \right),$$

где $t = \Delta x / |\delta_n|$. Функция $\ln \frac{t + l_n}{t + 1}$ убывает по t , поэтому

$$Z_n^+(x) < \frac{1}{|\delta_n|} (\ln l_n + 1).$$

Учитывая, что $1/|\delta_n| < 2q_{n+1}$, получаем (5.25).

Оценка $Z_n^-(x)$ проводится аналогично.

Оценка (5.26) получается из (5.12) для x , лежащего между сгустками:

$$Z_n^\pm(x)n \leq \frac{1}{\Delta + |\delta_n|} + \dots + \frac{1}{\Delta + (l_n - 1)|\delta_n|} < \frac{l_n - 1}{\Delta}.$$

Лемма доказана.

§6. Разбиение и оценки для случая $\ln k_{s+1} = o(\ln q_s)$

6.1. Выберем последовательность чисел $\sigma_n > 0$, удовлетворяющих следующим условиям при $n \rightarrow \infty$:

$$\sigma_n \searrow 0, \tag{6.1}$$

$$\sigma_n^2 \ln q_n \nearrow +\infty, \tag{6.2}$$

$$\ln k_{n+1} < \sigma_n^2 \ln q_n, \quad n \geq 1, \tag{6.3}$$

$$\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} \rightarrow 1. \tag{6.4}$$

ЛЕММА 6.1. *Последовательность, удовлетворяющая (6.1)–(6.4), существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \sup_{j \geq n} \frac{\ln k_{j+1}}{\ln q_j}, \quad n \geq 2,$$

и некоторую последовательность y_n , удовлетворяющую условиям

$$y_n \searrow 0, \quad y_n \ln q_n \nearrow +\infty$$

(например, $y_n = (\ln q_n)^{-\tau}$, $0 < \tau < 1$).

(Обозначения x_n и y_n локальные; всюду, кроме доказательства этой леммы, они могут иметь другой смысл.)

Из определения x_n следует ее невозрастание и неравенство

$$\ln k_{n+1} \leq x_n \ln q_n,$$

а из условия $\ln k_{n+1} = o(\ln q_n)$ следует, что $x_n \rightarrow 0$. Положим

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= \max(x_2, y_2), \\ \sigma_n^2 &= \max\left(x_n, y_n, \sigma_{n-1}^2 \frac{\ln q_{n-1}}{\ln q_n}\right), \quad n > 2, \\ \sigma_n &> 0, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Из неравенств

$$x_n \leq x_{n-1} \leq \sigma_{n-1}^2, \quad y_n \leq y_{n-1} \leq \sigma_{n-1}^2, \quad \sigma_{n-1}^2 \frac{\ln q_{n-1}}{\ln q_n} < \sigma_{n-1}^2$$

следует, что $\sigma_n^2 \leq \sigma_{n-1}^2$.

Из неравенства $\sigma_n^2 \ln q_n \geq y_n \ln q_n$ следует бесконечное возрастание последовательности $\sigma_n^2 \ln q_n$, а из неравенства $\sigma_n^2 \geq \sigma_{n-1}^2 \ln q_{n-1} / \ln q_n$ — ее монотонность. Из неравенств $x_n \leq \sigma_n^2$ и $\ln k_{n+1} \leq x_n \ln q_n$ следует (6.3).

Осталось доказать, что $\sigma_n \rightarrow 0$.

Предположим противное. Пусть $\sigma_n \rightarrow \sigma > 0$. Тогда существует такое n , что для любого $p \in \mathbb{N}$

$$\sigma_{n+p}^2 > \frac{\sigma^2}{2}, \quad x_{n+p} < \frac{\sigma^2}{2}, \quad y_{n+p} < \frac{\sigma^2}{2}$$

(x_n и y_n бесконечно малы), а это означает, что

$$\sigma_{n+p}^2 = \sigma_{n+p-1}^2 \frac{\ln q_{n+p-1}}{\ln q_{n+p}},$$

но тогда для всех $p \in \mathbb{N}$

$$\sigma_{n+p}^2 = \sigma_n^2 \frac{\ln q_n}{\ln q_{n+p}} > \frac{\sigma^2}{2},$$

чего не может быть, поскольку

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\ln q_n}{\ln q_{n+p}} = 0.$$

Пришли к противоречию, значит, $\sigma_n \rightarrow 0$.

Наконец, из (6.1), (6.2) получаем

$$1 \leq \frac{\sigma_{n-1}^2}{\sigma_n^2} < \frac{\ln q_n}{\ln q_{n-1}},$$

но $\ln q_n \sim \ln q_{n-1}$, откуда и следует (6.4).

Лемма доказана.

Пусть снова $q_s \leq r < q_{s+1}$ и $r = l_s q_s + \dots + l_0 q_0$ — стандартное разложение.

Обозначим

$$Z_n = \max_r \sup_x Z_n^\pm(x).$$

ЛЕММА 6.2. Если выполнены условия (6.1)–(6.3), то при достаточно больших s для любого $x \notin X$ и любого r

$$\sum_{n=0}^{s-1} Z_n < 9\sigma_s^2 q_s \ln q_s. \quad (6.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (5.25) и неравенства $l_n \leq k_{n+1}$

$$Z_n < 2q_{n+1}(\ln k_{n+1} + 1), \quad Z_0 < 2q_1(\ln q_1 + 1),$$

а с учетом (6.3)

$$\sum_{n=0}^{s-1} Z_n < \sum_{n=0}^{s-1} 2q_{n+1}(\sigma_n^2 \ln q_n + 1) + 2q_1(\ln q_1 + 1).$$

Так как $\sigma_n^2 \ln q_n \nearrow +\infty$, то

$$\sum_{n=0}^{s-1} Z_n < (2\sigma_{s-1}^2 \ln q_{s-1} + 1) \sum_{n=1}^{s-1} q_{n+1} < 9\sigma_s^2 q_s \ln q_s.$$

Лемма доказана.

Если обозначить

$$Z_{\text{ост}}^{\pm} = \sum_{n=0}^{s-1} Z_n^{\pm},$$

то неравенство (6.5) можно переписать в виде

$$Z_{\text{ост}}^{\pm}(x) < 9\sigma_s^2 q_s \ln q_s, \quad (6.6)$$

и мы получаем более подробные разложения v^r и u^r при $q_s \leq r < q_{s+1}$:

$$v^r(x) = e(r) + I^+(x) + Z_s^+(x) + I_{\text{ост}}^+(x) + Z_{\text{ост}}^+(x) + P^+(x), \quad (6.7)$$

$$u^r(x) = e(r) + I^-(x) + Z_s^-(x) + I_{\text{ост}}^-(x) + Z_{\text{ост}}^-(x) + P^-(x), \quad (6.8)$$

причем мы уже имеем оценки для последних трех слагаемых (см. (5.21), (5.23) и (6.5)).

6.2. Оценки для $I^{\pm}$ и $Z_s^{\pm}$ мы получим не на всей $\mathbb{S}^1$, а на некотором множестве достаточно большой меры. Положим

$$V_m = \left\{ x : |x - T^{-j}x_0| \geq \frac{3\sigma_m}{q_m}, j = 0, 1, \dots, 2q_m - 1 \right\}. \quad (6.9)$$

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства V_m :

– множество V_m состоит из не более чем $2q_m$ попарно непересекающихся отрезков,

$$\mu(V_m) \geq 1 - 12\sigma_m; \quad (6.10)$$

– длины отрезков $|C_i|$ удовлетворяют неравенству

$$|C_i| < \frac{2(1 - 6\sigma_m)}{q_m}. \quad (6.11)$$

Фиксируем достаточно большое t и выберем такое $m = m(t)$, что

$$q_m \leq t < q_{m+1}. \quad (6.12)$$

Положим

$$\tilde{V}(t) = \begin{cases} V_m, & t \leq \sigma_m q_{m+1}, \\ V_{m+1}, & t > \sigma_m q_{m+1}. \end{cases} \quad (6.13)$$

ЛЕММА 6.3. Для любого $r \in (t/2, 2t)$ и любого $x \in \tilde{V}(t)$ выполняются соотношения

$$v^r(x) = e(r)(1 + \gamma^+(r, x)), \quad |\gamma^+(r, x)| < \gamma(t), \quad (6.14)$$

$$u^r(x) = e(r)(1 + \gamma^-(r, x)), \quad |\gamma^-(r, x)| < \gamma(t), \quad (6.15)$$

$$e(r) > \frac{r}{2} \ln q_{m-2}, \quad (6.16)$$

где

$$\gamma(t) = 18 \left(\sigma_{m-2} + \frac{1}{\sigma_{m-2}^2 \ln q_{m-2}} + \frac{\ln \ln q_{m-2}}{\ln q_{m-2}} \right). \quad (6.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть только функцию v^r , функция u^r рассматривается аналогично. Из разложения (6.7) имеем

$$\frac{|v^r(x) - e(r)|}{e(r)} \leq \frac{I^+(x)}{e(r)} + \frac{Z_s^+(x)}{e(r)} + \frac{|I_{\text{ост}}^+(x)|}{e(r)} + \frac{Z_{\text{ост}}^+(x)}{e(r)} + \frac{|P^+(x)|}{e(r)}. \quad (6.18)$$

1. Пусть $q_m \leq t < q_{m+1}$ и $t/2 < r < 2t$. Тогда

$$q_{m-2} < \frac{q_m}{2} < r < 2q_m < q_{m+2}.$$

Выберем такое s , что $q_s \leq r < q_{s+1}$. Очевидно, что

$$m - 2 \leq s \leq m + 2.$$

Представим r в стандартной форме:

$$r = l_s q_s + \dots + l_0 q_0, \quad 1 \leq l_s \leq k_{s+1}.$$

Тогда для $e(r)$ справедливы следующие неравенства:

$$e(r) \geq l_s q_s \ln q_s > \frac{r}{2} \ln q_s, \quad (6.19)$$

$$e(r) \geq q_s \ln q_s, \quad (6.20)$$

$$e(r) \geq \frac{q_m}{4} \ln q_s. \quad (6.21)$$

Первое из этих неравенств сразу следует из определения

$$e(r) = l_s q_s \ln q_s + \dots$$

и из неравенства $l_s q_s > r/2$ (в самом деле, $l_s q_s \leq r < (l_s + 1)q_s \leq 2l_s q_s$), второе — следствие первого, а третье следует из первого и неравенства $r \geq q_m/2$.

Из (6.19) вытекает (6.16).

Мы сразу можем получить оценки для последних трех слагаемых в правой части (6.18). Из неравенств (5.23) и (6.20) получаем

$$\frac{|I_{\text{ост}}^{\pm}(x)|}{e(r)} < \frac{3 \ln(\ln q_s)}{\ln q_s}$$

или, учитывая убывание по s правой части,

$$\frac{|I_{\text{ост}}^{\pm}(x)|}{e(r)} < \frac{3 \ln(\ln q_{m-2})}{\ln q_{m-2}}. \quad (6.22)$$

Из неравенств (6.6) и (6.20) получаем

$$\frac{Z_{\text{ост}}^{\pm}(x)}{e(r)} < 18\sigma_s^2 \leq 18\sigma_{m-2}^2. \quad (6.23)$$

Из неравенств (5.21) и (6.19) имеем

$$\frac{|P^{\pm}(x)|}{e(r)} < \frac{8}{\ln q_s} \leq \frac{8}{\ln q_{m-2}}. \quad (6.24)$$

Перейдем к оценке первых двух слагаемых в правой части (6.18).

2. Пусть сначала $q_m \leq t \leq \sigma_m q_{m+1}$. Тогда $\tilde{V}(t) = V_m$. Если $t/2 < r < 2t$, то

$$\frac{q_m}{2} < r < 2\sigma_m q_{m+1}$$

и при этом возможны три случая:

- а) $q_m \leq r < 2\sigma_m q_{m+1}$, т.е. $s = m$,
- б) $\max(q_m/2, q_{m-1}) \leq r < q_m$, т.е. $s = m - 1$,
- в) $\max(q_m/2, q_{m-2}) \leq r < q_{m-1}$, т.е. $s = m - 2$.

Рассмотрим сначала случай а):

$$q_m \leq r < 2\sigma_m q_{m+1}, \quad s = m.$$

Все особые точки функции v^r лежат в расширенных сгустках $\hat{X}_i^{(m)}$ ранга m . Для любого $x \in V_m$ расстояние от x до ближайшего расширенного сгустка $\tilde{V}_i$ не менее чем σ_m/q_m , поскольку узловая точка x_i лежит в сгустке, а длина сгустка

$$|\hat{X}_i| \leq l_m |\delta_m| < 2\sigma_m k_{m+1} \cdot \frac{1}{q_{m+1}} < \frac{2\sigma_m}{q_m}.$$

Отсюда же следует неравенство

$$\{x^+(x) - x\} > \frac{\sigma_m}{q_m}.$$

Поэтому в силу (5.26) справедливо неравенство

$$|Z_m^{\pm}| \leq \frac{l_m q_m}{\sigma_m}.$$

Учитывая, что $e(r) \leq l_m q_s \ln q_s$, получаем

$$\frac{|Z_m^\pm(x)|}{e(r)} \leq \frac{1}{\sigma_m \ln q_m}.$$

Так как $\{x^+(x) - x\} > \sigma_m/q_m$, то из неравенства (5.22) следует, что $|I^+(x)| < 2q_m/\sigma_m$, а учитывая, что $e(r) > (q_m \ln q_s)/4$, получаем

$$\frac{|I^+(x)|}{e(r)} < \frac{8}{\sigma_m \ln q_s} \leq \frac{1}{\sigma_{m-2}^2 \ln q_{m-2}}. \quad (6.25)$$

Заметим, что эта же оценка для $I^+(x)$ справедлива и в случаях б) и в). В этих случаях $r < q_m$ и, значит, все особые точки v^r содержатся среди узловых точек ранга m , поэтому $\{x^+(x) - x\} \geq 3\sigma_m/q_m$.

Рассмотрим случаи б) и в) для $Z_s^\pm$. При этом

$$s < m, \quad l_s \geq 1.$$

Согласно (5.25)

$$|Z_s^\pm(x)| < 2q_{s+1}(\ln l_s + 1) \leq 2q_m(\ln l_s + 1).$$

Учитывая, что согласно (6.3)

$$\ln l_s + 1 \leq \ln k_{s+1} + 1 \leq \sigma_s^2 \ln q_s$$

и

$$e(r) > \frac{q_m}{4} \ln q_s,$$

получаем

$$\frac{|Z_s^\pm(x)|}{e(r)} < 8\sigma_s^2. \quad (6.26)$$

Доказательство случая $t \leq \sigma_m q_{m+1}$ завершено.

3. Пусть теперь $\sigma_m q_{m+1} < t < q_{m+1}$,

$$\tilde{V}(t) = V_{m+1}.$$

Тогда если $t/2 < r < 2t$, то

$$\frac{1}{2}\sigma_m q_{m+1} < r < 2q_{m+1}.$$

Для этого случая справедлива оценка

$$e(r) > \frac{\sigma_m q_{m+1} \ln q_s}{8}, \quad (6.27)$$

поскольку $e(r) > (r/2) \ln q_s$, $r/2 > \sigma_m q_{m+1}/4$. Все особые точки функций v^r и u^r отделены от точек V_{m+1} окрестностями радиуса $2\sigma_{m+1}/q_{m+1}$, поэтому согласно (5.22) для $x \in V_{m+1}$

$$|I^\pm(x)| < \frac{2q_{m+1}}{3\sigma_{m+1}},$$

а с учетом (6.27)

$$\frac{|I^\pm(x)|}{e(r)} < \frac{6}{\sigma_m \sigma_{m+1} \ln q_s}.$$

Так как $m - 2 \leq s \leq m + 1$, то

$$\frac{|I^\pm(x)|}{e(r)} < \frac{7}{\sigma_{m-2}^2 \ln q_{m-2}}. \quad (6.28)$$

Для оценки $Z_s^\pm$ рассмотрим два случая: $m - 2 \leq s \leq m$ и $m + 1 \leq s \leq m + 2$ (напомним, что $r = l_s q_s + \dots$, $l_s \geq 1$).

Если $s \leq m$, то $q_{s+1} \leq q_{m+1}$ и согласно (5.25) и (6.27)

$$\frac{Z_s^\pm}{e(r)} < \frac{16(\ln l_s + 1)}{\sigma_m \ln q_s}.$$

Но $l_s \leq k_{s+1}$, и в силу (6.3) $\ln l_s + 1 \leq \ln k_{s+1} + 1 \leq \sigma_s^2 \ln q_s + 1$, откуда получаем

$$\frac{Z_s^\pm(x)}{e(r)} \leq 17 \frac{\sigma_s^2}{\sigma_m} \leq 18 \sigma_{m-2}. \quad (6.29)$$

Если $s = m + 1$ или $m + 2$, то $l_s = 1$. Действительно, если $l_s \geq 2$, то $r \geq l_s q_s \geq 2q_s \geq 2q_{m+1}$. Значит,

$$Z_s^\pm(x) = 0 \quad \text{при } s > m. \quad (6.30)$$

Подведем итоги:

$$\begin{aligned} \frac{|I^\pm(x)|}{e(r)} &\leq \frac{1}{\sigma_m^2 \ln q_{m-2}} && (\text{следует из (6.25) и (6.28)}), \\ \frac{Z_s^\pm(x) + Z_{\text{ост}}^\pm(x)}{e(r)} &< 18 \sigma_{m-2} && (\text{следует из (6.26), (6.30) и (6.23)}), \\ \frac{|I_{\text{ост}}^\pm| + |P^\pm(x)|}{e(r)} &< \frac{4 \ln(\ln q_{m-2})}{\ln q_{m-2}} && (\text{следует из (6.23) и (6.24)}). \end{aligned}$$

Собрав эти оценки, получим (6.14) и (6.17).

Лемма доказана.

6.3. Рассмотрим теперь общий случай, когда функция f имеет K особых точек. Пусть

$$f = \sum_{i=1}^K (g_i + h_i)$$

— разложение из леммы 3.1, $u_i(x) = u(x - \bar{x}_i)$, $v_i(x) = v(x - \bar{x}_i)$ — вспомогательные функции, с помощью которых приближаются производные биркгофовых сумм $(g_i^r)'$ и $(h_i^r)'$ (см. лемму 3.2).

Фиксируем $t > 0$ и выберем $m = m(t)$ из условия (6.12):

$$q_m \leq t < q_{m+1}.$$

Очевидно, что $m(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

В соответствии с (6.13) построим множество $\tilde{V}(t)$ и для каждой пары функций u_i, v_i определим множество

$$\tilde{V}_i(t) = \tilde{V}(t) + \bar{x}_i.$$

Легко видеть, что пару функций u_i, v_i и множество $\tilde{V}_i(t)$ можно подставить вместо u, v и $\tilde{V}(t)$ в условии леммы 6.3.

Положим

$$\bar{V}(t) = \bigcap_{i=1}^K \tilde{V}_i(t).$$

Для любых $x \in \bar{V}(t)$, $r \in (t/2, 2t)$ и любой пары функций u_i, v_i справедливы оценки (6.14) и (6.15).

По построению $\tilde{V}(t) = V_{m'}$, где

$$\begin{aligned} m' &= m, & t &\leq \sigma_m q_{m+1}, \\ m' &= m + 1, & t &> \sigma_m q_{m+1}. \end{aligned}$$

Из (6.10) и (6.11) следует, что $\bar{V}(t)$ состоит из не более чем $2Kq_{m'}$ попарно непересекающихся отрезков, длина каждого из которых не более чем $2/q_{m'}$,

$$\mu(\bar{V}(t)) > 1 - 12K\sigma_m.$$

В качестве элементов разбиения ξ_t выберем те из отрезков $C \subset \bar{V}(t)$, длины которых удовлетворяют неравенству

$$|C| \geq \sigma_m q_{m'}. \quad (6.31)$$

Обозначим

$$[\xi_t] = \bigcup_{C \in \xi_t} C.$$

Легко видеть, что

$$\mu([\xi_t]) > 1 - 14K\sigma_{m'}. \quad (6.32)$$

В самом деле, общая длина выброшенных отрезков составит менее чем

$$2Kq_{m'} \cdot \frac{\sigma_m}{q_{m'}} = 2K\sigma_m.$$

ЛЕММА 6.4. Для разбиения ξ_t выполнены условия (2.7)–(2.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия (2.7) и (2.8) следуют из неравенств (6.32) и (6.11).

Докажем (2.9). В силу теоремы 3.1 об аппроксимации для всех x , кроме особых точек f^r , выполняется равенство

$$(f^r)'(x) = \sum_{i=1}^K (u^r(x - \bar{x}_i)(-A_i + \alpha_i^-(r, x)) + v^r(x - \bar{x}_i)(B_i + \alpha_i^+(r, x))),$$

где

$$|\alpha_i^\pm(r, x)| \leq \alpha(r), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = 0.$$

Применив лемму 6.3 к каждому слагаемому, получим для любого $x \in \bar{V}(t)$

$$(f^r)'(x) = e(r) \sum_{i=1}^K ((-A_i + \alpha_i^-(r, x))(1 + \gamma_i^-(r, x)) + (B_i + \alpha_i^+(r, x))(1 + \gamma_i^+(r, x))),$$

где

$$|\gamma_i^\pm(r, x)| \leq \gamma(t),$$

или окончательно

$$(f^r)'(x) = (B - A)e(r)(1 + \bar{\alpha}(x, r)),$$

где

$$|\bar{\alpha}(x, r)| \leq \frac{(A + B)\gamma(t) + 4K\alpha(r)}{|A - B|}.$$

Так как $t/2 < r < 2t$, то $\bar{\alpha} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Отсюда и следует (2.9).

Условие (2.10) для случая $q_m \leq t \leq \sigma_m q_{m+1}$ следует из оценки

$$e(r)|C| \geq e(r) \cdot \frac{\sigma_m}{q_m} \asymp \sigma_m \ln q_m \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Если $t > \sigma_m q_{m+1}$, то с учетом (6.16) и неравенства $r > t/2$ имеем

$$e(r) \cdot |C| > \frac{r}{2} \ln q_{m-2} \cdot \frac{\sigma_m}{q_{m+1}} > \frac{\sigma_m}{4} q_{m+1} \ln q_{m-2} \frac{\sigma_m}{q_{m+1}},$$

т. е.

$$e(r)|C| > \frac{\sigma_m^2}{4} \ln q_{m-2} \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Лемма доказана.

Таким образом, построено разбиение, удовлетворяющее (2.7)–(2.10), и, значит, выполнены достаточные условия перемешивания, сформулированные в модифицированном варианте теоремы 2.1.

Тем самым доказано, что для угла поворота ρ , удовлетворяющего условию

$$\ln k_{n+1} = o(\ln q_n),$$

специальный поток перемешивает.

Список литературы

1. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93. С. 763–766.
2. Kolmogorov A. N. Théorie générale systèmes et mécanique classique // Proceedings of the International congress of mathematicians, Amsterdam, 1954. V. 1. Amsterdam: North-Holland, 1957. P. 315–333.

3. *Кочергин А. В.* Об отсутствии перемешивания у специальных потоков над поворотом окружности и у потоков на двумерном торе // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205. С. 515–518.
4. *Кочергин А. В.* Замена времени в потоках и перемешивание // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. С. 1275–1298.
5. *Кочергин А. В.* О перемешивании в специальных потоках над перекладыванием отрезков и в гладких потоках на поверхностях // Матем. сб. 1975. Т. 96 (138). № 3. С. 471–502.
6. *Кочергин А. В.* невырожденные седла и отсутствие перемешивания // Матем. заметки. 1976. Т. 19. № 3. С. 453–468.
7. *Арнольд В. И.* Топологические и эргодические свойства замкнутых 1-форм с несоизмеримыми периодами // Функц. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 2. С. 1–12.
8. *Синай Я. Г., Ханин К. М.* Перемешивание некоторых классов потоков над поворотом окружности // Функц. анализ и его прилож. 1992. Т. 26. № 3. С. 1–21.
9. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. М.: Физматгиз, 1961.
10. *Кочергин А. В.* Перемешивающий специальный поток над поворотом окружности с почти липшицевой функцией // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 3. С. 51–78.
11. *Fayad B. R.* Reparamétrage de flots irrationnels sur le tore // PhD thesis, L'École Polytechnique. Paris, 2000.
12. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
17.02.2003