Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Локуцкий, Оптимальный вероятностный поиск, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 5, 77–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7621>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:10:58

УДК 517.977.5

Л. В. Локуцкий

Оптимальный вероятностный поиск

Работа посвящена исследованию оптимального поиска расположенного в n -мерном пространстве неподвижного объекта, точное расположение которого не известно. Получено необходимое условие оптимальности траектории. Для поиска на сильно выпуклых множествах удается получить в явном виде дифференциальное уравнение оптимальной траектории. Также доказана теорема существования.

Библиография: 8 названий.

Ключевые слова: оптимальный поиск, вероятностный поиск, оптимальная траектория, вихревая особенность, существование оптимальной траектории поиска.

§ 1. Постановка задачи

Пусть неподвижный объект E расположен в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Его точное расположение не известно, однако известна плотность его распределения ψ :

$$\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \psi \in L_1(\mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 1.$$

Пусть также Ω – носитель функции ψ , $o \in \mathbb{R}^n$ – фиксированная точка, $\text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ – множество липшицевых с константой Липшица, не превосходящей 1, кривых, стартовых из точки o :

$$\text{Lip}_{\leq 1}(o, n) = \{ \gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n : \gamma(0) = o, |\gamma(t_2) - \gamma(t_1)| \leq |t_2 - t_1| \forall t_i \in \mathbb{R}_+ \}.$$

Пусть $t(\gamma, x)$ – первый момент времени такой, что $|\gamma(t) - x| \leq 1$, где $x \in \mathbb{R}^n$, а именно¹

$$t(\gamma, x) = \inf \{ t \geq 0 : |\gamma(t) - x| \leq 1 \}. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Траектория γ называется *допустимой*, если функция $t(\gamma, x)$ определена для почти всех $x \in \Omega$. Множество всех допустимых траекторий мы будем обозначать $S(\Omega, o)$.

В работе решается следующая экстремальная задача²:

$$\tau_\psi(\gamma) = \int_{\Omega} t(\gamma, x) \psi(x) dx \rightarrow \inf \quad \text{по всем } \gamma \in S(\Omega, o).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00986-а).

¹Функция $t(\gamma, x)$ может быть определена не для всех $x \in \Omega$ и, вообще говоря, является разрывной как по x , так и по γ .

²Функция $t(\gamma, x)$ полунепрерывна снизу по x , а значит измерима. Таким образом, написанный интеграл корректно определен.

Мы будем обозначать

$$\tau_{\psi}^{\inf} = \inf_{\gamma \in S(\Omega, o)} \tau_{\psi}(\gamma).$$

По-другому эту задачу можно себе представлять так. Подвижный игрок P стартует из точки o и движется со скоростью, по модулю не превосходящей 1. Игрок P успешно завершает поиск объекта E в некоторый момент времени t , если расстояние от P до E в этот момент времени не превосходит 1. Игрок P решает задачу минимизации среднего времени поиска за счет выбора траектории движения (с тем условием, что вероятность успешного завершения поиска равна 1).

Задача была поставлена совместно автором и М. И. Зеликиным. В работе [1] полностью исследован одномерный случай и показано, что при некоторых естественных ограничениях оптимальные траектории имеют при начале (или окончании) движения неустранимые особенности наподобие четтеринг-режима. В настоящей статье исследован n -мерный случай.

В работе доказаны следующие основные результаты.

- 1) Теорема существования (теорема 5.2): если $\tau_{\psi}^{\inf} < +\infty$ (например, если множество Ω ограничено), то оптимальная траектория существует. (Простые примеры показывают, что единственность, вообще говоря, отсутствует.)
- 2) В некоторых предположениях регулярности получено дифференциальное уравнение для оптимальной траектории в неявном виде (теорема 3.3).
- 3) В случае, когда Ω – двумерное сильно выпуклое множество радиуса не больше 1 (см. [2]), получено явное дифференциальное уравнение оптимальной траектории (теорема 4.2).

§ 2. Примеры

Рассмотрим несколько неожиданных примеров оптимальных траекторий³. Примеры и приведенные факты в данном параграфе опираются на результаты, доказанные в [1] (также см., например, [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что траектория $\gamma(t)$ имеет *вихревую особенность при начале движения* (рис. 1), если для любого полного выпуклого остроугольного кругового конуса K_+ с вершиной в точке o и сколь угодно малого $\Delta t > 0$ найдется момент времени $0 < t_1 < \Delta t$ такой, что

$$\gamma(t_1) \notin K_+.$$

В одномерном случае траектория с вихревой особенностью делает при начале движения счетное число переключений (под точкой переключения подразумевается момент времени, в который $\dot{\gamma}(t)$ меняет направление). В двумерном случае вихревая особенность – это, по-видимому, некая спираль конечной длины наподобие логарифмической, делающая счетное число оборотов вокруг

³Отметим, что в дифференциальных играх с неполной информацией практически никогда не удастся найти оптимальные стратегии (исключением может считаться ситуация, разобранный в [3]). В рассматриваемом же вероятностном поиске один из двух игроков неподвижен, и оптимальная стратегия может быть найдена точно.

Рис. 1. Пример вихревой особенности при начале движения в двумерном случае

точки o . В n -мерном случае, двигаясь по траектории с вихревой особенностью при начале движения, игрок P покинет любой конус K_+ за любой сколь угодно малый начальный промежуток времени.

Наличие вихревой особенности при начале движения означает, как минимум, отсутствие предела направления скорости⁴ $\dot{\gamma}(t)$ при $t \rightarrow +0$.

Оказывается, что в достаточно большом семействе задач вероятностного поиска оптимальная траектория обладает вихревой особенностью.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть B_0 – это шар радиуса 1 с центром в точке o , т.е. B_0 – область видимости игрока P в начальный момент времени $t = 0$. Если $\psi(x)$ стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow \partial B_0$ снаружи шара B_0 , то оптимальная траектория $\hat{\gamma}(t)$ имеет вихревую особенность при начале движения⁵.

Более того, в одномерном случае в оптимальных траекториях часто возникают особенности при окончании движения, в каком-то смысле двойственные вихревым при начале.

ПРИМЕР 2.1. Пусть поиск происходит на отрезке $[-2, 2]$ и функция плотности $\psi(x)$ устроена следующим образом (точка o совпадает с 0):

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{|x-1|}}, & \text{если } 1 < |x| \leq 2, \\ 0, & \text{если } |x| \leq 1, \end{cases}$$

т.е. $\psi(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 1+0$ и $x \rightarrow -1-0$. Тогда при оптимальном поиске за любой сколь угодно малый начальный интервал времени $[0, \Delta t]$ скорость игрока P делает счетное число переключений с -1 на 1 и наоборот: $x_0 \simeq \frac{1}{3}$, $x_{-1} \simeq -0,00694$, $x_{-2} \simeq 0,00000301$, $\dots$, $|x_{-n}| \simeq 16 \cdot 48^{-2^n}$, $\dots$ (нумерация точек переключения, естественно, идет от $-\infty$; рис. 2). Между описанными точками переключения игрок P движется с постоянной скоростью.

⁴На самом деле, если оптимальная траектория обладает вихревой особенностью при начале движения, то это означает куда более сильное вырождение, чем отсутствие направления скорости в $t = 0$.

⁵Доказательство существования оптимальной траектории см. далее.

Рис. 2. Накопление переключений при начале движения

ПРИМЕР 2.2. Пусть задача поиска тоже происходит на отрезке $[-2, 2]$, но функция плотности $\psi(x)$ устроена по-другому:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 - |x - 1|, & \text{если } 1 < |x| \leq 2, \\ 0, & \text{если } |x| \leq 1, \end{cases}$$

т.е. $\psi(x)$ стремится к 0 при приближении x к обоим концам отрезка поиска. В этом случае в оптимальной траектории поиск априори может занять бесконечное время несмотря на то, что математическое ожидание времени поиска $\tau_\psi(\hat{\gamma})$ будет минимально. При $t \rightarrow +\infty$ оптимальная траектория $\hat{\gamma}(\cdot)$ имеет счетное количество точек переключения скорости с -1 на 1 и наоборот (рис. 3). Точки переключения накапливаются к концам отрезка $[-1, 1]$ следующим образом: $x_0 \simeq \frac{2}{3}$, $x_1 \simeq -0,972$, $x_2 \simeq 0,999798$, $\dots$, $|x_n| \simeq 1 - 4 \cdot 12^{-2^n}$, $\dots$.

Рис. 3. Накопление переключений при окончании движения

ПРИМЕР 2.3. В n -мерном случае также наблюдаются эффекты, описанные в двух предыдущих примерах. Это связано с тем, что в n -мерном случае нетрудно придумать задачу оптимального вероятностного поиска, которая была бы эквивалентна любой наперед заданной одномерной задаче поиска; для этого нужно взять в качестве множества Ω трубку, а значения $\psi(x)$ в этой трубке задать по значениям в соответствующей одномерной задаче поиска.

§ 3. Необходимые условия оптимальной траектории

Вероятностный поиск в одномерном пространстве $\mathbb{R}$ подробно изучен в [1]: построены оптимальные траектории поиска, изучено их поведение и асимпто-

тика. Однако уже даже в двумерном случае возникают серьезные трудности и стандартные методы поиска минимума не работают.

Основная проблема заключается в следующем: пространство допустимых траекторий $S(\Omega, o)$ не обладает ни линейной, ни выпуклой, ни гладкой структурой. Единственная естественная структура – это структура метрического пространства, индуцированная из объемлющего пространства $\text{Lip}([0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Однако относительно данной структуры множество $S(\Omega, o)$ не является ни компактным, ни даже открытым или замкнутым в $\text{Lip}([0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Более того, ни одна допустимая траектория с константой Липшица, равной 1, не является внутренней точкой: при любой малой вариации скорость движения по этой траектории может превысить 1 (оптимальную траекторию следует искать как раз среди таких траекторий).

Попробуем подправить пространство $S(\Omega, o)$ так, чтобы получить на нем какую-нибудь приемлемую линейную структуру, не потеряв при этом ни одной допустимой траектории, но сохранив минимум функционала $\tau_\psi(\cdot)$ среднего времени поиска. Это позволит сформулировать необходимые условия оптимальной траектории в терминах дифференциального исчисления.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Расширенным пространством интегрируемых функций над Ω* (здесь Ω снабжено лебеговской мерой μ) будем называть

$$L_1^\infty(\Omega) = \{f(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, f(x) \text{ измерима}\}.$$

Также мы можем определить обобщение интеграла Лебега

$$\int_\Omega \cdot d\mu : L_1^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

для $f(\cdot) \in L_1^\infty(\Omega)$ следующим образом: если $\mu\{x \in \Omega : f(x) = +\infty\} > 0$, то положим $\int_\Omega f(x) d\mu = +\infty$; если же $\mu\{x \in \Omega : f(x) = +\infty\} = 0$, то $\int_\Omega f(x) d\mu$ определим как обычный интеграл Лебега от $f(x)$, изменив предварительно значение $f(x)$ на множестве $\{x \in \Omega : f(x) = +\infty\}$ с $+\infty$ на любое конечное число.

Если пара функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ лежит в $L_1^\infty(\Omega)$, то $f_1(x) + f_2(x) \in L_1^\infty(\Omega)$, $f_1(x)f_2(x) \in L_1^\infty(\Omega)$ и $\lambda f_1(x) \in L_1^\infty(\Omega)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}_+$ (т.е. $L_1^\infty(\Omega)$ – полуалгебра над $\mathbb{R}_+$).

Пусть $\gamma(t)$ – некоторая траектория, начинающаяся в точке o . Напомним, что $t(\gamma, x)$ – это первый момент времени, в который игрок P , двигаясь по $\gamma(t)$, увидит точку x . Если $\gamma(\cdot) \in S(\Omega, o)$, то функция $t(\gamma, x)$ (см. (1)) определена для почти всех $x \in \Omega$. Для произвольной же траектории

$$\gamma(\cdot) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma(0) = o,$$

положим значение $t(\gamma, x)$ равным $+\infty$ во всех точках $x \in \Omega$, которые игрок P не осмотрит. Тогда $t(\gamma, x) \in L_1^\infty(\Omega)$. Таким образом, если некоторая траектория $\gamma(t)$ недопустима, то автоматически $\tau_\psi(\gamma) = +\infty$, т.е. мы получили естественное продолжение функционала $\tau_\gamma(\cdot)$ на недопустимые липшицевы кривые: функционал $\tau_\gamma(\cdot)$ теперь определен на всем единичном шаре $\text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Обозначим через $\text{Lip}(o, n)$ пространство всех липшицевых кривых $\gamma(\cdot)$, начинающихся в точке o :

$$\text{Lip}(o, n) = \{\gamma(\cdot) \in C([0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n) : \gamma(0) = o, \|\gamma(\cdot)\|_{\text{Lip}} < \infty\},$$

где липшицева норма $\|\cdot\|_{\text{Lip}}$ задается так⁶:

$$\|\gamma(\cdot)\|_{\text{Lip}} = \min\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| \leq \alpha|t_1 - t_2| \ \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+\}.$$

Итак, мы можем вложить множество $S(\Omega, o)$ в единичный шар $\text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ из нормированного пространства $\text{Lip}(o, n)$ и продолжить естественным образом функционал $\tau_\psi(\cdot)$ так, что его минимум на множестве $S(\Omega, o)$ и на единичном шаре $\text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ будет достигаться на одной и той же траектории.

Более того, если $\gamma(t) \in \text{Lip}(o, n)$ и $\|\gamma(t)\|_{\text{Lip}} < 1$, то траектория $\gamma(t)$ не оптимальна в шаре $\text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ (движение по ней заведомо можно ускорить: траектория $\gamma(\frac{t}{\|\gamma\|_{\text{Lip}}})$ заведомо лучше). Значит, оптимальную траекторию (т.е. минимум функционала $\tau_\psi(\cdot)$) нужно искать на единичной сфере $\text{Lip}_{=1}(o, n)$ в $\text{Lip}(o, n)$.

Рассмотрим некоторую траекторию $\gamma(t) \in \text{Lip}(o, n)$, $\gamma \neq 0$, и вместе с ней траекторию $\tilde{\gamma}(\frac{t}{\|\gamma\|_{\text{Lip}}}) \in \text{Lip}_{=1}(o, n)$. Тогда $\tau_\psi(\tilde{\gamma}) = \|\gamma\|_{\text{Lip}} \tau_\psi(\gamma)$.

Это наблюдение позволяет ввести с использованием гомотетии новый функционал на всем пространстве $\text{Lip}(o, n)$ без 0:

$$\tilde{\tau}_\psi(\gamma) = \tau_\psi(\tilde{\gamma}) = \|\gamma(\cdot)\|_{\text{Lip}} \int_{\Omega} t(\gamma, x) \psi(x) dx.$$

Этот функционал является продолжением функционала $\tau_\psi(\cdot)$ со сферы $\text{Lip}_{=1}(o, n)$ на пространство $\text{Lip}(o, n) \setminus \{0\}$, позволяющим рассматривать произвольные вариации оптимальной траектории. При этом минимумы нового функционала $\tilde{\tau}_\psi(\cdot)$ на $\text{Lip}(o, n)$ и старого $\tau_\psi(\cdot)$ на $\text{Lip}_{=1}(o, n) \setminus \{0\}$ совпадают и достигаются на одних и тех же траекториях (с точностью до линейного ускорения параметризации этой траектории). Точнее, если $\hat{\gamma}(t) \in \text{Lip}(o, n) \setminus \{0\}$ доставляет минимум функционала $\tilde{\tau}_\psi(\cdot)$, то и целый луч траекторий $\gamma(\lambda t)$, $\lambda > 0$, также является минимумом функционала $\tilde{\tau}_\psi(\cdot)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Мы будем говорить, что траектория $\hat{\gamma}(t)$ является *оптимальной*, если она доставляет минимум функционала $\tilde{\tau}_\psi(\cdot)$ на $\text{Lip}(o, n) \setminus \{0\}$ и при этом $\hat{\gamma} \in \text{Lip}_{=1}(o, n)$.

Теперь мы можем воспользоваться стандартными средствами поиска минимума, а именно справедлива

ТЕОРЕМА 3.1. Если $\hat{\gamma}(t)$ – оптимальная траектория, то нижняя односторонняя производная по Гато неотрицательна по любому направлению $h(\cdot) \in \text{Lip}(o, n)$:

$$\tilde{\tau}'_{\psi_{\Gamma_{\pm}}}(\hat{\gamma})[h] = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{\tilde{\tau}_\psi(\hat{\gamma} + \lambda h) - \tilde{\tau}_\psi(\hat{\gamma})}{\lambda} \geq 0.$$

Это достаточно трудно проверяемое условие. Изучим простейшие свойства траекторий из $\text{Lip}(o, n)$ с тем, чтобы вычленить класс траекторий, на котором бы условие из теоремы 3.1 легко проверялось.

⁶Для кусочно гладких кривых норма $\|\gamma(\cdot)\|_{\text{Lip}}$ – это максимум модуля скорости $|\dot{\gamma}(t)|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Обозначим $\Omega(\gamma, t) = \{x \in \Omega : t(\gamma, x) = t\}$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\gamma(\cdot) \in \text{Lip}(o, n)$ и для некоторого $t_0 > 0$ существует левая производная $\dot{\gamma}(t_0 - 0)$. Тогда для всех $x \in \Omega(\gamma, t_0)$ выполнены следующие соотношения ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$):

$$|\gamma(t_0) - x| = 1, \quad \langle x - \gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0 - 0) \rangle \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство очевидное и не зависит от наличия или отсутствия левой производной $\dot{\gamma}(t_0 - 0)$. Докажем второе от противного: если для какого-то $x \in \Omega(\gamma, t_0)$ выполнено обратное неравенство, то для всех $\Delta t > 0$ справедливо

$$|x - \gamma(t_0 - \Delta t)|^2 = 1 + 2\langle x - \gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0 - 0) \rangle \Delta t + o(\Delta t),$$

и мы получаем противоречие с тем, что t_0 – первый момент осмотра точки x .

Таким образом, $\Omega(\gamma, t)$ при $t > 0$ лежит в соответствующей полусфере с центром в $\gamma(t)$ по направлению $\dot{\gamma}(t - 0)$. Итак, условие теоремы 3.1 проще всего расшифровывается в классе таких траекторий, что множество $\Omega(\gamma, t)$ отделено от края этой полусферы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Мы будем говорить, что допустимая траектория $\gamma(t) \in \text{Lip}(o, n) \setminus \{0\}$ является *регулярной*, если она кусочно гладкая:

$$\gamma(t) \in \text{PC}^1(\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n),$$

и выполняются следующие условия:

- 1) для почти всех $x \in \Omega$ таких, что $|x - o| > 1$, выполняется неравенство

$$\langle x - \gamma(t(\gamma, x)), \dot{\gamma}(t \pm 0) \rangle \geq \alpha > 0, \quad (2)$$

где α – некоторая заданная константа;

- 2) производная $\dot{\gamma}(t)$ является липшицевой на каждом своем промежутке непрерывности с одной и той же константой Липшица.

Условие $|x - o| > 1$ равносильно условию $t(\gamma, x) > 0$. Мы всегда будем предполагать, что мера таких x не равна 0 (иначе задача вероятностного поиска бессмысленна), и точка E независимо ни от чего будет найдена в первый же момент времени.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\gamma(t) \not\equiv 0$ – регулярная траектория и $\tilde{\tau}_\psi(\gamma) < +\infty$. Рассмотрим вариацию $h(t) \in \text{PC}^1(\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n)$ такую, что $h(0) = 0$ и $h(t)$ ограничена. Пусть, более того, $\dot{h}(t \pm 0) \perp \dot{\gamma}(t \pm 0)$ при всех $t \geq 0$. Тогда существует двусторонняя производная по Га-то

$$\tilde{\tau}_\psi(\gamma)'_{\Gamma}[h] = -\|\gamma\|_{\text{Lip}} \int_{\Omega} \frac{\langle x - \gamma(t(\gamma, x)), h(t(\gamma, x)) \rangle}{\langle x - \gamma(t(\gamma, x)), \dot{\gamma}(t(\gamma, x)) \rangle} \psi(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала найдем одностороннюю производную по Га-то от $\|\gamma\|_{\text{Lip}}$ по произвольному направлению $h(\cdot) \in \text{PC}^1(\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $h(0) = o$: так как $\|\gamma\|_{\text{Lip}} = \max_{t \geq 0} |\dot{\gamma}(t \pm 0)| \neq 0$ (иначе $\gamma(t) \equiv o$), то

$$(\|\gamma\|_{\text{Lip}})'_{\Gamma_+}[h] = \sup_{t \in \arg \max |\dot{\gamma}(t \pm 0)|} \frac{\langle \dot{\gamma}(t \pm 0), \dot{h}(t \pm 0) \rangle}{\langle \dot{\gamma}(t \pm 0), \dot{\gamma}(t \pm 0) \rangle}.$$

Итак, мы получаем $(\|\gamma\|_{\text{Lip}})'_{\Gamma_+}[h] = 0$, поскольку по условию $\dot{h}(t \pm 0) \perp \dot{\gamma}(t \pm 0)$ при любом $t \geq 0$.

Теперь найдем производную от $t(\gamma, x)$ по γ при фиксированном x . Поскольку нас интересует производная во всех точках $x \in \Omega$, за исключением, быть может, множества меры 0, то мы можем считать, что $\gamma(t)$ и $h(t)$ дифференцируемы в $t(\gamma, x)$ (если $t_1, \dots, t_n, \dots$ – их точки негладкости, то по лемме 3.1 множество $\Omega(\gamma, t_1) \cup \dots \cup \Omega(\gamma, t_n) \cup \dots$ имеет меру 0).

Производная $t(\gamma, x)'_{\Gamma_+}$ равна 0 для почти всех $x \in \Omega(\gamma, 0)$. Пусть $t_0 = t(\gamma, x) > 0$. Обозначим $t_1 = t(\gamma + \lambda h, x)$. Тогда t_1 определено для всех достаточно малых λ и $|t_1 - t_0| \rightarrow 0$ при любом $x \in \Omega$ равномерно по λ в силу регулярности $\gamma(\cdot)$.

По теореме Лагранжа о среднем значении (см. [5])

$$\begin{aligned} 0 &= |x - \gamma(t_1) - \lambda h(t_1)|^2 - |x - \gamma(t_0)|^2 \\ &= (|x - \gamma(t_1)|^2 - |x - \gamma(t_0)|^2) - 2\lambda \langle x - \gamma(t_1), h(t_1) \rangle + \lambda^2 |h(t_1)|^2 \\ &= -2\langle x - \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle (t_1 - t_0) - 2\lambda \langle x - \gamma(t_1), h(t_1) \rangle + \lambda^2 |h(t_1)|^2, \end{aligned}$$

где t лежит между t_0 и t_1 . Так как $\langle x - \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \geq \frac{1}{2}\alpha > 0$ вблизи t_0 , мы получаем, что

$$t_1 - t_0 = -\lambda \frac{\langle x - \gamma(t_1), h(t_1) \rangle}{\langle x - \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle} + \lambda^2 \frac{|h(t_1)|^2}{\langle x - \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle}. \quad (3)$$

Итак, для почти всех $x \in \Omega$ таких, что $t(\gamma, x) > 0$, верно равенство

$$t(\gamma, x)'_{\Gamma_+}[h] = -\frac{\langle x - \gamma(t_0), h(t_0) \rangle}{\langle x - \gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0) \rangle}.$$

Более того, записанная формула верна и в случае $t(\gamma, x) = 0$, так как $h(0) = 0$.

Так как $\gamma(t)$ регулярна, то $\gamma(t)$ и $\dot{\gamma}(t)$ стремятся соответственно к $\gamma(t_0)$ и $\dot{\gamma}(t_0)$ равномерно по λ на множестве всех точек дифференцируемости $\gamma(t)$. Учитывая ограниченность $h(\cdot)$, из (3) получаем, что существует такое λ_0 , что для всех $0 < \lambda < \lambda_0$ дробь $\frac{t_1 - t_0}{\lambda}$ ограничена:

$$\left| \frac{t_1 - t_0}{\lambda} \right| \leq 2 \frac{|h(t_0)| + \lambda_0 |h(t_0)|^2}{\alpha} \leq 2 \frac{1 + \lambda_0 \sup |h(t)|}{\alpha} \sup |h(t)|,$$

т.е. для всех x и λ

$$\left| \frac{t(\gamma + \lambda h, x) - t(\gamma, x)}{\lambda} \right| \leq \text{const.}$$

Так как $\psi(x)$ интегрируема на Ω , то по теореме Лебега (см. [6]) мы можем перейти к пределу под знаком интеграла:

$$\left(\int_{\Omega} t(\gamma, x) \psi(x) dx \right)'_{\Gamma_+} = - \int_{\Omega} \frac{\langle x - \gamma(t(\gamma, x)), h(t(\gamma, x)) \rangle}{\langle x - \gamma(t(\gamma, x)), \dot{\gamma}(t(\gamma, x)) \rangle} \psi(x) dx.$$

Получившаяся производная линейна по $h(\cdot)$, значит, существует двусторонняя производная по Гато, что и требовалось.

Естественно, применение данной теоремы осмысленно только в случае $n \geq 2$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если $\hat{\gamma}(\cdot)$ и $h(\cdot)$ удовлетворяют условиям предыдущей теоремы и $\hat{\gamma}(\cdot) \in \text{Lip}_{=1}(o, n)$ – оптимальная траектория (минимум функционала $\tilde{\tau}_\psi(\cdot)$), то

$$\int_{\Omega} \frac{\langle x - \hat{\gamma}(t(\hat{\gamma}, x)), h(t(\hat{\gamma}, x)) \rangle}{\langle x - \hat{\gamma}(t(\hat{\gamma}, x)), \dot{\hat{\gamma}}(t(\hat{\gamma}, x)) \rangle} \psi(x) dx = 0.$$

Итак, теперь у нас в распоряжении есть сильное средство по поиску регулярной оптимальной траектории. Рассмотрим семейство простейших вариаций $h_\varepsilon(t)$; зафиксируем некоторый момент времени $t_0 > 0$ и определим $g_\varepsilon(t)$ как иголку на отрезке $[t_0, t_0 + \varepsilon]$:

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, t_0], \\ \frac{1}{\varepsilon}, & \text{если } t \in [t_0, t_0 + \varepsilon], \\ 0, & \text{если } t \in [t_0 + \varepsilon, +\infty). \end{cases}$$

Положим $\dot{h}_\varepsilon(t) = g_\varepsilon(t)\hat{\gamma}^\perp(t)$, где $\hat{\gamma}^\perp(t_0)$ – произвольный вектор, перпендикулярный $\dot{\hat{\gamma}}(t_0 + 0)$, а $\hat{\gamma}^\perp(t)$ – его непрерывное продолжение в правую окрестность t_0 такое, что $\hat{\gamma}^\perp(t) \perp \dot{\hat{\gamma}}(t)$. Тогда

$$\underline{O}(\varepsilon) + \int_{\{x \in \Omega: t(\hat{\gamma}, x) \geq t_0 + \varepsilon\}} \frac{\langle x - \hat{\gamma}(t(\hat{\gamma}, x)), \hat{\gamma}^\perp(t_0) \rangle}{\langle x - \hat{\gamma}(t(\hat{\gamma}, x)), \dot{\hat{\gamma}}(t(\hat{\gamma}, x)) \rangle} \psi(x) dx = 0.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\int_{\{x \in \Omega: t(\hat{\gamma}, x) \geq t_0\}} \frac{\langle x - \hat{\gamma}(t(\hat{\gamma}, x)), \hat{\gamma}^\perp(t_0) \rangle}{\langle x - \hat{\gamma}(t(\hat{\gamma}, x)), \dot{\hat{\gamma}}(t(\hat{\gamma}, x)) \rangle} \psi(x) dx = 0,$$

или, по-другому,

$$\left\langle \hat{\gamma}^\perp(t_0), \int_{\{x \in \Omega: t(\hat{\gamma}, x) \geq t_0\}} \frac{x - \hat{\gamma}(t(\hat{\gamma}, x))}{\langle x - \hat{\gamma}(t(\hat{\gamma}, x)), \dot{\hat{\gamma}}(t(\hat{\gamma}, x)) \rangle} \psi(x) dx \right\rangle = 0.$$

Записанное равенство верно для любого направления $\hat{\gamma}^\perp(t_0)$, перпендикулярного $\dot{\hat{\gamma}}(t_0 + 0)$. Аналогичные рассуждения верны и для вектора $\dot{\hat{\gamma}}(t_0 - 0)$.

Итак, справедлива

ЛЕММА 3.2. Если $\hat{\gamma}(t)$ – оптимальная регулярная траектория, то в любой момент времени $t_0 > 0$ векторы

$$\dot{\hat{\gamma}}(t_0 \pm 0), \quad \int_{\{x \in \Omega: t(\hat{\gamma}, x) \geq t_0\}} \frac{x - \hat{\gamma}(t(\hat{\gamma}, x))}{\langle x - \hat{\gamma}(t(\hat{\gamma}, x)), \dot{\hat{\gamma}}(t(\hat{\gamma}, x)) \rangle} \psi(x) dx$$

параллельны.

Теперь мы готовы к тому, чтобы построить дифференциальную связь, определяющую оптимальную траекторию.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\hat{\gamma}(t)$ – оптимальная регулярная траектория. Если вектор-функция

$$F(t) = \int_{\Omega(\hat{\gamma}, t)} (x - \hat{\gamma}(t(\hat{\gamma}, x))) \psi(x) d\omega \quad (4)$$

непрерывна по t на некотором промежутке $[t_1, t_2]$ ($d\omega$ обозначает стандартную форму объема на единичной сфере) и $\int_{t_0}^{+\infty} F(t) dt$ не обращается в 0 при $t_0 \in [t_1, t_2]$, то $\hat{\gamma}(t)$ на этом промежутке является натуральной параметризацией некоторой кусочно гладкой кривой $\gamma(s)$, удовлетворяющей следующей дифференциальной связи:

$$\gamma''(s) = u(s) |\gamma'_s(s)| \int_{\Omega(\gamma, s)} (x - \gamma(s(\gamma, x))) \psi(x) d\omega, \quad (5)$$

где $u(s) = \pm 1$ – кусочно постоянная функция. Более того, $u(s)$ может менять знаки только в левых нулях $F(t)$ (т.е. $F(t) = 0$ и $F(t-0) \neq 0$). Точки не гладкости $\gamma(s)$ совпадают с переключениями $u(s)$ и при этом $\dot{\gamma}(s-0) = -\dot{\gamma}(s+0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим соотношение из леммы 3.2 в наиболее приемлемом виде: введем на множестве $\{x \in \Omega : t(\hat{\gamma}, x) > 0\}$ новые координаты $x = x(t, \omega)$, где $t = t(\hat{\gamma}, x)$ – первый момент времени осмотра точки x , а ω – набор равномерных координат на подмножестве $\Omega(\hat{\gamma}, t)$ соответствующей единичной полусферы. Набор координат (t, ω) не вырожден, так как множество $\Omega(\gamma, t)$ отделено от края полусферы в силу регулярности $\hat{\gamma}(t)$.

Если $\hat{\gamma}(t)$ является оптимальной, то очевидно, что $|\hat{\gamma}(t \pm 0)| = \text{const}$ для всех $t > 0$. Так как $\hat{\gamma} \in \text{Lip}_{-1}(0, n)$, то $|\dot{\hat{\gamma}}(t \pm 0)| = 1$. Таким образом, формы объема связаны следующим образом:

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \langle x - \hat{\gamma}(t), \dot{\hat{\gamma}}(t) \rangle dt \wedge d\omega_1 \wedge \dots \wedge d\omega_{n-1},$$

и мы получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_{\{x \in \Omega : t(\hat{\gamma}, x) \geq t_0\}} \frac{x - \hat{\gamma}(t(\hat{\gamma}, x))}{\langle x - \hat{\gamma}(t(\hat{\gamma}, x)), \dot{\hat{\gamma}}(t(\hat{\gamma}, x)) \rangle} \psi(x) dx \\ &= \int_{t_0}^{+\infty} \int_{\Omega(\hat{\gamma}, t)} (x - \hat{\gamma}(t(\hat{\gamma}, x))) \psi(x) dt \wedge d\omega, \end{aligned}$$

где $d\omega = d\omega_1 \wedge \dots \wedge d\omega_{n-1}$ – стандартная форма объема на единичной сфере.

Сменим параметризацию $\gamma(t)$ на $t = t(s)$, где $t(s)$ монотонно возрастает. Тогда $\gamma'_s(s) = \gamma'_t(t(s))t'(s)$ и $t'(s) = |\gamma'_s(s)|$. Сменой параметризации мы меняем длину вектора $\gamma'_s(s)$, но не его направление. Поэтому всегда можно добиться выполнения точного равенства

$$\gamma'(s_0 + 0) = -u(s_0) \int_{s_0}^{+\infty} \int_{\Omega(\gamma, s)} (x - \gamma(s(\gamma, x))) |\gamma'_s(s)| \psi(x) ds \wedge d\omega, \quad (6)$$

где $u(s) = \pm 1$ – кусочно постоянная функция, равная -1 , если векторы в лемме 3.2 сонаправлены, и 1 в противном случае. Дифференцируя (6) по s_0 , в силу непрерывности $F(t)$ получаем нужное дифференциальное уравнение.

Определим, в каких ситуациях функция $u(s)$ может изменять знак в точке s_0 : так как ни $\hat{\gamma}(t)$, ни $\int_{t_0}^{+\infty} \int_{\Omega(\gamma, t)} (x - \hat{\gamma}(t(\gamma, x))) \psi(x) dt \wedge d\omega$ не обращаются в 0, то $u(s)$ меняют знак только в точках негладкости $\hat{\gamma}(t)$. Это означает, что $\dot{\hat{\gamma}}(t_0+0) = -\dot{\hat{\gamma}}(t_0-0)$, и в силу регулярности $\hat{\gamma}(\cdot)$ в течение некоторого времени после t_0 игрок P осмотрит лишь множество меры 0, т.е. $F(t_0 + \varepsilon) = 0$ для всех малых ε .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В теореме 3.3 знак $u(s)$ выбирается следующим образом: $u(s) = -1$, если векторы в лемме 3.2 сонаправлены, и $u(s) = 1$ в противном случае.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Пусть $S(\gamma)$ – момент окончания поиска по траектории $\gamma(s)$. Тогда из формулы (6) следует, что

$$\lim_{s \rightarrow S(\gamma)-0} |\gamma'(s)| = 0,$$

где $\gamma(s)$ – параметризация оптимальной траектории из теоремы 3.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Если каким-то образом удалось построить решение $\gamma(s)$ уравнения (5), то оптимальная траектория $\hat{\gamma}(t)$ находится достаточно легко: $\hat{\gamma}(t)$ является натуральной параметризацией кривой $\gamma(s)$.

§ 4. Вероятностный поиск на сильно выпуклых множествах

Прежде чем приступить к изучению оптимальных траекторий в конкретных случаях, докажем еще несколько важных лемм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть $\gamma(t)$ – некоторая допустимая траектория. Положим

$$T(\gamma) = \inf \left\{ t > 0 : \int_{\{x \in \Omega: t(\gamma, x) \leq t\}} t(\gamma, x) \psi(x) dx = 1 \right\},$$

т.е. $T(\gamma)$ – это момент окончания поиска. Будем считать, что $T(\gamma) = +\infty$, если время поиска бесконечное.

ЛЕММА 4.1. Пусть $\hat{\gamma}(\cdot) \in \text{Lip}_{=1}(o, n)$ – оптимальная траектория (возможно, не регулярная). Предположим, что в течение времени $t \in [t_0, t_1]$ (при $t_1 < T(\hat{\gamma})$) игрок P осмотрел множество меры 0:

$$\mu \left(\bigcup_{t_0 \leq t \leq t_1} \Omega(\hat{\gamma}, t) \right) = 0.$$

Тогда при $t \in [t_0, t_1]$ траектория $\gamma(t)$ является прямолинейным движением с постоянной скоростью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство от противного. Если движение по $\hat{\gamma}(t)$ на $[t_0, t_1]$ не является прямолинейным с постоянной скоростью 1, то траекторию $\hat{\gamma}(t)$ можно подправить следующим образом: движение по $\tilde{\gamma}(t)$ в точности совпадает с движением по $\hat{\gamma}(t)$, за исключением промежутка $[\hat{\gamma}(t_0), \hat{\gamma}(t_1)]$, на нем движение $\tilde{\gamma}(t)$ является прямолинейным с постоянной скоростью 1. Из построения следует, что $\|\tilde{\gamma}\|_{\text{Lip}} = \|\hat{\gamma}\|_{\text{Lip}} = 1$, $t(\tilde{\gamma}, x) \leq t(\hat{\gamma}, x)$ и,

более того, если $t(\hat{\gamma}, x) \geq t_1$, то $t(\tilde{\gamma}, x) < t(\hat{\gamma}, x)$. Так как $t_1 < T(\hat{\gamma})$, то получаем, что $\tau_\psi(\tilde{\gamma}) < \tau_\psi(\hat{\gamma})$. Противоречие.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\hat{\gamma}(t) \in \text{Lip}_{=1}(o, n)$ – оптимальная траектория (возможно, не регулярная). Если для некоторого момента времени $t_0 \in (0, T(\hat{\gamma}))$ существует $\dot{\hat{\gamma}}(t_0 + 0) \neq 0$, то найдется $x \in \Omega$ такой, что $t(\hat{\gamma}, x) > t_0$ и $\langle x - \hat{\gamma}(t_0), \dot{\hat{\gamma}}(t_0 + 0) \rangle > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два принципиально разных случая:

(а) для любого $t_1 > t_0$ за время $t_0 \leq t \leq t_1$ игрок P осматривает множество ненулевой меры;

(б) существует $t_1 > t_0$ такое, что за время $t_0 \leq t \leq t_1$ игрок P осмотрит лишь множество меры 0.

Рассмотрим случай (а). Пусть $t_1 > t_0$ и $x \in \Omega$ такой, что $t(\hat{\gamma}, x) > t_0$. Тогда $|x - \hat{\gamma}(t_1)| = 1$ и $|x - \hat{\gamma}(t)| > 1$. Значит,

$$0 < |x - \hat{\gamma}(t_1)|^2 - |x - \hat{\gamma}(t)|^2 = -\langle x - \hat{\gamma}(t_0), \dot{\hat{\gamma}}(t_0 + 0) \rangle (t_1 - t_0) + \bar{o}(t_1 - t_0).$$

Таким образом, $\langle x - \hat{\gamma}(t_0), \dot{\hat{\gamma}}(t_0 + 0) \rangle \geq 0$, если $t_1 - t_0$ достаточно мало. Покажем, что найдутся такие x , что это неравенство превращается в строгое: мера множества точек x , в которых достигается точное равенство, равна 0, и за время $t_0 \leq t \leq t_1$ игрок P осмотрел множество ненулевой меры.

Перейдем к случаю (б). Пусть t_1 – максимальный момент времени такой, что за время $t_0 \leq t \leq t_1$ игрок P осмотрел лишь множество меры 0 ($t_1 \neq +\infty$, так как $t_0 < T(\hat{\gamma})$). Согласно предыдущей лемме движение от t_0 до t_1 прямолинейно с направлением $\dot{\hat{\gamma}}(t_0 + 0)$, т.е.

$$\hat{\gamma}(t_1) = \hat{\gamma}(t_0) + \dot{\hat{\gamma}}(t_0 + 0)(t_1 - t_0).$$

Так как t_1 максимальный, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $x \in \Omega$ такая, что $|x - \hat{\gamma}(t_1)|^2 < 1 + \varepsilon$ и $t(\hat{\gamma}, x) \geq t_1$. Тогда для $\varepsilon = |\dot{\hat{\gamma}}(t_0 + 0)|^2(t_1 - t_0)^2$ получаем

$$\begin{aligned} 1 + |\dot{\hat{\gamma}}(t_0 + 0)|^2(t_1 - t_0)^2 &> |x - \hat{\gamma}(t_1)|^2 \\ &\geq 1 - 2\langle x - \hat{\gamma}(t_0), \dot{\hat{\gamma}}(t_0 + 0) \rangle (t_1 - t_0) + |\dot{\hat{\gamma}}(t_0 + 0)|^2(t_1 - t_0)^2, \end{aligned}$$

т.е. $\langle x - \hat{\gamma}(t_0), \dot{\hat{\gamma}}(t_0 + 0) \rangle > 0$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь случай сильно выпуклого множества Ω (см. [2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *сильно выпуклым радиуса R* , если оно выпукло и для любых двух точек $x, y \in \Omega$ пересечение всех шаров радиуса R , содержащих x и y , лежит в Ω .

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ – сильно выпуклое множество с радиусом выпуклости 1 (радиус выпуклости совпадает с радиусом области видимости игрока P). В этом случае либо Ω ограничено и его диаметр Ω не больше 2, либо Ω совпадает с $\mathbb{R}^n$. Нас будет интересовать случай ограниченного Ω , так как если $\Omega = \mathbb{R}^n$, то ни одна траектория не является регулярной (неравенство (2) заведомо нарушается).

Множество Ω всегда замкнуто в силу того, что Ω – носитель функции $\psi(\cdot)$: $\Omega = \text{Supp } \psi$.

ЛЕММА 4.3. Если $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ – компактное сильно выпуклое множество с радиусом выпуклости 1 и $\hat{\gamma}(t)$ – регулярная траектория, то $B_1(\hat{\gamma}(t_0)) \cap \Omega \subseteq B_1(\hat{\gamma}(t_1)) \cap \Omega$ для любых $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T(\hat{\gamma})$ ($B_1(x)$ – единичный шар с центром в точке x).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$t_0 = \sup\{t \geq 0 : B_1(\hat{\gamma}(t_1)) \cap \Omega \subseteq B_1(\hat{\gamma}(t_2)) \cap \Omega \quad \forall t_1 \leq t_2; t_1, t_2 \in [0, t]\}.$$

Множество в правой части равенства не пусто, так как содержит $t = 0$. Также обязательно найдется точка $x \in \Omega$ такая, что $\langle y - \hat{\gamma}(t_0), \hat{\gamma}(t_0 + 0) \rangle \leq 0$ и $|x - \gamma(t_0)| = 1$ (рис. 4); если такого x нет, то окрестность нижней полусферы не лежит в Ω в силу замкнутости Ω и, значит, t_0 не максимально.

Рис. 4. Иллюстрация к противоречию в лемме 4.3

Покажем, что $t_0 \geq T(\hat{\gamma})$. Предположим противное, тогда согласно лемме 4.2 существует точка y такая, что $\langle y - \hat{\gamma}(t_0), \hat{\gamma}(t_0 + 0) \rangle > 0$ и $|x - \hat{\gamma}(t_0)| > 1$. Тогда в силу сильной выпуклости Ω найдется такая точка $z \in \Omega$, что $\langle z - \hat{\gamma}(t_0), \hat{\gamma}(t_0 + 0) \rangle = 0$, $|z - \hat{\gamma}(t_0)| = 1$ и условие регулярности (2) нарушается для точек из окрестности точки z (см. рис. 4).

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\hat{\gamma}(t)$ из леммы 4.3. Тогда для всех $t \in (0, T(\hat{\gamma}))$ выполнено соотношение

$$\Omega(\hat{\gamma}, t) = \partial B_1(\hat{\gamma}(t)) \cap \Omega.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Предположим, что $\rho(o, \Omega) < 1$. Если плотность вероятности $\psi(x)$ непрерывна на Ω , то вектор-функция

$$F(t) = \int_{\Omega(\hat{\gamma}, t)} (x - \hat{\gamma}(t(\hat{\gamma}, x))) \psi(x) dw$$

непрерывна при всех $t \in (0, T(\hat{\gamma}))$ (dw – стандартная мера на единичной сфере S^{n-1} , а $\Omega = \text{Supp } \psi(\cdot)$ и $\hat{\gamma}(t)$ из леммы 4.3).

ЛЕММА 4.4. Пусть Ω – шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса не больше 1, а функция $\psi(x)$ непрерывна на Ω и зависит только от расстояния до центра шара⁷ Ω либо

⁷То есть $\psi(x) = \psi(\rho(x, O))$, где O – центр шара Ω .

Ω – плоское компактное сильно выпуклое множество в $\mathbb{R}^2$ радиуса не больше 1, а $\psi(x)$ является постоянной функцией на Ω . Если $\rho(o, \Omega) \leq 1$, то ни вектор-функция $F(t_0)$, ни интеграл $\int_{t_0}^{+\infty} F(t) dt$ не обращаются в 0 при всех $t_0 \in (0, T(\hat{\gamma}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $\rho(o, \Omega) < 1$. Из следствия 4.1 видно, что $\Omega(\hat{\gamma}, t)$ является сегментом единичной сферы S^{n-1} с центром в $\gamma(t)$, а граница $\partial\Omega(\hat{\gamma}, t)$ – это сфера меньшего радиуса размерности $n-2$. Легко видеть, что в обоих случаях (Ω – шар в $\mathbb{R}^n$ или сильно выпуклое множество в $\mathbb{R}^2$) вектор $F(t)$ в силу симметрии перпендикулярен гиперплоскости, содержащей $(n-2)$ -мерную сферу $\partial\Omega(\hat{\gamma}, t)$ (см. равенство (4)).

Если функция $\psi(x)$ постоянна на своем носителе Ω : $\psi(x) \equiv \psi_0 > 0$, то длина $F(t)$ равна длине отрезка, ограниченного нульмерной сферой $\partial\Omega(\hat{\gamma}, t)$, умноженной на ψ_0 , и, следовательно, вектор $F(t)$ не обращается в 0 при всех $t \in (0, T(\hat{\gamma}))$.

Если же Ω – это шар в $\mathbb{R}^n$ и $\psi(x)$ симметрична относительно центра Ω , то $\psi(x) \neq 0$ для почти всех $x \in \Omega(\hat{\gamma}, t)$ (иначе в силу непрерывности и симметрии функции $\psi(x)$ относительно центра шара Ω множество Ω не могло бы быть носителем функции $\psi(x)$). Следовательно, вектор $F(t)$ также не обращается в 0 при всех $t \in (0, T(\hat{\gamma}))$.

Займемся теперь интегралом $\int_{t_0}^{+\infty} F(t) dt$; покажем, что существует такой вектор v , что

$$\langle v, F(t) \rangle > 0 \quad \text{для всех } t \in (0, T(\hat{\gamma})).$$

Пусть Q – произвольная точка из множества⁸ $\Omega(\hat{\gamma}, T(\hat{\gamma}))$. Тогда вектор с началом в $\gamma(0)$ и концом в Q при любом $t \in (0, T(\hat{\gamma}))$ пересекает сектор сферы $\Omega(\hat{\gamma}, t)$, ограниченный сферой $\partial\Omega(\hat{\gamma}, t)$ (рис. 5). В качестве v можно выбрать этот вектор.

Рис. 5. Поиск на сильно выпуклом множестве

Итак, $\int_{t_0}^{+\infty} F(t) dt \neq 0$ при всех $t_0 \in (0, T(\hat{\gamma}))$, так как

$$\left\langle v, \int_{t_0}^{+\infty} F(t) dt \right\rangle > 0.$$

⁸На самом деле, если радиус выпуклости Ω строго меньше 1, то множество $\Omega(\hat{\gamma}, T(\hat{\gamma}))$ состоит из одной точки.

Если же $\rho(o, \Omega) = 1$, то приведенное выше рассуждение проходит для всех $\Delta t \in (0, T(\hat{\gamma}))$, т.е. $F(t_0) \neq 0$ и $\int_{t_0}^{+\infty} F(t) dt \neq 0$ для всех $t_0 \in (\Delta t, T(\hat{\gamma}))$. В силу произвольности Δt получаем искомое.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. В условиях леммы 4.4 функция $u(s)$ из теоремы 3.3 является постоянной. Определим знак $u(s)$: очевидно, что $\hat{\gamma}(T(\hat{\gamma}) - \Delta t)$ сопоставлена $\int_{T(\hat{\gamma}) - \Delta t}^{T(\hat{\gamma})} F(t) dt$. Значит (см. замечание 3.1),

$$u(s) \equiv -1 \quad \text{для всех } s \in (s(0), s(T(\hat{\gamma}))).$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\Omega = \text{Supp } \psi(\cdot)$ — шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса не больше 1 и функция $\psi(x)$ плотности вероятности возможного расположения точки E непрерывна на Ω и зависит только от расстояния до центра сферы Ω : $\psi(x) = \psi(\rho(x, O(\Omega)))$ ($O(\Omega)$ обозначает центр шара Ω). Тогда оптимальная траектория $\hat{\gamma}(t)$ представляет собой прямолинейное движение с постоянной скоростью в центр шара Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $\rho(o, \Omega) > 1$. Тогда по лемме 4.1 игрок P должен двигаться прямолинейно с постоянной скоростью в одну из точек x таких, что $\rho(x, \Omega) = 1$. Математические ожидания времени поиска одинаковы при старте из всех таких точек x , что $\rho(x, \Omega) = 1$. Значит, игрок P движется в ближайшую такую точку, т.е. точно к центру шара Ω .

Пусть теперь $\rho(o, \Omega) \leq 1$. В этом случае мы можем применить теорему 3.3 (согласно следствию 4.2 и лемме 4.4 наша ситуация удовлетворяет условиям теоремы). Итак $\hat{\gamma}(t)$ — это натуральная параметризация кривой $\gamma(s)$ такой, что

$$\gamma''(s) = \Lambda(\gamma(s))|\gamma'(s)|(\gamma(s) - O(\Omega)),$$

где $O(\Omega)$ — центр Ω , а $\Lambda(\cdot)$ — некоторая положительнозначная функция, $\Lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ (см. равенства (4) и (5)). Таким образом, ускорение $\gamma''(s)$ всегда направлено из центра сферы $O(\Omega)$. Следовательно, модуль составляющей скорости $\gamma'(s)$, перпендикулярной радиус-вектору $O(\Omega)\gamma(s)$, не изменяется с течением времени, но согласно замечанию 3.2 имеем

$$\lim_{s \rightarrow S(\gamma) - 0} |\dot{\gamma}(s)| = 0.$$

Значит, скорость $\gamma'(s)$ всегда направлена в центр сферы $O(\Omega)$, что и требовалось.

Построим множество Ω^* , двойственное к Ω : множество Ω^* состоит из таких x , что для всех $y \in \Omega$ расстояние $\rho(x, y)$ не превосходит 1, т.е.

$$\Omega^* = \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x, y) \leq 1 \ \forall y \in \Omega\}$$

Из любой точки множества Ω^* игрок P видит все точки множества Ω .

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть функция $\psi(x) \equiv \psi_0 > 0$ постоянна на $\Omega = \text{Supp } \psi(\cdot)$ и Ω — плоское сильно выпуклое множество радиуса не больше 1. Определим для любой точки $x \notin \Omega^*$ такой, что $\rho(x, \Omega) < 1$, две функции, $l(x)$ и $r(x)$, это

точки пересечения границы $\partial\Omega$ с единичной окружностью с центром⁹ в x . Если $\rho(o, \Omega) < 1$, то оптимальная траектория $\hat{\gamma}(t)$ является натуральной параметризацией кривой $\gamma(s)$, удовлетворяющей однородному дифференциальному уравнению

$$\gamma''(s) = -|\gamma'(s)| \Lambda(\gamma(s))V(\gamma(s)), \quad (7)$$

где коэффициент $\Lambda(P)$ задается формулой

$$\Lambda(P) = \psi_0 \sqrt{\frac{1 - \langle r(P) - P; l(P) - P \rangle}{1 + \langle r(P) - P; l(P) - P \rangle}} \geq 0,$$

а вектор $V(P)$ – формулой

$$V(P) = r(P) + l(P) - 2P.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 4.2 и лемме 4.4 рассматриваемая задача оптимального вероятностного поиска удовлетворяет условиям теоремы 3.3 о параметризации оптимальной кривой. Применим ее.

Для начала найдем $F(t)$ из теоремы 3.3: так как $\Omega(\hat{\gamma}, t)$ – это дуга окружности с центром в $\hat{\gamma}(t)$, то по следствию 4.1 точки $l(x)$ и $r(x)$ – концы этой дуги. Таким образом,

$$F(t) = \psi_0 \frac{|r(\hat{\gamma}(t)) - l(\hat{\gamma}(t))|}{\left| \frac{r(\hat{\gamma}(t)) + l(\hat{\gamma}(t))}{2} - \hat{\gamma}(t) \right|} \left(\frac{r(\hat{\gamma}(t)) + l(\hat{\gamma}(t))}{2} - \hat{\gamma}(t) \right), \quad (8)$$

т.е. $F(t)$ – вектор длины $|r(\hat{\gamma}(t)) - l(\hat{\gamma}(t))|$, параллельный вектору $r(\hat{\gamma}(t)) + l(\hat{\gamma}(t)) - 2\hat{\gamma}(t)$ (формула (8) следует напрямую из определения функции $F(t)$ в теореме 3.3).

Преобразуя функцию $F(t)$, по теореме 3.3 получаем искомое уравнение.

Для точек $x \in \Omega^*$ функции $l(x)$ и $r(x)$ не определены. Однако если в какой-то момент времени $\gamma(s) \in \Omega^*$, то поиск окончен. Значит, необходимы два начальных условия. Уравнение (7) является уравнением второго порядка. Первое начальное условие очевидно: $\gamma(0) = o$. Второе условие находится сложнее – с учетом следующих соображений:

- 1) согласно замечанию 3.2 имеем

$$\lim_{s \rightarrow S(\gamma) - 0} |\dot{\gamma}(s)| = 0;$$

- 2) если радиус выпуклости Ω строго меньше 1, то множество $\Omega(\hat{\gamma}, T(\hat{\gamma}))$ состоит из единственной точки $Q \in \partial\Omega$. Предположим, что граница $\partial\Omega$ гладкая в окрестности точки Q . Тогда граница $\partial\Omega^*$ гладкая в окрестности точки $Q^* = \hat{\gamma}(T(\hat{\gamma}))$ и касательные к границам в этих точках параллельны друг другу и перпендикулярны вектору Q^*Q ; очевидно, что вектор $\hat{\gamma}(t)$ при $t \rightarrow T(\hat{\gamma}) - 0$ стремится к вектору, параллельному Q^*Q и, следовательно, перпендикулярному касательной к границе $\partial\Omega^*$ в точке Q^* .

⁹Так как Ω – сильно выпуклое множество радиуса не больше 1, то его пересечение с любой окружностью радиуса 1 либо пусто, либо является дугой этой окружности. Соответственно, $l(x)$ и $r(x)$ – концы этой дуги. Более того, в силу симметрии уравнения (7) неважно, какой из концов дуги обозначить через $l(x)$, а какой через $r(x)$.

Рис. 6. Схематичное изображение оптимального поиска на эллипсе

К сожалению, уравнение (7) получается довольно сложным даже для простейшего случая, когда Ω – эллипс. Однако легко построить качественную топологию решений этого уравнения (рис. 6). Оно без особого труда поддается приближенному численному решению на ЭВМ.

§ 5. Теорема существования

Введем на пространстве $\text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ секвенциальную топологию (см. [7], [8]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Мы будем говорить, что последовательность траекторий $\gamma_n(\cdot) \in \text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ *сходится* к некоторой траектории $\hat{\gamma}(\cdot) \in \text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$, если на любом конечном промежутке $[0, \alpha]$ траектории $\gamma_n(\cdot)$ сходятся к $\hat{\gamma}(\cdot)$ равномерно.

Хаусдорфовость получившегося топологического пространства следует из очевидной единственности предела.

ЛЕММА 5.1. *Пространство $\text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ компактно относительно выбранной топологии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая траектория $\gamma(\cdot) \in \text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ на любом конечном отрезке $[0, \alpha]$ в силу липшицевости ограничена по модулю константой α :

$$\forall t \in [0, \alpha] \quad |\gamma(t) - o| \leq |\alpha - 0| = \alpha.$$

Рассмотрим произвольную последовательность траекторий

$$\gamma_n(\cdot) \in \text{Lip}_{\leq 1}(o, n).$$

Докажем, что из нее можно выбрать сходящуюся.

Все $\gamma_n(\cdot)$ равномерно непрерывны на промежутке $[0, \infty)$. Согласно теореме Арцела (см. [6]) из любой равномерно ограниченной последовательности равномерно непрерывных функций можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Значит, из любой последовательности $\gamma_n(\cdot)$ можно выбрать подпоследовательность $\gamma_n^1(\cdot)$, равномерно сходящуюся на промежутке $[0, 1]$. Из

нее в свою очередь можно выбрать подпоследовательность $\gamma_n^2(\cdot)$, сходящуюся на промежутке $[0, 2]$ и т.д. Подпоследовательность $\gamma_n^k(\cdot)$ сходится на $[0, k]$.

Рассмотрим теперь диагональную последовательность $\gamma_n^n(\cdot)$. Она сходится равномерно на любом конечном отрезке к некоторой непрерывной кривой $\hat{\gamma}(\cdot)$. Очевидно, что $\hat{\gamma}(0) = o$. Покажем липшицевость $\hat{\gamma}(\cdot)$: возьмем любые t_1 и t_2 и рассмотрим произвольный конечный отрезок $[0, \alpha]$, их содержащий. Тогда из равномерной сходимости получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : \quad \forall n > N \quad \forall t \in [0, \alpha] \quad |\gamma_n(t) - \hat{\gamma}(t)| < \varepsilon.$$

Тогда независимо от $n > N$ получаем

$$|\hat{\gamma}(t_2) - \hat{\gamma}(t_1)| \leq |(\hat{\gamma}(t_2) - \gamma_n(t_2))| + |\gamma_n(t_2) - \gamma_n(t_1)| + |\gamma_n(t_1) - \hat{\gamma}(t_1)|.$$

Отсюда вытекает нужная нам оценка, верная для всех $\varepsilon > 0$:

$$|\hat{\gamma}(t_2) - \hat{\gamma}(t_1)| < 2\varepsilon + |t_2 - t_1|,$$

т.е. в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $|\hat{\gamma}(t_2) - \hat{\gamma}(t_1)| \leq |t_2 - t_1|$, что и требовалось.

Пусть $\tau_\psi^{\inf}$ – это инфимум функционала $\tau_\psi(\cdot)$ на всем множестве $S(\Omega, o)$ допустимых траекторий:

$$\tau_\psi^{\inf} = \inf_{\gamma(\cdot) \in S(\Omega, o)} \tau_\psi(\gamma).$$

Возможно, что $\tau_\psi^{\inf} = +\infty$. В этом случае задача оптимизации не интересна, так как любая допустимая траектория является оптимальной. Однако $\tau_\psi^{\inf} < \infty$ достаточно часто, если, например, множество $\Omega = \text{Supp } \psi(\cdot)$ ограничено в $\mathbb{R}^n$ или если $\psi(x)$ достаточно быстро стремится к 0 при $x \rightarrow \infty$. Поэтому мы будем считать, что $\tau_\psi^{\inf} < \infty$ (проверяется этот факт даже в случае бесконечной меры Ω просто, достаточно построить хотя бы одну допустимую траекторию $\tilde{\gamma}(\cdot)$ с конечным математическим ожиданием времени поиска: $\tau_\psi(\tilde{\gamma}) < \infty$).

Рассмотрим теперь все множество допустимых траекторий $S(\Omega, o)$. Вложение $S(\Omega, o) \subseteq \text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ индуцирует на $S(\Omega, o)$ естественную топологию. Поскольку нашей конечной целью является доказательство теоремы существования оптимальной траектории в классе $S(\Omega, o)$, то мы будем рассматривать не все множество допустимых траекторий, а лишь его подмножество траекторий с не слишком большим математическим ожиданием времени поиска.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Множество $S^T(\Omega, o)$ – это множество всех допустимых траекторий $\gamma(\cdot) \in S(\Omega, o)$ таких, что $\tau_\psi(\gamma)$ не превосходит $T \in \mathbb{R}$:

$$S^T(\Omega, o) = \{\gamma(\cdot) \in S(\Omega, o) : \tau_\psi(\gamma) \leq T\}.$$

ЛЕММА 5.2. Рассмотрим последовательность допустимых траекторий $\gamma_n(\cdot) \in S(\Omega, o)$. Если $\tau_\psi(\gamma_n)$ при любом n не превосходит некоторой заданной константы T : $\gamma_n(\cdot) \in S^T(\Omega, o)$, то для почти всех $x \in \Omega$ функции $t(\gamma_n, x)$ определены при всех n и ограничены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого фиксированного n для почти всех $x \in \Omega$ определена функция $t(\gamma_n, x)$. Поскольку счетное объединение множеств меры 0 есть снова множество меры 0, то для почти всех $x \in \Omega$ одновременно для всех n определены функции $t(\gamma_n, x)$. Покажем, что мера множества таких $x \in \Omega$, при которых последовательность $t(\gamma_n, x)$ неограниченна, равна 0:

$$A = \{x \in \Omega : \forall M \exists N \in \mathbb{N} : t(\gamma_N, x) > M\}.$$

Рассмотрим множества

$$A_M = \{x \in \Omega : \exists N \in \mathbb{N} : t(\gamma_N, x) > M\}.$$

Множества A_M построены так, что

$$A = \bigcap_{M=1}^{\infty} A_M.$$

Оценим интегралы функции $\psi(x)$ на множествах A_M . Для любых $M > 0$ выполняются неравенства

$$T \geq \tau_\psi(\gamma_N) \geq \int_{A_M} t_N(x) \psi(x) dx \geq M \int_{A_M} \psi(x) dx.$$

Значит¹⁰,

$$\int_{A_M} \psi(x) dx \leq \frac{T}{M}.$$

Так как $\Omega \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_M \supseteq \dots$, то в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега (см. [6]) получаем

$$\int_A \psi(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{A_M} \psi(x) dx = 0. \quad (9)$$

Теперь воспользуемся неотрицательностью $\psi(x)$ и тем, что Ω есть носитель функции $\psi(x)$. Положим

$$B_0 = \{x \in \Omega : \psi(x) \geq 1\}, \quad \forall n \geq 1 \quad B_n = \left\{x \in \Omega : \frac{1}{n+1} \leq \psi(x) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Тогда $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} B_n = \Omega$. Но согласно (9) для любого n мера $\mu(A \cap B_n)$ равна 0 и, естественно, $A \subseteq \Omega$. В силу σ -аддитивности меры Лебега

$$\mu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A \cap B_n) = 0,$$

что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Рассмотрим последовательность допустимых траекторий $\gamma_n(\cdot) \in S^T(\Omega, o)$. Тогда для почти всех $x \in \Omega$ существует нижний предел $\lim_{n \rightarrow \infty} t(\gamma_n, x) < \infty$.*

¹⁰По существу записанное неравенство является неравенством Чебышёва (см. [6]).

ЛЕММА 5.3. Пусть последовательность допустимых траекторий $\gamma_n(\cdot) \in S^T(\Omega, o) \subseteq \text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ сходится к некоторой траектории $\hat{\gamma}(\cdot) \in \text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ в описанной выше секвенциальной топологии пространства $\text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$. Тогда $\hat{\gamma}(\cdot)$ принадлежит $S(\Omega, o)$, т.е. $t(\hat{\gamma}, x)$ определена для почти всех $x \in \Omega$. Более того, для почти всех $x \in \Omega$ выполнено неравенство

$$t(\hat{\gamma}, x) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} t(\gamma_n, x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность допустимых траекторий $\gamma_n(\cdot) \in S(\Omega, o) \subseteq \text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$, сходящуюся к некоторой $\hat{\gamma}(\cdot) \in \text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$. По лемме 5.2 для почти всех $x \in \Omega$ одновременно определены все функции $t(\gamma_n, x)$. Более того, для почти всех $x \in \Omega$ последовательность $\{t(\gamma_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Значит, при любом фиксированном $x \in \Omega$ (за исключением, быть может, множества меры 0) из нее можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к нижнему пределу:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t(\gamma_{n_k}, x) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} t(\gamma_n, x) = t_0(x) < \infty.$$

Покажем, что, двигаясь по траектории $\hat{\gamma}(\cdot)$, игрок P заведомо осмотрит точку x в момент времени $t_0(x)$. В силу липшицевости всех траекторий $\gamma_n(\cdot)$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\gamma_{n_k}(t(\gamma_{n_k}, x)) - \gamma_{n_k}(t_0(x))| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |t(\gamma_{n_k}, x) - t_0(x)| = 0.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} |\hat{\gamma}(t_0(x)) - x| &\leq |\hat{\gamma}(t_0(x)) - \gamma_{n_k}(t_0(x))| + |\gamma_{n_k}(t_0(x)) - \gamma_{n_k}(t(\gamma_{n_k}, x))| \\ &\quad + |\gamma_{n_k}(t(\gamma_{n_k}, x)) - x| \end{aligned}$$

и, естественно, $|\gamma_{n_k}(t(\gamma_{n_k}, x)) - x| = 1$, получаем, что $|\hat{\gamma}(t_0(x)) - x| \leq 1 + o(k)$ при $k \rightarrow +\infty$, т.е.

$$|\hat{\gamma}(t_0(x)) - x| \leq 1.$$

Следовательно, двигаясь по $\hat{\gamma}(\cdot)$, игрок P заведомо осмотрит точку x в момент времени $t_0(x)$, и, значит, в первый раз он осмотрит точку x не позже чем в момент $t_0(x)$, т.е. $t(\hat{\gamma}, \cdot)$ определена для почти всех $x \in \Omega$, и, следовательно, траектория $\hat{\gamma}(\cdot)$ допустима: $\hat{\gamma}(\cdot) \in S(\Omega, o)$. Более того,

$$t(\hat{\gamma}, x) \leq t_0(x) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} t(\gamma_n, x),$$

что и требовалось.

Таким образом, мы доказали, что множество $S^T(\Omega, o)$ слабо компактно в $S(\Omega, o)$.

Для доказательства теоремы существования нам, по большому счету, осталось лишь доказать полунепрерывность снизу функционала $\tau_\psi(\gamma)$. Для этого нам потребуется простое обобщение теоремы Фату¹¹ (см. [6]).

¹¹Автору не известна литература, в которой было бы приведено доказательство этого естественного обобщения теоремы Фату, и поэтому ее полное доказательство приведено ниже.

ТЕОРЕМА 5.1. *Рассмотрим последовательность неотрицательных функций $\{f_n(x)\}$. Если для почти всех $x \in \Omega$ существует нижний предел*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

и $\int_{\Omega} f_n(x) dx \leq K$ для всех n , то существует $\int_{\Omega} f(x) dx \leq K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО¹². Положим

$$\varphi_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x).$$

Далее, $0 \leq \varphi_n(x) \leq f_n(x)$. Поэтому $\varphi_n(\cdot)$ интегрируемы и

$$0 \leq \int_{\Omega} \varphi_n(x) dx \leq \int_{\Omega} f_n(x) dx \leq K.$$

Наконец,

$$0 \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \dots \leq \varphi_n(x) \leq \dots,$$

и получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$$

почти всюду. Поэтому, применяя теорему Б. Леви (см. [6]) к $\{\varphi_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$, получаем требуемый результат.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Рассмотрим некоторую неотрицательную функцию $f(x)$ и последовательность неотрицательных функций $\{f_n(x)\}$. Если для почти всех $x \in \Omega$ существует нижний предел $f_n(x)$, мажорирующий $f(x)$:*

$$f(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

и $\int_{\Omega} f_n(x) dx \leq K$ для всех n , то $\int_{\Omega} f(x) dx$ конечен и тоже не превосходит K .

Теперь мы готовы доказать полунепрерывность функционала $\tau_{\psi}(\cdot)$ по $\gamma(\cdot)$ (естественно, мы считаем, что $\tau_{\psi}^{\inf}$ конечен).

ЛЕММА 5.4. *Функционал $\tau_{\psi}(\cdot)$ полунепрерывен снизу на пространстве допустимых траекторий $S(\Omega, o)$ относительно секвенциальной топологии, индуцированной вложением $S(\Omega, o) \subseteq \text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ (см. определение 5.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность допустимых траекторий $\gamma_n(\cdot) \in S(\Omega, o)$, сходящуюся к некоторой траектории $\hat{\gamma}(\cdot) \in S(\Omega, o)$, и будем считать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{\psi}(\gamma_n) = T.$$

Докажем, что $\tau_{\psi}(\hat{\gamma})$ конечен и не превосходит T . Мы можем считать, что $\tau_{\psi}(\gamma_n) \leq T + \varepsilon$ для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ (этого всегда можно добиться путем выкидывания конечного числа начальных членов последовательности $\gamma_n(\cdot)$). Возьмем функции $t(\gamma_n, x)$ и $t(\hat{\gamma}, x)$ и построим по ним функции

$$f_n(x) = t(\gamma_n, x)\psi(x), \quad f(x) = t(\hat{\gamma}, x)\psi(x).$$

¹² Доказательство практически дословно повторяет доказательство теоремы Фату, приведенное в [6].

Согласно лемме 5.3 эти функции удовлетворяют условию следствия 5.2. Значит,

$$\tau_\psi(\hat{\gamma}) = \int_{\Omega} t(\hat{\gamma}, x) \psi(x) dx \leq T + \varepsilon.$$

Поскольку это неравенство выполняется для всех $\varepsilon > 0$, то $\tau_\psi(\hat{\gamma}) \leq T$.

ЛЕММА 5.5. *Множество $S^T(\Omega, o)$ компактно относительно секвенциальной топологии, индуцированной вложениями¹³*

$$S^T(\Omega, o) \subseteq S(\Omega, o) \subseteq \text{Lip}_{\leq 1}(o, n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную последовательность $\gamma_n(\cdot) \in S^T(\Omega, o)$. Так как $\text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ – компакт (лемма 5.1), то возможно выбрать подпоследовательность $\gamma_{n_k}(\cdot)$, сходящуюся к некоторой траектории $\hat{\gamma}(\cdot)$ из $\text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$. Согласно лемме 5.3 $\hat{\gamma}(\cdot) \in S(\Omega, o)$. Так как функционал $\tau_\psi(\cdot)$ полунепрерывен снизу на $S(\Omega, o)$ (лемма 5.4), то $\tau_\psi(\hat{\gamma}) \leq T$ и, следовательно, $\hat{\gamma}(\cdot) \in S^T(\Omega, o)$.

ТЕОРЕМА 5.2. *Если $\tau_\psi^{\inf} < \infty$ (например, Ω ограничено в $\mathbb{R}^n$), то в поставленной задаче поиска с неполной информацией существует допустимая оптимальная траектория $\hat{\gamma}(\cdot) \in S(\Omega, o)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $S^{2\tau_\psi^{\inf}}(\Omega, o)$. Оно компактно по предыдущей лемме, а функционал $\tau_\psi(\cdot)$ полунепрерывен снизу (лемма 5.4). Значит, $\tau_\psi(\cdot)$ достигает минимума, что и требовалось.

Наконец покажем, что в общем случае единственность отсутствует. Если функция $\psi(x)$ зависит только от расстояния между точками x и o и не зависит от направления вектора $\vec{ox}$:

$$\psi(x) = \psi(\rho(x, o)),$$

то при повороте оптимальной стратегии с помощью любого ортонормированного линейного преобразования $A \in O_n(\mathbb{R})$ пространства $\mathbb{R}^n$ мы получим стратегию с тем же математическим ожиданием времени поиска и, значит, также оптимальную.

Отметим, что мы доказали теорему существования для класса допустимых траекторий с наперед не ограниченным временем поиска, так как $S(\Omega, o) \subseteq \text{Lip}_{\leq 1}(0, n) \subseteq \text{Lip}_{\leq 1}([0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n)$, т.е. априори время поиска на траектории (в том числе на оптимальной) может быть бесконечным (хотя математическое ожидание времени поиска может быть конечным).

В случае ограниченной области Ω интересен также случай допустимых траекторий в пространстве $\text{Lip}_{\leq 1}([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. *Множеством $S(\Omega, o, T) = S(\Omega, o) \cap \text{Lip}_{\leq 1}([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n)$ мы будем называть множество всех допустимых траекторий таких, что вероятность успешного окончания поиска в момент времени T равна 1. Естественно, $S(\Omega, o, +\infty) = S(\Omega, o)$.*

¹³Само же множество допустимых траекторий $S(\Omega, o)$ не является компактным; легко привести пример последовательности траекторий $\gamma_n(\cdot) \in S(\Omega, o)$, сходящихся к некоторой $\hat{\gamma}(\cdot) \in \text{Lip}_{\leq 1}(o, n)$, но при этом $\tau_\psi(\gamma_n)$ стремится к $+\infty$ и $\hat{\gamma}(\cdot) \notin S(\Omega, n)$.

ЛЕММА 5.6. *Ограниченность (с точностью до множества меры 0) области Ω равносильно тому, что существует $T \geq 0$, при котором $S(\Omega, o, T)$ не пусто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим куб $[-R, R]^n$, где $R > 0$ – некоторое фиксированное число. Нетрудно предъявить траекторию $\gamma_R(\cdot)$, осматривающую всю внутренность этого куба за конечное время $T \geq 0$. Если область Ω ограничена (с точностью до множества меры 0), то ее всегда можно вложить в достаточно большой куб $[-R, R]^n$, и, значит, множество $S(\Omega, o, T)$ будет не пусто и будет содержать $\gamma_R(\cdot)$.

Если же для некоторого $T \geq 0$ множество $S(\Omega, o, T)$ не пусто и $\tilde{\gamma}(\cdot) \in S(\Omega, o, n)$, то для любого момента времени $t \in [0, T]$ имеем $\rho(\tilde{\gamma}(t), o) \leq T$, но для почти всех $x \in \Omega$ существует $t \in [0, T]$ такой, что $\rho(x, \gamma(t)) \leq 1$, т.е. $\rho(x, o) \leq T + 1$. Это и означает ограниченность области Ω .

ТЕОРЕМА 5.3. *Если область Ω ограничена (с точностью до множества меры 0), то в любом непустом классе $S(\Omega, o, T)$ существует оптимальная траектория $\hat{\gamma}_T(\cdot)$:*

$$\tau_\psi(\hat{\gamma}_T) = \inf_{\gamma(\cdot) \in S(\Omega, o, n)} \tau_\psi(\gamma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество

$$\text{Lip}_{\leq 1}(o, n, T) = \{\gamma(\cdot) \in \text{Lip}_{\leq 1}([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n) : \gamma(0) = o\}.$$

По теореме Арцела (см. [6]) множество $\text{Lip}_{\leq 1}(o, n, T)$ компактно (см. доказательство леммы 5.1). При этом $S(\Omega, o, T) = S^T(\Omega, o) \cap \text{Lip}_{\leq 1}(o, n, T)$, т.е. $S(\Omega, o, T)$ есть пересечение двух компактов и, следовательно, тоже компактно. Значит, полунепрерывная функция $\tau_\psi(\cdot)$ достигает на нем минимума, что и требовалось.

Автор благодарен М. И. Зеликину за постоянное внимание к работе и множество ценных советов.

Список литературы

- [1] М.И. Зеликин, Л.В. Локуциевский, Р.А. Усачев, “Вихревые особенности оптимальных стратегий при начале движения в задачах поиска на n -мерных римановых многообразиях”, *Оптимальное управление*, Соврем. мат. и ее прил., **58**, НАН Грузии, Тбилисси, 2008, 56–78; англ. пер.: M. I. Zelikin, L. V. Lokutsievskii, R. A. Usachev, “Vortex singularities of optimal strategies at the beginning of motion in search problems on n -dimensional Riemannian manifolds”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **160**:2 (2009), 197–220.
- [2] Е.С. Половинкин, М.В. Балашов, *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, 1-е изд., Физматлит, М., 2004.
- [3] М.И. Зеликин, “Об одной дифференциальной игре с неполной информацией”, *Докл. АН СССР*, **202**:5 (1972), 998–1000; англ. пер.: M. I. Zelikin, “On a differential game with incomplete information”, *Soviet Math. Dokl.*, **13** (1972), 228–231.
- [4] Л.В. Локуциевский, “Вихревые особенности оптимальных стратегий при начале движения в задачах поиска на n -мерных многообразиях”, *Докл. РАН*, **417**:3 (2007), 316–318; англ. пер.: L. V. Lokutsievskii, “Vortex singularities of optimal strategies at the beginning of a motion in search problems on n -manifolds”, *Dokl. Math.*, **76**:3 (2007), 869–871.

- [5] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, ГИФМЛ, М., 1962; нем. пер.: G. M. Fikhtengol'ts, *Differential- und Integralrechnung*, VEB, Berlin, 1986.
- [6] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 3-е изд., Наука, М., 1972; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.
- [7] S. P. Franklin, "Spaces in which sequences suffice", *Fund. Math.*, **57** (1965), 107–115.
- [8] S. P. Franklin, "Spaces in which sequences suffice. II", *Fund. Math.*, **61** (1967), 51–56.

Л. В. Локуциевский (L. V. Lokutsievskiy)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: lion.lokut@gmail.com

Поступила в редакцию

13.08.2009 и 09.11.2010