Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Качуровский, А. В. Решетенко, О скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 4, 25–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7622>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 11:09:25

УДК 517.987+519.214

А. Г. Качуровский, А. В. Решетенко

О скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем

Изучается скорость сходимости в статистической эргодической теореме Дж. фон Неймана для случая непрерывного времени. Установлена эквивалентность степенной скорости сходимости эргодических средних и степенной особенности в нуле спектральной меры соответствующей динамической системы. Из этого следует, что оценки скоростей сходимости в указанной выше эргодической теореме с необходимостью являются спектральными. Все результаты работы имеют очевидные точные аналоги для стационарных в широком смысле стохастических процессов.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: эргодическая теорема фон Неймана, скорости сходимости эргодических средних, спектральные меры динамической системы, стационарные в широком смысле стохастические процессы.

Внутренним параметром динамической системы, отвечающим за скорости сходимости в эргодических теоремах, является ее спектральная мера [1]. Согласно теореме 1 настоящей работы оценки скоростей сходимости в эргодической теореме фон Неймана с необходимостью являются спектральными, т.е. оценки этих скоростей приводят к оценке особенности в нуле спектральной меры. Точный аналог теоремы 1 для динамических систем с дискретным временем в терминах поведения дисперсий эргодических средних был получен ранее при помощи другой техники в [1]. Применяв эту же технику, И. Ассани и М. Лин недавно получили аналогичный результат для логарифмической скорости сходимости (также в случае дискретного времени) [2]. Используемая в настоящей работе идея упрощения техники доказательства теоремы 1 была предложена В. Ф. Гапошкиным в [3]. Простота и применимость этого подхода как для дискретного, так и для непрерывного времени, а также для разных асимптотик скорости сходимости делает его перспективным для дальнейших исследований рассматриваемой задачи (заметим, что критерий логарифмической скорости сходимости из [2] может быть получен как прямое следствие результатов [3]).

Следует отметить, что не все результаты о скоростях сходимости в эргодических теоремах могут быть перенесены со случая дискретного времени на случай непрерывного времени (см., например, следствие 5 (“гипотеза Я. Г. Синая”) и комментарии к нему в [4]).

Пусть (Ω, λ) – пространство с вероятностной мерой, $\{T^t, t \in \mathbb{R}\}$ – поток на нем, т.е. такая однопараметрическая группа автоморфизмов T^t пространства с мерой (Ω, λ) , что для любой измеримой функции $f(\omega)$ на Ω функция $f(T^t\omega)$ измерима на прямом произведении $\Omega \times \mathbb{R}$.

Обозначим

$$A_t f(\omega) = \frac{1}{t} \int_0^t f(T^\tau \omega) d\tau, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Согласно индивидуальной эргодической теореме Биркгофа существует п.в. предел

$$f^* = \lim_{t \rightarrow \infty} A_t f$$

и справедливо равенство $\int f d\lambda = \int f^* d\lambda$.

Обозначим через $\{U^t, t \in \mathbb{R}\}$ однопараметрическую группу унитарных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ по формуле $U^t f = f \circ T^t$. Согласно статистической эргодической теореме фон Неймана в $L_2(\Omega)$ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t U^\tau f d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} A_t f,$$

равный f^* , причем f^* – это ортогональная проекция f на подпространство неподвижных векторов группы $\{U^t\}$. Обозначим через $b_t f$ корреляционную функцию, т.е. скалярное произведение $(U^t f, f)$. По теореме Бохнера–Хинчина (см., например, [5]) $b_t f$ представима в виде

$$b_t f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\sigma_f(x),$$

где σ_f – спектральная мера, т.е. конечная борелевская мера на $\mathbb{R}$ такая, что $\sigma_f(\mathbb{R}) = (f, f) = \|f\|_2^2$; здесь интеграл понимается в смысле интеграла Лебега–Стилтьеса.

Всюду далее предполагается, что $f \in L_2(\Omega)$. Заметим, что в этом случае $f - f^* \in L_2^0(\Omega)$, т.е.

$$f - f^* \in L_2(\Omega), \quad \int (f - f^*) d\lambda = 0.$$

Очевидно, эргодические средние $A_t f$ и $A_t(f - f^*) = A_t f - f^*$ имеют одинаковые скорости сходимости при $t \rightarrow \infty$ (первое сходится к f^* , второе – к тождественному нулю). Поскольку величина $DA_t(f - f^*) = \|A_t(f - f^*)\|_2^2 = \|A_t f - f^*\|_2^2$ как раз и измеряет L_2 -норму отклонения $A_t(f - f^*)$ от предела (т.е. нуля), то поведение нормы этого отклонения совпадает с рассматриваемым в [1] (для случая дискретного времени) поведением дисперсии эргодических средних. Как и в [1], это поведение полностью определяется (см. теорему 1 ниже) особенностью спектральной меры σ_{f-f^*} в нуле или скоростью убывания корреляционной функции $b_t(f - f^*)$ (см. теорему 3). Переход же от σ_f к σ_{f-f^*} осуществляется простым отбрасыванием сосредоточенной в точке нуль меры $\sigma_f(0) = \|f^*\|_2^2$ (поскольку f^* и есть ортогональная проекция f на подпространство собственных векторов группы $\{U^t\}$, отвечающих собственному значению, равному единице).

Положим

$$F_t(x) = \left(\frac{\sin(tx/2)}{tx/2} \right)^2.$$

Как хорошо известно, для каждой $g \in L_2^0$ дисперсия $DA_t g = \|A_t g\|_2^2$ может быть точно найдена при помощи интеграла от $F_t(x)$ по спектральной мере σ_g или выражена через корреляционную функцию $b_t g$. Основные результаты настоящей работы получаются на основе анализа асимптотик следующих формул, которые были использованы еще Дж. фон Нейманом в [6] (вывод этих формул можно найти также в [5; теорема 18.3.1]):

$$\|A_t g\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_t(x) d\sigma_g(x), \quad (1)$$

$$\|A_t g\|_2^2 = \frac{1}{t^2} \int_{-t}^t (t - |\tau|) b_{\tau} g d\tau. \quad (2)$$

Заметим, что основная масса ядра $F_t(x)$ сосредоточена в малой окрестности точки нуль и чем больше t , тем более узкими можно выбирать такие окрестности. Этим и объясняется то, что асимптотика скорости сходимости определяется особенностью спектральной меры в нуле.

Следующая теорема устанавливает эквивалентность степенной скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана и степенной же особенности в нуле спектральной меры соответствующей динамической системы, т.е. является точным аналогом для непрерывного времени теоремы 3 из [1]. Никакие ограничения на спектральные меры (абсолютная непрерывность и т.п.) здесь не накладываются.

ТЕОРЕМА 1. *Для каждого $\alpha \in [0, 2)$ следующие соотношения равносильны:*

- 1) $\|A_t f - f^*\|_2^2 = O(t^{-\alpha}), \quad t \rightarrow \infty;$
- 2) $\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] = O(\delta^\alpha), \quad \delta \rightarrow 0.$

Утверждение теоремы верно также при замене символа “O” на символ “o”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы, как и доказательство теоремы 3 в [1], получается анализом асимптотики представления (1). Рассмотрим случай символа “O” (случай “o” разбирается аналогично).

Докажем, что из 2) следует 1). Для представления

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 = \|A_t(f - f^*)\|_2^2$$

воспользуемся формулой (1) для $g = f - f^*$:

$$\begin{aligned} \|A_t f - f^*\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} F_t(x) d\sigma_{f-f^*}(x) \\ &= \int_{|x| < 1} F_t(x) d\sigma_{f-f^*}(x) + \int_{1 \leq |x| < \infty} F_t(x) d\sigma_{f-f^*}(x). \end{aligned}$$

Так как $F_t(x) \leq 4(tx)^{-2}$, то второе слагаемое есть $O(t^{-2}), \quad t \rightarrow \infty$. Первое слагаемое снова представим в виде суммы двух интегралов (здесь $t > 1$):

$$\int_{|x| < 1} F_t(x) d\sigma_{f-f^*}(x) = \int_{|x| \leq t^{-1}} F_t(x) d\sigma_{f-f^*}(x) + \int_{t^{-1} < |x| < 1} F_t(x) d\sigma_{f-f^*}(x).$$

Так как $F_t(x) \leq 1$, то первое слагаемое по условию теоремы не превосходит

$$\int_{|x| \leq t^{-1}} d\sigma_{f-f^*}(x) = O(t^{-\alpha}), \quad t \rightarrow \infty.$$

В свою очередь, второе слагаемое не превосходит

$$4 \int_{t^{-1} < |x| < 1} (tx)^{-2} d\sigma_{f-f^*}(x).$$

Для получения дальнейших оценок вместо использованного в [1] разложения этого интеграла в ряд применяется формула интегрирования по частям, предложенная в [3]. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{t^{-1} < |x| < 1} (tx)^{-2} d\sigma_{f-f^*}(x) &= (tx)^{-2} \int_{(-x, x]} d\sigma_{f-f^*}(y) \Big|_{t^{-1}}^1 \\ &+ t^{-2} \int_{t^{-1} < |x| < 1} \left(x^{-3} \int_{(-x, x]} d\sigma_{f-f^*}(y) \right) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Обсудим подробно обоснование формулы (3). Пусть $G(x) = \sigma_{f-f^*}(-\infty, x]$, $G(x)$ – монотонная функция. Поскольку σ_{f-f^*} является конечной борелевской мерой, то $G(x)$ – функция ограниченной вариации на любом интервале вещественной прямой. Таким образом, наряду с интегралом Лебега–Стилтьеса можно рассмотреть интеграл Римана–Стилтьеса по функции $G(x)$. Если $h(x)$ – непрерывная на $[a, b]$ функция, то для нее существует интеграл Римана–Стилтьеса и его значение совпадает с интегралом Лебега–Стилтьеса:

$$\int_a^b h(x) dG(x) = \int_a^b h(x) d\sigma_{f-f^*}(x).$$

Если $h(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, то

$$\int_a^b h(x) dG(x) = h(b)G(b) - h(a)G(a) - \int_a^b G(x) dh(x).$$

Это – аналог формулы интегрирования по частям для интеграла Римана–Стилтьеса [7].

Положим $h(x) = x^{-2}$ и в качестве множества интегрирования возьмем объединение $(-1, -t^{-1}) \cup (t^{-1}, 1)$. В силу всего сказанного выше получаем

$$\begin{aligned} \int_{t^{-1} < |x| < 1} (tx)^{-2} d\sigma_{f-f^*}(x) &= \int_{t^{-1} < |x| < 1} (tx)^{-2} dG(x) \\ &= G(-t^{-1}) - \frac{1}{t^2} G(-1) + \frac{2}{t^2} \int_{-1 < x < -t^{-1}} x^{-3} G(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{t^2} G(1) - G(t^{-1}) + \frac{2}{t^2} \int_{t^{-1} < x < 1} x^{-3} G(x) dx. \end{aligned}$$

Теперь видно, что выражение

$$\frac{1}{t^2} (G(1) - G(-1)) - (G(t^{-1}) - G(-t^{-1})) \quad (4)$$

будет в точности давать первое слагаемое в соотношении (3). В интегралах делаем замену переменных следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{t^2} \int_{-1 < x < -t^{-1}} x^{-3} G(x) dx - \frac{1}{t^2} \int_{t^{-1} < x < 1} x^{-3} G(-x) dx \\
 & \quad + \frac{1}{t^2} \int_{t^{-1} < x < 1} x^{-3} G(x) dx - \frac{1}{t^2} \int_{-1 < x < -t^{-1}} x^{-3} G(-x) dx \\
 & = \frac{1}{t^2} \int_{-1 < x < -t^{-1}} x^{-3} (G(x) - G(-x)) dx + \frac{1}{t^2} \int_{t^{-1} < x < 1} x^{-3} (G(x) - G(-x)) dx \\
 & = \frac{1}{t^2} \int_{t^{-1} < |x| < 1} x^{-3} (G(x) - G(-x)) dx.
 \end{aligned}$$

Так как $G(x) - G(-x) = \sigma_{f-f^*}(-x, x]$, то получаем второе слагаемое в (3), что и завершает обоснование формулы (3) интегрирования по частям.

Для завершения доказательства теоремы остается исследовать асимптотику правой части соотношения (3). Первое ее слагаемое, равное (4), есть $O(t^{-\alpha})$ при $t \rightarrow \infty$ в силу условия на особенность меры σ_f . Оценим ее второе слагаемое. По условию теоремы существуют константа C_1 и число δ_0 такие, что для любого $\delta \in (0, \delta_0)$ выполнено неравенство $\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] \leq C_1 \delta^\alpha$. Следовательно,

$$\frac{1}{t^2} \int_{t^{-1} < |x| < 1} x^{-3} \sigma_{f-f^*}(-x, x] dx = \frac{C_1}{t^2} \int_{t^{-1} < |x| < \delta_0} x^{-3} |x|^\alpha dx + C_2 t^{-2},$$

где C_2 не зависит от t . Очевидно, что

$$\frac{1}{t^2} \int_{t^{-1} < |x| < \delta_0} |x|^{\alpha-3} dx = \frac{|x|^{\alpha-2}}{(\alpha-2)t^2} \Big|_{-\delta_0, t^{-1}}^{-t^{-1}, \delta_0} = O(t^{-\alpha}), \quad t \rightarrow \infty,$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что из 1) следует 2). Это утверждение доказывается аналогично дискретному случаю (см. доказательство теоремы 3 в [1]). Заметим, что функция

$$F_t(x) = \left(\frac{\sin(tx/2)}{tx/2} \right)^2$$

строго монотонно возрастает от нуля до единицы на интервале $[-2\pi/t, 0)$ и строго монотонно убывает от единицы до нуля на интервале $(0, 2\pi/t]$. Поэтому

$$\min_{|x| \leq \pi/t} \{F_t(x)\} = F_t\left(\frac{\pi}{t}\right) \equiv \frac{4}{\pi^2}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Так как $F_t(x) \leq 1$, то из условия теоремы получаем, что

$$\int_{(-\pi/t, \pi/t]} F_t(x) d\sigma_{f-f^*}(x) \leq \sigma_{f-f^*}\left(-\frac{\pi}{t}, \frac{\pi}{t}\right] = O\left(\left(\frac{\pi}{t}\right)^\alpha\right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует соотношение

$$\sigma_{f-f^*}\left(-\frac{\pi}{t}, \frac{\pi}{t}\right] \leq \frac{\int_{(-\pi/t, \pi/t]} F_t(x) d\sigma_{f-f^*}(x)}{\min_{|x| \leq \pi/t} \{F_t(x)\}} = O\left(\left(\frac{\pi}{t}\right)^\alpha\right), \quad \frac{\pi}{t} \rightarrow 0,$$

из которого вытекает доказываемое утверждение. Теорема 1 доказана.

Покажем, как используемая здесь техника из [3] применяется для доказательства точного аналога теоремы 1 для случая дискретного времени – теоремы 3 в [1]. В этой работе использовалась техника разложения интеграла в ряд с последующей оценкой этого ряда с помощью некоторой числовой леммы. Следующее замечание позволяет эту числовую лемму обойти.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для динамической системы с дискретным временем для каждого $\alpha \in [0, 2)$ верно следующее утверждение:

$$\begin{aligned} (\sigma_{f-f^*}[-\delta, \delta] = O(\delta^\alpha), \quad \delta \rightarrow 0) \\ \implies \left(\int_{\pi/n < |x| \leq \pi} (nx)^{-2} d\sigma_{f-f^*}(x) = O(n^{-\alpha}), \quad n \rightarrow \infty \right) \end{aligned}$$

(здесь, как и в случае непрерывного времени, σ_{f-f^*} – конечная борелевская мера, но не на числовой прямой, а на окружности единичного радиуса, $n \in \mathbb{N}$; см., например, [5]). Приведенное выше утверждение верно также при замене символа “ O ” на символ “ o ”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся еще раз идеей интегрирования по частям из [3]. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\pi/n < |x| \leq \pi} (nx)^{-2} d\sigma_{f-f^*}(x) \\ &= (nx)^{-2} \int_{[-x, x]} d\sigma_{f-f^*}(y) \Big|_{\pi/n}^{\pi} + n^{-2} \int_{\pi/n < |x| \leq \pi} \left(x^{-3} \int_{[-x, x]} d\sigma_{f-f^*}(y) \right) dx \\ &= O(n^{-\alpha}), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Для исчерпывающего решения рассматриваемого в теореме 1 вопроса остается разобрать случай $\alpha = 2$. Как и для динамических систем с дискретным временем [1], в этом случае утверждение теоремы 1 не имеет места. Оказывается, справедливо следующее

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если поток $\{T^t\}$ – перемешивающий, то следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\|A_t f - f^*\|_2^2 = O(t^{-2}), t \rightarrow \infty$;
- 2) конечен интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} x^{-2} d\sigma_{f-f^*}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если поток перемешивающий, то тогда $b_t(f - f^*) \rightarrow 0$ и существует (см. [4; следствие 4]) предел $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 D A_t(f - f^*)$, конечный или бесконечный, равный $2 \int_{-\infty}^{\infty} x^{-2} d\sigma_{f-f^*}(x)$ (см. [4; следствие 2]), что и доказывает замечание 2.

Как известно, в случае абсолютной непрерывности меры σ_{f-f^*} с непрерывной в нуле плотностью ρ справедливо соотношение

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 = \|A_t(f - f^*)\|_2^2 = D A_t(f - f^*) = 2\pi\rho(0)t^{-1} + o(t^{-1}), \quad t \rightarrow \infty \quad (5)$$

(см. [5; теорема 18.3.1]). Как очевидное следствие теоремы 1, получаем следующий аналог этого утверждения, являющийся также точным аналогом для случая непрерывного времени теоремы 4 из [1].

ТЕОРЕМА 2. *Если хотя бы в некоторой окрестности нуля σ_{f-f^*} абсолютно непрерывна с плотностью $\rho \in L_p$, то $\|A_t f - f^*\|_2^2 = o(t^{-1+1/p})$, $t \rightarrow \infty$, для $p \in [1, \infty)$. В случае $p = \infty$ верна оценка $\|A_t f - f^*\|_2^2 = O(t^{-1})$, $t \rightarrow \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 4 в [1] (используется оценка особенности спектральной меры в точке нуль при помощи неравенства Гёльдера для $\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] = \int_{-\delta}^{\delta} \rho(x) dx$ с последующей оценкой асимптотики $\|A_t f - f^*\|_2^2$ по теореме 1).

Как и в случае дискретного времени (см. [1]), удастся получать оценки скоростей сходимости через скорость убывания корреляционной функции (если она стремится к нулю, т.е. для перемешивающих потоков): теорема 3 является точным аналогом теоремы 6 из [1] для случая непрерывного времени. Обсуждение того, почему эти оценки необратимы, т.е. почему здесь отсутствует критерий степенной скорости сходимости в терминах убывания корреляционной функции, имеется в [1].

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $|b_t(f - f^*)| = O(t^{-\alpha})$, $t \rightarrow \infty$. Тогда если $\alpha \in [0, 1)$, то $\|A_t f - f^*\|_2^2 = O(t^{-\alpha})$, $t \rightarrow \infty$; если $\alpha = 1$, то $\|A_t f - f^*\|_2^2 = O(t^{-1} \ln t)$, $t \rightarrow \infty$ (эти утверждения верны также при замене символа “O” на символ “o”); если $\alpha > 1$, то σ_{f-f^*} абсолютно непрерывна с непрерывной плотностью ρ и*

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 = 2\pi\rho(0)t^{-1} + o(t^{-1}), \quad t \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3 почти дословно совпадает с доказательством теоремы 6 в [1]. В случае $\alpha \in [0, 1]$ оно основано на представлении (2), немедленно дающем для $g = f - f^*$ очевидную цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \|A_t f - f^*\|_2^2 &= \|A_t(f - f^*)\|_2^2 \leq \frac{1}{t^2} \int_{-t}^t (t - |\tau|) |b_\tau(f - f^*)| d\tau \\ &\leq \frac{1}{t} \int_{-t}^t |b_\tau(f - f^*)| d\tau = \frac{2}{t} \int_0^t |b_\tau(f - f^*)| d\tau, \end{aligned}$$

а в случае $\alpha > 1$ оно основано на асимптотическом соотношении (5).

Заметим в заключение, что все теоремы этой работы имеют очевидные точные аналоги для стационарных в широком смысле процессов, которые доказываются точно так же. Приведем здесь соответствующий аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ – стационарный в широком смысле процесс (с конечным вторым моментом) с непрерывным временем, $\mathbb{E}X_t = 0$, $F(\lambda)$ – спектральная функция. Тогда для каждого $\alpha \in [0, 2)$ следующие соотношения равносильны:*

- 1) $\mathbb{D}\left(\frac{1}{t} \int_0^t X_\tau d\tau\right) = O(t^{-\alpha})$, $t \rightarrow \infty$;
- 2) $F(\delta) - F(-\delta) = O(\delta^\alpha)$, $t \rightarrow \infty$.

Утверждение теоремы верно также при замене символа “O” на символ “o” и перестает быть верным при $\alpha = 2$.

Список литературы

- [1] А. Г. Качуровский, “Скорости сходимости в эргодических теоремах”, *УМН*, **51**:4 (1996), 73–124; англ. пер.: A. G. Kachurovskii, “The rate of convergence in ergodic theorems”, *Russian Math. Surveys*, **51**:4 (1996), 653–703.
- [2] I. Assani, M. Lin, “On the one-sided ergodic Hilbert transform”, *Ergodic theory and related fields* (Chapel Hill, NC, USA, 2004–2006), *Contemp. Math.*, **430**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 21–39.
- [3] В. Ф. Гапошкин, “О скорости убывания вероятностей ε -уклонений средних стационарных процессов”, *Матем. заметки*, **64**:3 (1998), 366–372; англ. пер.: V. F. Gaposhkin, “Decrease rate of the probabilities of ε -deviations for the means of stationary processes”, *Math. Notes*, **64**:3 (1998), 316–321.
- [4] В. П. Леонов, “О дисперсии временных средних стационарного случайного процесса”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **6**:1 (1961), 93–101; англ. пер.: V. P. Leonov, “On the dispersion of time-dependent means of a stationary stochastic process”, *Theory Probab. Appl.*, **6**:1 (1961), 87–93.
- [5] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. A. Ibragimov, Yu. V. Linnik, *Independent and stationary sequences of random variables*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971.
- [6] J. von. Neumann, “Proof of the quasi-ergodic hypothesis”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **18**:1 (1932), 70–82.
- [7] У. Рудин, *Основы математического анализа*, Мир, М., 1976; пер. с англ.: W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, New York, 1964.

А. Г. Качуровский (A. G. Kachurovskii)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: agk@math.nsc.ru

Поступила в редакцию
19.08.2009

А. В. Решетенко (A. V. Reshetenko)
Новосибирский государственный университет
E-mail: tramp@gorodok.net