Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Плотников, Квазимеры на группе G^m , множества Дирихле и проблемы единственности для кратных рядов Уолша, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 12, 131–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7625>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:22:57

УДК 517.518.3

М. Г. Плотников

Квазимеры на группе G^m , множества Дирихле и проблемы единственности для кратных рядов Уолша

Изучаются кратные ряды Уолша (S) на группе G^m . Доказано, что любое не более чем счетное множество является множеством единственности для рядов (S) при сходимости по кубам. Решена проблема восстановления коэффициентов рядов (S) , сходящихся вне счетных множеств или вне множеств типа множеств Дирихле. Установлен ряд аналогов теоремы Валле Пуссена для рядов (S) .

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: двоичная группа, кратные ряды Уолша, множества единственности, проблема восстановления коэффициентов ортогональных рядов.

§ 1. Введение

В работе рассматриваются различные проблемы единственности для кратных рядов Уолша. Множество $A \subset X$ называется *множеством единственности* или *U -множеством для рядов по некоторой системе функций*, если сходящийся к нулю вне множества A ряд по этой системе является тождественно нулевым, т.е. все его коэффициенты равны нулю.

Ниже будут рассматриваться m -кратные ряды Уолша

$$\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} c_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=0}^{\infty} c_{n_1, \dots, n_m} \omega_{n_1, \dots, n_m}(t^1, \dots, t^m) \quad (1.1)$$

на группе G^m . Коэффициенты $c_{\mathbf{n}}$ в (1.1) считаем действительными.

Обозначим через $U_{\text{rect},m}$, $U_{\rho,m}$, $U_{\text{cube},m}$ и $U_{\text{dcube},m}$ класс U -множеств для рядов (1.1) при сходимости по прямоугольникам, ρ -сходимости ($\rho \in (0, 1]$), сходимости по кубам и сходимости по двоичным кубам соответственно. Определения таких сходимостей будут приведены ниже. При этом при всех $\rho \in (0, 1)$ справедливы следующие соотношения:

$$U_{\text{rect},m} \supset U_{\rho,m} \supset U_{\text{cube},m} \supset U_{\text{dcube},m}. \quad (1.2)$$

В. А. Скворцов в [1] и Х. О. Мовсисян в [2] доказали, что любое не более чем счетное множество является $U_{\text{rect},m}$ -множеством. Широкие классы несчетных измеримых $U_{\text{rect},m}$ -множеств построены С. Ф. Лукомским в [3], Л. Д. Гоголадзе в [4], [5] и Т. А. Жеребьевой в [6], [7]. Лукомский доказал в [8], что $U_{\rho,m} \subsetneq U_{\text{rect},m}$ для всех $\rho \in (0, 1]$, т.е. первое включение в (1.2) является

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00669) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3252.2010.1).

строгим. В [9] доказано, что при $\rho \in (0, 1/2]$ любое счетное множество является $U_{\rho, m}$ -множеством и что при таких ρ существуют непустые совершенные $U_{\rho, m}$ -множества. В [10] показано, что любое конечное множество является $U_{\text{cube}, m}$ -множеством, что существуют счетные $U_{\text{cube}, m}$ -множества, а также совершенные $U_{\text{cube}, m}$ -множества, среди которых есть множества хаусдорфовой размерности m . Из работ С. Ф. Лукомского [11] и Н. С. Моревой [12] вытекает, что класс $U_{\text{dcube}, m}$ состоит лишь из пустого множества. Так как $U_{\text{dcube}, m} = \{\emptyset\}$, а класс $U_{\text{cube}, m}$ содержит непустые множества, то третье включение в (1.2) является строгим. В [13] доказано, что если частичные суммы $S_{2^{n_1}, \dots, 2^{n_m}}$ ряда (1.1) удовлетворяют условию

$$\limsup_{n_1, \dots, n_m \rightarrow \infty} |S_{2^{n_1}, \dots, 2^{n_m}}(t^1, \dots, t^m)| < \infty$$

всюду на G^m вне счетного множества точек и при этом

$$\lim_{n_1, \dots, n_m \rightarrow \infty} S_{2^{n_1}, \dots, 2^{n_m}} = 0 \quad \text{по мере,}$$

то все коэффициенты этого ряда равны нулю.

Одним из основных результатов настоящей работы является доказательство в § 6 того факта, что любое счетное множество является $U_{\text{cube}, m}$ -множеством. Тем самым окончательно решается проблема единственности кратных рядов Уолша при сходимости по кубам для счетных множеств. Отметим, что для кратных тригонометрических рядов неизвестно даже, является ли пустое множество U -множеством при сходимости по кубам или ρ -сходимости. Если кратные ряды Уолша рассматривать не на группе G^m , а на единичном квадрате $[0, 1]^m$, то также неизвестно, является ли пустое множество U -множеством для таких рядов при сходимости по кубам или ρ -сходимости. Вообще, изучение вопросов единственности при сходимости по кубам или ρ -сходимости кратных рядов требует, по-видимому, очень тонких оценок коэффициентов сходящихся таким образом рядов.

В § 5 построен интеграл, названный (PW) -интегралом, который восстанавливает по обобщенным формулам Фурье коэффициенты рядов (1.1), сходящихся по кубам к конечной сумме вне счетных множеств. В § 7 установлено, что (PW) -интеграл покрывает интеграл Лебега. Как следствие, показано, что если ряд (1.1) сходится по кубам вне счетного множества к конечной суммируемой функции, то этот ряд является рядом Фурье этой функции. Этот результат распространяется на ряды (1.1), которые сходятся вне счетных множеств лишь по некоторым подпоследовательностям кубических частичных сумм.

Несмотря на большую общность, (PW) -интеграл решает проблему восстановления коэффициентов рядов (1.1), сходящихся вне лишь не более чем счетных множеств. Аналогичная ситуация и для большинства известных интегралов, решающих проблему восстановления коэффициентов рядов по различным системам функций. По-видимому, первый обобщенный интеграл, решающий проблему восстановления коэффициентов рядов, сходящихся вне измеримых несчетных U -множеств из некоторого класса, был построен для одномерной тригонометрической системы Н. Н. Холщевниковой (см. [14], [15]). В § 5 на совершенно иных принципах построен интеграл, восстанавливающий коэффициенты рядов (1.1), сходящихся по кубам вне некоторых совершенных множеств. Эти множества, являющиеся $U_{\text{cube}, m}$ -множествами, обладают определенной арифметической структурой.

§ 2. Кратные ряды Уолша на группе G^m : определения и вспомогательные утверждения

Выберем и зафиксируем произвольное $m \in \mathbb{N}$. Будем использовать следующие обозначения. Если $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, то $2^{\mathbf{k}}$ означает вектор $(2^{k_1}, \dots, 2^{k_m})$. Символом $\mathbf{1}$ обозначим вектор $(1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}_+^m$, а символом $\mathbf{0}$ – вектор $(0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_+^m$. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ и $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{Z}_+^m$. Будем говорить, что $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, если $a_q \leq b_q$ для всех $q = 1, \dots, m$. Положим

$$\sum_{\mathbf{j}=\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} d_{\mathbf{j}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1=a_1}^{b_1} \cdots \sum_{j_m=a_m}^{b_m} d_{j_1, \dots, j_m}, \quad \mathbf{j} = (j_1, \dots, j_m) \in \mathbb{Z}_+^m.$$

Пусть G – двоичная группа (см. [16]–[18]), т.е. множество последовательностей $t = \{t_j\}_{j=0}^\infty$, $t_j \in \{0, 1\}$. Если $y = \{y_j\}_{j=0}^\infty$ и $z = \{z_j\}_{j=0}^\infty$ – элементы группы G , то их суммой $y \oplus z$ называется элемент $t = \{t_j\}_{j=0}^\infty \in G$ такой, что $t_j = y_j + z_j \pmod{2}$. Двоичную группу G можно представлять как модифицированный отрезок J^* , т.е. отрезок $[0, 1]$, в котором точки вида $p/2^k$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq 2^k - 1$, считаются дважды: “левая” точка $p/2^k - 0$, соответствующая бесконечному двоичному разложению, и “правая” точка $p/2^k + 0$, соответствующая конечному двоичному разложению. Отображение

$$\varphi: t = \{t_j\}_{j=0}^\infty \in G \mapsto \sum_{j=0}^\infty t_j 2^{-j-1} \in J^*$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между группой G и модифицированным отрезком J^* .

Множество G^m является топологической абелевой группой. Пусть $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^m) \in G^m$ и $\mathbf{z} = (z^1, \dots, z^m) \in G^m$. Тогда сумма $\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}$ определяется равенством

$$\mathbf{y} \oplus \mathbf{z} = (y^1 \oplus z^1, \dots, y^m \oplus z^m) \in G^m.$$

Топология на G^m порождается множествами вида

$$V_{k_1, \dots, k_m} = V_{k_1} \times \cdots \times V_{k_m}, \quad (2.1)$$

где $V_{k_i} = G$ при $k_i = 0$ и

$$V_{k_i} = \{t = \{t_j\}_{j=0}^\infty \in G : t_j = a_j, j = 0, \dots, k_i - 1\}, \quad k_i = 1, 2, \dots$$

Множества вида (2.1) называются *двоичными интервалами* ранга $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$. Все двоичные интервалы являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами в топологии G^m . Топология на G^m является метризуемой. Пусть $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m)$. Группу G^m можно представлять как модифицированный куб $(J^*)^m$, а двоичные интервалы – как множества вида

$$\Delta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{i}} = \left[\frac{i_1}{2^{k_1}} + 0, \frac{i_1 + 1}{2^{k_1}} - 0 \right] \times \cdots \times \left[\frac{i_m}{2^{k_m}} + 0, \frac{i_m + 1}{2^{k_m}} - 0 \right] \subset (J^*)^m,$$

где $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$, $k_s = 0, 1, \dots$, и $i_s = 0, \dots, 2^{k_s} - 1$, $s = 1, \dots, m$. Двоичные интервалы вида

$$\Delta_k^{\mathbf{i}} = \left[\frac{i_1}{2^k} + 0, \frac{i_1 + 1}{2^k} - 0 \right] \times \cdots \times \left[\frac{i_m}{2^k} + 0, \frac{i_m + 1}{2^k} - 0 \right] \quad (2.2)$$

называются *двоичными кубами* ранга k . Если $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$, где a_s – двоично-рациональные точки полуинтервала $[0, 1)$, то выражение $\mathbf{a} + \mathbf{0}$ означает точку $(a_1 + 0, \dots, a_m + 0) \in (J^*)^m$.

В силу изоморфности мы не будем различать группу G^m и модифицированный куб $(J^*)^m$. Под *мерой* μ на группе G^m понимается нормированная мера Хаара (см. [19; приложение 1]), которая определена, по крайней мере, на всех борелевских подмножествах группы G^m . Если Δ – двоичный интервал ранга $(k_1, \dots, k_m)$, то

$$\mu(\Delta) = 2^{-(k_1 + \dots + k_m)}.$$

Ниже запись $\int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t})$ означает интеграл Лебега от функции f по двоичному интервалу Δ .

Функции Уолша ω_n , $n \in \mathbb{Z}_+$, в нумерации Пэли на G определяются так (см. [16; гл. 1]):

$$\omega_n(t) = \prod_{j=0}^{\infty} (-1)^{t_j \varepsilon_j^{(n)}}, \quad t = \{t_j\}_{j=0}^{\infty} \in G, \quad n = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \varepsilon_j^{(n)}, \quad \varepsilon_j^{(n)} \in \{0, 1\}.$$

Из определений функций Уолша сразу вытекает

ЛЕММА 1. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$. Тогда для всех $t \in G$ верны следующие соотношения:

$$\omega_n\left(t \oplus \left(\frac{1}{2^{k+1}} + 0\right)\right) = -\omega_n(t) \quad \text{при } 2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1, \quad (2.3)$$

$$\omega_n\left(t \oplus \left(\frac{1}{2^{k+1}} + 0\right)\right) = \omega_n(t) \quad \text{при } n \leq 2^k - 1. \quad (2.4)$$

Пусть $D_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \omega_n(t)$ – N -е ядро Дирихле для системы Уолша. Известно (см., например, [16; формулы (1.4.11) и (1.4.13)]), что

$$D_N(t) = D_{2^k}(t) + \omega_{2^k}(t) D_M(t), \quad N = 2^k + M, \quad 1 \leq M \leq 2^k; \quad (2.5)$$

$$D_{2^k}(t) = \begin{cases} 2^k, & \text{если } t \in \left[0, \frac{1}{2^k} - 0\right], \\ 0, & \text{если } t \notin \left[0, \frac{1}{2^k} - 0\right]. \end{cases} \quad (2.6)$$

ЛЕММА 2. Если $s \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq s$, то

$$D_{2^k+2^s}(t) - D_{2^k}(t) = \begin{cases} 2^s \omega_{2^k}(t), & \text{если } t \in \left[0, \frac{1}{2^s} - 0\right], \\ 0, & \text{если } t \notin \left[0, \frac{1}{2^s} - 0\right]. \end{cases} \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.5) вытекает формула

$$D_{2^k+2^s}(t) = D_{2^k}(t) + \omega_{2^k}(t) D_{2^s}(t). \quad (2.8)$$

Из (2.6) и (2.8) сразу получается формула (2.7). Лемма доказана.

Если $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, то m -мерные функции Уолша $\omega_{\mathbf{n}}$ на G^m определяются так:

$$\omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \omega_{n_1}(t^1) \cdots \omega_{n_m}(t^m), \quad \mathbf{t} = (t^1, \dots, t^m). \quad (2.9)$$

Функции $\omega_{\mathbf{n}}$ образуют систему характеров на G^m , в частности,

$$\omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{y})\omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^m, \quad \mathbf{y}, \mathbf{z} \in G^m. \quad (2.10)$$

Функции $r_{\mathbf{k}} \equiv \omega_{2^{\mathbf{k}}}$ ($\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^m$) называются m -мерными функциями Радемахаера. Из построения функций Уолша вытекает, что если $\Delta_{k+1}^{\mathbf{i}}$ – двоичный куб в форме (2.2), то

$$r_{k\mathbf{1}}(\mathbf{t}) = \omega_{2^k\mathbf{1}}(\mathbf{t}) = (-1)^{i_1 + \dots + i_m}, \quad \mathbf{t} \in \Delta_{k+1}^{\mathbf{i}}. \quad (2.11)$$

Пусть $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_m) \in \mathbb{N}^m$. Тогда $\mathbf{N}$ -й прямоугольной частичной суммой $S_{\mathbf{N}}$ ряда (1.1) в точке $\mathbf{t} = (t^1, \dots, t^m) \in G^m$ называется выражение

$$S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}-1} c_{\mathbf{n}}\omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}).$$

Выражение $S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) \stackrel{\text{def}}{=} S_{N_1, \dots, N_m}(\mathbf{t})$ является N -й кубической частичной суммой ряда (1.1) в точке $\mathbf{t}$. $\mathbf{N}$ -е ядро Дирихле $D_{\mathbf{N}}$ для системы m -мерных функций Уолша определяется так:

$$D_{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) = \prod_{q=1}^m D_{N_q}(t^q) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}-1} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}).$$

Пусть $\rho \in (0, 1]$. Ряд (1.1) ρ -сходится к сумме $A(\mathbf{t})$ в точке $\mathbf{t} \in G^m$, если

$$S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) \rightarrow A(\mathbf{t}), \quad \min_i \{N_i\} \rightarrow \infty, \quad \min_{i,j} \left\{ \frac{N_i}{N_j} \right\} \geq \rho. \quad (2.12)$$

Отбросив последнее условие в (2.12), получим сходимость по прямоугольникам. 1-сходимость иначе называется *сходимостью по кубам*. Ряд (1.1) сходится по двоичным кубам к сумме $A(\mathbf{t})$ в точке $\mathbf{t} \in G^m$, если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k}(\mathbf{t}) = A(\mathbf{t}).$$

Зафиксируем точку $\mathbf{t} \in G^m$. Из сходимости по прямоугольникам ряда (1.1) вытекает ρ -сходимость этого ряда к той же сумме для всех $\rho \in (0, 1]$. Если $0 < \rho_1 < \rho_2 \leq 1$, то из ρ_1 -сходимости ряда (1.1) следует ρ_2 -сходимость этого ряда к той же сумме. Если ряд (1.1) сходится по кубам, то он сходится по двоичным кубам к той же сумме.

Символом Σ обозначим множество векторов $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ таких, что $\sigma_q \in \{0, 1\}$ для всех $q = 1, \dots, m$. Выражение $|\boldsymbol{\sigma}|$ означает сумму $\sigma_1 + \dots + \sigma_m$. Пусть $\Sigma/\mathbb{Z}^2$ – множество векторов $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma$ таких, что $|\boldsymbol{\sigma}| \equiv 0 \pmod{2}$.

ЛЕММА 3. Пусть $k, M \in \mathbb{Z}_+$, причем $2^k \leq M \leq 2^{k+1} - 1$. Тогда для кубических частных сумм S_N ряда (1.1) и для всех $\mathbf{t} \in G^m$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \Sigma/\mathbb{Z}^2} \left[S_{M+1} \left(\mathbf{t} \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \right) - S_{2^k} \left(\mathbf{t} \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \right) \right] \\ &= 2^{m-1} \sum_{\mathbf{n}=2^k \cdot \mathbf{1}}^{M \cdot \mathbf{1}} c_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $\mathbf{z} \in G^m$ имеет место следующая очевидная формула:

$$S_{M+1}(\mathbf{z}) - S_{2^k}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n} \in W} c_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}), \quad (2.14)$$

где W означает множество целочисленных векторов $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$ таких, что соотношение

$$2^k \leq n_q \leq M \quad (2.15)$$

выполнено хотя бы для одного $q = 1, \dots, m$. Из (2.14) вытекает формула

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \Sigma/\mathbb{Z}^2} \left[S_{M+1} \left(\mathbf{t} \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \right) - S_{2^k} \left(\mathbf{t} \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \right) \right] \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in W} c_{\mathbf{n}} \sum_{\sigma \in \Sigma/\mathbb{Z}^2} \omega_{\mathbf{n}} \left(\mathbf{t} \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Выберем и зафиксируем произвольное $\mathbf{n} \in W$ и рассмотрим внутреннюю сумму в правой части (2.16). Пусть $V_1 \subset \{1, \dots, m\}$ — множество индексов s , для которых выполнено (2.15), а $V_2 = \{1, \dots, m\} \setminus V_1$. Так как $\mathbf{n} \in W$, то $V_1 \neq \emptyset$. Возможны два следующих варианта.

Случай 1. Пусть $V_1 = \{1, \dots, m\}$. Тогда в силу (2.3) и (2.9) верно равенство

$$\omega_{\mathbf{n}} \left(\mathbf{t} \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \right) = (-1)^{|\sigma|} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}),$$

откуда

$$\sum_{\sigma \in \Sigma/\mathbb{Z}^2} \omega_{\mathbf{n}} \left(\mathbf{t} \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \right) = 2^{m-1} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}), \quad V_1 = \{1, \dots, m\}. \quad (2.17)$$

Случай 2. Пусть $V_1 \neq \{1, \dots, m\}$, т.е. $V_2 \neq \emptyset$. Из формул (2.3), (2.4) и (2.9) вытекает равенство

$$\omega_{\mathbf{n}} \left(\mathbf{t} \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \right) = \begin{cases} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}), & \text{если } \sum_{q \in V_1} \sigma_q = 0 \pmod{2}, \\ -\omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}), & \text{если } \sum_{q \in V_1} \sigma_q = 1 \pmod{2}. \end{cases} \quad (2.18)$$

Рассмотрим множества

$$\begin{aligned}\Sigma^{0,0} &= \left\{ \sigma \in \Sigma : \sum_{q \in V_1} \sigma_q = 0 \pmod{2}, \sum_{q \in V_2} \sigma_q = 0 \pmod{2} \right\}, \\ \Sigma^{1,1} &= \left\{ \sigma \in \Sigma : \sum_{q \in V_1} \sigma_q = 1 \pmod{2}, \sum_{q \in V_2} \sigma_q = 1 \pmod{2} \right\}.\end{aligned}$$

Из (2.18) следует, что

$$\omega_{\mathbf{n}}\left(\mathbf{t} \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0}\right)\right) = \begin{cases} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}), & \text{если } \sigma \in \Sigma^{0,0}, \\ -\omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}), & \text{если } \sigma \in \Sigma^{1,1}. \end{cases} \quad (2.19)$$

Очевидно, $\Sigma^{0,0} \sqcup \Sigma^{1,1} = \Sigma/\mathbb{Z}^2$. Зафиксируем произвольные $q_1 \in V_1$ и $q_2 \in V_2$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между элементами множеств $\Sigma^{0,0}$ и $\Sigma^{1,1}$. Это соответствие можно получить, если каждому элементу $\sigma_0 \in \Sigma^{0,0}$ сопоставить элемент $\sigma_1 \in \Sigma^{1,1}$ такой, что σ_0 и σ_1 отличаются только координатами с номерами q_1 и q_2 . Таким образом, множества $\Sigma^{0,0}$ и $\Sigma^{1,1}$ равномощны. Отсюда с учетом (2.19) получаем, что

$$\sum_{\sigma \in \Sigma/\mathbb{Z}^2} \omega_{\mathbf{n}}\left(\mathbf{t} \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0}\right)\right) = 0, \quad \text{если } V_1 \neq \{1, \dots, m\}. \quad (2.20)$$

Из (2.16), (2.17) и (2.20) вытекает, что

$$\sum_{\sigma \in \Sigma/\mathbb{Z}^2} \left[S_{M+1}\left(\mathbf{t} \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0}\right)\right) - S_{2^k}\left(\mathbf{t} \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0}\right)\right) \right] = 2^{m-1} \sum c_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}), \quad (2.21)$$

где суммирование распространяется на все векторы $\mathbf{n}$, все координаты которых удовлетворяют (2.15). Из (2.21) сразу получаем (2.13). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть Δ – двоичный куб ранга s , $E \subset \Delta$ – борелевское множество, причем $\mu(E) > 0$. Тогда найдется натуральное $k_1 \geq s$ такое, что для всех $k \geq k_1$ существует точка $\mathbf{t}_k \in \Delta$, для которой выполнено условие

$$\mathbf{t}_k \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0}\right) \in E \quad \text{для всех } \sigma \in \Sigma. \quad (2.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mu(E) > 0$, то множество E имеет точки плотности. Поэтому существует двоичный куб $\Delta_0 \subset \Delta$ такой, что

$$\mu(\Delta_0 \cap E) > \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) \mu(\Delta_0). \quad (2.23)$$

Пусть k_1 – ранг куба Δ_0 .

Зафиксируем произвольное $k \geq k_1$. Для всех $\sigma \in \Sigma$ рассмотрим множества

$$E_{\sigma} = \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0}\right) \oplus (\Delta_0 \cap E).$$

Тогда $E_\sigma \subset \Delta_0$ для всех $\sigma \in \Sigma$. Кроме того, в силу инвариантности меры Хаара относительно сдвига, а также формулы (2.23) имеем

$$\mu(E_\sigma) > \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) \mu(\Delta_0) \quad \text{для всех } \sigma \in \Sigma. \quad (2.24)$$

Рассмотрим множество $L = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} E_\sigma$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu(L) &= \mu(\Delta_0) - \mu(\Delta_0 \setminus L) = \mu(\Delta_0) - \mu\left(\bigcup_{\sigma \in \Sigma} (\Delta_0 \setminus E_\sigma)\right) \\ &\geq \mu(\Delta_0) - \sum_{\sigma \in \Sigma} \mu(\Delta_0 \setminus E_\sigma) \stackrel{\text{в силу (2.24)}}{>} \mu(\Delta_0) - \sum_{\sigma \in \Sigma} \frac{1}{2^m} \mu(\Delta_0) = 0, \end{aligned}$$

откуда $\mu(L) > 0$ и $L \neq \emptyset$. Выберем произвольную точку $\mathbf{t}_k \in L$. Тогда $\mathbf{t}_k \in E_\sigma$ для всех $\sigma \in \Sigma$. Так как $\mathbf{y} \oplus \mathbf{z} = \mathbf{y} \oplus \mathbf{z}$ для любых $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in G^m$, то

$$\mathbf{t}_k \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0}\right) \in E \cap \Delta_0 \quad \text{для всех } \sigma \in \Sigma,$$

откуда немедленно вытекает формула (2.22). Лемма доказана.

Из лемм 3 и 4 попутно получается следующий результат, являющийся теоремой типа теоремы Кантора–Лебега для рядов (1.1).

ТЕОРЕМА 1. *Если ряд (S) вида (1.1) сходится по кубам к конечной сумме на множестве $A \subset G^m$ положительной меры, то для коэффициентов этого ряда справедливо равенство*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_{2^k, \dots, 2^k} = 0. \quad (2.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Егорова найдется множество $E \subset A$, удовлетворяющее условию $\mu(E) > 0$ и такое, что ряд (S) сходится по кубам равномерно на множестве E . Выберем и зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

Из леммы 4 вытекает, что найдется натуральное k_1 такое, что для всех $k \geq k_1$ существует точка $\mathbf{t}_k \in \Delta$ такая, что

$$\mathbf{t}_k \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0}\right) \in E \quad \text{для всех } \sigma \in \Sigma. \quad (2.26)$$

Так как ряд (S) сходится по кубам к конечной сумме равномерно на множестве E , то найдется натуральное $k_2 \geq k_1$ такое, что для кубических частичных сумм S_N ряда (S) и для всех $k \geq k_2$ выполнено условие

$$|S_{2^{k+1}}(\mathbf{t}) - S_{2^k}(\mathbf{t})| < \varepsilon \quad \text{для всех } \mathbf{t} \in E. \quad (2.27)$$

Для всех $k \geq k_2$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} |c_{2^k, \dots, 2^k}| &= |c_{2^k, \dots, 2^k} \omega_{2^k, \dots, 2^k}(\mathbf{t}_k)| \\ &\stackrel{\text{из (2.13)}}{=} \frac{1}{2^{m-1}} \times \left| \sum_{\sigma \in \Sigma/\mathbb{Z}^2} \left[S_{2^{k+1}}\left(\mathbf{t}_k \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0}\right)\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - S_{2^k}\left(\mathbf{t}_k \oplus \left(\frac{\sigma}{2^{k+1}} + \mathbf{0}\right)\right) \right] \right| \stackrel{\text{из (2.26) и (2.27)}}{<} \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то из (2.28) вытекает (2.25). Теорема доказана.

§ 3. Квазимеры на группе G^m и их связь с рядами Уолша

Обозначим через $\mathcal{B}$ семейство всех двоичных интервалов (2.1). Функции $\tau: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть $\mathcal{B}$ -функциями. $\mathcal{B}$ -функция τ называется $\mathcal{B}$ -супераддитивной ($\mathcal{B}$ -субаддитивной) (см. [20]), если для любого дизъюнктного набора $\{\Delta_i\}_{i=1}^p$ двоичных интервалов такого, что $\bigcup_{i=1}^p \Delta_i \in \mathcal{B}$, выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^p \tau(\Delta_i) \leq \tau\left(\bigcup_{i=1}^p \Delta_i\right) \quad \left(\sum_{i=1}^p \tau(\Delta_i) \geq \tau\left(\bigcup_{i=1}^p \Delta_i\right)\right).$$

Символом $\overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ ($\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$) обозначим множество всех $\mathcal{B}$ -супераддитивных ($\mathcal{B}$ -субаддитивных) функций. $\mathcal{B}$ -функция $\tau \in \mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \cap \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ называется $\mathcal{B}$ -аддитивной. Аддитивные $\mathcal{B}$ -функции иначе называют квазимерами (см. [18], [21]).

Двоичная кубическая производная $D_d\tau(\mathbf{t})$ $\mathcal{B}$ -функции τ в точке $\mathbf{t} \in G^m$ определяется так:

$$D_d\tau(\mathbf{t}) = \lim_{\mu(\Delta) \rightarrow 0} \frac{\tau(\Delta)}{\mu(\Delta)}, \quad \Delta - \text{двоичный куб}, \quad \mathbf{t} \in \Delta.$$

Естественным образом определяются верхняя и нижняя двоичные кубические производные $\overline{D}_d\tau(\mathbf{t})$ и $\underline{D}_d\tau(\mathbf{t})$ $\mathcal{B}$ -функции τ в точке $\mathbf{t} \in G^m$.

Исследование рядов на двоичных группах удобно вести, используя так называемое формальное интегрирование. А именно, если задан ряд (S) вида (1.1), то можно определить $\mathcal{B}$ -функцию Ψ следующим образом:

$$\Psi(\Delta) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \int_{\Delta} c_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}), \quad \Delta \in \mathcal{B}. \quad (3.1)$$

Сумма в правой части формулы (3.1) определена корректно, так как лишь конечное число слагаемых отлично от нуля (см. [9]). $\mathcal{B}$ -функция Ψ является квазимерой, которую будем называть квазимерой, порожденной рядом (S). Если Δ – двоичный интервал ранга $\mathbf{k}$, а $\mathbf{t}$ – любая точка интервала Δ , то верна формула

$$\Psi(\Delta) = \mu(\Delta) S_{2^{\mathbf{k}}}(\mathbf{t}). \quad (3.2)$$

Хорошо известно, что соответствие между рядами (1.1) и квазимерами, определяемое (3.1) или (3.2), является линейным изоморфизмом, если естественным образом наделить множество рядов (1.1) и множество квазимер структурой линейного пространства. Коэффициенты любого ряда (1.1) восстанавливаются по порожденной им квазимере Ψ так:

$$c_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{i}=0}^{2^{\mathbf{k}}-1} \omega_{\mathbf{n}}\left(\frac{\mathbf{i}}{2^{\mathbf{k}}} + \mathbf{0}\right) \Psi(\Delta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{i}}). \quad (3.3)$$

Правая часть (3.3) не зависит от выбора $\mathbf{k}$, лишь бы $\mathbf{n} \leq 2^{\mathbf{k}}$. Формула (3.3) означает, что любой ряд (1.1) является рядом Фурье–Стилтьеса–Уолша порожденной им квазимеры.

Следующее определение было фактически введено в [9]. Пусть Δ – двоичный куб, $\mathbf{K} = \{k_j\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. Будем говорить, что $\mathcal{B}$ -функция τ является $(\Delta, \mathbf{K})$ -непрерывной, если

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum (-1)^{i_1 + \dots + i_m} \tau(\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}}) = 0, \quad (3.4)$$

где суммирование распространяется на все двоичные кубы $\Delta_{k_j}^i$ в форме (2.2) такие, что $\Delta_{k_j}^i \subset \Delta$. Если при этом $k_j \equiv j$, то $\mathcal{B}$ -функцию τ назовем просто Δ -непрерывной.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbf{K} = \{k_j\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, (S) – ряд вида (1.1), а $A \subset G^m$ – некоторое борелевское множество. Предположим, что для всех $\mathbf{t} \in A$ и $s \in \mathbb{Z}_+$ для кубических частичных сумм S_N ряда (S) существуют конечные пределы

$$\lim_{j \rightarrow \infty} S_{2^{k_j}}(\mathbf{t}) = \lim_{j \rightarrow \infty} S_{2^{k_j} + 2^s}(\mathbf{t}). \quad (3.5)$$

Тогда квазимера Ψ , порожденная рядом (S) , является $(\Delta, \mathbf{K})$ -непрерывной для любого двоичного куба Δ такого, что $\mu(\Delta \cap A) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть s – ранг куба Δ . По теореме Егорова найдется множество $E \subset \Delta \cap A$ такое, что $\mu(E) > 0$ и сходимость в обеих частях (3.5) является равномерной по $\mathbf{t}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

Выберем номер j_1 такой, что выполнено условие

$$|S_{2^{k_j} + 2^s}(\mathbf{t}) - S_{2^{k_j}}(\mathbf{t})| < \varepsilon \quad \text{для всех } \mathbf{t} \in E, j \geq j_1. \quad (3.6)$$

Воспользуемся леммой 4. Для всех j , больших некоторого $j_2 \in \mathbb{N}$, найдется точка $\mathbf{t}_{k_j} = (t_{k_j}^1, \dots, t_{k_j}^m)$ такая, что

$$\mathbf{t}_{k_j} \oplus \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2^{k_j+1}} + \mathbf{0} \right) \in E \quad \text{для всех } \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma. \quad (3.7)$$

Зафиксируем произвольное $j > \max\{j_1, j_2\}$. До конца доказательства будем писать k вместо k_j . Из (3.6) и (3.7) вытекает неравенство

$$\left| \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma/\mathbb{Z}^2} \left[S_{2^k + 2^s} \left(\mathbf{t}_k \oplus \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \right) - S_{2^k} \left(\mathbf{t}_k \oplus \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \right) \right] \right| < 2^{m-1} \varepsilon. \quad (3.8)$$

Обозначим через T выражение, стоящее под знаком модуля в (3.8). Тогда

$$\begin{aligned} T &\stackrel{\text{из (2.13)}}{=} 2^{m-1} \sum_{\mathbf{n}=2^k \cdot \mathbf{1}}^{(2^k + 2^s - 1) \cdot \mathbf{1}} c_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_k) \\ &\stackrel{\text{из (3.3)}}{=} 2^{m-1} \sum_{\mathbf{n}=2^k \cdot \mathbf{1}}^{(2^k + 2^s - 1) \cdot \mathbf{1}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_k) \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{0}}^{(2^{k+1} - 1) \cdot \mathbf{1}} \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{i}}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \Psi(\Delta_{k+1}^{\mathbf{i}}) \\ &= 2^{m-1} \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{0}}^{(2^{k+1} - 1) \cdot \mathbf{1}} \Psi(\Delta_{k+1}^{\mathbf{i}}) \sum_{\mathbf{n}=2^k \cdot \mathbf{1}}^{(2^k + 2^s - 1) \cdot \mathbf{1}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_k) \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{i}}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \\ &\stackrel{\text{из (2.10)}}{=} 2^{m-1} \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{0}}^{(2^{k+1} - 1) \cdot \mathbf{1}} \Psi(\Delta_{k+1}^{\mathbf{i}}) \sum_{\mathbf{n}=2^k \cdot \mathbf{1}}^{(2^k + 2^s - 1) \cdot \mathbf{1}} \omega_{\mathbf{n}} \left(\mathbf{t}_k \oplus \left(\frac{\mathbf{i}}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \right) \\ &= 2^{m-1} \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{0}}^{(2^{k+1} - 1) \cdot \mathbf{1}} \Psi(\Delta_{k+1}^{\mathbf{i}}) \prod^{\mathbf{i}}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\prod^{\mathbf{i}} = \prod_{q=1}^m \left(D_{2^k+2^s} \left(t_k^q \oplus \left(\frac{i_q}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \right) - D_{2^k} \left(t_k^q \oplus \left(\frac{i_q}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \right) \right). \quad (3.10)$$

Из (3.10) и леммы 2 вытекает формула

$$\prod^{\mathbf{i}} = \begin{cases} 2^{sm} \omega_{2^k \mathbf{1}} \left(\mathbf{t}_k \oplus \left(\frac{\mathbf{i}}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \right), & \text{если } t_k^q \oplus \left(\frac{i_q}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \in \left[0, \frac{1}{2^s} - 0 \right], \\ & q = 1, \dots, m; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.11)$$

Заметим, что

$$t_k^q \oplus \left(\frac{i_q}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \in \left[0, \frac{1}{2^s} - 0 \right], \quad q = 1, \dots, m, \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{\mathbf{i}}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \in \Delta. \quad (3.12)$$

Из (2.10) вытекает равенство

$$\omega_{2^k \mathbf{1}} \left(\mathbf{t}_k \oplus \left(\frac{\mathbf{i}}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \right) = \omega_{2^k \mathbf{1}}(\mathbf{t}_k) \omega_{2^k \mathbf{1}} \left(\frac{\mathbf{i}}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right). \quad (3.13)$$

Объединяя формулы (3.9)–(3.13), получаем равенство

$$T = \omega_{2^k \mathbf{1}}(\mathbf{t}_k) 2^{m-1+ms} \sum_{\Delta_{k+1}^{\mathbf{i}} \subset \Delta} \Psi(\Delta_{k+1}^{\mathbf{i}}) \omega_{2^k \mathbf{1}} \left(\frac{\mathbf{i}}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right). \quad (3.14)$$

Из (3.14) получаем, учитывая формулу (3.8) и равенство $\omega_{2^k \mathbf{1}}(\mathbf{t}_k) = \pm 1$:

$$\left| \sum_{\Delta_{k+1}^{\mathbf{i}} \subset \Delta} \Psi(\Delta_{k+1}^{\mathbf{i}}) \omega_{2^k \mathbf{1}} \left(\frac{\mathbf{i}}{2^{k+1}} + \mathbf{0} \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2^{ms}}. \quad (3.15)$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из (2.11) и (3.15) для квазимеры Ψ вытекает условие (3.4), из чего следует справедливость теоремы.

Если в теореме 2 положить $k_j \equiv j$, то сразу получится

ТЕОРЕМА 3. Пусть ряд (S) вида (1.1) сходится по кубам к конечной сумме на борелевском множестве $A \subset G^m$. Тогда квазимера Ψ , порожденная этим рядом, является Δ -непрерывной для всех двоичных кубов Δ таких, что

$$\mu(\Delta \cap A) > 0.$$

§ 4. Теоремы о монотонности для $\mathcal{B}$ -функций. Множества Радемахера–Дирихле для кратных рядов Уолша

ЛЕММА 5. Пусть $\mathbf{K} = \{k_j\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, Δ – двоичный куб, а $\xi \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ – $(\Delta, \mathbf{K})$ -непрерывная $\mathcal{B}$ -функция. Если $\xi(\Delta) > 0$, то найдутся непересекающиеся двоичные кубы $\Delta^1 \subset \Delta$ и $\Delta^2 \subset \Delta$ такие, что $\xi(\Delta^i) > 0$, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть s – ранг двоичного куба Δ . Для каждого $k \geq s + 1$ рассмотрим множества W_k двоичных кубов $\Delta_k^{\mathbf{i}}$ в форме (2.2), лежащих в кубе Δ . В силу субаддитивности $\mathcal{B}$ -функции ξ и неравенства $\xi(\Delta) > 0$ верна формула

$$\sum_{\Delta_k^{\mathbf{i}} \in W_k} \xi(\Delta_k^{\mathbf{i}}) \geq \xi(\Delta) > 0. \quad (4.1)$$

Из (4.1) вытекает, в частности, что хотя бы для одного двоичного куба $\Delta_k^{\mathbf{i}_k} \in W_k$ выполнено неравенство $\xi(\Delta_k^{\mathbf{i}_k}) > 0$.

Предположим, что утверждение леммы не является верным. Тогда при любом $k \geq s + 1$ имеем

$$\xi(\Delta_k^{\mathbf{i}}) \leq 0 \quad \text{для всех } \Delta_k^{\mathbf{i}} \in W_k \text{ таких, что } \Delta_k^{\mathbf{i}} \neq \Delta_k^{\mathbf{i}_k}. \quad (4.2)$$

Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} W_k^0 &= \{\Delta_k^{\mathbf{i}} \in W_k : i_1 + \dots + i_m = 0 \pmod{2}\}, \\ W_k^1 &= \{\Delta_k^{\mathbf{i}} \in W_k : i_1 + \dots + i_m = 1 \pmod{2}\}. \end{aligned}$$

Пусть W'_k – то из множеств W_k^0 или W_k^1 , которому не принадлежит куб $\Delta_k^{\mathbf{i}_k}$. Имеет место следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\Delta_k^{\mathbf{i}} \in W_k} (-1)^{i_1 + \dots + i_m} \xi(\Delta_k^{\mathbf{i}}) \right| &= \left| \sum_{\Delta_k^{\mathbf{i}} \in W_k^0} \xi(\Delta_k^{\mathbf{i}}) - \sum_{\Delta_k^{\mathbf{i}} \in W_k^1} \xi(\Delta_k^{\mathbf{i}}) \right| \\ &= \left| \sum_{\Delta_k^{\mathbf{i}} \in W_k} \xi(\Delta_k^{\mathbf{i}}) - 2 \sum_{\Delta_k^{\mathbf{i}} \in W'_k} \xi(\Delta_k^{\mathbf{i}}) \right| \stackrel{\text{из (4.1) и (4.2)}}{\geq} \xi(\Delta) > 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из (4.3) вытекает, что $\mathcal{B}$ -функция ξ не является $(\Delta, \mathbf{K})$ -непрерывной. Из полученного противоречия следует справедливость леммы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть заданы двоичный куб $\Delta_0 \subset G^m$, множество $H \subset \Delta_0$, возрастающая последовательность натуральных чисел $\mathbf{K} = \{k_j\}$ и $\mathcal{B}$ -функция $\tau \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$, являющаяся $(\Delta, \mathbf{K})$ -непрерывной для всех двоичных кубов $\Delta \subseteq \Delta_0$. Предположим, что во всех точках $\mathbf{t} \in \Delta_0 \setminus H$ для функции τ справедливо неравенство

$$\underline{D}_d \tau(\mathbf{t}) \leq 0. \quad (4.4)$$

Если $\tau(\Delta_0) > 0$, то множество H содержит непустое совершенное подмножество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau_1(\Delta) = \tau(\Delta) - \varepsilon \mu(\Delta)$, где $\varepsilon > 0$ выберем настолько малым, что $\tau_1(\Delta_0) > 0$. Очевидно, $\tau_1 \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$. $\mathcal{B}$ -функция τ и квазимера $\varepsilon \mu(\cdot)$ являются $(\Delta, \mathbf{K})$ -непрерывными для всех двоичных кубов $\Delta \subseteq \Delta_0$, поэтому $\mathcal{B}$ -функция τ_1 тоже обладает этим свойством.

Пусть s – ранг куба Δ_0 . Рассмотрим множество

$$F = \bigcap_{k=s}^{\infty} \bigcup \Delta,$$

где объединение берется по всем двоичным кубам $\Delta \subseteq \Delta_0$, имеющим ранг k и таким, что $\tau_1(\Delta) > 0$. Множество F замкнуто как пересечение замкнутых множеств. Из доказательства леммы 5 следует, что $F \neq \emptyset$. Так как $\mathcal{B}$ -

функция τ_1 является $(\Delta, \mathbf{K})$ -непрерывной для всех двоичных кубов $\Delta \subseteq \Delta_0$, то в силу леммы 5 множество F не имеет изолированных точек. Таким образом, это множество является непустым и совершенным.

Пусть $\mathbf{t}$ – произвольная точка множества F . Тогда существует вложенная одномерная последовательность двоичных кубов $\{\Delta_k^{\mathbf{i}(k, \mathbf{t})}\}_{k=s}^\infty$ в форме (2.2), стягивающаяся к точке $\mathbf{t}$. Из построения множества F видно, что $\tau_1(\Delta_k^{\mathbf{i}(k, \mathbf{t})}) > 0$ для всех $k \geq s$, поэтому

$$\underline{D}_d \tau(\mathbf{t}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau(\Delta_k^{\mathbf{i}(k, \mathbf{t})})}{\mu(\Delta_k^{\mathbf{i}(k, \mathbf{t})})} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau_1(\Delta_k^{\mathbf{i}(k, \mathbf{t})})}{\mu(\Delta_k^{\mathbf{i}(k, \mathbf{t})})} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon \mu(\Delta_k^{\mathbf{i}(k, \mathbf{t})})}{\mu(\Delta_k^{\mathbf{i}(k, \mathbf{t})})} \geq 0 + \varepsilon = \varepsilon > 0. \quad (4.5)$$

Из (4.5) вытекает, что $F \subset H$, откуда следует справедливость теоремы.

Множество $A \subset G$ называется *множеством Дирихле* для системы Уолша, если существует возрастающая последовательность целых неотрицательных чисел $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ такая, что $\omega_{n_j}(t) = 1$ для всех $t \in A$ и $j = 1, 2, \dots$ (см. [18; гл. 7]). Такие множества изучал К. Ионеда в [22]–[24]. В частности, в [22] было доказано, что любое множество Дирихле является U -множеством для одномерных рядов Уолша.

Мы рассмотрим множества типа Дирихле в кратном случае. Назовем множество $F \subset G^m$ *RD-множеством*, если существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\mathbf{K} = \{k_j\}_{j=1}^\infty$ такая, что

$$r_{(k_j-1)\mathbf{1}}(\mathbf{t}) = 1, \quad \mathbf{t} \in F, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $r_{\mathbf{k}}$ – функции Радемахера. Последовательность $\mathbf{K}$ назовем *определяющей* для RD -множества F . Пусть $F(\mathbf{K})$ – объединение всех RD -множеств, для которых последовательность $\mathbf{K}$ является определяющей. Из определения RD -множеств сразу вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathbf{K} = \{k_j\}_{j=1}^\infty$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда:

- 1) если размерность $m \geq 2$, то множество $F(\mathbf{K})$ непусто и совершенно;
- 2) в одномерном случае ($m = 1$) множество $F(\mathbf{K})$ непусто и совершенно, если $\lim_{j \rightarrow \infty} (k_j - j) = \infty$, и содержит ровно 2^l элементов, если $\lim_{j \rightarrow \infty} (k_j - j) = l < \infty$;
- 3) $\mu(F(\mathbf{K})) = 0$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть задано множество $H \subset G^m$, которое представимо в виде $F \cup E$, где F – RD -множество, а E – не более чем счетное множество. Рассмотрим $\mathcal{B}$ -функцию $\tau \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$, являющуюся Δ -непрерывной для всех двоичных кубов $\Delta \subseteq G^m$. Предположим, что во всех точках $\mathbf{t} \in G^m \setminus H$ для функции τ справедливо неравенство (4.4). Тогда $\tau(\Delta) \leq 0$ для всех $\Delta \in \mathcal{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение теоремы неверно и $\tau(\Delta_1) > 0$ для некоторого $\Delta_1 \in \mathcal{B}$. В силу того, что $\tau \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$, существует двоичный куб $\Delta \subset \Delta_1$ такой, что $\tau(\Delta) > 0$. Пусть k' – ранг куба Δ , а $\mathbf{K} = \{k_j\}$ – определяющая для RD -множества F последовательность.

Пусть $k_j \geq k'$. Символом W обозначим множество двоичных кубов $\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}}$ в форме (2.2) таких, что $\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}} \subset \Delta$. Из теоремы 4 вытекает, что если $\tau(\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}}) > 0$ для некоторого $\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}} \in W$, то множество $\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}} \cap H = \Delta_{k_j}^{\mathbf{i}} \cap (F \cup E)$ содержит

непустое совершенное подмножество. Но множество E не более чем счетно, поэтому

$$\tau(\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}}) \leq 0 \quad \text{для всех } \Delta_{k_j}^{\mathbf{i}} \in W \text{ таких, что } \Delta_{k_j}^{\mathbf{i}} \cap F = \emptyset. \quad (4.6)$$

Пусть

$$\begin{aligned} W^0 &= \{\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}} \in W : i_1 + \dots + i_m = 0 \pmod{2}\}, \\ W^1 &= \{\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}} \in W : i_1 + \dots + i_m = 1 \pmod{2}\}. \end{aligned}$$

Если $\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}} \cap F \neq \emptyset$, то согласно определению RD -множеств и формуле (2.11) имеем $\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}} \in W_0$. Отсюда получаем, учитывая (4.6), что

$$\tau(\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}}) \leq 0 \quad \text{для всех } \Delta_{k_j}^{\mathbf{i}} \in W_1. \quad (4.7)$$

Имеет место следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} \sum_{\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}} \in W} (-1)^{i_1 + \dots + i_m} \tau(\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}}) &= \sum_{\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}} \in W_0} \tau(\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}}) - \sum_{\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}} \in W_1} \tau(\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}}) \\ &= \sum_{\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}} \in W} \tau(\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}}) - 2 \sum_{\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}} \in W_1} \tau(\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}}) \\ &\stackrel{\text{так как } \tau \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}}{\geq} \tau(\Delta) - 2 \sum_{\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}} \in W_1} \tau(\Delta_{k_j}^{\mathbf{i}}) \stackrel{\text{из (4.7)}}{\geq} \tau(\Delta) > 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из (4.8) вытекает, что $\mathcal{B}$ -функция τ не является Δ -непрерывной. Получили противоречие. Таким образом, $\tau(\Delta) \leq 0$ для всех $\Delta \in \mathcal{B}$. Теорема доказана.

§ 5. Восстановление коэффициентов кратных рядов Уолша

Построим ряд многомерных обобщенных интегралов двоичного перронавского типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathbf{K} = \{k_j\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. Назовем конечную функцию f , определенную всюду на G^m , за исключением, быть может, точек некоторого не более чем счетного множества $E \subset G^m$, $(PW(\mathbf{K}))$ -интегрируемой, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\mathcal{B}$ -функции $F_1 \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ (мажоранта) и $F_2 \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ (миноранта) такие, что

(А) для всех $\mathbf{t} \in G^m \setminus E$ выполнено условие

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{F_1(\Delta_{k_j})}{\mu(\Delta_{k_j})} \geq f(\mathbf{t}) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{F_2(\Delta_{k_j})}{\mu(\Delta_{k_j})}, \quad (5.1)$$

где Δ_{k_j} – двоичный куб ранга k_j , содержащий точку $\mathbf{t}$;

(В) $\mathcal{B}$ -функции F_1 и F_2 являются $(\Delta, \mathbf{K})$ -непрерывными для всех двоичных кубов $\Delta \subseteq G^m$;

(С) $F_1(G^m) - F_2(G^m) < \varepsilon$.

Значение $(PW(\mathbf{K}))$ -интеграла (интеграла Перрона–Уолша) от функции f по любому двоичному интервалу Δ определяется так:

$$(PW(\mathbf{K})) \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) = \inf_{F_1} F_1(\Delta) = \sup_{F_2} F_2(\Delta). \quad (5.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\mathcal{B}$ -функции $F_1 \in \overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ и $F_2 \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ удовлетворяют условиям (A) и (B) из определения 1. Тогда $(F_2 - F_1) \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$. Для всех $\mathbf{t} \in G^m \setminus E$ имеем

$$\begin{aligned} D_d(F_2 - F_1)(\mathbf{t}) &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{F_2(\Delta_{k_j}) - F_1(\Delta_{k_j})}{\mu(\Delta_{k_j})} \leq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{F_2(\Delta_{k_j}) - F_1(\Delta_{k_j})}{\mu(\Delta_{k_j})} \\ &\leq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{F_2(\Delta_{k_j})}{\mu(\Delta_{k_j})} - \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{F_1(\Delta_{k_j})}{\mu(\Delta_{k_j})} \leq f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{t}) = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Из (5.3) и теоремы 4 вытекает, что если $(F_2 - F_1)(\Delta) > 0$ для некоторого $\Delta \in \mathcal{B}$, то множество $E \cap \Delta$ содержит непустое совершенное подмножество. Но этого быть не может, так как множество E не более чем счетно. Таким образом,

$$F_2(\Delta) \leq F_1(\Delta) \quad \text{для всех } \Delta \in \mathcal{B}. \quad (5.4)$$

Если функции F_1 и F_2 удовлетворяют еще и условию (C) из определения 1, то с помощью стандартных рассуждений (см., например, [20]) из (5.4) выводится неравенство

$$F_1(\Delta) - F_2(\Delta) < \varepsilon \quad \text{для всех } \Delta \in \mathcal{B}. \quad (5.5)$$

Из произвольности $\varepsilon > 0$ и формул (5.4), (5.5) вытекает корректность определения $(PW(\mathbf{K}))$ -интеграла, понимаемая в том смысле, что инфимум и супремум в (5.2) совпадают.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассмотрим понятие $(PW(\mathbf{K}))$ -интеграла с фиксированным не более чем счетным множеством E в определении 1. Назовем такой интеграл $(PW^E(\mathbf{K}))$ -интегралом. Пусть $(PW^E(\mathbf{K})) \int_{\Delta} f$ есть значение $(PW^E(\mathbf{K}))$ -интеграла от $(PW^E(\mathbf{K}))$ -интегрируемой функции f по $\Delta \in \mathcal{B}$.

Рассмотрим не более чем счетные множества $E \subset E_0$ и $(PW^E(\mathbf{K}))$ -интегрируемую функцию f . Тогда любая мажоранта (миноранта) для $(PW^E(\mathbf{K}))$ -интеграла является мажорантой (минорантой) для $(PW^{E_0}(\mathbf{K}))$ -интеграла. Поэтому функция f является $(PW^{E_0}(\mathbf{K}))$ -интегрируемой.

Пусть $\overline{\Omega}$ ($\underline{\Omega}$) означает множество всех мажорант (минорант) для $(PW^E(\mathbf{K}))$ -интеграла, а $\overline{\Lambda}$ ($\underline{\Lambda}$) – аналогичные классы для $(PW^{E_0}(\mathbf{K}))$ -интеграла. Если Δ – произвольный двоичный интервал, то из рассуждений предыдущего абзаца вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (PW^{E_0}(\mathbf{K})) \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) &= \inf_{F_1 \in \overline{\Lambda}} F_1(\Delta) \leq \inf_{F_1 \in \overline{\Omega}} F_1(\Delta) = (PW^E(\mathbf{K})) \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \\ &= \sup_{F_2 \in \underline{\Omega}} F_2(\Delta) \leq \sup_{F_2 \in \underline{\Lambda}} F_2(\Delta) = (PW^{E_0}(\mathbf{K})) \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}), \end{aligned} \quad (5.6)$$

откуда

$$(PW^E(\mathbf{K})) \int_{\Delta} f = (PW^{E_0}(\mathbf{K})) \int_{\Delta} f. \quad (5.7)$$

Пусть множества E_1 и E_2 не более чем счетны, а функция f является одновременно $(PW^{E_1}(\mathbf{K}))$ -интегрируемой и $(PW^{E_2}(\mathbf{K}))$ -интегрируемой. Тогда f определена на множестве $G^m \setminus (E_1 \cap E_2)$, является $(PW^{E_1 \cup E_2}(\mathbf{K}))$ -интегрируемой и согласно (5.7) верны следующие равенства:

$$(PW^{E_1}(\mathbf{K})) \int_{\Delta} f = (PW^{E_1 \cup E_2}(\mathbf{K})) \int_{\Delta} f = (PW^{E_2}(\mathbf{K})) \int_{\Delta} f. \quad (5.8)$$

Из (5.8) вытекает, что определение $(PW(\mathbf{K}))$ -интеграла не зависит от выбора исключительного множества E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем конечную функцию f , определенную всюду на G^m , за исключением, быть может, точек некоторого не более чем счетного множества $E \subset G^m$, PW -интегрируемой, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\mathcal{B}$ -функции $F_1 \in \overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ (мажоранта) и $F_2 \in \underline{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ (миноранта) такие, что

(А) для всех $\mathbf{t} \in G^m \setminus E$ выполнено условие

$$\underline{D}_d F_1(\mathbf{t}) \geq f(\mathbf{t}) \geq \overline{D}_d F_2(\mathbf{t}); \quad (5.9)$$

(В) $\mathcal{B}$ -функции F_1 и F_2 являются Δ -непрерывными для всех двоичных кубов $\Delta \subseteq G^m$;

(С) $F_1(G^m) - F_2(G^m) < \varepsilon$.

Значение (PW) -интеграла от функции f по любому двоичному интервалу Δ определяется формулой, аналогичной (5.2).

Корректность определения (PW) -интеграла и его независимость от выбора не более чем счетного множества E в определении 2 доказывается так же, как и для $(PW(\mathbf{K}))$ -интеграла.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть конечная функция f определена, по крайней мере, на множестве $G^m \setminus (F \cup E)$, где F – некоторое RD -множество, а E – некоторое не более чем счетное множество. Назовем функцию f $(PWRD)$ -интегрируемой, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\mathcal{B}$ -функции $F_1 \in \overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ (мажоранта) и $F_2 \in \underline{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ (миноранта) такие, что

(А) для всех $\mathbf{t} \in G^m \setminus (F \cup E)$ имеет место формула (5.9);

(В) $\mathcal{B}$ -функции F_1 и F_2 являются Δ -непрерывными для всех двоичных кубов $\Delta \subseteq G^m$;

(С) $F_1(G^m) - F_2(G^m) < \varepsilon$.

Значение $(PWRD)$ -интеграла от функции f по любому $\Delta \in \mathcal{B}$ определяется формулой, аналогичной (5.2).

Корректность определения $(PWRD)$ -интеграла устанавливается с использованием теоремы 5 подобно тому, как это делалось для $(PW(\mathbf{K}))$ -интеграла (см. замечание 1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Рассмотрим понятие $(PWRD)$ -интеграла с фиксированными RD -множеством F и не более чем счетным множеством E в определении 3. Назовем такой интеграл $(PWRD^{F,E})$ -интегралом. Пусть $(PWRD^{F,E}) \int_{\Delta} f$ есть значение $(PWRD^{F,E})$ -интеграла от $(PWRD^{F,E})$ -интегрируемой функции f по $\Delta \in \mathcal{B}$. Подобно тому, как это делалось в замечании 2, устанавливается следующий факт. Если $F \subset F_0$ – RD -множества, $E \subset E_0$ – не более чем счетные множества, а функция f является $(PWRD^{F,E})$ -интегрируемой, то f является одновременно $(PWRD^{F_0,E})$ -интегрируемой и $(PWRD^{F,E_0})$ -интегрируемой, причем

$$(PW^{F,E}) \int_{\Delta} f = (PW^{F_0,E}) \int_{\Delta} f, \quad (PW^{F,E}) \int_{\Delta} f = (PW^{F,E_0}) \int_{\Delta} f. \quad (5.10)$$

Рассмотрим произвольные счетные множества $E_1, E_2 \subset G^m$ и любые RD -множества F_1, F_2 с определяющими последовательностями $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ соответственно. Пусть $\mathbf{K}$ – последовательность натуральных чисел такая, что объединение всех ее элементов совпадает с объединением всех элементов последовательностей $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$. Тогда

$$F_1 \subset F(\mathbf{K}_1), \quad F_2 \subset F(\mathbf{K}_2), \quad F(\mathbf{K}) = F(\mathbf{K}_1) \cap F(\mathbf{K}_2). \quad (5.11)$$

Возьмем функцию f , которая является одновременно $(PWRD^{F_1, E_1})$ -интегрируемой и $(PWRD^{F_2, E_2})$ -интегрируемой. Тогда f определена, по крайней мере, на множестве $G^m \setminus ((F_1 \cup E_1) \cap (F_2 \cup E_2))$. Из (5.10) и (5.11) вытекает, что справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (PW^{F_1, E_1}) \int_{\Delta} f &= (PW^{F(\mathbf{K}_1), E_1}) \int_{\Delta} f = (PW^{F(\mathbf{K}), E_1}) \int_{\Delta} f, \\ (PW^{F(\mathbf{K}), E_1 \cup E_2}) \int_{\Delta} f &= (PW^{F(\mathbf{K}), E_2}) \int_{\Delta} f = (PW^{F(\mathbf{K}_2), E_2}) \int_{\Delta} f \\ &= (PW^{F_2, E_2}) \int_{\Delta} f, \end{aligned} \quad (5.12)$$

причем все интегралы в (5.12) имеют смысл. Из (5.12) следует, что определение $(PWRD)$ -интеграла не зависит от выбора исключительного множества $F \cup E$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть функция f является (PW) -интегрируемой. Тогда f является $(PW(\mathbf{K}))$ -интегрируемой для всех возрастающих последовательностей натуральных чисел $\mathbf{K}$ и

$$(PW) \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) = (PW(\mathbf{K})) \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \quad \text{для всех } \Delta \in \mathcal{B}. \quad (5.13)$$

Кроме того, f является $(PWRD)$ -интегрируемой и

$$(PW) \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) = (PWRD) \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \quad \text{для всех } \Delta \in \mathcal{B}. \quad (5.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{K}$ – произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел. Если для $\mathcal{B}$ -функции справедливо условие (5.1), то для нее справедливо и условие (5.9). Любая Δ -непрерывная $\mathcal{B}$ -функция является $(\Delta, \mathbf{K})$ -непрерывной. Таким образом, любая мажоранта (миноранта) из определения (PW) -интеграла является мажорантой (минорантой) из определения $(PW(\mathbf{K}))$ -интеграла, т.е. функция f является $(PW(\mathbf{K}))$ -интегрируемой. Для доказательства (5.13) необходимо повторить рассуждения, которые использовались при выводе формулы (5.6). $(PWRD)$ -интегрируемость функции f и формула (5.14) устанавливаются аналогично. Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из предложения 2 вытекает, что если функция f является (PW) -интегрируемой, то значение $(PW(\mathbf{K}))$ -интеграла от функции f не зависит от выбора последовательности $\mathbf{K}$. Здесь мы не изучаем вопрос, так ли это без предположения об (PW) -интегрируемости функции f . В подобных ситуациях в общем случае значение интеграла обычно зависит от выбора последовательности. Именно так обстоит дело, например, для семейства интегралов, построенных Скворцовым в [25] для решения проблемы восстановления коэффициентов одномерных рядов Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что на G^m определен процесс интегрирования $\mathcal{I}$, если заданы некоторое линейное пространство функций $\mathcal{F}$, каждая функция f из которого определена почти всюду на G^m , а также функционал

$$\text{Int}: \mathcal{B} \times \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R},$$

причем функционал Int является линейным при фиксированном первом аргументе и квазимерой – при фиксированном втором аргументе.

Нам понадобится следующее важное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А (см. [26]). Пусть на G^m определен процесс интегрирования $\mathcal{I}$. Рассмотрим ряд (S) вида (1.1) и изоморфную этому ряду квазимеру Ψ . Тогда (S) является $\mathcal{I}$ -рядом Фурье–Уолша $\mathcal{I}$ -интегрируемой функции g тогда и только тогда, когда $\Psi(\Delta) = \text{Int}(\Delta, g)$ для всех $\Delta \in \mathcal{B}$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть выбраны возрастающая последовательность натуральных чисел $\mathbf{K} = \{k_j\}$ и ряд (S) вида (1.1). Предположим, что для всех $s \in \mathbb{Z}_+$ и $\mathbf{t} \in G^m \setminus E$, где E – некоторое не более чем счетное множество, для кубических частичных сумм S_N ряда (S) выполнено условие

$$\lim_{j \rightarrow \infty} S_{2^{k_j}}(\mathbf{t}) = \lim_{j \rightarrow \infty} S_{2^{k_j} + 2^s}(\mathbf{t}) = f(\mathbf{t}) \neq \infty. \quad (5.15)$$

Тогда функция f является $(PW(\mathbf{K}))$ -интегрируемой и (S) является $(PW(\mathbf{K}))$ -рядом Фурье–Уолша этой функции, т.е.

$$c_{\mathbf{n}} = (PW(\mathbf{K})) \int_{G^m} f(\mathbf{t}) \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \quad \text{для всех } \mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ψ – квазимера, порожденная рядом (S) . Положим $F_1 = F_2 \equiv \Psi$. Тогда $F_1, F_2 \in \mathcal{A}$. Из (3.2) и (5.15) вытекает выполнение для функций F_1 и F_2 условия (А) из определения 1. Так как $\mu(\Delta \setminus E) = \mu(\Delta) > 0$ для любого двоичного куба Δ , то из (5.15) и теоремы 2 следует, что для функций F_1 и F_2 справедливо условие (В) из определения 1. Условие (С) из данного определения также имеет место, так как $F_1 \equiv F_2$. Таким образом, функция $f(\mathbf{t})$ является $(PW(\mathbf{K}))$ -интегрируемой. Пусть Δ – произвольный двоичный интервал. Тогда

$$\Psi(\Delta) \geq \inf_{F_1} F_1(\Delta) = (PW(\mathbf{K})) \int_{\Delta} f = \sup_{F_2} F_2(\Delta) \geq \Psi(\Delta). \quad (5.16)$$

Из (5.16) следует, что

$$\Psi(\Delta) = (PW(\mathbf{K})) \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}).$$

Объединяя последнюю формулу и утверждение А, получим, что ряд (S) является $(PW(\mathbf{K}))$ -рядом Фурье–Уолша функции $f(\mathbf{t})$. Теорема доказана.

Доказательство следующих двух результатов, использующее теорему 3, аналогично доказательству теоремы 6.

ТЕОРЕМА 7. Предположим, что во всех точках $\mathbf{t} \in G^m \setminus E$, где E – некоторое не более чем счетное множество, ряд (S) вида (1.1) сходится по кубам к конечной сумме $f(\mathbf{t})$. Тогда функция f является (PW) -интегрируемой и (S) является (PW) -рядом Фурье–Уолша этой функции.

ТЕОРЕМА 8. *Предположим, что во всех точках $\mathbf{t} \in G^m \setminus (F \cup E)$, где E – некоторое не более чем счетное множество, а F – некоторое RD -множество, ряд (S) вида (1.1) сходится по кубам к конечной сумме $f(\mathbf{t})$. Тогда функция f является $(PWRD)$ -интегрируемой и (S) является $(PWRD)$ -рядом Фурье–Уолша этой функции.*

§ 6. Множества единственности для кратных рядов Уолша

ТЕОРЕМА 9. *Пусть множество $H \subset G^m$ имеет меру нуль и $H \notin U_{\text{cube},m}$. Тогда H содержит непустое совершенное подмножество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий теоремы вытекает, что существует тождественно ненулевой ряд (S) вида (1.1), сходящийся к нулю по кубам на множестве $G^m \setminus H$. Так как $\mu(H) = 0$, то

$$\mu((G^m \setminus H) \cap \Delta) = \mu(\Delta) \quad \text{для любого двоичного куба } \Delta. \quad (6.1)$$

Пусть Ψ – квазимера, порожденная рядом (S) . Тогда существует двоичный куб Δ_0 такой, что $\Psi(\Delta_0) \neq 0$, иначе квазимера Ψ , а с ней и ряд (S) являлись бы тождественно нулевыми. Можно считать, что $\Psi(\Delta_0) > 0$, так как в противном случае ряд (S) можно заменить на ряд с противоположными коэффициентами. Так как ряд (S) сходится к нулю по кубам на множестве $G^m \setminus H$, то согласно (3.2) $D_d \Psi(\mathbf{t}) = 0$ для всех $\mathbf{t} \in \Delta_0 \setminus H$. Так как ряд (S) сходится к нулю по кубам на множестве $G^m \setminus H$, то с учетом теоремы 3 и формулы (6.1) получаем, что квазимера Ψ является Δ -непрерывной для любого двоичного куба Δ . Таким образом, к двоичному кубу Δ_0 и квазимере $\tau \equiv \Psi$ применима теорема 4, т.е. множество H содержит непустое совершенное подмножество F . Теорема доказана.

Из теоремы 9 сразу вытекает следующий важный результат.

ТЕОРЕМА 10. *Если множество $E \subset G^m$ не более чем счетно, то $E \in U_{\text{cube},m}$.*

ТЕОРЕМА 11. *Если $H = F \cup E \subset G^m$, где F – RD -множество, а множество E не более чем счетно, то $H \in U_{\text{cube},m}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что во всех точках $\mathbf{t} \in G^m \setminus H$ ряд (S) вида (1.1) сходится по кубам к нулю. По теореме 8 ряд (S) является $(PWRD)$ -рядом Фурье–Уолша функции $f \equiv 0$. Тогда ряд (S) является тождественно нулевым. Это означает, что $H \in U_{\text{cube},m}$. Теорема доказана.

§ 7. Теоремы типа Валле Пуссена для кратных рядов Уолша

В 1912 г. Валле Пуссен доказал (см., например, [27; гл. 14, § 4]), что если тригонометрический ряд сходится к конечной суммируемой функции всюду вне счетного множества, то этот ряд является рядом Фурье своей суммы. Мы докажем несколько подобных теорем для рядов (1.1) при сходимости по кубам. При этом наши результаты будут следствиями более общих фактов, касающихся соотношений между различными интегралами.

Назовем квазимеру F *абсолютно непрерывной*, если существует функция g , определенная почти всюду на G^m , суммируемая и такая, что

$$F(J) = \int_J g(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \quad \text{для всех } J \in \mathcal{B}. \quad (7.1)$$

ТЕОРЕМА 12. *Любая абсолютно непрерывная квазимера является Δ -непрерывной для всех двоичных кубов Δ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция g определена почти всюду на G^m и суммируема, а F – квазимера, построенная по формуле (7.1). Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть k_0 – ранг куба Δ . Ниже χ_A означает характеристическую функцию множества $A \subset G^m$. Из определения интеграла Лебега вытекает, что найдутся дизъюнктный набор двоичных кубов $\{J_s\}_{s=1}^M$ и набор чисел $\{l_s\}_{s=1}^M$ такие, что

$$\int_{G^m} \left| g(\mathbf{t}) - \sum_{s=1}^M l_s \chi_{J_s}(\mathbf{t}) \right| d\mu(\mathbf{t}) < \varepsilon. \quad (7.2)$$

Рассмотрим квазимеры

$$F_s: J \mapsto \int_J \chi_{J_s}(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}), \quad s = 1, \dots, M.$$

Пусть k_1 – наибольший из рангов кубов J_s . Возьмем произвольное $k \geq \max\{k_0, k_1 + 1\}$. Символом Λ_k обозначим множество двоичных кубов $\Delta_k^{\mathbf{i}}$ в форме (2.2) таких, что $\Delta_k^{\mathbf{i}} \subset \Delta$. Тогда

$$\sum_{\Delta_k^{\mathbf{i}} \in \Lambda_k} (-1)^{i_1 + \dots + i_m} F_s(\Delta_k^{\mathbf{i}}) = 0, \quad s = 1, \dots, M. \quad (7.3)$$

Из (7.3) получаем, что

$$\sum_{\Delta_k^{\mathbf{i}} \in \Lambda_k} (-1)^{i_1 + \dots + i_m} \sum_{s=1}^M l_s F_s(\Delta_k^{\mathbf{i}}) = 0. \quad (7.4)$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\Delta_k^{\mathbf{i}} \in \Lambda_k} (-1)^{i_1 + \dots + i_m} F(\Delta_k^{\mathbf{i}}) \right| &= \left| \sum_{\Delta_k^{\mathbf{i}} \in \Lambda_k} (-1)^{i_1 + \dots + i_m} \left(F(\Delta_k^{\mathbf{i}}) - \sum_{s=1}^M l_s F_s(\Delta_k^{\mathbf{i}}) \right) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{\Delta_k^{\mathbf{i}} \in \Lambda_k} (-1)^{i_1 + \dots + i_m} \sum_{s=1}^M l_s F_s(\Delta_k^{\mathbf{i}}) \right| \\ &\leq \sum_{\Delta_k^{\mathbf{i}} \in \Lambda_k} \left| F(\Delta_k^{\mathbf{i}}) - \sum_{s=1}^M l_s F_s(\Delta_k^{\mathbf{i}}) \right| + \left| \sum_{\Delta_k^{\mathbf{i}} \in \Lambda_k} (-1)^{i_1 + \dots + i_m} \sum_{s=1}^M l_s F_s(\Delta_k^{\mathbf{i}}) \right| \\ &\stackrel{\text{с учетом (7.4)}}{=} \sum_{\Delta_k^{\mathbf{i}} \in \Lambda_k} \left| \int_{\Delta_k^{\mathbf{i}}} \left(g(\mathbf{t}) - \sum_{s=1}^M l_s \chi_{J_s}(\mathbf{t}) \right) d\mu(\mathbf{t}) \right| \\ &\leq \int_{G^m} \left| g(\mathbf{t}) - \sum_{s=1}^M l_s \chi_{J_s}(\mathbf{t}) \right| d\mu(\mathbf{t}) \stackrel{\text{из (7.2)}}{<} \varepsilon. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то из (7.5) вытекает Δ -непрерывность квазимеры F . Теорема доказана.

Следующий результат обобщает на многомерный двоичный случай известный факт о неопределенном интеграле Лебега (см., например, [28; гл. 16, § 5]).

ЛЕММА 6. Пусть функция g суммируема на G^m . Тогда для всех $\varepsilon > 0$ существуют абсолютно непрерывные квазимеры F_1 и F_2 такие, что:

- 1) $F_1(G^m) - F_2(G^m) < \varepsilon$;
- 2) если функция g конечна в точке $\mathbf{t}$, то для квазимер F_1 и F_2 выполнено условие

$$\underline{D}_d F_1(\mathbf{t}) \geq g(\mathbf{t}) \geq \overline{D}_d F_2(\mathbf{t}). \quad (7.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим квазимеру F , определенную формулой (7.1). Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем достаточно большое $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\int_{G^m} g_{(N)}(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) < \int_{G^m} g(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) + \frac{\varepsilon}{4}, \quad (7.7)$$

где

$$g_{(N)}(\mathbf{t}) = \begin{cases} g(\mathbf{t}), & \text{если } g(\mathbf{t}) \geq -N, \\ 0, & \text{если } g(\mathbf{t}) < -N \text{ или } g(\mathbf{t}) \text{ не определено.} \end{cases}$$

Введем функцию $g_{(N)}^+$, полагая $g_{(N)}^+(\mathbf{t}) = g_{(N)}(\mathbf{t}) + N$. Тогда $g_{(N)}^+ \geq 0$ почти всюду на G^m .

Пусть $\delta = \varepsilon/8$. Рассмотрим множества

$$E_j = \{\mathbf{t} \in G^m : j\delta \leq g_{(N)}^+(\mathbf{t}) < (j+1)\delta\}, \quad j = 0, 1, \dots$$

Так как $0 \leq g_{(N)}^+ < \infty$ почти всюду, то

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mu(E_j) = 1. \quad (7.8)$$

Из суммируемости функции g вытекает неравенство

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\mu(E_j) < \infty. \quad (7.9)$$

Для каждого $j = 0, 1, \dots$ найдем открытое множество $G_j \supset E_j$ такое, что

$$\mu(G_j) < \mu(E_j) + \frac{1}{(j+1)2^j}. \quad (7.10)$$

Введем квазимеру F_1 , полагая

$$F_1(J) = \int_J \left(\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\delta \chi_{G_j}(\mathbf{t}) - N \right) d\mu(\mathbf{t}), \quad J \in \mathcal{B}. \quad (7.11)$$

Тогда

$$(j+1)\delta\chi_{G_j}(\mathbf{t}) \geq 0 \quad \text{для всех } \mathbf{t} \in G^m, \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{G^m} (j+1)\delta\chi_{G_j}(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) &= \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\delta\mu(G_j) \\ &\stackrel{\text{из (7.10)}}{\leq} \sum_{j=0}^{\infty} \left((j+1)\delta\mu(E_j) + \frac{\delta}{2^j} \right) \stackrel{\text{с учетом (7.9)}}{<} \infty. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Из (7.12) и (7.13) в силу теоремы Леви вытекает суммируемость подынтегральной функции в (7.11), а также равенство

$$\int_{G^m} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\delta\chi_{G_j}(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{G^m} (j+1)\delta\chi_{G_j}(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}). \quad (7.14)$$

Верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} F_1(G^m) &\stackrel{\text{с учетом (7.14)}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{G^m} (j+1)\delta\chi_{G_j}(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) - N \\ &\stackrel{\text{с учетом (7.10)}}{\leq} \sum_{j=0}^{\infty} \left((j+1)\delta\mu(E_j) + \frac{\delta}{2^j} \right) - N \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} j\delta\mu(E_j) + \sum_{j=0}^{\infty} \delta\mu(E_j) + \delta - N \\ &\stackrel{\text{из (7.8)}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} j\delta\mu(E_j) + 2\delta - N \leq \int_{G^m} g_{(N)}^+(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) + 2\delta - N \\ &= \int_{G^m} g_{(N)}(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) + 2\delta \stackrel{\text{из (7.7)}}{\leq} \int_{G^m} g(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) + \frac{\varepsilon}{4} + 2\delta \\ &= \int_{G^m} g(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

откуда

$$F_1(G^m) \leq \int_{G^m} g(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.15)$$

Пусть функция g конечна в точке $\mathbf{t}$. Тогда $\mathbf{t} \in E_l \subset G_l$ для некоторого $l = l(\mathbf{t})$. Существует $\lambda = \lambda(\mathbf{t}) > 0$ такое, что всякий двоичный куб $\Delta \ni \mathbf{t}$ с $\mu(\Delta) < \lambda$ лежит в множестве G_l . Тогда для таких кубов Δ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} F_1(\Delta) &= \int_{\Delta} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\delta\chi_{G_j}(\mathbf{t}) - N \right) d\mu(\mathbf{t}) \geq \int_{\Delta} (l+1)\delta\chi_{G_l}(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) - N\mu(\Delta) \\ &= (l+1)\delta\mu(\Delta) - N\mu(\Delta) \geq (g_{(N)}^+(\mathbf{t}) - N)\mu(\Delta) = g_{(N)}(\mathbf{t})\mu(\Delta) \geq g(\mathbf{t})\mu(\Delta), \end{aligned}$$

откуда

$$\underline{D}_d F_1(\mathbf{t}) \geq g(\mathbf{t}). \quad (7.16)$$

Итак, мы нашли квазимеру F_1 , удовлетворяющую (7.15) и (7.16). Квазимера F_1 является абсолютно непрерывной в силу (7.11) и (7.13). Подобным образом найдем абсолютно непрерывную квазимеру F_0 , удовлетворяющую условиям

$$F_0(G^m) \leq \int_{G^m} (-g(\mathbf{t})) d\mu(\mathbf{t}) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (7.17)$$

$$\underline{D}_d F_0(\mathbf{t}) \geq -g(\mathbf{t}), \quad \text{если } g(\mathbf{t}) \neq \infty. \quad (7.18)$$

Рассмотрим квазимеру $F_2 \equiv -F_0$. Тогда F_2 абсолютно непрерывна и

$$F_2(G^m) = -F_0(G^m) \stackrel{\text{из (7.17)}}{\geq} - \int_{G^m} (-g(\mathbf{t})) d\mu(\mathbf{t}) - \frac{\varepsilon}{2} = \int_{G^m} g(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) - \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$F_2(G^m) \geq \int_{G^m} g(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.19)$$

Если функция g конечна в точке $\mathbf{t}$, то

$$\overline{D}_d F_2(\mathbf{t}) = -\underline{D}_d F_0(\mathbf{t}) \stackrel{\text{из (7.18)}}{\leq} g(\mathbf{t}). \quad (7.20)$$

Итак, из (7.16) и (7.20) следует, что если в точке $\mathbf{t}$ функция g конечна, то квазимеры F_1 и F_2 удовлетворяют условию (7.6). Из (7.15) и (7.19) вытекает неравенство $F_1(G^m) - F_2(G^m) < \varepsilon$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 13. Пусть задана функция f , определенная и конечная на множестве $G^m \setminus E$, где E – некоторое не более чем счетное множество. Если функция f является суммируемой, то она является (PW) -интегрируемой, причем

$$(PW) \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) = \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \quad \text{для всех } \Delta \in \mathcal{B}. \quad (7.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функцию $g \equiv f$. Воспользуемся леммой 6 и найдем абсолютно непрерывные квазимеры F_1 и F_2 , для которых выполнено утверждение этой леммы. Тогда F_1 (F_2) является мажорантой (минорантой) из определения (PW) -интеграла. Отсюда вытекает (PW) -интегрируемость функции g .

Пусть $\Delta \in \mathcal{B}$. Повторяя рассуждения из предыдущего абзаца для функции $g \equiv f\chi_{\Delta}$, получим, что функция g является (PW) -интегрируемой. Из (7.15) и (7.19) в силу произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает равенство

$$(PW) \int_{G^m} g(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) = \int_{G^m} g(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}). \quad (7.22)$$

Несложно показать, что

$$(PW) \int_{G^m} g(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) = (PW) \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}), \quad \int_{G^m} g(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) = \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}). \quad (7.23)$$

Из (7.22) и (7.23) сразу получаем (7.21). Теорема полностью доказана.

Из предложения 2 и теоремы 13 сразу вытекают следующие два результата.

ТЕОРЕМА 14. Пусть задана суммируемая функция f , определенная и конечная на множестве $G^m \setminus E$, где E – некоторое не более чем счетное множество. Тогда для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\mathbf{K}$ f является $(PW(\mathbf{K}))$ -интегрируемой, причем

$$(PW(\mathbf{K})) \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) = \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \quad \text{для всех } \Delta \in \mathcal{B}.$$

ТЕОРЕМА 15. Пусть выбрана суммируемая функция f , определенная и конечная на множестве $G^m \setminus (F \cup E)$, где E – некоторое не более чем счетное множество, а F – некоторое RD -множество. Тогда f является $(PWRD)$ -интегрируемой, причем

$$(PWRD) \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) = \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \quad \text{для всех } \Delta \in \mathcal{B}.$$

Из теорем 6 и 14 получается следующий результат.

ТЕОРЕМА 16. Пусть выбраны возрастающая последовательность натуральных чисел $\mathbf{K} = \{k_j\}$ и ряд (S) вида (1.1). Предположим, что для всех $s \in \mathbb{Z}_+$ и $\mathbf{t} \in G^m \setminus E$, где E – некоторое не более чем счетное множество, для кубических частичных сумм S_N ряда (S) выполнено условие (5.15), причем функция f из (5.15) является суммируемой. Тогда ряд (S) является рядом Фурье–Уолша этой функции, т.е.

$$c_{\mathbf{n}} = \int_{G^m} f(\mathbf{t}) \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \quad \text{для всех } \mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^m.$$

Из теоремы 16 сразу следует

ТЕОРЕМА 17. Предположим, что во всех точках $\mathbf{t} \in G^m \setminus E$, где E – некоторое не более чем счетное множество, ряд (S) вида (1.1) сходится по кубам к конечной сумме $f(\mathbf{t})$, причем функция f является суммируемой. Тогда ряд (S) является рядом Фурье–Уолша функции f .

Из теорем 8 и 15 вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 18. Предположим, что во всех точках $\mathbf{t} \in G^m \setminus (F \cup E)$, где E – некоторое не более чем счетное множество, а F – некоторое RD -множество, ряд (S) вида (1.1) сходится по кубам к конечной сумме $f(\mathbf{t})$, причем функция f является суммируемой. Тогда ряд (S) является рядом Фурье–Уолша функции f .

Список литературы

- [1] В. А. Скворцов, “О коэффициентах сходящихся кратных рядов Хаара и Уолша”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **28:6** (1973), 77–79; англ. пер.: V. A. Skvorcov, “On the coefficients of convergent multiple Haar and Walsh series”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **28:6** (1974), 119–121.
- [2] Х. О. Мовсисян, “О единственности двойных рядов по системам Хаара и Уолша”, *Изв. АН АрмССР. Матем.*, **9:1** (1974), 40–61.

- [3] С. Ф. Лукомский, “О некоторых классах множеств единственности кратных рядов Уолша”, *Матем. сб.*, **180**:7 (1989), 937–945; англ. пер.: S. F. Lukomskii, “On certain classes of sets of uniqueness of multiple Walsh series”, *Math. USSR-Sb.*, **67**:2 (1990), 393–401.
- [4] Л. Д. Гоголадзе, “О восстановлении коэффициентов сходящихся кратных функциональных рядов”, *Reports of enlarged session of the seminar of I. N. Vekua Institute of applied mathematics*, Vol. 7, №2, Tbilisi University Press, Tbilisi, 1992, 20–22.
- [5] Л. Д. Гоголадзе, “К вопросу восстановления коэффициентов сходящихся кратных функциональных рядов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:2 (2008), 83–90; англ. пер.: L. D. Gogoladze, “On the problem of reconstructing the coefficients of convergent multiple function series”, *Izv. Math.*, **72**:2 (2008), 283–290.
- [6] Т. А. Жеребьева, “Об одном классе множеств единственности для двойных рядов Уолша”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2007, №5, 13–18; англ. пер.: T. A. Zhereb'eva, “A class of uniqueness sets for double Walsh series”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **62**:5 (2007), 181–185.
- [7] Т. А. Жеребьева, “Об одном классе множеств единственности для кратных рядов Уолша”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2009, №2, 14–21; англ. пер.: T. A. Zhereb'eva, “A class of sets of uniqueness for multiple Walsh series”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **64**:2 (2009), 13–18.
- [8] S. F. Lukomskii, “On a U -set for multiple Walsh series”, *Anal. Math.*, **18**:2 (1992), 127–138.
- [9] М. Г. Плотноков, “О множествах единственности для кратных рядов Уолша”, *Матем. заметки*, **81**:2 (2007), 265–279; англ. пер.: M. G. Plotnikov, “On uniqueness sets for multiple Walsh series”, *Math. Notes*, **81**:1–2 (2007), 234–246.
- [10] М. Г. Плотноков, “О кратных рядах Уолша, сходящихся по кубам”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:1 (2007), 61–78; англ. пер.: M. G. Plotnikov, “On multiple Walsh series convergent over cubes”, *Izv. Math.*, **71**:1 (2007), 57–73.
- [11] С. Ф. Лукомский, *Представление функций рядами Уолша и коэффициенты сходящихся рядов Уолша*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, СГУ, Саратов, 1996.
- [12] Н. С. Морева, “О единственности кратных рядов Уолша при сходимости по двоичным кубам”, *Матем. заметки*, **81**:4 (2007), 586–598; англ. пер.: N. S. Moreva, “Uniqueness of multiple Walsh series for the convergence on binary cubes”, *Math. Notes*, **81**:3–4 (2007), 518–528.
- [13] F. Weisz, “Uniqueness of two-parameter dyadic martingales and Walsh–Fourier series”, *Math. Pannon.*, **9**:1 (1998), 131–140.
- [14] Н. Н. Холщевникова, “Обобщенный тригонометрический интеграл”, *Изв. НАН Армении. Сер. матем.*, **36**:4 (2001), 82–89; англ. пер.: N. N. Kholshchevnikova, “A generalized trigonometric integral”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **36**:4 (2001), 69–76.
- [15] В. А. Сковрцов, Н. Н. Холщевникова, “Сравнение двух обобщенных тригонометрических интегралов”, *Матем. заметки*, **79**:2 (2006), 278–287; англ. пер.: V. A. Skvortsov, N. N. Kholshchevnikova, “Comparison of two generalized trigonometric integrals”, *Math. Notes*, **79**:1–2 (2006), 254–262.
- [16] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Сковрцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987; англ. пер.: B. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov, *Walsh series and transforms. Theory and applications*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **64**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [17] Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн, *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах*, ЭИМ, Баку, 1981.
- [18] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1990.

- [19] С. Сакс, *Теория интеграла*, Факториал Пресс, М., 2004; пер. с англ.: S. Saks, *Theory of the integral*, Dover Publ., New York, 1937.
- [20] K. M. Ostaszewski, “Henstock integration in the plane”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **63**, no. 353 (1986).
- [21] W. R. Wade, K. Yoneda, “Uniqueness and quasi-measures on the group of integers of a p -series field”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **84**:2 (1982), 202–206.
- [22] K. Yoneda, “Perfect sets of uniqueness on the group 2^{ω} ”, *Canad. J. Math.*, **34**:3 (1982), 759–764.
- [23] K. Yoneda, “A sufficient condition for a set to be a Dirichlet set on the dyadic group”, *Math. Japon.*, **29**:1 (1984), 45–50.
- [24] K. Yoneda, “Dirichlet sets and some uniqueness theorems for Walsh series”, *Tohoku Math. J. (2)*, **38**:1 (1986), 1–14.
- [25] В. А. Скворцов, “О рядах Хаара, сходящихся по подпоследовательности частичных сумм”, *Докл. АН СССР*, **183**:4 (1968), 784–786; англ. пер.: V. A. Skvortsov, “On Haar series with convergent subsequences of partial sums”, *Soviet Math. Dokl.*, **9** (1968), 1469–1471.
- [26] V. Skvortsov, “Henstock–Kurzweil type integrals in p -adic harmonic analysis”, *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.)*, **20**:2 (2004), 207–224.
- [27] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
- [28] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Лань, СПб., 1999; англ. пер. 1-го изд.: I. P. Natanson, *Theory of functions of a real variable*, Frederick Ungar Publ. Co., New York, 1955.

М. Г. Плотников (M. G. Plotnikov)

Вологодская государственная молочнохозяйственная
академия им. Н. В. Верещагина

E-mail: mgplotnikov@mail.ru

Поступила в редакцию

31.08.2009 и 04.06.2010