Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Микитюк, Классификация Риччи-плоских метрик на кокасательных расслоениях симметрических пространств ранга один, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 2, 107–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7627>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:44:22

УДК 514.765.1+512.813.4

И. В. Микитюк

Классификация Риччи-плоских метрик на кокасательных расслоениях симметрических пространств ранга один

Классифицированы все полные Риччи-плоские кэлеровы G -инвариантные метрики (g, J, Ω) на кокасательном расслоении компактного симметрического пространства ранга один G/K , $\dim G/K \geq 3$ (с фиксированной кэлеровой формой – канонической симплектической структурой Ω). Доказано, что множество классов эквивалентности таких метрик можно параметризовать положительными числами. Построен представитель каждого класса с использованием явных выражений. Предложено альтернативное описание этих структур, основанное на кэлеровой редукции. Показано также, что полные Риччи-плоские кэлеровы метрики, построенные Стензелем, диффеоморфны указанным метрикам.

Библиография: 26 названий.

Ключевые слова: Риччи-плоские кэлеровы метрики, многообразия Стензеля.

§ 1. Введение

При решении уравнения Эйнштейна существенную роль играют изометрии G соответствующего многообразия, так как они часто позволяют свести это уравнение к системе алгебраических уравнений или к обычному дифференциальному уравнению, которое легко решить. Естественно предположить, что G – компактная подгруппа группы изометрий.

Многообразия Калаби–Яу определяются как компактные кэлеровы многообразия, удовлетворяющие уравнению Эйнштейна с нулевой константой Эйнштейна, т.е. с нулевым тензором Риччи. Но однородные многообразия компактной группы не могут обладать Риччи-плоской метрикой, поскольку их скалярная кривизна положительна. Поэтому следующий класс многообразий с возможными G -инвариантными Риччи-плоскими решениями (метриками) – это класс многообразий кооднородности один, для которых некоторая компактная группа изометрий G не является транзитивной, но размерности орбит общего положения отличаются от размерности самого многообразия на единицу. Поэтому классификация Риччи-плоских многообразий кооднородности один является важной и интересной.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и инноваций Испании (проект MTM2008-01386).

Гиперкэлеровы многообразия являются Риччи-плоскими. Все такие многообразия кооднородности один полностью классифицированы А. Данцером и А. Сваном (см. [1]): существует единственное такое полное неприводимое многообразие с простой группой G – касательное расслоение $T\mathbb{C}P^n$ над проективным пространством $\mathbb{C}P^n = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1))$ с метрикой Калаби (см. [2]).

Всестороннее рассмотрение и некоторые шаги на пути к классификации Риччи-плоских кэлеровых многообразий кооднородности один были предприняты А. Данцером и М. Вангом в работе [3]. К. Хигашима, Т. Кимура и М. Нитта построили Риччи-плоские метрики и их кэлеровы потенциалы на каноническом линейном расслоении над произвольным кэлеровым многообразием Эйнштейна, которое является факторпространством G/K (см. [4]). Но тем не менее, классификация полных Риччи-плоских кэлеровых многообразий кооднородности один все еще далека от завершения. Отметим также, что более общие результаты о существовании полных Риччи-плоских метрик на квазипроективных многообразиях (не обязательно кооднородности один) были получены Г. Тианом и Ш. Яу в [5]–[7].

Замечательный класс Риччи-плоских многообразий кооднородности один был открыт М. Стензелем (см. [8]). На протяжении более десяти последних лет наблюдается значительный интерес к этому семейству Риччи-плоских кэлеровых метрик на многообразии, диффеоморфном касательному расслоению симметрического пространства G/K ранга один. Одна из причин такого интереса в физике заключается в том, что для них имеется “конический переход” (см. [9]) – и семейство метрик Стензеля, и иное семейство Риччи-плоских кэлеровых метрик имеют коническую поверхность как вырожденный предел. М. Цветиц, Г. Гиббонс, Х. Лю и К. Поуп изучали гармонические формы этих метрик и нашли явные выражения для метрик Стензеля в терминах гипергеометрических функций (см. [10]). Ранее Т. Ли (см. [11]) получил явные выражения для метрик Стензеля для классических пространств G/K , но в других терминах, используя подход Г. Патризио и П. Вонга (см. [12]). Д. Баптиста в [13] использовал метрики Стензеля на $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \simeq T(\mathrm{SU}(2))$ для голоморфного квантования классических симметрий этих метрик. Используя тот факт, что метрики Стензеля являются метриками кооднородности один относительно действия группы Ли G на $T(G/K)$, А. Данцер и И. Страхан в [14] дали более элементарную и конкретную трактовку этих метрик в случае, когда однородное пространство G/K есть сфера вращения $\mathbb{S}^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$. Отметим также, что в случае стандартной сферы $\mathbb{S}^2$ метрика Стензеля совпадает с хорошо известной метрикой Егучи–Хансона (см. [8], [15]).

Возникает естественный вопрос о классификации таких Риччи-плоских метрик. В работе получена классификация метрик из некоторого семейства кэлеровых инвариантных метрик на $T(G/K)$ и показано, в частности, что кэлеровы метрики Стензеля не эквивалентны и параметризуют соответствующие классы эквивалентности.

Пусть G – компактная группа Ли и $M = G/K$ – симметрическое пространство ранга один размерности $\dim M \geq 3$ с однородной метрикой $\mathbf{g}_M$. Касательное расслоение TM является симплектическим многообразием с симплектической структурой Ω , которая получается из канонической симплектической

структуры на кокасательном расслоении T^*M при отождествлении этих двух расслоений с помощью метрики $\mathbf{g}_M$. В статье классифицированы все полные Риччи-плоские кэлеровы G -инвариантные метрики $(\mathbf{g}, J, \Omega)$ на касательном расслоении TM с фиксированной кэлеровой формой Ω . Доказано, что множество классов эквивалентности $\{[(\mathbf{g}^{\gamma_a}, J^{\gamma_a}, \Omega)]\}$ этих метрик можно параметризовать положительными числами $a > 0$ (см. предложение 21). Каждый класс является орбитой некоторой бесконечномерной группы симплектоморфизмов – гомоморфного образа аддитивной группы четных функций $C_+^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (см. следствие 18). В работе эта группа симплектоморфизмов построена для всех редуктивных пространств (не только компактных). Предложенная классификация основана также на результатах работы автора [16], в которой описаны все (не только глобальные) G -инвариантные кэлеровы структуры (J, Ω) , и идее Стензеля использовать глобальную голоморфную тривиализацию канонического линейного расслоения $\Lambda^{n,0}(G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}})$ для того, чтобы свести нелинейные уравнения в частных производных, определяющие форму Риччи, к простым обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка относительно функции γ_a . В случае, когда $\dim M = 2$ (т.е. когда $M = \mathbb{S}^2$), построенные метрики являются Риччи-плоскими, но наша классификация, возможно, не является полной.

Канонический G -эквивариантный диффеоморфизм $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}} \rightarrow T(G/K)$ снабжает касательное расслоение $T(G/K)$ канонической комплексной структурой J_c^K . Пара (J_c^K, Ω) является кэлеровой структурой (см. [17]). В статье описаны все G -инвариантные кэлеровы структуры (J, Ω) на TM (см. следствие 13). Показано, что для каждой такой структуры (J, Ω) существует диффеоморфизм ψ^γ такой, что $J = \psi_*^\gamma J_c^K$ и, в частности, в Риччи-плоском случае $J^{\gamma_a} = \psi_*^{\gamma_a} J_c^K$. Более того, каждая структура (J^{γ_a}, Ω) допускает альтернативное описание в терминах кэлеровой редукции (см. [18]): кэлерова структура (J^{γ_a}, Ω) на $T(G/K)$ является редуцированной кэлеровой структурой, канонически ассоциированной с некоторой кэлеровой структурой $(\tilde{J}, \tilde{\Omega})$ на $TG = T^*G$, где $\tilde{\Omega}$ – каноническая симплектическая структура на T^*G .

G -инвариантные кэлеровы структуры, построенные Стензелем, являются структурами типа (J_c^K, Ω'_a) , где $\Omega'_a = -i\partial\bar{\partial}f_a$ для некоторой строго плюри-субгармонической функции $f_a(v) = f_a(\|v\|)$ (в этом случае фиксируется каноническая комплексная структура). Здесь $\|v\| = \sqrt{\mathbf{g}_M(v, v)}$ обозначает норму вектора $v \in TM$. В статье доказано, что $\psi^{\gamma_a*}\Omega = 2\Omega'$ (см. предложение 22), т.е. кэлерова структура (J^{γ_a}, Ω) , $J^{\gamma_a} = \psi_*^{\gamma_a} J_c^K$, и кэлерова структура Стензеля $(J_c^K, 2\Omega'_a)$ диффеоморфны. Более того, гладкая функция $y(r) = r\gamma_a(r)$, где функция $\gamma_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ определяет диффеоморфизм $\psi^{\gamma_a}: v \mapsto v \cdot \gamma_a(\|v\|)$, и производная $f'_a(r)$ являются решениями одного и того же обыкновенного дифференциального уравнения, открытого Стензелем [8].

§ 2. Симплектические диффеоморфизмы и инвариантные кэлеровы структуры на касательных расслоениях однородных пространств

Пусть G – вещественная редуктивная связная группа Ли. Тогда существует точное представление ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$ такое, что ассоциированная с ним билинейная форма Φ невырождена на $\mathfrak{g}$ (если $\mathfrak{g}$ полупроста, то в качестве Φ мы

можем взять форму Киллинга, ассоциированную с присоединенным представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Эта форма на $\mathfrak{g}$ является $\text{Ad } G$ -инвариантной. Предположим, что K – (замкнутая) редуктивная подгруппа в G такая, что форма Φ невырождена на алгебре Ли $\mathfrak{k}$ подгруппы K . Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle = c\Phi$, где $c \in \mathbb{R}$ – ненулевая константа. Эта форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ определяет G -инвариантную псевдориманову метрику $\mathbf{g}_M$ на однородном пространстве $M = G/K$. Метрика $\mathbf{g}_M$ позволяет отождествить кокасательное расслоение T^*M и касательное расслоение TM и, таким образом, мы можем также говорить о канонической 1-форме θ на TM . Форма θ и симплектическая форма $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} d\theta$ являются G -инвариантными относительно естественного действия G на TM (продолжения действия G на M).

Обозначим через $\mathfrak{m}$ ортогональное дополнение к $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{g}$ относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$, т.е. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m} - \text{Ad } K$ -инвариантное разложение $\mathfrak{g}$ в прямую сумму подпространств. Рассмотрим тривиальное векторное расслоение $G \times \mathfrak{m}$ и на нем два коммутирующих действия групп Ли: левое G -действие $l_h: (g, w) \mapsto (hg, w)$ и правое K -действие $r_k: (g, w) \mapsto (gk, \text{Ad } k^{-1}(w))$. Пусть $\pi: G \times \mathfrak{m} \rightarrow G \times_K \mathfrak{m}$ – естественная проекция. Хорошо известно, что пространства $G \times_K \mathfrak{m}$ и TM изоморфны. Используя соответствующий G -эквивариантный диффеоморфизм

$$\varphi: G \times_K \mathfrak{m} \rightarrow TM, \quad [(g, w)] \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_0 g \exp(tw) K$$

и проекцию π , определим G -эквивариантную субмерсию $\Pi: G \times \mathfrak{m} \rightarrow T(G/K)$, $\Pi = \varphi \circ \pi$. Пусть ξ^l – лево-инвариантное векторное поле на группе Ли G , определенное вектором $\xi \in \mathfrak{g}$. В силу [16; лемма 2.3] имеем

$$(\Pi^* \theta)_{(g, w)}(\xi^l(g), u) = \langle w, \xi \rangle, \quad (2.1)$$

$$(\Pi^* \Omega)_{(g, w)}((\xi_1^l(g), u_1), (\xi_2^l(g), u_2)) = \langle \xi_2, u_1 \rangle - \langle \xi_1, u_2 \rangle - \langle w, [\xi_1, \xi_2] \rangle, \quad (2.2)$$

где $(g, w) \in G \times \mathfrak{m}$, $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$, $u, u_1, u_2 \in \mathfrak{m} = T_w \mathfrak{m}$. Ядро $\mathcal{K} \subset T(G \times \mathfrak{m})$ формы $\Pi^* \Omega$ совпадает с ядром отображения Π_* и порождается глобальными (лево) G -инвариантными векторными полями ζ^L , $\zeta \in \mathfrak{k}$ на $G \times \mathfrak{m}$, $\zeta^L(g, w) = (\zeta^l(g), [w, \zeta])$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В специальном случае, когда подгруппа Ли K тривиальна, т.е. $K = \{e\}$, диффеоморфизм φ определяет обычное отождествление касательного расслоения TG с $G \times \mathfrak{g}$ (при помощи левого действия G на TG). В дальнейшем, когда симплектические многообразия TG ($K = \{e\}$) и $T(G/K)$ будут рассматриваться одновременно, соответствующие канонические симплектические структуры будем обозначать через Ω^c и Ω .

Мы принимаем для диффеоморфизма $\psi: X \rightarrow X$, 2-формы ω и векторных полей Y, Z на многообразии X следующие (обычные) соглашения:

$$(\psi_* Y)_{\psi(x)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi_{*x} Y_x, \quad (\psi^* \omega)_x(Y_x, Z_x) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{\psi(x)}(\psi_{*x} Y_x, \psi_{*x} Z_x). \quad (2.3)$$

Тогда, в частности, $\psi^*(\omega(Y, Z)) = (\psi^* \omega)(\psi_*^{-1} Y, \psi_*^{-1} Z)$.

2.1. G -инвариантные симплектоморфизмы пространства $T(G/K)$.

В этом пункте мы построим аддитивную группу симплектоморфизмов касательного расслоения $T(G/K) \simeq T^*(G/K)$, где G – вещественная редуктивная связная группа Ли и $K \subset G$ – ее замкнутая редуктивная подгруппа.

Пусть $O \subset \mathbb{R}$ – открытое связное подмножество в $\mathbb{R}$. Положим $W_{\mathfrak{g}} = \{w \in \mathfrak{g} : \langle w, w \rangle \in O\}$. Открытое подмножество $W_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}$ является $\text{Ad}(G)$ -инвариантным. Рассмотрим отображение

$$\tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau} : G \times W_{\mathfrak{g}} \rightarrow G \times W_{\mathfrak{g}}, \quad (g, w) \mapsto (g \exp(\tau(\langle w, w \rangle)w), w), \quad (2.4)$$

где $\tau \in C^{\infty}(O, \mathbb{R})$. Здесь $C^{\infty}(O, \mathbb{R})$ обозначает множество всех гладких вещественнозначных функций на $O \subset \mathbb{R}$. Так как каждая однопараметрическая подгруппа $\exp(\mathbb{R}w) \subset G$, $w \in \mathfrak{m}$, коммутативна, то для произвольных функций $\tau_1, \tau_2 \in C^{\infty}(O, \mathbb{R})$ имеем

$$\tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau_1} \circ \tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau_2} = \tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau_1 + \tau_2}. \quad (2.5)$$

В частности, отображение $\tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau}$ является диффеоморфизмом $((\tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau})^{-1} = \tilde{\Phi}_{\diamond}^{-\tau})$ и, следовательно, отображение $\tau \mapsto \tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau}$ – гомоморфизм аддитивной группы $C^{\infty}(O, \mathbb{R})$ в группу всех диффеоморфизмов декартова произведения $G \times W_{\mathfrak{g}}$.

Ясно, что подмногообразие $G \times W_{\mathfrak{m}}$, где $W_{\mathfrak{m}} = W_{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{m}$, инвариантно относительно диффеоморфизма $\tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau}$. Чтобы упростить обозначения, ограничение $\tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau}|_{G \times W_{\mathfrak{m}}}$ также будем обозначать через $\tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau}$. Так как форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ является $\text{Ad}(K)$ -инвариантной и $k \cdot \exp w \cdot k^{-1} = \exp(\text{Ad}_k w)$ для всех элементов $k \in K$ и векторов $w \in \mathfrak{m}$, то отображение $\tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau}$ (лево) G -эквивариантно и (право) K -эквивариантно на $G \times W_{\mathfrak{m}}$: $l_h \circ \tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau} = \tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau} \circ l_h$ и $r_k \circ \tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau} = \tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau} \circ r_k$. Таким образом, существует единственное G -эквивариантное корректно определенное взаимно однозначное отображение $\Phi_{\diamond}^{\tau} : D \rightarrow D$, где $D = \Pi(G \times W_{\mathfrak{m}}) \subset T(G/K)$, такое, что

$$\Phi_{\diamond}^{\tau} \circ \Pi = \Pi \circ \tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau}. \quad (2.6)$$

Это отображение гладко, так как отображение Π – субмерсия. В силу соотношения (2.5) и в силу единственности отображение $\tau \mapsto \Phi_{\diamond}^{\tau}$ – гомоморфизм аддитивной группы $C^{\infty}(O, \mathbb{R})$ в группу всех диффеоморфизмов открытого подмножества D многообразия $T(G/K)$, т.е. $\Phi_{\diamond}^{\tau_1} \circ \Phi_{\diamond}^{\tau_2} = \Phi_{\diamond}^{\tau_1 + \tau_2}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть G – вещественная связная группа Ли с замкнутой редуктивной подгруппой $K \subset G$. Для произвольной функции $\tau \in C^{\infty}(O, \mathbb{R})$ диффеоморфизм $\Phi_{\diamond}^{\tau} : D \rightarrow D$ (лево) G -эквивариантен и сохраняет симплектическую структуру Ω на открытом подмножестве $D \subset T(G/K)$: $\Phi_{\diamond}^{\tau*}\Omega = \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как в силу (2.6) имеет место равенство $\Pi^*(\Phi_{\diamond}^{\tau*}\Omega) = \tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau*}(\Pi^*\Omega)$ и отображение $\Pi : G \times \mathfrak{m} \rightarrow T(G/K)$ – субмерсия, то симплектическая структура Ω является $\Phi_{\diamond}^{\tau}$ -инвариантной тогда и только тогда, когда форма $\Pi^*\Omega$ является $\tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau}$ -инвариантной.

Чтобы показать, что $\tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau*}(\Pi^*\Omega) = \Pi^*\Omega$, необходимо вычислить касательное отображение $\tilde{\Phi}_{\diamond*}^{\tau} : T(G \times W_{\mathfrak{m}}) \rightarrow T(G \times W_{\mathfrak{m}})$. Положим $x = x(w) = \langle w, w \rangle$ для $w \in W_{\mathfrak{m}}$. Дифференцируя

$$\tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau}(g \exp t\xi, w) = (g \exp(\tau(x)w) \exp(t \text{Ad}_{\exp \tau(x)w}^{-1} \xi), w)$$

и $\tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau}(g, w + tu)$ в точке $t = 0$, получим, что для всех $\xi \in \mathfrak{g}$ и $u \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{\diamond*}^{\tau}(\xi^l, 0)_{(g, w)} &= ((e^{-\text{ad}_{\tau(x)w}} \xi)^l, 0)_{(g \exp(\tau(x)w), w)}, \\ \tilde{\Phi}_{\diamond*}^{\tau}(0, u)_{(g, w)} &= \left(\left(\frac{1 - e^{-\text{ad}_{\tau(x)w}}}{\text{ad}_{\tau(x)w}} (\tau(x)u + 2\tau'(x)\langle w, u \rangle w) \right)^l, u \right)_{(g \exp \tau(x)w, w)}.\end{aligned}$$

Полагая $\tilde{z} = \text{ad}_{\tau(x)w}$ и принимая во внимание то, что $\tilde{z}(w) = 0$, мы можем записать следующее выражение для $\tilde{\Phi}_{\diamond*}^{\tau}$:

$$\tilde{\Phi}_{\diamond*}^{\tau}(\xi^l, u)_{(g, w)} = \left(\left(e^{-\tilde{z}} \xi + \tau(x) \frac{1 - e^{-\tilde{z}}}{\tilde{z}} u + 2\tau'(x)\langle w, u \rangle w \right)^l, u \right)_{(g \exp \tau(x)w, w)}. \quad (2.7)$$

Теперь, используя выражение (2.2) для G -инвариантной формы $\Pi^* \Omega$, мы получим выражение для $\Pi^* \Omega(\tilde{\Phi}_{\diamond*}^{\tau}(\xi_1^l, u_1), \tilde{\Phi}_{\diamond*}^{\tau}(\xi_2^l, u_2))$ в виде суммы десяти слагаемых. Каждое слагаемое является скалярным произведением некоторых выражений (векторов), содержащих операторы $e^{-\tilde{z}}$ и $\tilde{z}$. Поскольку первый из них является автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а второй кососимметричен относительно $\text{Ad } G$ -инвариантной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$, мы можем упростить это выражение для $\tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau*}(\Pi^* \Omega)$ и вывести таким образом тождество $\tilde{\Phi}_{\diamond}^{\tau*}(\Pi^* \Omega) = \Pi^* \Omega$. Например, используя упомянутые факты, мы получим, что

$$\tau(x) \left\langle w, \left[e^{-\tilde{z}} \xi_1, \frac{1 - e^{-\tilde{z}}}{\tilde{z}} u_2 \right] \right\rangle = -\langle (1 - e^{-\tilde{z}}) u_2, e^{-\tilde{z}} \xi_1 \rangle = -\langle u_2, e^{-\tilde{z}} \xi_1 \rangle + \langle u_2, \xi_1 \rangle.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Для $\tau \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ отображение $\Phi_{\diamond}^{\tau}$ является тождественным отображением на $T(G/K)$ тогда и только тогда, когда $\tau(\langle w, w \rangle) = 0$ для всех $w \in \mathfrak{m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\exp w \notin K$ для всех ненулевых векторов $w \in \mathfrak{m}$, достаточно близких к нулю, то для любого ненулевого $w_0 \in \mathfrak{m}$ существует единственное $0 < t_0 \leq +\infty$ такое, что $\exp t w_0 \in K$ тогда и только тогда, когда $t \in t_0 \mathbb{Z}$. Если $\Phi_{\diamond}^{\tau} = \text{Id}$, то $\tau(t^2 \langle w_0, w_0 \rangle) t w_0 \in K$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и, следовательно, $\tau(t^2 \langle w_0, w_0 \rangle) = n_0 t_0 / t$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{Z}$. Тогда $n_0 = 0$, поскольку τ – гладкая функция.

Как вытекает из следствия 3, ядро гомоморфизма $\Phi_{\diamond}: \tau \mapsto \Phi_{\diamond}^{\tau}$ нетривиально, если билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ положительно определена. В этом случае мы определим новый мономорфизм Φ , слегка модифицировав определение гомоморфизма $\Phi_{\diamond}$.

Предположим, что G – компактная связная группа Ли и билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ положительно определена на $\mathfrak{g}$. Положим $|w| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$ для $w \in \mathfrak{g}$. Обозначим через $C_+^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ множество всех гладких четных вещественнозначных функций на $\mathbb{R}$. Для каждой функции $\chi \in C_+^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ отображение

$$\tilde{\Phi}^{\chi}: G \times \mathfrak{g} \rightarrow G \times \mathfrak{g}, \quad (g, w) \mapsto (g \exp(\chi(|w|)w), w),$$

является гладким диффеоморфизмом.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть G – компактная связная группа Ли. Для произвольной функции $\chi \in C_+^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ отображение $\tilde{\Phi}^\chi$ – двусторонне G -эquivариантный диффеоморфизм на TG . Существует единственный (лево) G -эquivариантный диффеоморфизм $\Phi^\chi: T(G/K) \rightarrow T(G/K)$ такой, что

$$\Phi^\chi \circ \Pi = \Pi \circ \tilde{\Phi}^\chi.$$

Отображение $\chi \mapsto \Phi^\chi$ – гомоморфизм аддитивной группы $C_+^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ в группу всех диффеоморфизмов многообразия $T(G/K)$, т.е. $\Phi^{\chi_1} \circ \Phi^{\chi_2} = \Phi^{\chi_1 + \chi_2}$. Отображения $\tilde{\Phi}^\chi$ и Φ^χ являются симплектоморфизмами симплектических многообразий (TG, Ω^e) и $(T(G/K), \Omega)$ соответственно.

Чтобы доказать следствие, достаточно заметить, что для произвольной функции $\chi \in C_+^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ существует функция $\tau \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ такая, что $\chi(r) = \tau(r^2)$ для всех $r > 0$ и, следовательно, $\Phi^\chi = \Phi_\diamond^\tau$ на открытом подмножестве $T(G/K) \setminus G/K$, всюду плотном в $T(G/K)$.

2.2. Кэлеровы структуры и G -эquivариантные диффеоморфизмы на $T(G/K)$. В этом пункте мы будем использовать наши предыдущие обозначения, но здесь через G обозначим компактную связную группу Ли с замкнутой подгруппой $K \subset G$.

Предположим, что X – (гладкое) симплектическое многообразие, ω – симплектическая структура на X . Пусть J – почти комплексная структура на X , и пусть $F(J) \subset T^\mathbb{C}X$ – комплексное распределение ее $(0, 1)$ -векторов, т.е. $\Gamma F(J) = \{Y + iJY, Y \in \Gamma(TX)\}$. Пара (J, ω) является кэлеровой структурой на X тогда и только тогда, когда распределение $F(J)$ является положительно определенной поляризацией, т.е. комплексное распределение $F(J)$ размерности $\frac{1}{2} \dim X$ инволютивно, $\omega(F(J), F(J)) = 0$ (лагранжево) и $-\omega_x(Z, \bar{Z}) > 0$ для всех $x \in X$, $Z \in F_x(J) \setminus \{0\}$ (см. [18; лемма 4.3]). В этом случае 2-форма ω инвариантна относительно автоморфизма J вещественного касательного расслоения TX , а билинейная форма $\mathbf{g} = \mathbf{g}(J, \omega)$, где $\mathbf{g}(Y, Z) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(JY, Z)$, симметрична и положительно определена. Ясно, что каждая положительно определенная поляризация F на X определяет почти комплексный тензор J такой, что $F = F(J)$.

Существует естественный путь для реализации касательного многообразия $T(G/K)$ (к компактному однородному пространству G/K) в виде комплексного многообразия Штейна, который мы кратко опишем. Пусть $G^\mathbb{C}$ и $K^\mathbb{C}$ – комплексификации (алгебраических) групп Ли G и K соответственно. В частности, K – максимальная компактная подгруппа (алгебраической) группы Ли $K^\mathbb{C}$ и пересечение K с каждой компонентой связности группы $K^\mathbb{C}$ непусто (см. [19; гл. 5]). Группа Ли $G^\mathbb{C}$ связна. Группу Ли $G^\mathbb{C}$, рассматриваемую как вещественную группу Ли, обозначим через $G^\mathbb{R}$. Распределение $F(J_c)$ для канонической комплексной структуры J_c на $G^\mathbb{R}$ определяется (лево) $G^\mathbb{R}$ -инвариантными $(0, 1)$ -векторными полями $\xi^l + i(I\xi)^l$, где $\xi \in \mathfrak{g}$ и I – комплексная структура на $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$. Зафиксируем некоторую положительно определенную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle = c\Phi$ на $\mathfrak{g}$.

Так как G и K – максимальные компактные подгруппы Ли в $G^\mathbb{C}$ и $K^\mathbb{C}$ соответственно, то отображения $K \times \mathfrak{k} \rightarrow K^\mathbb{C}$, $(k, \zeta) \mapsto k \cdot \exp(i\zeta)$ и $G \times \mathfrak{m} \times \mathfrak{k} \rightarrow G^\mathbb{C}$, $(g, w, \zeta) \mapsto g \exp(iw) \exp(i\zeta)$ являются диффеоморфизмами. Тогда отображение

$$G^\mathbb{C}/K^\mathbb{C} \rightarrow G \times_K \mathfrak{m}, \quad g \exp(iw) K^\mathbb{C} \mapsto [(g, w)] \quad (2.8)$$

также является G -эквивариантным диффеоморфизмом (см. [20; лемма 4.1]), который снабжает многообразие $T(G/K)$ комплексной структурой J_c^K . Комплексное многообразие $(T(G/K), J_c^K)$ является многообразием Штейна, поскольку $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ – аффинное комплексное алгебраическое многообразие (теорема Мацусимы). Пара (J_c^K, Ω) является кэлеровой структурой (см. [17] или [21; предложение 21]). Здесь Ω – каноническая симплектическая структура на $T(G/K)$, определенная уравнением (2.2). Для двусторонне инвариантной комплексной структуры J_c на $TG \simeq G \times \mathfrak{g}$ соответствующее распределение $F(J_c)$ порождается (лево) G -инвариантными векторными полями ξ_c^L , $\xi \in \mathfrak{g}$ (см. [21; лемма 20]),

$$\xi_c^L(g, w) = \left(\xi^L(g), \frac{1}{2} \operatorname{ad}_w \xi + \frac{i}{2} \cdot \frac{\operatorname{ad}_w \sin \operatorname{ad}_w}{1 - \cos \operatorname{ad}_w} \xi \right). \quad (2.9)$$

Сейчас мы построим новое семейство $\{\tilde{\Psi}^\gamma\}$ несимплектических диффеоморфизмов на $TG = G \times \mathfrak{g}$ таких, что пара $(\tilde{\Psi}_*^\gamma J_c, \Omega)$ опять является кэлеровой структурой.

Пусть $C_\#^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ – множество всех гладких положительных четных функций $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ таких, что $\frac{d}{dr}(r\gamma(r)) > 0$ для всех $r \in \mathbb{R}$. Тогда для произвольной функции $\gamma \in C_\#^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ отображение $\tilde{\Psi}^\gamma$

$$\tilde{\Psi}^\gamma: G \times \mathfrak{g} \rightarrow G \times \mathfrak{g}, \quad \tilde{\Psi}^\gamma(g, w) = (g, \gamma(|w|)w), \quad (2.10)$$

где $|w| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$, является диффеоморфизмом. Обратный диффеоморфизм $(\tilde{\Psi}^\gamma)^{-1}$ – это отображение $\tilde{\Psi}^\delta$ (того же типа), где $\delta \in C_\#^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ – единственная функция такая, что $\gamma(r\delta(r)) \cdot \delta(r) \equiv 1$. Образ $\tilde{\Psi}_*^\gamma \xi_c^L$ (см. определение (2.3)) векторного поля ξ_c^L , $(\xi_c^L)_{(g,w)} = (\xi^L(g), B_w(\xi))$ (см. (2.9)), есть векторное поле

$$(\tilde{\Psi}_*^\gamma \xi_c^L)_{(g,w)} = (\xi^L(g), \gamma(r\delta(r)) \cdot B_{\delta(r)w}(\xi) + (\gamma'(r\delta(r))\delta(r)r^{-1})\langle w, B_{\delta(r)w}(\xi) \rangle \cdot w).$$

Принимая во внимание то, что каждый оператор $B_w: \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ имеет $\frac{1}{2} \operatorname{ad}_w$ в качестве своей вещественной части, а симметрический оператор

$$A_w = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{ad}_w \sin \operatorname{ad}_w}{1 - \cos \operatorname{ad}_w}$$

– в качестве мнимой, и то, что $A_w w = w$, мы приходим к заключению, что $(\tilde{\Psi}_*^\gamma \xi_c^L)_{(g,w)} = (\xi^L(g), B_w^\gamma(\xi))$, где

$$B_w^\gamma = \frac{1}{\delta(r)} B_{\delta(r)w} + i \left(\frac{1}{(r\delta(r))'} - \frac{1}{\delta(r)} \right) r^{-2} \cdot w \otimes w, \quad r = |w|. \quad (2.11)$$

В частности, $B_w^\gamma w = i((r\delta(r))')^{-1} \cdot w$. Но $B_w^\gamma = \frac{1}{2} \operatorname{ad}_w + iA_w^\gamma$, где A_w^γ – мнимая часть B_w^γ . Пусть F^γ – (инволютивное) подраспределение в $T^{\mathbb{C}}(G \times \mathfrak{g})$, порожденное векторными полями $\tilde{\Psi}_*^\gamma \xi_c^L$, $\xi \in \mathfrak{g}$. Нетрудно проверить, используя выражение (2.2) для канонической симплектической формы Ω и инвариантность формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$, что распределение F^γ является положительно определенной поляризацией тогда и только тогда, когда операторы A_w^γ симметричны и положительно определены для всех $w \in \mathfrak{g}$. Например, распределение F^γ лагранжево

тогда и только тогда, когда все операторы A_w^γ симметричны:

$$\begin{aligned} \Omega(\tilde{\Psi}_*^\gamma \xi_c^L, \tilde{\Psi}_*^\gamma \eta_c^L)_{(g,w)} &= \left\langle \eta, \frac{1}{2}[w, \xi] + iA_w^\gamma \xi \right\rangle - \left\langle \xi, \frac{1}{2}[w, \eta] + iA_w^\gamma \eta \right\rangle - \langle w, [\xi, \eta] \rangle \\ &= i\langle \eta, A_w^\gamma \xi \rangle - i\langle \xi, A_w^\gamma \eta \rangle = 0. \end{aligned}$$

Каждый оператор A_w^γ симметричен и положительно определен, поскольку оператор $-\text{ad}_w^2$ на компактной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ симметричен и неотрицателен, а функции $(r\delta(r))'$, $\delta(r)$ и $(-x \sinh x)/(1 - \cosh x)$ положительны.

Обозначим через $\tilde{\Psi}_*^\gamma J_c$ комплексный тензор, соответствующий распределению $F^\gamma = \tilde{\Psi}_*^\gamma F(J_c)$. Автоморфизм $(\tilde{\Psi}_*^\gamma J_c)_{(g,w)}$ однозначно определяется уравнением

$$(\tilde{\Psi}_*^\gamma J_c)_{(\tilde{\Psi}_*^\gamma(g,w))} \circ \tilde{\Psi}_*^\gamma(g, w) = \tilde{\Psi}_*^\gamma(g, w) \circ (J_c)_{(g,w)}. \quad (2.12)$$

Так как диффеоморфизм $\tilde{\Psi}^\gamma$ коммутирует с левым и правым G -действиями на $G \times \mathfrak{g}$, мы получаем следующую лемму.

ЛЕММА 5. Для произвольной функции $\gamma \in C_\#^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ отображение $\tilde{\Psi}^\gamma$ из (2.10) – двусторонне G -эквивариантный диффеоморфизм. Пара $(\tilde{\Psi}_*^\gamma J_c, \Omega^c)$ является двусторонне G -инвариантной кэлеровой структурой на $TG = G \times \mathfrak{g}$. Соответствующее распределение $F^\gamma = F(\tilde{\Psi}_*^\gamma J_c)$ $(0, 1)$ -векторов порождается глобальными (лево) G -инвариантными векторными полями $(\tilde{\Psi}_*^\gamma \xi_c^L)_{(g,w)} = (\xi^l(g), B_w^\gamma(\xi))$ с оператор-функцией $B^\gamma: w \mapsto B_w^\gamma$ (см. (2.11)).

Однако, диффеоморфизм $\tilde{\Psi}^\gamma$ (право) K -эквивариантен и сохраняет подмногообразие $G \times \mathfrak{m}$ в $G \times \mathfrak{g} = TG$. Поэтому, используя рассуждения из п. 2.1, мы получим следующую лемму.

ЛЕММА 6. Для произвольной функции $\gamma \in C_\#^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ существует единственный (лево) G -эквивариантный гладкий диффеоморфизм $\Psi^\gamma: T(G/K) \rightarrow T(G/K)$ такой, что

$$\Psi^\gamma \circ \Pi = \Pi \circ \tilde{\Psi}^\gamma. \quad (2.13)$$

2.3. Кэлерова редукция и G -эквивариантные диффеоморфизмы на $T(G/K)$. Прежде всего мы представим некоторые результаты Гийемина и Стернберга по кэлеровой редукции [18]. Предположим, что $X = T^*N$ – кокасательное расслоение к многообразию N . Обозначим через K вещественную компактную группу Ли, которая действует на N . Действие K на N естественно продолжается до действия K на $X = T^*N$. Это действие на T^*N симплектическое, поскольку оно сохраняет каноническую 1-форму θ и, следовательно, симплектическую 2-форму $\Omega = d\theta$. Для каждого вектора ζ , принадлежащего алгебре Ли $\mathfrak{k}$ группы K , однопараметрическая подгруппа $\exp t\zeta$ индуцирует гамильтоново векторное поле $\hat{\zeta}$ на T^*N с функцией Гамильтона $f_\zeta = \theta(\hat{\zeta})$: $df_\zeta = -\hat{\zeta}^\flat d\theta$. Следовательно, действие K на $X = T^*N$ является гамильтоновым. Поэтому оно определяет отображение момента $\mu: X \rightarrow \mathfrak{k}^*$ с помощью выражения $\mu(x)(\zeta) = f_\zeta(x)$. Отображение μ является K -эквивариантным, т.е. оно сплетает действие K на X и коприсоединенное действие K на $\mathfrak{k}^*$.

Предположим, что действие K на N свободно. Тогда отображение момента имеет постоянный ранг $\dim K$ и, в частности, $X_0 = \mu^{-1}(0)$ – подмногообразие.

Далее, в силу эквивариантности подмногообразие X_0 стабильно относительно действия K . Тогда пространство орбит $X' = X_0/K$ – корректно определенное гладкое многообразие, а проекция $\pi: X_0 \rightarrow X'$ является субмерсией. На X' существует единственная симплектическая форма Ω' такая, что $\pi^*\Omega' = \Omega|_{X_0}$.

Пусть F – положительно определенная K -инвариантная поляризация на X . Тогда $F = F(J)$, где (J, Ω) – кэлерова структура на X . Пусть $F_0(x) = (T_x^{\mathbb{C}}X_0) \cap F(x)$, $x \in X_0$. Тогда F_0 – комплексное K -инвариантное подраспределение в $T^{\mathbb{C}}X_0$ и $\pi_*(F_0)$ – корректно определенное гладкое комплексное подраспределение в $T^{\mathbb{C}}X'$ (см. [18]). Сейчас мы представим результат Гийемина и Стернберга, который будет эффективно использован в оставшейся части работы (см. [18; теорема 3.5]).

ТЕОРЕМА 7 (см. [18]). *На редуцированном пространстве X' существует редуцированная кэлерова структура (J', Ω') , канонически ассоциированная с кэлеровой структурой (J, Ω) , такая, что $F(J') = \pi_*(F_0)$. Распределение F_0 – комплексное K -инвариантное подраспределение в $T^{\mathbb{C}}X_0$ размерности*

$$\frac{1}{2} \dim X' = \dim_{\mathbb{C}} F(J').$$

Как и в предыдущем пункте, пусть K – замкнутая подгруппа компактной связной группы Ли G . Так как каноническая 1-форма θ на $TG = G \times \mathfrak{g}$ имеет вид (2.1), то $\mu: G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{k}^*$, $\mu(g, w)(\zeta) = \langle w, -\zeta \rangle$, где $\zeta \in \mathfrak{k}$, – отображение момента для правого K -действия на $G \times \mathfrak{g}$. Очевидно, что $\mu^{-1}(0) = G \times \mathfrak{m}$ и, следовательно, в силу (2.2) многообразие $(T(G/K), \Omega)$ – редуцированное симплектическое многообразие $(T(G/K) = \Pi(G \times \mathfrak{m}))$. Но пара (J_c, Ω^c) – кэлерова структура на TG , следовательно, в силу теоремы 7 существует (канонически ассоциированная с (J_c, Ω^c)) редуцированная кэлерова структура на $(T(G/K), \Omega)$. Как доказано Агуляром в [22] (см. также [21; предложение 21]), эта редуцированная кэлерова структура на $T(G/K)$ совпадает с кэлеровой структурой (J_c^K, Ω) (полученной с использованием диффеоморфизма $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}} \rightarrow T(G/K)$ из (2.8)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Для любых функций $\chi \in C_+^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $\gamma \in C_{\#}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ пары $((\tilde{\Phi}^{\chi} \tilde{\Psi}^{\gamma})_* J_c, \Omega^c)$ и $((\Phi^{\chi} \Psi^{\gamma})_* J_c^K, \Omega)$ являются кэлеровыми структурами на касательных расслоениях TG и $T(G/K)$ соответственно. Кроме того, пара $((\Phi^{\chi} \Psi^{\gamma})_* J_c^K, \Omega)$ является редуцированной кэлеровой структурой на $T(G/K)$, канонически ассоциированной с кэлеровой структурой $((\Phi^{\chi} \tilde{\Psi}^{\gamma})_* J_c, \Omega^c)$ на TG .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 5 пара $(\tilde{\Psi}_*^{\gamma} J_c, \Omega^c)$ – кэлерова структура на TG . Как мы отмечали выше, тройка $(T(G/K), J_c^K, \Omega)$ – редуцированное кэлерово многообразие, канонически ассоциированное с (TG, J_c, Ω^c) (относительно правого K -действия на TG). В частности, по определению $F(J_c^K) = \Pi_*(F(J_c) \cap T^{\mathbb{C}}(G \times \mathfrak{m}))$. Так как диффеоморфизм $\tilde{\Psi}^{\gamma}$ сохраняет подмногообразие $\mu^{-1}(0) = G \times \mathfrak{m}$ и выполнено тождество (2.13), то

$$\Pi_*[\tilde{\Psi}_*^{\gamma} F(J_c) \cap T^{\mathbb{C}}(G \times \mathfrak{m})] = (\Pi_* \circ \tilde{\Psi}_*^{\gamma})[(F(J_c) \cap T^{\mathbb{C}}(G \times \mathfrak{m}))] = \Psi_*^{\gamma} F(J_c^K),$$

т.е. $(T(G/K), \Psi_*^{\gamma} J_c^K, \Omega)$ – редуцированное кэлерово многообразие, канонически ассоциированное с $(TG, \tilde{\Psi}_*^{\gamma} J_c, \Omega^c)$. Теперь, чтобы завершить доказательство

предложения, достаточно заметить, что в силу следствия 4 диффеоморфизмы $\tilde{\Phi}^\chi$ и Φ^χ являются симплектоморфизмами, проекция Π сплетает эти отображения, а $\tilde{\Phi}^\chi$ сохраняет подмножество $G \times \mathfrak{m} \subset G \times \mathfrak{g}$.

2.4. Тривиализация $\Lambda^{(n,0)}(G^\mathbb{C}/K^\mathbb{C})$. Мы будем использовать обозначения предыдущих пунктов, но здесь через G/K обозначим симметрическое пространство (произвольного ранга) с полупростой компактной связной группой Ли G и связной замкнутой подгруппой K . В частности,

$$[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}. \quad (2.14)$$

Следующее утверждение Стензеля существенно в конструкции полных Риччи-плоских метрик, рассматриваемых в §3.

ЛЕММА 9 (см. [8]). *Пусть G – полупростая компактная связная группа Ли со связной замкнутой подгруппой $K \subset G$. На комплексном однородном пространстве $G^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}$ существует $G^\mathbb{C}$ -инвариантная ненулевая голоморфная форма Θ_h максимального ранга, т.е. каноническое распределение $\Lambda^{(n,0)}(G^\mathbb{C}/K^\mathbb{C})$, $n = \dim G^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}$, голоморфно тривиально.*

G -эквивариантный диффеоморфизм (2.8) снабжает многообразие $T(G/K)$ комплексной структурой J_c^K и G -инвариантной везде ненулевой J_c^K -голоморфной формой, которую мы тоже обозначим через Θ_h . Тогда существует константа $\varepsilon_n \in \mathbb{C}$ такая, что $\varepsilon_n \Theta_h \wedge \bar{\Theta}_h$ является формой объема, согласованной с ориентацией, определенной симплектической структурой Ω на $T(G/K)$. Поэтому существует положительная вещественно-аналитическая функция S^c такая, что

$$\Omega^n = S^c \cdot \varepsilon_n \Theta_h \wedge \bar{\Theta}_h. \quad (2.15)$$

Функция S^c является G -инвариантной, поскольку таковыми являются формы Ω и Θ_h .

Мы найдем явное выражение для функции S^c в случае, когда G/K – (компактное) симметрическое пространство. Для этого мы будем использовать некоторые локальные J_c^K -голоморфные векторные поля ξ_h , $\xi \in \mathfrak{m}$, на $T(G/K)$. Эти векторные поля являются образами $G^\mathbb{C}$ -инвариантных векторных полей $\xi^l + i(I\xi)^l \in \Gamma(TG^\mathbb{C})$ при касательном отображении к проекции

$$G^\mathbb{C} \rightarrow G^\mathbb{C}/K^\mathbb{C} \rightarrow T(G/K)$$

(см. (2.8)), ограниченном на некоторое локальное сечение $\exp O \exp(i\mathfrak{m}) \subset G^\mathbb{C}$, где $O \subset \mathfrak{m}$ – достаточно малая окрестность нуля. Используя формулу (3.8) из [16], мы получим, что $\xi_h(\Pi(g, w)) = \Pi_*(\xi_h^L(g, w))$, где $g \in \exp O$, $w \in \mathfrak{m}$ и (лево) G -инвариантные векторные поля ξ_h^L определяются выражением

$$\xi_h^L(g, w) = \left(\left(\frac{1}{\cos z} \xi \right)^l(g), i \frac{z}{\sin z} \xi \right) + i \left(\left(\frac{\cos z - 1}{\sin z} \xi \right)^l(g), \frac{z(\cos z - 1)}{\sin z} \xi \right),$$

где $z = \text{ad}_w$. Как вытекает из коммутационных соотношений (2.14), второе слагаемое этого выражения принадлежит ядру формы $\Pi^*\Omega$. Поэтому в силу (2.2) для $\xi, \eta \in \mathfrak{m}$ мы имеем

$$\Omega_{(\Pi(g, w))}(\xi_h, \bar{\eta}_h) = (\Pi^*\Omega)_{(g, w)}(\xi_h^L, \bar{\eta}_h^L) = 2i \left\langle \xi, \frac{\text{ad}_w}{\cos \text{ad}_w \sin \text{ad}_w} \eta \right\rangle = 2i \langle \xi, E_w^c \eta \rangle,$$

где

$$E_w^c: \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}, \quad E_w^c = \frac{\text{ad}_w}{\cos \text{ad}_w \sin \text{ad}_w} \Big|_{\mathfrak{m}}, \quad w \in \mathfrak{m}. \quad (2.16)$$

Зафиксируем некоторый ортонормальный базис $\xi^1, \dots, \xi^n$ в $\mathfrak{m}$. Тогда $\Theta_h \wedge \bar{\Theta}_h(\xi_h^1, \dots, \xi_h^n, \bar{\xi}_h^1, \dots, \bar{\xi}_h^n) = |C|^2$, где $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ потому, что лифт формы Θ_h при проекции $G^{\mathbb{C}} \rightarrow T(G/K)$ является $G^{\mathbb{C}}$ -инвариантным и эти векторные поля ξ_h^L – локальные проекции ограничений $G^{\mathbb{C}}$ -инвариантных векторных полей. С другой стороны, полагая $(\xi_h^1, \dots, \xi_h^n, \bar{\xi}_h^1, \dots, \bar{\xi}_h^n) = (e^1, \dots, e^{2n})$ и используя тот факт, что вещественная форма Ω кососимметрична и кэлерова ($\Omega(\xi_h^j, \xi_h^m) = 0$), мы получим, что в точке $\Pi(g, w)$

$$\begin{aligned} \Omega^n(\xi_h^1, \dots, \xi_h^n, \bar{\xi}_h^1, \dots, \bar{\xi}_h^n) &\stackrel{\text{def}}{=} 2^{-n} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \varepsilon(\sigma) \Omega(e^{\sigma(1)}, e^{\sigma(2)}) \dots \Omega(e^{\sigma(2n-1)}, e^{\sigma(2n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \Omega(\xi_h^1, \bar{\xi}_h^{\sigma(1)}) \dots \Omega(\xi_h^n, \bar{\xi}_h^{\sigma(n)}) \\ &\stackrel{*}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \langle \xi^1, E_w^c \xi^{\sigma(1)} \rangle \dots \langle \xi^n, E_w^c \xi^{\sigma(n)} \rangle \stackrel{*}{=} \det E_w^c. \end{aligned}$$

Здесь символ $*$ означает “равен с точностью до ненулевого комплексного множителя”. Функция $(g, w) \mapsto \det E_w^c$ (право) K -инвариантна, поскольку группа K связна и, следовательно, $\text{Ad}(K) \subset \text{SO}(n)$. Таким образом, существует единственная функция D^c на $T(G/K)$ такая, что $(\Pi^* D^c)_{(g,w)} = \det E_w^c$. Так как функция S^c является G -инвариантной и каждая G -орбита в $T(G/K)$ пересекает множество $\Pi(\exp O \times \mathfrak{m})$, то $S^c \stackrel{*}{=} D^c$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 10. Пусть G/K – симметрическое пространство с полупростой компактной связной группой Ли G и связной замкнутой подгруппой $K \subset G$. Тогда $(\Pi^* S^c)_{(g,w)} = \det E_w^c$ (с точностью до постоянного положительного множителя).

§ 3. Инвариантные кэлеровы метрики на касательных расслоениях симметрических пространств ранга один

Мы следуем обозначениям предыдущего параграфа, но на протяжении этого параграфа предполагается, что $M = G/K$ – симметрическое пространство ранга один с полупростой компактной связной группой Ли G и связной замкнутой подгруппой K , т.е. $M \in \{\mathbb{S}^n, \mathbb{CP}^n, \mathbb{HP}^n, \mathbb{CaP}^2\}$.

3.1. Кэлеровы структуры на касательных расслоениях симметрических пространств ранга один и кэлерова редукция. В этом пункте мы опишем все полные G -инвариантные кэлеровы метрики на $T(G/K)$, $\dim G/K \geq 3$, с кэлеровой формой Ω . Для этого мы кратко изложим некоторые результаты нашей работы [16], где описаны все (не только глобальные) G -инвариантные кэлеровы структуры на $T(G/K)$ с канонической 2-формой Ω в качестве кэлеровой формы. Отметим, что важные в геометрическом квантовании инвариантные относительно нормализованного геодезического потока кэлеровы структуры (J, Ω) не могут быть продолжены на все $T(G/K)$ (см. [21]).

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle = c\Phi$ – положительно определенное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$ и $r(w) = |w| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$. Так как G/K – симметрическое пространство ранга один компактного типа, то $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$ и $\mathfrak{m} = \text{Ad}(K)(\mathbb{R}w)$ для произвольного ненулевого вектора $w \in \mathfrak{m}$.

Пусть $\text{Eqv}(\mathfrak{m})$ обозначает семейство всех гладких K -эквивариантных отображений $A: \mathfrak{m} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$, $w \mapsto A_w$, т.е. таких отображений, что

$$\text{Ad}_k \circ A_w \circ \text{Ad}_{k^{-1}} = A_{\text{Ad}_k w} \text{ на } \mathfrak{m} \text{ для всех } w \in \mathfrak{m}, k \in K. \quad (3.1)$$

Обозначим через $\text{Alm}^+(\mathfrak{m})$ множество всех $P \in \text{Eqv}(\mathfrak{m})$ таких, что оператор $P_w: \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ симметричен, а его вещественная часть $\text{Re } P_w: \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$ положительно определена для всех $w \in \mathfrak{m}$ (относительно билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Такое K -эквивариантное отображение $P \in \text{Alm}^+(\mathfrak{m})$ определяет комплексное (лево) G -инвариантное подраспределение $\mathcal{F}(P) \subset T^{\mathbb{C}}(G \times \mathfrak{m})$, порожденное (лево) G -инвариантными векторными полями ξ^L , $\xi \in \mathfrak{m}$ и ζ^L , $\zeta \in \mathfrak{k}$ на $G \times \mathfrak{m}$, где

$$\xi^L(g, w) = (\xi^l(g), iP_w(\xi)), \quad \zeta^L(g, w) = (\zeta^l(g), [w, \zeta]). \quad (3.2)$$

Подраспределение $\mathcal{F}(P)$ (право) K -инвариантно в силу условия (3.1) и потому, что векторные поля ζ^L , $\zeta \in \mathfrak{k}$, порождают (право) K -инвариантное подраспределение $\mathcal{K}$ (ядро отображения Π_*). Поэтому $F(P) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_*(\mathcal{F}(P))$ является корректно определенным подраспределением в $T^{\mathbb{C}}(G \times \mathfrak{m})$ ($\mathcal{K}^{\mathbb{C}} \subset \mathcal{F}(P)$). Это подраспределение $F(P)$ определяет G -инвариантную почти кэлерову структуру $(J(P), \Omega)$ на $T(G/K)$, т.е. $F(P)$ – подраспределение $(0, 1)$ -векторов для $J(P)$ (см. [16; предложение 2.5]). Более того, для каждой G -инвариантной кэлеровой структуры (J, Ω) на $T(G/K)$ существует единственное отображение $P \in \text{Alm}^+(\mathfrak{m})$ такое, что $J = J(P)$. Например, в силу леммы 3.8 из [16] каноничной кэлеровой структуре (J_c^K, Ω) на $T(G/K)$ соответствует оператор-функция P^c :

$$P_w^c: \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}, \quad P_w^c = \frac{\text{ad}_w \cos \text{ad}_w}{\sin \text{ad}_w} \Big|_{\mathfrak{m}}, \quad w \in \mathfrak{m}. \quad (3.3)$$

Хорошо известно (см., например, [23; гл. X, § 2] и [16; § 4]), что:

1) $(\mathbb{C}\mathbf{P}^n)$ если $G/K = \text{SU}(n+1)/\text{S}(\text{U}(1) \times \text{U}(n))$, $n \geq 2$, то существует ортогональный эндоморфизм $E_1 \in \text{End}(\mathfrak{m})$ такой, что $E_1^2 = -\text{Id}$ и группа $\text{Ad}(K)$ коммутирует поэлементно с E_1 (комплексная структура);

2) $(\mathbb{H}\mathbf{P}^n)$ если $G/K = \text{Sp}(n+1)/(\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(n))$, $n \geq 2$, то существует тройка ортогональных антикоммутирующих эндоморфизмов $E_1, E_2, E_3 \in \text{End}(\mathfrak{m})$ таких, что $E_1 E_2 = E_3$, $E_p^2 = -\text{Id}$, $\text{Ad}_k E_p \text{Ad}_k^{-1} \in \sum_{j=1}^3 \mathbb{R} E_j$, $k \in K$, $p = 1, 2, 3$ (кватернионная структура);

3) $(\mathbb{C}\mathbf{a}\mathbf{P}^2)$ если $G/K = F_4/\text{Spin}(9)$, то существует девять ортогональных эндоморфизмов $E_0, E_1, \dots, E_8 \in \text{End}(\mathfrak{m})$ таких, что $E_p E_k + E_k E_p = 0$, $p \neq k$, $E_p^2 = \text{Id}$, $\text{Ad}_k E_p \text{Ad}_k^{-1} \in \sum_{j=0}^8 \mathbb{R} E_j$, $k \in K$, $p, k = 0, \dots, 8$ (спинорная структура).

Отметим, что в случаях 1), 2) для каждого ненулевого $w \in \mathfrak{m}$ подпространства в $\mathfrak{m}$, порожденные векторами $E_1 w$ или $E_1 w, E_2 w, E_3 w$, ортогональны вектору w , в последнем случае девятимерное подпространство $\sum_{j=0}^8 \mathbb{R}(E_j w) \subset \mathfrak{m}$

содержит w . Для гладких комплекснозначных функций $\psi, \varphi, \lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ положим

$$P_w = \psi(r) \cdot \text{Id} + (\varphi(r) - \psi(r))r^{-2} \cdot \sum_{j=0}^N E_j w \otimes E_j w + (\lambda(r) - \varphi(r))r^{-2} \cdot w \otimes w, \quad (3.4)$$

где $w \in \mathfrak{m}$, $r = r(w)$, и $E_0 = \text{Id}$, если $G/K \in \{\mathbb{S}^n, \mathbb{CP}^n, \mathbb{HP}^n\}$, и $N = N(G/K) = 0$ (соответственно 1, 3, 8), если $G/K = \mathbb{S}^n$ (соответственно $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{HP}^n$, $\mathbb{CaP}^2$); и $\psi = \varphi$, если $G/K = \mathbb{S}^n$. В частности, каждый оператор P_w – полупростой с тремя или двумя собственными значениями $(\lambda(r), \psi(r), \varphi(r))$ или $(\lambda(r), \psi(r))$, но всегда $P_w w = \lambda(w)w$.

ТЕОРЕМА 11 (см. [16]). Пусть $M = G/K$ – симметрическое пространство ранга один с полупростой связной группой Ли G и связной замкнутой подгруппой K . Пусть (J, Ω) – G -инвариантная кэлерова структура на $T(G/K)$. Если $\dim G/K \geq 3$, то $J = J(P)$, где K -эквивариантное отображение $P: \mathfrak{m} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$ имеет вид (3.4). Отображение $P = P(\psi, \varphi, \lambda)$ из (3.4) определяет кэлерову структуру на $T(G/K) \setminus G/K$, $\dim G/K \geq 2$, тогда и только тогда, когда

- 1) вещественные части гладких функций $\lambda(r), \psi(r), \varphi(r): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ положительны;
- 2) $\psi(r) = \beta(r)$, если $M \in \{\mathbb{S}^n, \mathbb{CP}^n, \mathbb{HP}^n\}$, и $\varphi(r) = \beta(r)$, если $M = \mathbb{CaP}^2$, где

$$\beta(r) = r \coth \alpha(r), \quad \frac{d\alpha(r)}{dr} = \frac{1}{\lambda(r)} \quad \text{или} \quad \beta(r) = \pm r; \quad (3.5)$$

- 3) $\varphi(r) = \psi(r)$, если $M = \mathbb{S}^n$; $\psi(r)(\varphi(r) - \psi(r)) = r^2$, если $M \in \{\mathbb{CP}^n, \mathbb{HP}^n\}$; и $\varphi(r)(\psi(r) - \varphi(r)) = r^2$, если $M = \mathbb{CaP}^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Если $\dim G/K = 2$, т.е. $G/K = \mathbb{S}^2$ (2-мерная сфера), то на $T(G/K)$ могут существовать дополнительные кэлеровы структуры.

Как следует из теоремы 11, чтобы найти все G -инвариантные кэлеровы структуры на $T(G/K)$, необходимо выбрать из структур, описанных выше, все структуры, допускающие гладкое продолжение на нулевое сечение $G/K \subset T(G/K)$. Так как $P_w w = \lambda(r)w$, то, как легко проверить, используя элементарные вычисления, очевидное необходимое условие – функция $\lambda(r)$ есть гладкая четная функция с положительной вещественной частью и $\psi(0) \text{Id} = \varphi(0) \text{Id} = \lambda(0) \text{Id} = P_0$, является достаточным условием существования глобальной кэлеровой структуры $J = J(P)$ с $P = P(\psi, \varphi, \lambda)$ (см. (3.4)) на $T(G/K)$ (гладкого продолжения на нулевое сечение). Принимая во внимание теорему 11 и выражения (3.3) и (3.5), мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 13. Существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\{(J, \Omega)\}$ всех G -инвариантных кэлеровых структур на $T(G/K)$, $\dim G/K \geq 3$, и множеством $C_{++}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ всех гладких четных функций с положительной вещественной частью. Эта комплексная структура $J = J^{\lambda}$ определяется оператор-функцией $P = P(\psi, \varphi, \lambda)$, где функции ψ, φ такие же, как и в теореме 11, но

$$\beta(r) = r \coth \alpha(r), \quad \alpha(r) = \int_0^r \left(\frac{1}{\lambda(r)} \right) dr.$$

Так как $P_0 = \lambda(0)\text{Id}$, то соответствующая кэлерова метрика $\mathbf{g}^\lambda$ на $T(G/K)$ при ограничении на базу G/K совпадает со стандартной G -инвариантной метрикой на G/K . Канонической кэлеровой структуре (J_c^K, Ω) соответствует постоянная функция $\lambda(r) \equiv 1$ и $\psi(r) = \varphi(r) = r \coth(r)$, если $M = \mathbb{S}^n$, тройка $(\psi, \varphi, \lambda) = (r \coth(r), 2r \coth(2r), 1)$, если $M \in \{\mathbb{CP}^n, \mathbb{HP}^n\}$, и тройка $(\psi, \varphi, \lambda) = (2r \coth(2r), r \coth(r), 1)$, если $M = \mathbb{CaP}^2$.

В силу следствия подраспределение $\mathcal{F}(J^\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_*^{-1}(F(J^\lambda))$ (порожденное векторными полями (3.2), $P_w w = \lambda(r)w$) содержит в качестве сечения векторное поле $\tilde{\eta} + i\lambda\tilde{\Xi}$ на $G \times \mathfrak{m}$, где $\tilde{\eta}(g, w) = (w^l(g), 0)$ и $\tilde{\Xi}(g, w) = (0, w)$. Чтобы понять геометрию этих двух последних векторных полей, введем пару векторных полей на $T(G/K)$, играющих решающую роль в теории однородного комплексного уравнения Монжа–Ампера (см. [24]). Для этого рассмотрим функцию Гамильтона $H: T(G/K) \rightarrow \mathbb{R}$ на $T(G/K) = T^*(G/K)$, ассоциированную с данной метрикой $\mathbf{g}_{G/K}$: $H(gK, Y) = \mathbf{g}_{G/K}(Y, Y)$. Обозначим через η гамильтоново векторное поле функции $H/2$: $dH/2 = \Omega(-\eta, \cdot)$. Пусть Ξ – векторное поле на $T(G/K)$, двойственное канонической 1-форме θ относительно симплектической формы Ω : $\Omega(\Xi, \cdot) = \theta(\cdot)$. Тогда $\eta = \Pi_* \tilde{\eta}$ и $\Xi = \Pi_* \tilde{\Xi}$ (см. [16; §3.2]). Отметим также, что векторные поля $\tilde{\eta}$ и $\tilde{\Xi}$ (лево) G -инвариантны и (право) K -инвариантны. Чтобы упростить обозначения, мы будем писать $\lambda(r)$ вместо функции $\lambda \circ \sqrt{H}$ на $T(G/K)$ или функции $(g, w) \mapsto \lambda(|w|)$ на $G \times \mathfrak{m}$. Теперь из следствия 13 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 14. Для каждой G -инвариантной кэлеровой структуры (J, Ω) на $T(G/K)$, $\dim G/K \geq 3$, существует единственная функция $\lambda \in C_{++}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ такая, что векторное поле $\eta + i\lambda(r)\Xi$ является сечением подраспределения $F(J)$ или, что эквивалентно, векторное поле $\tilde{\eta} + i\lambda(r)\tilde{\Xi}$ является сечением подраспределения $\mathcal{F}(J)$. В этом случае $J = J^\lambda$.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Так как векторное поле $\eta + i\lambda(r)\Xi$ является сечением подраспределения $F(J^\lambda)$, то по лемме 3.5 из [16] функция

$$q(r) = \int r \cdot \frac{\lambda(r) + \bar{\lambda}(r)}{|\lambda(r)|^2} dr$$

является потенциальной функцией для (J^λ, Ω) , т.е. $\Omega = -i\partial\bar{\partial}q$. Эта функция – единственная (с точностью до константы интегрирования) G -инвариантная потенциальная функция, поскольку на $T(G/K)$ 2-формы Ω , $\theta \wedge dr$ независимы, а для любой функции $f = f(r)$ мы имеем

$$\bar{\partial}f = \left[\frac{f'}{r\lambda + r\bar{\lambda}} \right] \cdot (i|\lambda|^2\theta + r dr)$$

(см. доказательство леммы 3.5 в [16]). В частности, $\partial\bar{\partial}f = d\bar{\partial}f = 0$ тогда и только тогда, когда $f'(r) \equiv 0$, т.е. $f(r)$ – постоянная функция.

Теперь, используя результаты предыдущих пунктов, мы докажем следующую теорему

ТЕОРЕМА 16. Для произвольной G -инвариантной кэлеровой структуры (J, Ω) на касательном расслоении $T(G/K)$, $\dim G/K \geq 3$, существует единственная пара диффеоморфизмов (Φ^χ, Ψ^γ) , где $\chi \in C_+^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $\gamma \in C_\#^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, таких, что $(\Phi^\chi \Psi^\gamma)_* J_c^K = J$. Более того, в этом случае $J = J^\lambda$, где функция $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in C_{++}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ определяется выражениями (3.6) и (3.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем функции $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $\gamma \in C_\#^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$. Согласно предложению 8 пара $(J = (\Phi^\chi \Psi^\gamma)_* J_c, \Omega)$ является G -инвариантной кэлеровой структурой на $T(G/K)$, т.е. $J = J^\lambda$ для некоторой функции $\lambda \in C_{++}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Чтобы найти эту функцию λ , вычислим образ $(\Phi^\chi \Psi^\gamma)_*(\tilde{\eta} + i\tilde{\Xi})$ векторного поля $\tilde{\eta} + i\tilde{\Xi}$, соответствующего канонической структуре J_c^K ($\lambda(r) \equiv 1$ в этом случае). Для этого мы можем использовать формулу (2.11), поскольку $B_w w = iw$ и $\tilde{\Psi}_*^\gamma(\tilde{\eta}) = \tilde{\eta}$. Таким образом, $\tilde{\Psi}_*^\gamma(\tilde{\eta} + i\tilde{\Xi}) = \tilde{\eta} + ia(r)\tilde{\Xi}$, где $a(r) = 1/(r\delta(r))'$. Теперь, применяя выражение (2.7) (заменяв $\tau(r^2)$ на $\chi(r)$), мы получим, что

$$\tilde{\Phi}_*^\chi(w^l, ia(r)w)_{(g,w)} = ((\{1 + i\chi(r)a(r) + i\chi'(r)ra(r)\}w)^l, ia(r)w)_{(g \exp(\chi(r)w), w)},$$

т.е.

$$\lambda(r) = \frac{a(r)}{1 + ia(r)(r\chi(r))'}$$

и, следовательно,

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1^2 + \mu_2^2}, \quad \lambda_2 = \frac{-\mu_2}{\mu_1^2 + \mu_2^2}, \quad \mu_1(r) = (r\delta(r))', \quad \mu_2(r) = (r\chi(r))', \quad (3.6)$$

и $r\delta(r)$ – обратная функция к функции $r\gamma(r)$. Так как уравнения (3.6) имеют единственную пару решений $(\delta, \chi) \in C_\#^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \times C_+^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\delta(r) = \frac{1}{r} \int_0^r \frac{\lambda_1(r) dr}{\lambda_1^2(r) + \lambda_2^2(r)}, \quad \chi(r) = \frac{1}{r} \int_0^r \frac{-\lambda_2(r) dr}{\lambda_1^2(r) + \lambda_2^2(r)}, \quad (3.7)$$

то мы закончим доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 17. Для произвольной G -инвариантной кэлеровой структуры (J^λ, Ω) на касательном расслоении $T(G/K)$, $\dim G/K \geq 3$, с (вещественно-значной) функцией $\lambda \in C_{++}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ существует единственный диффеоморфизм Ψ^γ , где $\gamma \in C_\#^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, такой, что $\Psi_*^\gamma J_c^K = J^\lambda$. В этом случае

$$\delta(r) = \frac{1}{r} \int_0^r \left(\frac{1}{\lambda(r)} \right) dr,$$

где $(\Psi^\gamma)^{-1} = \Psi^\delta$.

СЛЕДСТВИЕ 18. Для произвольной G -инвариантной кэлеровой структуры (J^λ, Ω) , $\lambda \in C_{++}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ на $T(G/K)$, $\dim G/K \geq 3$, орбита $\mathcal{O}^\lambda = \{\Phi_*^\chi J^\lambda, \chi \in C_+^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$ состоит из эквивалентных кэлеровых структур и содержит единственную структуру (J^{λ_0}, Ω) такую, что $\lambda_0(r) \in C_{++}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (есть вещественная функция). В этом случае $\lambda_0 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)/\lambda_1$.

Теперь из предложения 8 и теоремы 16 получаем

СЛЕДСТВИЕ 19. *Каждая G -инвариантная кэлерова структура (J, Ω) на касательном расслоении $T(G/K)$, $\dim G/K \geq 3$, является редуцированной кэлеровой структурой, канонически ассоциированной с некоторой G -инвариантной кэлеровой структурой $(\tilde{J}, \Omega^c)$ на TG .*

Теперь мы можем выделить среди кэлеровых многообразий $(T(G/K), J^\lambda, \Omega)$ многообразия с полными метриками $\mathbf{g}^\lambda(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \Omega(J^\lambda X, Y)$. В силу следствия 18 достаточно рассмотреть только метрики $\mathbf{g}^{\lambda_0}$ с $\lambda_0 \in C_{++}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Чтобы найти все полные метрики $\mathbf{g}^{\lambda_0}$ на $T(G/K)$, отметим, что касательное расслоение $T(G/K)$ является многообразием координатности один, т.е. действие группы Ли G на этом многообразии обладает орбитой коразмерности один. Нулевое сечение G/K является сингулярной орбитой. За исключением одного этого случая все G -орбиты в $T(G/K)$ являются гиперповерхностями (орбитами главного орбитного типа). Геометрия многообразий координатности один в настоящее время хорошо изучена. Но мы используем только один следующий фундаментальный факт о структуре этих многообразий (см. [25]): единичное гладкое векторное поле U в G -инвариантной области $D \subset T(G/K)$, которое $\mathbf{g}^{\lambda_0}$ -ортогонально каждой G -орбите в D , является геодезическим векторным полем, т.е. его интегральные кривые являются геодезическими метрики $\mathbf{g}^{\lambda_0}$.

Мы опишем векторное поле U на области $D = T(G/K) \setminus G/K$ в терминах гамильтонова векторного поля 2η функции Гамильтона H . Каждая G -орбита в $T(G/K)$ (главного орбитного типа или сингулярная) является поверхностью уровня функции H . Мы утверждаем, что векторное поле $J^{\lambda_0}\eta$ является $\mathbf{g}^{\lambda_0}$ -ортогональным каждой G -орбите в $T(G/K)$. В самом деле, так как функция H является G -инвариантной, то $dH(Y) = 0$ для каждого векторного поля Y касательного к G -орбитам в $T(G/K)$. Тогда по определению гамильтонова векторного поля мы имеем

$$0 = dH(Y) = \Omega(-2\eta, Y) = 2\mathbf{g}^{\lambda_0}(J^{\lambda_0}\eta, Y),$$

т.е. $U = J^{\lambda_0}\eta/\|\eta\|$ – геодезическое векторное поле. А так как $\eta + i\lambda_0\Xi \in F(J^{\lambda_0})$, то $J^{\lambda_0}\eta = \lambda_0\Xi$ и в силу (2.2)

$$\Pi^*\|\eta\| = \sqrt{(\Pi^*\Omega)(\lambda_0\tilde{\Xi}, \tilde{\eta})} = r\sqrt{\lambda_0(r)}.$$

Более того,

$$dH(U) = \Omega(-2\eta, U) = \frac{2\mathbf{g}^{\lambda_0}(J^{\lambda_0}\eta, J^{\lambda_0}\eta)}{\|\eta\|} = 2\|\eta\| = 2r\sqrt{\lambda_0(r)}$$

и для произвольного векторного поля Z на $T(G/K)$

$$dH(Z) = \Omega(-2\eta, Z) = 2\mathbf{g}^{\lambda_0}(J^{\lambda_0}\eta, Z) \leq 2\|\eta\| \cdot \|Z\|.$$

Используя векторное поле U и метод работы [12], мы вычислим расстояние между поверхностями уровня $\{H = a\}$ и $\{H = b\}$ в $T(G/K)$ относительно метрики, индуцированной метрическим тензором $\mathbf{g}^{\lambda_0}$. Пусть $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [0, T]$, –

интегральная кривая векторного поля U с начальной точкой $x_a \in \{H = a\}$. Существует функция h , заданная на некотором подмножестве в $\mathbb{R}$, такая, что функция $h(H(\gamma(t)))$ линейна по t . Нетрудно проверить, что

$$h(s) = \int_a^{\sqrt{s}} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_0(r)}} \right) dr,$$

поскольку

$$\frac{d}{dt} h(H(\gamma(t))) = h'(H(\gamma(t))) dH(\gamma'(t)) = h'(H(\gamma(t))) \cdot 2\|\eta(\gamma(t))\| = 1.$$

Предположим, что $x_b \in \{H = b\}$ и $x_b = \gamma(t_b)$. Но кривая γ является геодезической. Поэтому длина кривой γ , $t \in [0, t_b]$, от x_a до x_b равняется

$$t_b = h(H(x_b)) - h(H(x_a)) = h(b) - h(a).$$

Для любой другой кривой $\gamma_0(t)$ с $\|\gamma'_0\| = 1$, начинающейся в точке x_a и оканчивающейся в точке $x_b^0 \in \{H = b\}$, мы имеем

$$\frac{d}{dt} h(H(\gamma_0(t))) = h'(H(\gamma_0(t))) dH(\gamma'_0(t)) \leq h'(H(\gamma_0(t))) \|\gamma'_0(t)\| \cdot 2\|\eta(\gamma_0(t))\| = 1.$$

Таким образом, $h(H(\gamma_0(t))) - h(H(x_a)) \leq t$ и длина кривой γ_0 от x_a до x_b^0 не меньше чем длина кривой $\gamma(t)$, $t \in [0, t_b]$. Поэтому расстояние между поверхностями уровня $\{H = a\}$ и $\{H = b\}$, $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, равно $|h(b) - h(a)|$. Поскольку поверхности уровня компактны, метрика g^{λ_0} полна тогда и только тогда, когда полна метрика на пространстве орбит $T(G/K)/G$, индуцированная функцией h , т.е. тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_0(r)}} \right) dr = +\infty.$$

Принимая во внимание следствие 18, мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20. Пусть $(T(G/K), J^\lambda, \Omega)$ – кэлерово многообразие, причем $\dim G/K \geq 2$, $\lambda \in C_{++}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Метрика g^λ на $(T(G/K), J^\lambda, \Omega)$ полна тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\operatorname{Re} \lambda(r)} \cdot |\lambda(r)|^{-1} dr = +\infty.$$

3.2. G -инвариантные Риччи-плоские полные метрики на $T(G/K)$.

Мы будем использовать обозначения предыдущего пункта, в частности, здесь G/K обозначает симметрическое пространство ранга один размерности n с полупростой компактной связной группой Ли G и связной замкнутой подгруппой K , т.е. $G/K \in \{\mathbb{S}^n, \mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{H}\mathbb{P}^n, \mathbb{C}\mathbb{a}\mathbb{P}^2\}$. В этом пункте мы классифицируем все G -инвариантные Риччи-плоские кэлеровы метрики на $T(G/K)$ с канонической симплектической структурой Ω в качестве кэлеровой формы.

Так как в силу следствия 18 произвольная G -инвариантная кэлерова структура (J, Ω) на $T(G/K)$, $\dim G/K \geq 3$, симплектоморфна некоторой структуре (J^λ, Ω) с (вещественной) функцией $\lambda \in C_{++}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, то достаточно искать Риччи-плоские кэлеровы метрики g^λ с такой вещественной функцией λ .

Как вытекает из теоремы 16, тогда существует единственная функция $\gamma(r) \in C_{\#}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ такая, что $\Psi_*^{\gamma} J_c^K = J^{\lambda}$. Функции λ и γ связаны соотношением

$$\delta(r) = \frac{1}{r} \int_0^r \left(\frac{1}{\lambda(r)} \right) dr,$$

где $z(r) = r\delta(r)$ – функция, обратная к $y(r) = r\gamma(r)$. Кэлера структура (J^{λ}, Ω) обладает единственной (с точностью до константы интегрирования) G -инвариантной потенциальной функцией

$$q^{\lambda}(r) = \int \frac{2r}{\lambda(r)} dr = \int 2rz'(r) dr \quad (3.8)$$

(см. замечание 15). Поэтому метрика $\mathbf{g}^{\lambda}$ Риччи-плоская тогда и только тогда, когда потенциальная функция q^{λ} удовлетворяет следующему нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных типа уравнения Монжа–Ампера:

$$\text{Ric}(q^{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} -i\partial\bar{\partial} \ln \det \frac{\partial^2 q^{\lambda}}{\partial z_j \partial \bar{z}_p} = 0 \quad (3.9)$$

(см. [26; гл. IX, § 5]). Форма $\text{Ric}(q^{\lambda})$ является формой Риччи метрики $\mathbf{g}^{\lambda}$ и не зависит от выбора J^{λ} -голоморфных координат $z_1, \dots, z_n$. Мы покажем, что уравнение $\text{Ric}(q^{\lambda}) = 0$ (см. (3.9)) можно свести к обычному дифференциальному уравнению для функции $y(r) = r\gamma(r)$. С этой целью мы используем глобальное J_c^K -голоморфное сечение Θ_h канонического линейного расслоения $\Lambda^{n,0}T(G/K)$.

Так как Ψ^{δ} является диффеоморфизмом и выполнены соотношения (2.15), то мы имеем следующие соотношения:

$$(\Psi^{\delta*}\Omega)^n = V^{\delta}\Omega^n, \quad (\Psi^{\delta*}\Omega)^n = (\Psi^{\delta*}S^c)\varepsilon_n(\Psi^{\delta*}\Theta_h) \wedge (\Psi^{\delta*}\bar{\Theta}_h), \quad (3.10)$$

где $V^{\delta} = V^{\delta}(r)$ и $S^c = S^c(r)$ являются G -инвариантными функциями на $T(G/K)$. Нетрудно проверить, что $V^{\delta}(r) = \delta^n(r) + r\delta^{n-1}(r)\delta'(r)$ (см. замечание 23). Функция $V^{\delta}(r)$ положительна, так как $\delta \in C_{\#}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$. Принимая во внимание то, что $q^{\lambda}(r)$ – потенциальная функция для (J^{λ}, Ω) , мы получаем, что

$$\Omega^n = (-i\partial\bar{\partial}q^{\lambda})^n = \left(\frac{(\Psi^{\delta*}S^c)}{V^{\delta}} \right) \varepsilon_n(\Psi^{\delta*}\Theta_h) \wedge \overline{(\Psi^{\delta*}\Theta_h)}. \quad (3.11)$$

По определению (см. (2.12) и (2.3)) n -форма $\Psi^{\delta*}\Theta_h$ голоморфна относительно комплексной структуры $\Psi_*^{\gamma}J_c^K$ (с распределением $\Psi_*^{\gamma}F(J_c^K)$ $(0, 1)$ -векторов). Поэтому можно вывести из уравнения (3.11), что в локальных J^{λ} -голоморфных координатах выполнено соотношение

$$\det \frac{\partial^2 q^{\lambda}}{\partial z_j \partial \bar{z}_p} = \left(\frac{(\Psi^{\delta*}S^c)}{V^{\delta}} \right) |h|^2$$

для некоторой локально определенной, везде ненулевой J^{λ} -голоморфной функции h . Таким образом, в силу леммы 10 и уравнения (3.9) форма Риччи кэлера метрики $\mathbf{g}^{\lambda}$ является формой $-i\partial\bar{\partial} \ln[(\Psi^{\delta*}S^c)/V^{\delta}]$. Однако $\Psi^{\delta*}S^c =$

$S(r\delta(r))$. Из единственности потенциальной функции q^λ (см. замечание 15) вытекает, что

$$\operatorname{Ric}(q^\lambda) = C \cdot \Omega, \quad C \neq 0 \iff \ln \left[\frac{S(r\delta(r))}{V^\delta(r)} \right] = C \cdot q^\lambda(r) \quad (3.12)$$

и метрика $\mathbf{g}^\lambda$ Риччи-плоская тогда и только тогда, когда

$$S(r\delta(r)) = C \cdot V^\delta(r) = C\delta^{n-1}(r)(r\delta(r))', \quad C > 0.$$

Принимая во внимание то, что $y(r) = r\gamma(r)$ является обратной функцией к $z(r) = r\delta(r)$, мы можем переписать это уравнение в виде

$$(y^n(r))' = a \cdot \frac{r^{n-1}}{S(r)}, \quad a > 0. \quad (3.13)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21. *Кэлера метрика $\mathbf{g}^\lambda$ с $\lambda \in C_{++}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ на касательном расслоении симметрического пространства ранга один G/K , $\dim G/K \geq 2$, является Риччи-плоской тогда и только тогда, когда функция $y(r)$, обратная к функции*

$$r \mapsto \int_0^r \frac{dt}{\lambda(t)},$$

удовлетворяет уравнению (3.13).

Для произвольного $a > 0$ существует единственное гладкое решение $y_a(r)$ уравнения (3.13) такое, что функция $\gamma_a(r) = y_a(r)/r \in C_\#^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, где

$$\gamma_a(r) = \frac{1}{r} \left(\frac{a}{2^{n-1}} \int_0^r \sinh^{n-1}(2t) \cosh^d(2t) dt \right)^{1/n}$$

и $d(G/K) = 0, 1, 3, 7$ для $G/K = \mathbb{S}^n, \mathbb{CP}^n, \mathbb{HP}^n, \mathbb{CaP}^2$. Кэлера метрика, соответствующая кэлеровой структуре $(J^{\lambda_a} = \Psi_*^{\gamma_a} J_C^K, \Omega)$, является полной. Множество $\{(J^{\lambda_a}, \Omega), a > 0\}$ состоит из неэквивалентных кэлеровых структур и произвольная G -инвариантная кэлера метрика на $T(G/K)$, $\dim G/K \geq 3$, с кэлеровой формой Ω и с полной Риччи-плоской метрикой эквивалентна некоторой структуре из этого множества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы уже доказано. Чтобы доказать второе, мы найдем явное выражение для функции $S(r)$. Так как G/K – симметрическое пространство ранга один, то оператор $-\operatorname{ad}_w^2$, $w \in \mathfrak{m}$, симметричен и имеет не более трех различных собственных значений: 0, $|w|^2$ и $4|w|^2$ (при подходящем выборе константы, определяющей форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}$). Собственное подпространство оператора $-\operatorname{ad}_w^2$, соответствующее собственному значению нуль, имеет размерность один, соответствующее значению $4|w|^2$ – размерность $d = 0$ (соответственно 1, 3, 7), если $G/K = \mathbb{S}^n$ (соответственно $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{HP}^n$, $\mathbb{CaP}^2$) (см. [23; гл. VII, § 10]). Тогда в силу леммы 10 и выражения (2.16) получаем

$$S(r) = \left(\frac{2r}{\sinh(2r)} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{\cosh(2r)} \right)^d. \quad (3.14)$$

Теперь очевидно, что уравнение $(y^n)' = (a/2^{n-1}) \sinh^{n-1}(2r) \cosh^d(2r)$ имеет единственное решение

$$y_a(r) = \left(\frac{a}{2^{n-1}} \int_0^r \sinh^{n-1}(2t) \cosh^d(2t) dt \right)^{1/n},$$

для которого $y_a(0) = 0$. Функция $\gamma_a(r) = y_a(r)/r \in C_{\#}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$.

Метрика $\mathbf{g}^{\lambda_a}$ полна, поскольку

$$\int_0^{+\infty} \frac{dr}{\sqrt{\lambda_a(r)}} = \int_0^{+\infty} \sqrt{(r\delta_a(r))'} dr = \int_0^{+\infty} \sqrt{y'_a(t)} dt = +\infty.$$

Здесь мы использовали соотношение $\lambda_a(r) = 1/(r\delta_a(r))'$, подстановку $r = y_a(t)$ и предложение 20.

Теперь нам осталось доказать, что две кэлеровы метрики $\mathbf{g}^{\lambda_a}$ и $\mathbf{g}^{\lambda_b}$ на $X = T(G/K)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $a/b = s^n = 1$. Предположим, что $\mathbf{g}^{\lambda_a} \sim \mathbf{g}^{\lambda_b}$ и $s < 1$, т.е. существует симплектоморфизм $\varphi: X \rightarrow X$ такой, что $\varphi_* J^{\lambda_a} = J^{\lambda_b}$. Но $s\gamma_b = \gamma_a$ (функции пропорциональны). Поэтому $\Psi_*^s \Psi_*^{\gamma_b} = \Psi_*^{\gamma_a}$ и в силу следствия 17 имеем $\Psi_*^s J^{\lambda_b} = J^{\lambda_a}$, где s – постоянная функция. Тогда отображение $\psi = \Psi^s \circ \varphi$ является J^{λ_a} -биголоморфным отображением таким, что $\psi^* \Omega = s\Omega$. Так как $\psi_{*x} \circ J_x^{\lambda_a} = J_{\psi(x)}^{\lambda_a} \circ \psi_{*x}$, то

$$\begin{aligned} \|\psi_{*x} Y_x\|_{\psi(x)}^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \Omega_{\psi(x)}(J_{\psi(x)}^{\lambda_a} \psi_{*x} Y_x, \psi_{*x} Y_x) = \Omega_{\psi(x)}(\psi_{*x} J_x^{\lambda_a} Y_x, \psi_{*x} Y_x) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} (\psi^* \Omega)_x(J_x^{\lambda_a} Y_x, Y_x) = s\Omega_x(J_x^{\lambda_a} Y_x, Y_x) \stackrel{\text{def}}{=} s\|Y_x\|_x^2, \end{aligned}$$

другими словами, это отображение является сжимающим отображением относительно полной метрики $\mathbf{g}^{\lambda_a}$ и, следовательно, существует единственная ψ -неподвижная точка $x_0 \in X$. Более того, образ произвольной геодезической есть геодезическая. Поэтому

$$\psi(\text{Exp}_{x_0} Y) = \text{Exp}_{x_0}(\sqrt{s} A_0 Y),$$

где $\text{Exp}_{x_0}: T_{x_0} X \rightarrow X$ – экспоненциальное отображение,

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi_{x_0*}: T_{x_0} X \rightarrow T_{x_0} X$$

– $\mathbf{g}^{\lambda_a}$ -ортогональный оператор. Отображение Exp_{x_0} – отображение “на”, так как многообразие X полно. Это отображение взаимно однозначно, так как локально отображение Exp_{x_0} является диффеоморфизмом и $\text{Exp}_{x_0} Y_1 = \text{Exp}_{x_0} Y_2$ тогда и только тогда, когда $\text{Exp}_{x_0}(s^p A_0^{2p} Y_1) = \text{Exp}_{x_0}(s^p A_0^{2p} Y_2)$ для всех целых p . Так как $T(G/K)$ не диффеоморфно $\mathbb{R}^{2n}$, то $s = 1$.

В [8] Стензель предложил следующую конструкцию для Риччи-плоских метрик на $T(G/K)$: мы зафиксируем каноническую комплексную структуру J_c^K и будем искать G -инвариантные кэлеровы потенциалы $f(r)$ (строго плюрисубгармонические функции) такие, что форма Риччи метрики, соответствующей паре

$(J_c^K, -i\partial\bar{\partial}f)$, зануляется. Такая гладкая потенциальная функция существует. Эта функция – единственное гладкое решение уравнения

$$((f'(r))^n)' = a \cdot \frac{r^{n-1}}{S(r)}, \quad a > 0, \quad (3.15)$$

имеющее нуль второго порядка в нуле (см. [8; формула (3)]). Это решение f всегда является парной функцией (см. [8; предложение 4 и лемма 5]). Сравнивая уравнения (3.13) и (3.15), мы приходим к выводу, что их единственные допустимые решения $y_a(r)$ и $f_a(r)$ связаны соотношением $y_a(r) = f'_a(r)$.

Рассмотрим теперь две кэлеровы структуры $(\Psi_*^{\gamma_a} J_c^K, \Omega)$ и $(J_c^K, \Psi^{\gamma_a*} \Omega)$ на $T(G/K)$. Ясно, что вторая структура является образом первой при отображении $(\Psi^{\gamma_a})^{-1}$. Так как первая структура обладает потенциальной функцией $q_a(r)$, где $q'_a(r) = 2rz'_a(r)$ (см. (3.8)), $(z_a \circ y_a)(r) = r$ и $y_a(r) = r\gamma_a(r)$, то по определению функция $(\Psi^{\gamma_a*} q_a)(r) = q_a(y_a(r))$ – потенциальная функция для второй структуры. Из соотношений

$$(q_a \circ y_a)' = q'_a(y_a) \cdot y'_a = 2y_a[z'_a(y_a)]y'_a = 2y_a = 2f'_a.$$

вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22. *G -инвариантные кэлеровы структуры $(J_c^K, -i\partial\bar{\partial}2f_a)$ и $(\Psi_*^{\gamma_a} J_c^K, \Omega)$, где $(J_c^K, -i\partial\bar{\partial}2f_a)$ – Риччи-плоская кэлерова структура Стензеля (см. [8]), эквивалентны как кэлеровы структуры, т.е. $\Psi^{\gamma_a*} \Omega = -i\partial\bar{\partial}2f_a$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 23. Пусть (q, p) и (q, x) обозначают локальные канонические координаты на кокасательном и касательном расслоениях гладкого многообразия M . В частности, каноническая симплектическая форма Ω на T^*M имеет вид $\sum dp_j \wedge dq_j$. Метрический тензор $\mathbf{g}_{jk}(q)$ позволяет отождествить эти два многообразия: $\tau: (q, x) \mapsto (q, G_q x)$ и $\tau^{-1}: (q, p) \mapsto (q, G_q^{-1} p)$, G_q – матрица с элементами $\mathbf{g}_{jk}(q)$. Отображение $\psi: (q, x) \mapsto (q, \delta(|x|)x)$, $|x|^2 = \langle G_q x, x \rangle$, индуцирует отображение $\psi: (q, p) \mapsto (q, \delta(|p|)p)$, где $|p|^2 = \langle G_q^{-1} p, p \rangle$. Поэтому $(\psi^* \Omega)^n = \psi^*(\Omega^n) = S(q, p)\Omega^n$, где $S(q, p)$ – определитель матрицы Якоби отображения $p \mapsto \delta(|p|)p$ при фиксированном q , т.е.

$$S(q, p) = \det \left[\delta(t) \text{Id} + \frac{\delta'(t)}{t} \cdot p \otimes G_q^{-1} p \right], \quad t = |p|.$$

Так как $\det(\text{Id} + a \otimes b) = 1 + \langle a, b \rangle$ (возмущение ранга один), мы получим выражение

$$S(q, p) = \delta^n(t) \left[1 + \frac{\delta'(t)t}{\delta(t)} \right].$$

Замена $t = |p| \mapsto |x|$ в этом выражении даст нам выражение для $S(q, x)$ (так как $\tau^*|p| = |x|$).

Список литературы

- [1] A. Dancer, A. Swann, “Hyperkähler metrics of cohomogeneity one”, *J. Geom. Phys.*, **21**:3 (1997), 218–230.
- [2] E. Calabi, “Métriques kähleriennes et fibrés holomorphes”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **12**:2 (1979), 269–294.

- [3] A. Dancer, M. Y. Wang, “Kähler–Einstein metrics of cohomogeneity one”, *Math. Ann.*, **312**:3 (1998), 503–526.
- [4] K. Higashijima, T. Kimura, M. Nitta, “Calabi–Yau manifolds of cohomogeneity one as complex line bundles”, *Nuclear Phys. B*, **645**:3 (2002), 438–456.
- [5] G. Tian, Sh. T. Yau, “Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature. I”, *J. Amer. Math. Soc.*, **3**:3 (1990), 579–609.
- [6] G. Tian, Sh. T. Yau, “Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature. II”, *Invent. Math.*, **106**:1 (1991), 27–60.
- [7] G. Tian, Sh. T. Yau, “Existence of Kähler–Einstein metrics on complete Kähler manifolds and their applications to algebraic geometry”, *Mathematical aspects of string theory* (San Diego, CA, 1986), Adv. Ser. Math. Phys., **1**, World Sci. Publ., Singapore, 1987, 574–628.
- [8] M. B. Stenzel, “Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space”, *Manuscripta Math.*, **80**:2 (1993), 151–163.
- [9] Ph. Candelas, X. C. de la Ossa, “Comments on conifolds”, *Nuclear Phys. B*, **342**:1 (1990), 246–268.
- [10] M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü, C. N. Pope, “Ricci-flat metrics, harmonic forms and brane resolutions”, *Commun. Math. Phys.*, **232**:3 (2003), 457–500.
- [11] T.-Ch. Lee, “Complete Ricci flat Kähler metric on M_I^n , M_{II}^{2n} , M_{III}^{4n} ”, *Pacific J. Math.*, **185**:2 (1998), 315–326.
- [12] G. Patrizio, P.-M. Wong, “Stein manifolds with compact symmetric center”, *Math. Ann.*, **289**:1 (1991), 355–382.
- [13] J. M. Baptista, “Some special Kähler metrics on $SL(2, \mathbb{C})$ and their holomorphic quantization”, *J. Geom. Phys.*, **50**:1–4 (2004), 1–27.
- [14] A. S. Dancer, I. A. B. Strachan, “Einstein metrics on tangent bundles of spheres”, *Classical Quantum Gravity*, **19**:18 (2002), 4663–4670.
- [15] T. Eguchi, A. J. Hanson, “Asymptotically flat self-dual solutions to euclidean gravity”, *Phys. Lett.*, **74**:3 (1978), 249–251.
- [16] И. В. Микитюк, “Кэлеровы структуры на касательных расслоениях симметрических пространств ранга один”, *Матем. сб.*, **192**:11 (2001), 93–122; англ. пер.: I. V. Mykytyuk, “Kähler structures on the tangent bundle of rank one symmetric spaces”, *Sb. Math.*, **192**:11 (2001), 1677–1704.
- [17] R. Szöke, “Adapted complex structures and Riemannian homogeneous spaces”, *Complex analysis and applications* (Warsaw, 1997), Ann. Polon. Math., **70**, 1998, 215–220.
- [18] V. Guillemin, S. Sternberg, “Geometric quantization and multiplicities of group representations”, *Invent. Math.*, **67**:3 (1982), 515–538.
- [19] Э. Б. Винберг, А. Л. О니щик, *Семинар по алгебраическим группам и группам Ли*, Наука, М., 1988; англ. пер.: A. L. Onishchik, E. B. Vinberg, *Lie groups and algebraic groups*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [20] G. D. Mostow, “On covariant fiberings of Klein spaces”, *Amer. J. Math.*, **77**:1955 (1955), 247–278.
- [21] I. V. Mykytyuk, “Invariant Kähler structures on the cotangent bundles of compact symmetric spaces”, *Nagoya Math. J.*, **169** (2003), 191–217.
- [22] R. M. Aguilar, “Symplectic reduction and the homogeneous complex Monge–Ampère equation”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **19**:4 (2001), 327–353.
- [23] С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства*, Факториал, М., 2005; пер. с англ.: S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure Appl. Math., **80**, Academic Press, New York–San Francisco–London, 1978.
- [24] V. Guillemin, M. Stenzel, “Grauert tubes and the homogeneous Monge–Ampère equation. II”, *J. Differential Geom.*, **35**:3 (1992), 627–641.

- [25] A. V. Alekseevsky, D. V. Alekseevsky, “Riemannian G -manifold with one-dimensional orbit space”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **11**:3 (1993), 197–211.
- [26] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 2, Наука, М., 1981; пер. с англ.: Sh. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, v. 2, Interscience Publ., New York–London–Sydney, 1969.

И. В. Микитюк (I. V. Mykytyuk)

Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Подстригача НАН Украины, г. Львов;

Institute of Mathematics,

Pedagogical University of Cracow, Poland

E-mail: mykytyuk_i@yahoo.com

Поступила в редакцию

01.09.2009 и 15.04.2010