Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Дюкарев, Примеры блочных матриц Якоби, порождающих симметрические операторы с любыми возможными дефектными числами, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 12, 83–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7628>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:21:08

УДК 517.983.33+517.984.51

Ю. М. Дюкарев

Примеры блочных матриц Якоби, порождающих симметрические операторы с любыми возможными дефектными числами

В работе впервые построены примеры симметрических блочных матриц Якоби, порождающих симметрические операторы с произвольными возможными дефектными числами. Приведены явные формулы для базисов в дефектных подпространствах.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: симметрические блочные матрицы Якоби, симметрические операторы, дефектные подпространства, дефектные числа.

§ 1. Введение

1.1. Рассмотрим бесконечную симметрическую блочную матрицу Якоби

$$\mathbf{J}_m = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 & O & O & \dots \\ B_0^* & A_1 & B_1 & O & \dots \\ O & B_1^* & A_2 & B_2 & \dots \\ O & O & B_2^* & A_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Блоки матрицы $\mathbf{J}_m$ обозначают комплексные квадратные матрицы m -го порядка, причем матрицы A_k , $k \geq 0$, являются эрмитовыми, матрицы B_k , $k \geq 0$, – невырожденными, а матрицы O – нулевыми.

Пусть $\mathbb{C}^m$ – линейное пространство m -мерных столбцов комплексных чисел, а $\ell^2(\mathbb{C}^m)$ – гильбертово пространство бесконечных столбцов

$$\mathbf{u} = \text{col}(u_0, u_1, u_2, \dots), \quad u_k \in \mathbb{C}^m, \quad \sum_{k=0}^{\infty} u_k^* u_k < +\infty,$$

со скалярным произведением $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^* v_k$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ell^2(\mathbb{C}^m)$. На незамкнутом всюду плотном в $\ell^2(\mathbb{C}^m)$ подпространстве финитных векторов корректно определен симметрический оператор умножения на матрицу $\mathbf{J}_m$. Замыкание этого оператора обозначим через $\mathbf{L}_m$. Будем говорить, что симметрический оператор $\mathbf{L}_m$ ассоциирован с матрицей Якоби $\mathbf{J}_m$. Пусть $\mathbf{I}_m$ – тождественный оператор в $\ell^2(\mathbb{C}^m)$.

Приведем известные свойства оператора $\mathbf{L}_m$ (см. [1]–[3]). Симметрический оператор $\mathbf{L}_m$, вообще говоря, не самосопряжен. Подпространства

$$\mathcal{K}_+ = \{\mathbf{u} \in \ell^2(\mathbb{C}^m) : \mathbf{L}_m^* \mathbf{u} = i\mathbf{u}\}, \quad \mathcal{K}_- = \{\mathbf{u} \in \ell^2(\mathbb{C}^m) : \mathbf{L}_m^* \mathbf{u} = -i\mathbf{u}\} \quad (1.2)$$

называются *дефектными подпространствами* оператора $\mathbf{L}_m$ в точках $z = i$ и $z = -i$ соответственно. Векторы из подпространства $\mathcal{K}_+$ (соответственно $\mathcal{K}_-$) называются *дефектными векторами* оператора $\mathbf{L}_m$ в точках $z = i$ и $z = -i$ соответственно. Дефектные числа $m_+ = \dim \mathcal{K}_+$ и $m_- = \dim \mathcal{K}_-$ удовлетворяют условиям $0 \leq m_+ \leq m$, $0 \leq m_- \leq m$ и максимального значения m достигают одновременно (см. [4]). В статье [5] получены некоторые достаточные условия на элементы матрица Якоби (1.1), при выполнении которых дефектные числа m_+ и m_- максимальны. В статье [6] доказана такая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть дано число $m \in \mathbb{N}$ и целые числа q, p удовлетворяют условиям $0 \leq q, p \leq m - 1$. Тогда существует такая матрица Якоби $\mathbf{J}_m$, что дефектные числа m_+ и m_- ассоциированного оператора $\mathbf{L}_m$ равны q и p соответственно.

1.2. Процитированные результаты дают полное описание возможных значений дефектных чисел операторов $\mathbf{L}_m$, порожденных блочными матрицами Якоби $\mathbf{J}_m$. Однако задача построения примеров матриц Якоби, порождающих симметрические операторы с произвольными возможными дефектными числами, при этом не была решена.

В настоящей работе впервые построены конкретные примеры блочных матриц Якоби, порождающих симметрические операторы с любыми возможными дефектными числами (см. теоремы 2, 3). Таким образом, в частности, получено новое конструктивное доказательство теоремы 1. Следует отметить, что в работе использованы и впервые развиты в конструктивном направлении методы, предложенные в статье [7].

§ 2. Формулировка основных результатов

2.1. Пусть I – единичная матрица m -го порядка. Диагональную матрицу с элементами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ на главной диагонали обозначим через $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть целые числа $m \geq 1$ и $p \geq 0$ удовлетворяют условию $0 \leq p \leq m$ и диагональные матрицы $\hat{B}_k$ и R_k определены формулами

$$\hat{B}_k = \text{diag} \left(\underbrace{\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1}}_p, \underbrace{1, \dots, 1}_{m-p} \right), \quad k \geq 0, \quad (2.1)$$

$$R_0 = I, \quad R_k = \sqrt{I + \hat{B}_{k-1}^2}, \quad k \geq 1. \quad (2.2)$$

Пусть блоки A_k и B_k матрицы Якоби $\mathbf{J}_m$ имеют следующий вид:

$$A_k = O, \quad k \geq 0, \quad B_0 = \hat{B}_0, \quad B_k = \hat{B}_{k-1}^{-1} R_k \hat{B}_k^{-1}, \quad k \geq 1. \quad (2.3)$$

Пусть, далее,

$$\mathbf{P}_{\pm} = \text{col} \left((\pm i)^0 R_0, (\pm i)^1 \hat{B}_0 R_0, \dots, (\pm i)^n \hat{B}_{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} R_k, \dots \right). \quad (2.4)$$

Тогда для ассоциированного с матрицей Якоби $\mathbf{J}_m$ оператора $\mathbf{L}_m$ справедливы следующие утверждения:

1) первые p столбцов матрицы $\mathbf{P}_+$ образуют базис в дефектном подпространстве $\mathcal{H}_+$, а первые p столбцов матрицы $\mathbf{P}_-$ образуют базис в дефектном подпространстве $\mathcal{H}_-$;

2) дефектные числа m_- и m_+ оператора $\mathbf{L}_m$ совпадают и равны p .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из (2.1)–(2.3) следует, что

$$R_0 = I, \quad R_k = \text{diag}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}, \dots, \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{2}\right), \quad k \geq 1, \quad (2.5)$$

$$A_k = O, \quad k \geq 0, \quad B_0 = I,$$

$$B_k = \text{diag}((k+1)\sqrt{k^2+1}, \dots, (k+1)\sqrt{k^2+1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{2}), \quad k \geq 1. \quad (2.6)$$

Таким образом, операторы с произвольными равными дефектными числами можно построить с помощью простейших блочных матриц Якоби (1.1), у которых все блоки A_k являются нулевыми матрицами, а все блоки B_k являются положительными диагональными матрицами (2.6).

2.2. Пусть дано целое число $r \geq 2$. Рассмотрим матрицу r -го порядка

$$\mathcal{P}_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Для любой матрицы r -го порядка A произведение $A \cdot \mathcal{P}_r$ получается из матрицы A циклической перестановкой столбцов: r -й столбец становится первым, первый столбец становится вторым и т.д., $(r-1)$ -й столбец становится r -м.

Пусть целые числа q, p и m таковы, что $0 \leq q < p < m$. Рассмотрим блочно диагональную матрицу m -го порядка

$$\mathcal{P} = \text{diag}(I_q, \mathcal{P}_{p-q+1}, I_{m-p-1}), \quad (2.8)$$

матрица $\mathcal{P}_{p-q+1}$ определена в (2.7), а I_q и I_{m-p-1} – единичные матрицы порядка q и $m-p-1$ соответственно. Если нижний индекс у матрицы I_q или I_{m-p-1} равен нулю, то в представлении (2.8) соответствующая единичная матрица отсутствует. Для любой матрицы m -го порядка A произведение $A \cdot \mathcal{P}$ получается из матрицы A циклической перестановкой столбцов в диапазоне от $(q+1)$ -го столбца до $(p+1)$ -го столбца.

Матрица $\mathcal{P}$ является ортогональной. Поэтому существует вещественное число θ такое, что корректно определена эрмитова матрица

$$\mathcal{A} = i(I + e^{i\theta}\mathcal{P})^{-1}(I - e^{i\theta}\mathcal{P}). \quad (2.9)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть целые числа q, p и m удовлетворяют условиям $0 \leq q < p < m$, матрицы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{A}$ определены формулами (2.8), (2.9), а матрицы $\widehat{B}_k, R_k, k \geq 0$, определены в (2.1), (2.2). Пусть блоки A_k и B_k матрицы Якоби $\mathbf{J}_m$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} B_0 &= \widehat{B}_0, & B_k &= 2\widehat{B}_{k-1}^{-1}R_k(I + e^{i\theta}\mathcal{P})^{-1}\widehat{B}_k^{-1}, & k &\geq 1, \\ A_0 &= O, & A_1 &= \widehat{B}_0^{-1}R_1\mathcal{A}R_1\widehat{B}_0^{-1}, & A_k &= \widehat{B}_{k-1}^{-1}(\mathcal{A} + R_k\mathcal{A}R_k)\widehat{B}_{k-1}^{-1}, & k &\geq 2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Пусть матрица $\mathbf{P}_-$ определена в (2.4), а матрица $\mathbf{P}_+$ задана формулой

$$\mathbf{P}_+ = \text{col} \left(i^0 R_0 \mathcal{P}_0, i^1 \widehat{B}_0 \mathcal{P}_1 R_0 \mathcal{P}_0, \dots, i^n \widehat{B}_{n-1} \mathcal{P}_n \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n-1}} R_k \mathcal{P}_k, \dots \right), \quad (2.11)$$

где $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_1 = I$, $\mathcal{P}_k = e^{i\theta} \mathcal{P}$, $k \geq 2$, и стрелка над матричным произведением указывает направление возрастания индексов матричных сомножителей.

Тогда для ассоциированного с матрицей Якоби $\mathbf{J}_m$ оператора $\mathbf{L}_m$ справедливы следующие утверждения:

1) первые q столбцов матрицы $\mathbf{P}_+$ образуют базис в подпространстве $\mathcal{K}_+$, а первые p столбцов матрицы $\mathbf{P}_-$ образуют базис в $\mathcal{K}_-$;

2) дефектные числа m_+ и m_- ассоциированного оператора $\mathbf{L}_m$ соответственно равны q и p .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 3 позволяет построить примеры операторов, дефектные числа которых удовлетворяют неравенствам $0 \leq m_+ < m_- \leq m-1$. Для построения оператора $\mathbf{L}_m$, дефектные числа которого удовлетворяют неравенствам $0 \leq m_- < m_+ \leq m-1$, можно воспользоваться таким простым фактом. Если дефектными числами оператора $\mathbf{L}_m$ являются $m_+ = q$, $m_- = p$, то дефектными числами оператора $(-1) \cdot \mathbf{L}_m$ являются $m_+ = p$, $m_- = q$.

§ 3. Доказательство теорем 2 и 3

В этом параграфе будут доказаны теоремы 2 и 3. Мы начнем с доказательства теоремы 3.

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия теоремы 3 и для $m \times m$ блоков матриц $\mathbf{P}_\pm$ введены следующие обозначения:

$$(\mathbf{P}_+)_l = i^l \widehat{B}_{l-1} \mathcal{P}_l \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l-1}} R_k \mathcal{P}_k, \quad (\mathbf{P}_-)_l = (-i)^l \widehat{B}_{l-1} \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l-1}} R_k, \quad l \geq 0. \quad (3.1)$$

Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} A_0(\mathbf{P}_\pm)_0 + B_0(\mathbf{P}_\pm)_1 &= \pm i(\mathbf{P}_\pm)_0, \\ B_{n-1}^*(\mathbf{P}_\pm)_{n-1} + A_n(\mathbf{P}_\pm)_n + B_n(\mathbf{P}_\pm)_{n+1} &= \pm i(\mathbf{P}_\pm)_n, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем формулы (3.2) для $\mathbf{P}_+$. При $n = 0$ имеем

$$A_0(\mathbf{P}_+)_0 + B_0(\mathbf{P}_+)_1 = O \cdot i^0 R_0 \mathcal{P}_0 + I \cdot i^1 \widehat{B}_0 \mathcal{P}_1 R_0 \mathcal{P}_0 = i R_0 \mathcal{P}_0 = i(\mathbf{P}_+)_0.$$

При $n \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} B_{n-1}^*(\mathbf{P}_+)_n + A_n(\mathbf{P}_+)_n + B_n(\mathbf{P}_+)_n &= \\ = i^{n+1} \widehat{B}_{n-1}^{-1} (-2(I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1*} - i(\mathcal{A} + R_n \mathcal{A} R_n) \mathcal{P}_n & \\ + 2R_n(I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1} \mathcal{P}_{n+1} R_n \mathcal{P}_n) \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n-1}} R_k \mathcal{P}_k & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= i^{n+1} \widehat{B}_{n-1}^{-1} (-2(I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1} \mathcal{P}_n + (I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1} (I - e^{i\theta} \mathcal{P}) \mathcal{P}_n \\
 &\quad + R_n(I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1} (I - e^{i\theta} \mathcal{P}) R_n \mathcal{P}_n \\
 &\quad + 2R_n(I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1} \mathcal{P}_{n+1} R_n \mathcal{P}_n) \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n-1}} R_k \mathcal{P}_k \\
 &= i^{n+1} \widehat{B}_{n-1}^{-1} ((I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1} (-2I + I - e^{i\theta} \mathcal{P}) \\
 &\quad + R_n(I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1} (I - e^{i\theta} \mathcal{P} + 2\mathcal{P}_{n+1}) R_n) \mathcal{P}_n \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n-1}} R_k \mathcal{P}_k \\
 &= i^{n+1} \widehat{B}_{n-1}^{-1} (-I + R_n^2) \mathcal{P}_n \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n-1}} R_k \mathcal{P}_k = i^{n+1} \widehat{B}_{n-1} \mathcal{P}_n \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n-1}} R_k \mathcal{P}_k = i(\mathbf{P}_+)_n.
 \end{aligned}$$

Здесь первое равенство следует из (2.10) и (2.11), а второе равенство следует из очевидных соотношений

$$(I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1*} = (I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1} e^{i\theta} \mathcal{P} = (I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1} \mathcal{P}_n.$$

Докажем формулы (3.2) для $\mathbf{P}_-$. При $n = 0$ имеем

$$A_0(\mathbf{P}_-)_0 + B_0(\mathbf{P}_-)_1 = O \cdot (-i)^0 R_0 + I \cdot (-i)^1 \widehat{B}_0 R_0 = -i R_0 = (-i)(\mathbf{P}_-)_0.$$

При $n \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned}
 B_{n-1}^*(\mathbf{P}_-)_{n-1} + A_n(\mathbf{P}_-)_n + B_n(\mathbf{P}_-)_{n+1} &= (-i)^{n+1} \widehat{B}_{n-1}^{-1} (-2(I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1*} \\
 &\quad + i(\mathcal{A} + R_n \mathcal{A} R_n) + 2R_n(I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1} R_n) \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n-1}} R_k \\
 &= (-i)^{n+1} \widehat{B}_{n-1}^{-1} (-2(I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1} e^{i\theta} \mathcal{P} - (I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1} (I - e^{i\theta} \mathcal{P}) \\
 &\quad - R_n(I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1} (I - e^{i\theta} \mathcal{P}) R_n + 2R_n(I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1} R_n) \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n-1}} R_k \\
 &= (-i)^{n+1} \widehat{B}_{n-1}^{-1} ((I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1} (-2e^{i\theta} \mathcal{P} - I + e^{i\theta} \mathcal{P}) \\
 &\quad - R_n(I + e^{i\theta} \mathcal{P})^{-1} (I - e^{i\theta} \mathcal{P} - 2I) R_n) \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n-1}} R_k \\
 &= (-i)^{n+1} \widehat{B}_{n-1}^{-1} (-I + R_n^2) \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n-1}} R_k = (-i)^{n+1} \widehat{B}_{n-1} \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n-1}} R_k = -i(\mathbf{P}_-)_n.
 \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Равенства (3.2) будем записывать в следующей компактной форме:

$$\mathbf{J}_m \mathbf{P}_+ = i\mathbf{P}_+, \quad \mathbf{J}_m \mathbf{P}_- = -i\mathbf{P}_-. \quad (3.3)$$

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия теоремы 3 и матрицы $\mathbf{P}_\pm$ разбиты на блоки (3.1). Тогда

$$\sum_{k=0}^n (\mathbf{P}_+)_k^* (\mathbf{P}_+)_k = \left(\overrightarrow{\prod_{k=0}^n} \mathcal{P}_k^* R_k \right) \left(\overleftarrow{\prod_{k=0}^n} R_k \mathcal{P}_k \right), \quad (3.4)$$

$$\sum_{k=0}^n (\mathbf{P}_-)_k^* (\mathbf{P}_-)_k = \left(\overrightarrow{\prod_{k=0}^n} R_k \right) \left(\overleftarrow{\prod_{k=0}^n} R_k \right). \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 0$ формула (3.4) очевидна. Допустим, что при некотором $l \geq 1$ формулы (3.4) доказаны для всех $n \leq l$. Тогда для $n = l + 1$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{l+1} (\mathbf{P}_+)_k^* (\mathbf{P}_+)_k &= \sum_{k=0}^l (\mathbf{P}_+)_k^* (\mathbf{P}_+)_k + (\mathbf{P}_+)^*_{l+1} (\mathbf{P}_+)_{l+1} \\ &= \overrightarrow{\prod_{k=0}^l} \mathcal{P}_k^* R_k \overleftarrow{\prod_{k=0}^l} R_k \mathcal{P}_k + \overrightarrow{\prod_{k=0}^l} \mathcal{P}_k^* R_k \mathcal{P}_{k+1}^* \widehat{B}_l \overleftarrow{i}^{l+1} i^{l+1} \widehat{B}_l \mathcal{P}_{k+1} \overleftarrow{\prod_{k=0}^l} R_k \mathcal{P}_k \\ &= \overrightarrow{\prod_{k=0}^l} \mathcal{P}_k^* R_k \mathcal{P}_{k+1}^* (I + \widehat{B}_l \widehat{B}_l) \mathcal{P}_{k+1} \overleftarrow{\prod_{k=0}^l} R_k \mathcal{P}_k = \overrightarrow{\prod_{k=0}^{l+1}} \mathcal{P}_k^* R_k \overleftarrow{\prod_{k=0}^{l+1}} R_k \mathcal{P}_k. \end{aligned}$$

Формулы (3.4) доказаны. Формулы (3.5) доказываются аналогичным образом. Лемма 2 доказана.

Пусть $\mathbf{L}_m$ – оператор, ассоциированный с блочной матрицей Якоби $\mathbf{J}_m$. Бесконечный столбец

$$\mathbf{u} = \text{col}(u_0, u_1, u_2, \dots), \quad u_k \in \mathbb{C}^m$$

(не обязательно принадлежащий $\ell^2(\mathbb{C}^m)$), называется *формальным дефектным вектором* оператора $\mathbf{L}_m$ в точке i (соответственно $-i$), если

$$\mathbf{J}_m \mathbf{u} = i \mathbf{u} \quad (\text{соответственно } \mathbf{J}_m \mathbf{u} = -i \mathbf{u}).$$

Множество формальных дефектных векторов в точке i (соответственно $-i$) образует линейное пространство, которое мы обозначим через $\mathcal{F}_+$ (соответственно через $\mathcal{F}_-$).

В условиях теоремы 3 из (3.3) следует, что столбцы бесконечной матрицы $\mathbf{P}_+$ (соответственно $\mathbf{P}_-$) являются формальными дефектными векторами оператора $\mathbf{L}_m$ в точке i (соответственно $-i$). Более того, нетрудно убедиться в том, что столбцы матрицы $\mathbf{P}_+$ образуют базис в пространстве $\mathcal{F}_+$, а столбцы матрицы $\mathbf{P}_-$ образуют базис в пространстве $\mathcal{F}_-$. Таким образом, в условиях теоремы 3

$$\mathcal{F}_+ = \{\mathbf{P}_+ \varphi : \varphi \in \mathbb{C}^m\}, \quad \mathcal{F}_- = \{\mathbf{P}_- \varphi : \varphi \in \mathbb{C}^m\}.$$

Каждый дефектный вектор (см. (1.2)) является и формальным дефектным вектором. Поэтому имеют место включения $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{F}_+$, $\mathcal{H}_- \subset \mathcal{F}_-$. Формальный дефектный вектор является дефектным вектором тогда и только тогда, когда он принадлежит пространству $\ell^2(\mathbb{C}^m)$. Таким образом,

$$\mathcal{H}_\pm = \{\mathbf{P}_\pm \varphi : \varphi \in \mathbb{C}^m, \mathbf{P}_\pm \varphi \in \ell^2(\mathbb{C}^m)\}.$$

Воспользовавшись (3.1), получим

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\pm} &= \text{col}((\mathbf{P}_{\pm})_0, (\mathbf{P}_{\pm})_1, (\mathbf{P}_{\pm})_2, \dots), \\ \mathbf{P}_{\pm}\varphi &= \text{col}((\mathbf{P}_{\pm})_0\varphi, (\mathbf{P}_{\pm})_1\varphi, (\mathbf{P}_{\pm})_2\varphi, \dots).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что вектор $\mathbf{P}_{\pm}\varphi \in \ell^2(\mathbb{C}^m)$ тогда и только тогда, когда существует константа $C > 0$ такая, что для всех $n \geq 0$ выполняется неравенство

$$\varphi^* \left(\sum_{l=0}^n (\mathbf{P}_{\pm})_l^* (\mathbf{P}_{\pm})_l \right) \varphi < C.$$

Поэтому дефектные пространства $\mathcal{K}_{\pm}$ можно описать так:

$$\mathcal{K}_{\pm} = \left\{ \mathbf{P}_{\pm}\varphi : \varphi \in \mathbb{C}^m, \varphi^* \left(\sum_{l=0}^n (\mathbf{P}_{\pm})_l^* (\mathbf{P}_{\pm})_l \right) \varphi < C \right\}.$$

Отсюда и из леммы 2 имеем

$$\mathcal{K}_{+} = \left\{ \mathbf{P}_{+}\varphi : \varphi \in \mathbb{C}^m, \varphi^* \left(\prod_{k=0}^{\overrightarrow{n}} \mathcal{P}_k^* R_k \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} R_k \mathcal{P}_k \right) \varphi < C \right\}, \quad (3.6)$$

$$\mathcal{K}_{-} = \left\{ \mathbf{P}_{-}\varphi : \varphi \in \mathbb{C}^m, \varphi^* \left(\prod_{k=0}^{\overrightarrow{n}} R_k \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} R_k \right) \varphi < C \right\}. \quad (3.7)$$

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда при $n \geq 0$ матричные произведения

$$\prod_{k=0}^{\overrightarrow{n}} \mathcal{P}_k^* R_k \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} R_k \mathcal{P}_k, \quad \prod_{k=0}^{\overrightarrow{n}} R_k \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} R_k$$

являются диагональными матрицами

$$\prod_{k=0}^{\overrightarrow{n}} \mathcal{P}_k^* R_k \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} R_k \mathcal{P}_k = \text{diag}(\gamma_1(n), \dots, \gamma_q(n), \gamma_{q+1}(n), \dots, \gamma_m(n)), \quad (3.8)$$

$$\prod_{k=0}^{\overrightarrow{n}} R_k \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} R_k = \text{diag}(\delta_1(n), \dots, \delta_p(n), \delta_{p+1}(n), \dots, \delta_m(n)). \quad (3.9)$$

Более того, элементы $\gamma_1(n), \dots, \gamma_q(n)$ (соответственно элементы $\delta_1(n), \dots, \delta_p(n)$) положительны и ограничены сверху по n , а элементы $\gamma_{q+1}(n), \dots, \gamma_m(n)$ (соответственно элементы $\delta_{p+1}(n), \dots, \delta_m(n)$) положительны и неограничены сверху по n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем некоторые предварительные замечания. Пусть дана диагональная матрица

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q, \lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_m)$$

и матрица $\mathcal{P}$ определена в (2.8). Тогда

$$\mathcal{P}^* \Lambda \mathcal{P} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q, \lambda_{p+1}, \lambda_{q+1}, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_p, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_m).$$

Итак, матрица $\mathcal{P}^* \Lambda \mathcal{P}$ получается из матрицы Λ циклической перестановкой диагональных элементов от $(q+1)$ -го до $(p+1)$ -го.

Теперь исследуем структуру произведения

$$\prod_{k=0}^{\overrightarrow{n}} \mathcal{P}_k^* R_k \cdot \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} R_k \mathcal{P}_k = \mathcal{P}_0^* R_0 \cdots (\mathcal{P}_{n-1}^* R_{n-1} (\mathcal{P}_n^* R_n^2 \mathcal{P}_n) R_{n-1} \mathcal{P}_{n-1}) \cdots R_0 \mathcal{P}_0.$$

Рассмотрим случай, когда $p - q = 1$. Из (2.5) имеем

$$R_n^2 = \text{diag} \left(1 + \frac{1}{n^2}, \dots, 1 + \frac{1}{n^2}, 1 + \frac{1}{n^2}, 2, 2, \dots, 2 \right), \quad n \geq 1.$$

Отсюда и из равенства $\mathcal{P}_n = e^{i\theta} \mathcal{P}$, $n > 1$, следует, что

$$\mathcal{P}_n^* R_n^2 \mathcal{P}_n = \mathcal{P}^* R_n^2 \mathcal{P} = \text{diag} \left(1 + \frac{1}{n^2}, \dots, 1 + \frac{1}{n^2}, 2, 1 + \frac{1}{n^2}, 2, \dots, 2 \right).$$

Аналогичным образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{n-1}^* R_{n-1} (\mathcal{P}_n^* R_n^2 \mathcal{P}_n) R_{n-1} \mathcal{P}_{n-1} &= \text{diag} \left(\prod_{k=n-1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2} \right), \dots, \prod_{k=n-1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2} \right), \right. \\ &\quad \left. 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2} \right), \left(1 + \frac{1}{(n-1)^2} \right) \cdot 2, 2^2, \dots, 2^2 \right). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{n-2}^* R_{n-2} (\mathcal{P}_{n-1}^* R_{n-1} (\mathcal{P}_n^* R_n^2 \mathcal{P}_n) R_{n-1} \mathcal{P}_{n-1}) R_{n-2} \mathcal{P}_{n-2} \\ = \text{diag} \left(\prod_{k=n-2}^n \left(1 + \frac{1}{k^2} \right), \dots, \prod_{k=n-2}^n \left(1 + \frac{1}{k^2} \right), \right. \\ \left. \left(1 + \frac{1}{(n-1)^2} \right) \cdot 2^2, \left(1 + \frac{1}{(n-2)^2} \right) \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2} \right), 2^3, \dots, 2^3 \right). \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{n-3}^* R_{n-3} (\mathcal{P}_{n-2}^* R_{n-2} (\mathcal{P}_{n-1}^* R_{n-1} (\mathcal{P}_n^* R_n^2 \mathcal{P}_n R_{n-1} \mathcal{P}_{n-1})) R_{n-2} \mathcal{P}_{n-2}) R_{n-3} \mathcal{P}_{n-3} \\ = \text{diag} \left(\prod_{k=n-3}^n \left(1 + \frac{1}{k^2} \right), \dots, \prod_{k=n-3}^n \left(1 + \frac{1}{k^2} \right), \right. \\ \left. \left(1 + \frac{1}{(n-2)^2} \right) \cdot 2^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2} \right), \left(1 + \frac{1}{(n-3)^2} \right) \left(1 + \frac{1}{(n-1)^2} \right) \cdot 2^2, \right. \\ \left. 2^4, \dots, 2^4 \right). \end{aligned}$$

Продолжая таким образом, получим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0^* R_0 \cdots (\mathcal{P}_{n-1}^* R_{n-1} (\mathcal{P}_n^* R_n^2 \mathcal{P}_n) R_{n-1} \mathcal{P}_{n-1}) \cdots R_0 \mathcal{P}_0 \\ = \text{diag} \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2} \right), \dots, \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2} \right), \prod_{k=1}^n \alpha_{k,n}^{(1)}, \prod_{k=1}^n \alpha_{k,n}^{(2)}, 2^n, \dots, 2^n \right). \end{aligned}$$

Здесь при четном n и $1 \leq k \leq n$

$$\alpha_{k,n}^{(1)} = \begin{cases} 2, & \text{если } k \text{ четное;} \\ 1 + \frac{1}{k^2}, & \text{если } k \text{ нечетное;} \end{cases} \quad \alpha_{k,n}^{(2)} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{k^2}, & \text{если } k \text{ четное;} \\ 2, & \text{если } k \text{ нечетное;} \end{cases}.$$

При нечетном n и $1 \leq k \leq n$

$$\alpha_{k,n}^{(1)} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{k^2}, & \text{если } k \text{ четное;} \\ 2, & \text{если } k \text{ нечетное;} \end{cases} \quad \alpha_{k,n}^{(2)} = \begin{cases} 2, & \text{если } k \text{ четное;} \\ 1 + \frac{1}{k^2}, & \text{если } k \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Отсюда и из сходимости произведения $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + 1/k^2)$ следует, что

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_0^* R_0 \cdots (\mathcal{P}_{n-1}^* R_{n-1} (\mathcal{P}_n^* R_n^2 \mathcal{P}_n) R_{n-1} \mathcal{P}_{n-1}) \cdots R_0 \mathcal{P}_0 \\ &= \text{diag} \left(\underbrace{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right), \dots, \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)}_{\text{ограничены по } n}, \underbrace{\prod_{k=1}^n \alpha_{k,n}^{(1)}, \prod_{k=1}^n \alpha_{k,n}^{(2)}, 2^n, \dots, 2^n}_{\text{неограничены по } n} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, доказаны утверждения леммы 3 относительно произведения (3.8) при условии $p - q = 1$. При условии $p - q > 1$ доказательство проводится аналогичным образом. Утверждения леммы 3 относительно произведения (3.9) следуют из (3.7) и очевидного равенства

$$\overrightarrow{\prod_{k=0}^n R_k} \overleftarrow{\prod_{k=0}^n R_k} = \prod_{k=0}^n R_k^2 = \text{diag} \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right), \dots, \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right), 2^n, \dots, 2^n \right).$$

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Для $s = p$ или $s = q$ обозначим $\mathbb{C}_s^m = \{\text{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_s, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^m\}$. Тогда

$$\mathbf{P}_+ \varphi \in \mathcal{K}_+ \iff \varphi \in \mathbb{C}_q^m, \quad \mathbf{P}_- \varphi \in \mathcal{K}_- \iff \varphi \in \mathbb{C}_p^m. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем первое из равенств (3.10). Пусть вектор $\mathbf{P}_+ \varphi \in \mathcal{K}_+$. С учетом (3.8) имеем

$$\begin{aligned} & \varphi^* \left(\overrightarrow{\prod_{k=0}^n \mathcal{P}_k^* R_k} \overleftarrow{\prod_{k=0}^n R_k \mathcal{P}_k} \right) \varphi = \varphi^* \text{diag}(\gamma_1(n), \dots, \gamma_q(n), \gamma_{q+1}(n), \dots, \gamma_m(n)) \varphi \\ &= |\varphi_1|^2 \gamma_1(n) + \dots + |\varphi_q|^2 \gamma_q(n) + |\varphi_{q+1}|^2 \gamma_{q+1}(n) + \dots + |\varphi_m|^2 \gamma_m(n). \end{aligned}$$

В силу (3.6) получаем, что

$$|\varphi_1|^2 \gamma_1(n) + \dots + |\varphi_q|^2 \gamma_q(n) + |\varphi_{q+1}|^2 \gamma_{q+1}(n) + \dots + |\varphi_m|^2 \gamma_m(n) < C.$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что $\varphi_{q+1} = \dots = \varphi_m = 0$, т.е. $\varphi \in \mathbb{C}_q^m$.

Пусть теперь $\varphi \in \mathbb{C}_p^m$. По лемме 3 имеем

$$\varphi^* \left(\overrightarrow{\prod_{k=0}^n R_k} \overleftarrow{\prod_{k=0}^n R_k} \right) \varphi = |\varphi_1|^2 \gamma_1(n) + \dots + |\varphi_q|^2 \gamma_q(n) < C.$$

Отсюда и из (3.6) следует, что $\mathbf{P}_+ \varphi \in \mathcal{K}_+$ и первое равенство (3.10) доказано. Аналогичным образом доказывается второе равенство (3.10). Лемма 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда первое утверждение теоремы 3 немедленно следует из леммы 4. Второе утверждение теоремы 3 является очевидным следствием первого.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорему 2 можно рассматривать как вырожденный случай теоремы 3. А именно, если в формулировке и доказательстве теоремы 3 положить $\mathcal{P} = I$, $\theta = 0$ (см. (2.8) и (2.9)) и сделать очевидные упрощения, то получим формулировку и доказательство теоремы 2.

Список литературы

- [1] М. Г. Крейн, “Бесконечные J матрицы и матричная проблема моментов”, *Докл. АН СССР*, **69**:3 (1949), 125–128.
- [2] М. Г. Крейн, “Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) ”, *Укр. матем. журн.*, **1**:2 (1949), 3–66; англ. пер.: M. G. Krein, “Fundamental aspects of the representation theory of Hermitian operators with deficiency index (m, m) ”, *Amer. Math. Soc. Transl.* **2**, **97** (1971), 75–143.
- [3] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965; англ. пер.: Yu. M. Berezans’kii, *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [4] В. И. Коган, “Об операторах, порожденных l_p -матрицами в случае максимальных индексов дефекта”, *Теория функций, функц. анализ и их прил.*, 1970, № 11, 103–107.
- [5] А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, “Признаки вполне неопределенности яковиевых матриц с матричными элементами”, *Функц. анализ и его прил.*, **35**:4 (2001), 32–37; англ. пер.: A. G. Kostyuchenko, K. A. Mirzoev, “Complete indefiniteness tests for Jacobi matrices with matrix entries”, *Funct. Anal. Appl.*, **35**:4 (2001), 265–269.
- [6] Ю. М. Дюкарев, “О дефектных числах симметрических операторов, порожденных блочными матрицами Якоби”, *Матем. сб.*, **197**:8 (2006), 73–100; англ. пер.: Yu. M. Dyukarev, “Deficiency numbers of symmetric operators generated by block Jacobi matrices”, *Sb. Math.*, **197**:8 (2006), 1177–1203.
- [7] И. В. Ковалишина, В. П. Потапов, “Радиусы круга Вейля в матричной задаче Неванлинны-Пика”, *Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения*, Наукова думка, Киев, 1981, 25–49.

Ю. М. Дюкарев (Yu. M. Dyukarev)
 Харьковский национальный университет
 им. В. Н. Каразина, Украина
E-mail: Yury.M.Dyukarev@univer.kharkov.ua

Поступила в редакцию
 24.08.2009 и 11.04.2010