Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Микитюк, Инвариантные гиперкэлеровы структуры на кокасательных расслоениях эрмитовых симметрических пространств, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 8, 113–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm763>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 16:18:44

УДК 514.765.1+512.813.4

И. В. Микитюк

Инвариантные гиперкэлеровы структуры на кокасательных расслоениях эрмитовых симметрических пространств

Пусть G/K – неприводимое эрмитово симметрическое пространство компактного типа со стандартной однородной комплексной структурой. Тогда вещественное симплектическое многообразие $(T^*(G/K), \Omega)$ имеет естественную комплексную структуру J^- . В работе построены все G -инвариантные кэлеровы структуры (J, Ω) на G -инвариантных областях в $T^*(G/K)$, антикоммутирующие с J^- . Каждая такая гиперкомплексная структура вместе с соответствующей метрикой определяет гиперкэлерову структуру. Как приложение получено новое доказательство теоремы Хариш-Чандры–Мура для эрмитовых симметрических пространств.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Введение

Пусть $M = G/K$ – неприводимое эрмитово симметрическое пространство компактного типа с однородной метрикой $\mathbf{g}_M$. Так как M – однородное комплексное многообразие, то его кокасательное расслоение T^*M имеет естественную комплексную структуру. Используя метрику $\mathbf{g}_M$, мы можем отождествить кокасательное и касательное расслоения и таким образом получить комплексную структуру на TM , относительно которой нулевое сечение $M \subset TM$ комплексно. Эта структура J^- отлична от стандартной комплексной структуры J^+ на TM , индуцированной таковой структурой на M .

С другой стороны, кокасательное расслоение $T^*M \simeq TM$ является симплектическим многообразием с канонической симплектической формой Ω . В работе явно описаны все G -инвариантные кэлеровы структуры (J, Ω) (с кэлеровой формой Ω) на G -инвариантных областях $D \subset TM$, антикоммутирующие с J^- (теорема 4.12). Фактически каждая полученная гиперкомплексная структура вместе с соответствующей метрикой $\mathbf{g}$ определяет гиперкэлерову структуру.

Если область D содержит нулевое сечение M , то ограничение гиперкэлеровой метрики $\mathbf{g}$ на M есть данная однородная метрика $\mathbf{g}_M$ с точностью до постоянного множителя (можно сделать этот множитель равным единице, используя для отождествления T^*M и TM однородную метрику на M , пропорциональную $\mathbf{g}_M$). Такие гиперкэлеровы структуры были построены в работе [1] с помощью твистор-метода и классификации шаг за шагом симметрических пространств, в [2] – с помощью Nahm-уравнения и в [3] (для пространств классических групп)

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального научного фонда Германии (грант № SFB 237).

– с помощью деформации так называемой адаптированной комплексной структуры на TM . В работе [4] Бигар и Годюшон нашли явную формулу для этих гиперкэлеровых метрик в терминах некоторых оператор-функций $P: \mathfrak{m} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{m})$ на пространстве $\mathfrak{m} \simeq T_o(G/K)$, $o = \{K\}$. Эти гиперкэлеровы структуры являются глобальными. Наши дополнительные структуры не определены на нулевом сечении M . Так что мы не можем говорить об ограничении соответствующих гиперкэлеровых метрик на M как в [4]. Тем не менее полученные выражения для P и потенциальных функций обобщают соответствующие формулы работ [4], [5].

Для доказательств в работах [3]–[5] использовано разложение $T(TM)$ в сумму горизонтальной и вертикальной составляющих, индуцированное связностью Леви-Чивита на M . Наш подход основан на том факте, что $T(G/K)$ является редуцированным многообразием для гамильтонова действия группы K на TG (справа). Мы можем существенно упростить все выкладки, работая, как в [6], [7], на тривиальном векторном расслоении $G \times \mathfrak{m}$, которое является поверхностью уровня соответствующего отображения момента, и используя естественное G -инвариантное разложение $T(G \times \mathfrak{m})$, обычное для теории алгебр Ли. Как приложение в работе получено новое простое доказательство хорошо известной теоремы Хариш-Чандры–Мура об ограниченных системах корней эрмитовых симметрических пространств.

Часть этой работы была выполнена автором во время его пребывания в Рурском университете (Бохум, Германия) в ноябре–декабре 2001 года. Автор выражает благодарность А. Т. Хаклберри за поддержку и гостеприимство. Кроме того, автор выражает признательность А. М. Степину за плодотворные обсуждения.

§ 2. G -инвариантные кэлеровы структуры на $T(G/K)$

2.1. Антиккоммутирующие структуры. Напомним некоторые факты о гиперкомплексных и гиперкэлеровых структурах (см., например, [4], [8], [9]). Пусть N – гладкое вещественное многообразие с комплексной структурой J и симплектической 2-формой ω (все объекты в нашей работе считаем гладкими, если не оговорено противное). Для произвольного векторного расслоения L над N обозначим через ΓL множество его гладких сечений. Для тензора J обозначим через $F(J) \subset T^{\mathbb{C}}N$ его (инволютивное) комплексное распределение $(0, 1)$ -векторов, т.е. $\Gamma F(J) = \{X + iJX, X \in \Gamma(TN)\}$. Нам понадобятся несколько определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пара (J, ω) задает *кэлерову структуру* на N , если

- (1) замкнутая 2-форма ω инвариантна относительно J :

$$\omega(JX, JY) = \omega(X, Y) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM);$$

- (2) билинейная форма $\mathbf{g} = \mathbf{g}(J, \omega)$, где $\mathbf{g}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(JX, Y)$, симметрична и положительно определена.

Мы будем обозначать такую кэлерову структуру также парой $(J, \mathbf{g})$, поскольку $\omega(X, Y) = \mathbf{g}(-JX, Y)$, т.е. $\omega = \omega(J, \mathbf{g})$.

Пусть $\Pi: \tilde{N} \rightarrow N$ – субмерсия многообразия $\tilde{N}$ на N и $\mathcal{K} \subset T\tilde{N}$ – ядро касательного отображения Π_* . Пусть $\mathcal{T}$ – некоторое дополняющее распределение к $\mathcal{K}$ в $T\tilde{N}$, т.е. $\mathcal{K} \oplus \mathcal{T} = T\tilde{N}$. Для комплексной структуры J на N существует единственный (гладкий) $(1, 1)$ -тензор $\tilde{J}$ на $\tilde{N}$ такой, что

$$\tilde{J}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}, \quad \tilde{J}(\mathcal{K}) = 0, \quad \Pi_* \circ \tilde{J} = J \circ \Pi_* \quad \text{на } \mathcal{T}. \quad (2.1)$$

Аналогично, для $(0, 1)$ -распределения $F(J)$ существует единственное комплексное распределение $\mathcal{F}(J) \subset T^{\mathbb{C}}\tilde{N}$, содержащее ядро $\mathcal{K}$ и такое, что $\Pi_*(\mathcal{F}(J)) = F(J)$. Ясно, что это распределение инволютивно.

ЛЕММА 2.2. *Форма ω инвариантна относительно J тогда и только тогда, когда $(1, 1)$ -тензор J кососимметричен относительно формы ω :*

$$\omega(JX, Y) = \omega(X, -JY) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Тензор J кососимметричен (относительно формы ω) тогда и только тогда, когда $\omega(F(J), F(J)) = 0$, и симметричен тогда и только тогда, когда $\omega(F(J), \overline{F(J)}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что $J^2 = -1$ и

$$\omega(X + iJX, Y \pm iJY) = i[\omega(JX, Y) \pm \omega(X, JY)] + [\omega(X, Y) \mp \omega(JX, JY)],$$

получаем утверждения леммы.

Отметим следующий факт:

СЛЕДСТВИЕ 2.2.1. *Тензор J кососимметричен относительно формы ω тогда и только тогда, когда $(\Pi^*\omega)(\mathcal{F}(J), \mathcal{F}(J)) = 0$, и симметричен тогда и только тогда, когда $(\Pi^*\omega)(\mathcal{F}(J), \overline{\mathcal{F}(J)}) = 0$.*

Следующее утверждение хорошо известно (см. [10; лемма 4.3]).

ЛЕММА 2.3. *Пара (J, ω) является кэлеровой структурой на N тогда и только тогда, когда $\omega(F(J), F(J)) = 0$ и $-\omega(Z, \overline{Z}) > 0$ для всех ненулевых локальных векторных полей $Z \in \Gamma_{\text{loc}}F(J)$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пара (J_1, J_2) , состоящая из двух антикоммутирующих комплексных структур J_1 и J_2 , задает гиперкомплексную структуру на N . (Тогда $J_3 = J_1J_2$ — также комплексная структура на N , доказательство см. в [8].)

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Почти комплексные тензоры J_1 и J_2 на N антикоммутируют тогда и только тогда, когда антикоммутируют тензоры $\tilde{J}_1$ и $\tilde{J}_2$ на $\tilde{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6 [4]. Тройка $(\mathbf{g}, J_1, J_2)$, состоящая из римановой метрики $\mathbf{g}$ и двух антикоммутирующих комплексных структур J_1 и J_2 на N , задает гиперкомплексную структуру на N , как только пары $(J_1, \mathbf{g})$ и $(J_2, \mathbf{g})$ являются кэлеровыми. (Тогда и пара $(J_3 = J_1J_2, \mathbf{g})$ является кэлеровой.)

Для гиперкэлеровой структуры $(\mathbf{g}, J_1, J_2)$ обозначим через ω_j кэлерову форму, соответствующую J_j , $j = 1, 2, 3$. Ясно, что эта гиперкэлерова структура полностью определяется любой парой $(J_k, (J_j, \omega_j))$, $k \neq j$. Так как тензоры J_k и J_j антикоммутируют, то тензор J_k симметричен относительно формы ω_j (в то время как J_j кососимметричен). Ясно, что $\omega_k(X, Y) = \omega_j(J_kJ_jX, Y)$, $X, Y \in \Gamma(TN)$, $k \neq j$. Следующая простая лемма определяет гиперкэлерову структуру в этих терминах.

ЛЕММА 2.7. Пусть $(J', (J, \omega))$ — пара, в которой J', J — антикоммутирующие комплексные структуры, а (J, ω) — кэлерова структура на N с соответствующей эрмитовой метрикой $\mathbf{g} = \mathbf{g}(J, \omega)$. Тройка $(\mathbf{g}, J', J)$ задает гиперкэлерову структуру на N тогда и только тогда, когда

- (1) тензор J' симметричен относительно ω ,
- (2) 2-форма ω' , где $\omega'(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(J'JX, Y) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TN)$, замкнута.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $J'J = -JJ'$, из (1) вытекает, что

$$\omega'(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(J'JX, Y) = \omega(X, -JJ'Y) = \omega(JJ'Y, X) = -\omega'(Y, X),$$

т.е. билинейная форма ω' кососимметрична. Теперь, чтобы доказать лемму, достаточно проверить, что форма $\omega' - J'$ -инвариантна и $\mathbf{g}(X, Y) = \omega'(J'X, Y)$. Эти свойства вытекают из цепочек равенств

$$\begin{aligned} \omega'(J'X, J'Y) &\stackrel{\text{def}}{=} \omega(J'JJ'X, J'Y) = \omega(JX, J'Y) = \omega(J'JX, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \omega'(X, Y), \\ \mathbf{g}(X, Y) &\stackrel{\text{def}}{=} \omega(JX, Y) = \omega(J'JJ'X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \omega'(J'X, Y). \end{aligned}$$

Так как ядра $(1, 1)$ -тензоров $\tilde{J}'$, $\tilde{J}$ и форм $\Pi^*\omega'$, $\Pi^*\omega$ совпадают с $\mathcal{K}$, то из определений тензоров $\tilde{J}'$ и $\tilde{J}$ (см. (2.1)) следует, что

$$(\Pi^*\omega')(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (\Pi^*\omega)(\tilde{J}'\tilde{J}\tilde{X}, \tilde{Y}) \quad \forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(T\tilde{N}). \quad (2.2)$$

2.2. G -инвариантные кэлеровы структуры $(J(P), \Omega)$. Пусть $M = G/K$ — симметрическое пространство с вещественной редуктивной связной группой Ли G и компактной подгруппой K . Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{k}$ — алгебры Ли групп Ли G и K соответственно,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}. \quad (2.3)$$

Предположим, что существует невырожденная $\text{Ad}(G)$ -инвариантная билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}$ такая, что ее ограничение $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{m}}$ есть положительно определенная форма и $\mathfrak{k} \perp \mathfrak{m}$. Эта форма определяет G -инвариантную риманову метрику $\mathbf{g}_M$ на $M = G/K$. Метрика $\mathbf{g}_M$ позволяет отождествить кокасательное расслоение T^*M и касательное расслоение TM , и, таким образом, мы можем говорить о канонической 1-форме θ на TM . Форма θ и симплектическая форма $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} d\theta$ инвариантны относительно естественного действия группы G на TM .

Так как $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ — $\text{Ad}(K)$ -инвариантное (ортогональное) разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$, мы можем рассмотреть тривиальное векторное расслоение $G \times \mathfrak{m}$ и на нем два коммутирующих действия групп Ли: действие группы Ли G слева $l_h: (g, w) \mapsto (hg, w)$ и действие группы Ли K справа $r_k: (g, w) \mapsto (gk, \text{Ad}_{k^{-1}} w)$. Пусть $\pi: G \times \mathfrak{m} \rightarrow G \times_K \mathfrak{m}$ — естественная проекция. Хорошо известно, что пространства $G \times_K \mathfrak{m}$ и TM изоморфны. Используя соответствующий G -эквивариантный диффеоморфизм $\varphi: G \times_K \mathfrak{m} \rightarrow TM$, $[(g, w)] \mapsto \frac{d}{dt}|_0 g \exp(tw)K$, и проекцию π , определим G -эквивариантную субмерсию $\Pi: G \times \mathfrak{m} \rightarrow TM$, $\Pi = \varphi \circ \pi$. Пусть ξ^l — левоинвариантное векторное поле на G , определяемое вектором $\xi \in \mathfrak{g}$. Как следует из [6; лемма 2.3],

$$(\Pi^*\theta)_{(g, w)}(\xi^l(g), u) = \langle w, \xi \rangle, \quad (2.4)$$

$$(\Pi^*\Omega)_{(g, w)}((\xi_1^l(g), u_1), (\xi_2^l(g), u_2)) = \langle \xi_2, u_1 \rangle - \langle \xi_1, u_2 \rangle - \langle w, [\xi_1, \xi_2] \rangle, \quad (2.5)$$

где $g \in G$, $w \in \mathfrak{m}$, $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$, $u, u_1, u_2 \in \mathfrak{m} = T_w \mathfrak{m}$. Так как Ω — симплектическая форма, ядро $\mathcal{K} \subset T(G \times \mathfrak{m})$ 2-формы $\Pi^*\Omega$ совпадает с ядром отображения Π_* .

Пусть D — открытое связное G -инвариантное подмножество в TM . Обозначим через W единственное $\text{Ad}(K)$ -инвариантное открытое подмножество в $\mathfrak{m}$ такое, что

$\Pi^{-1}(D) = G \times W$. Пусть $\text{Eqv}(W)$ – множество всех гладких K -эквивариантных отображений $A: W \rightarrow \text{End}(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$, $w \mapsto A_w$, т.е. таких, что

$$\text{Ad}_k \circ A_w \circ \text{Ad}_{k^{-1}} = A_{\text{Ad}_k w} \quad \text{на } \mathfrak{m} \text{ для всех } w \in W, \quad k \in K. \quad (2.6)$$

Обозначим через $\text{Alm}(W)$ множество всех отображений $P \in \text{Eqv}(W)$ таких, что оператор $P_w: \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ и его вещественная часть $\text{Re } P_w: \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$ невырождены для каждого $w \in W$. Такое K -эквивариантное отображение $P \in \text{Alm}(W)$ определяет комплексное (лево) G -инвариантное распределение $\mathcal{F}(P) \subset T^{\mathbb{C}}(G \times W)$, порожденное (лево) G -инвариантными векторными полями $\xi^L, \xi \in \mathfrak{m}$, и $\zeta^L, \zeta \in \mathfrak{k}$, на $G \times W$, где

$$\xi^L(g, w) = (\xi^l(g), i P_w(\xi)), \quad \zeta^L(g, w) = (\zeta^l(g), [w, \zeta]).$$

Распределение $\mathcal{F}(P)$ (право) K -инвариантно в силу условий (2.6) и ввиду того, что векторные поля $\zeta^L, \zeta \in \mathfrak{k}$, порождают (право) K -инвариантное распределение (ядро) $\mathcal{H}$. Поэтому $F(P) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_*(\mathcal{F}(P))$ – корректно определенное (гладкое) комплексное подраспределение в $T^{\mathbb{C}}D$ ($\mathcal{H}^{\mathbb{C}} \subset \mathcal{F}(P)$), для которого $F(P) + \overline{F(P)} = T^{\mathbb{C}}D$ и $F(P) \cap \overline{F(P)} = 0$. Другими словами, отображение P определяет почти комплексную структуру $J(P)$ на $D \subset TM$ с распределением $F(P)$ ее $(0, 1)$ -векторов.

Для векторного поля $X \in \Gamma(TW)$ и отображения $A \in \text{Eqv}(W)$ обозначим через $L_X A$ производную A вдоль поля X , т.е. $(L_X A)_w \stackrel{\text{def}}{=} (d/dt)_0 A_{w+tX(w)} \in \text{End}(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$. Продолжим это определение на комплексные векторные поля по линейности. Каждый вектор $\xi \in \mathfrak{m}$ определяет векторное поле $P\xi$ на W по правилу $(P\xi)_w = P_w(\xi)$. Сейчас мы представим результат, который будет эффективно использован в оставшейся части работы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8 [6]. Пусть $M = G/K$ – риманово симметрическое пространство. Почти комплексная структура $J(P)$ на области $D = \Pi(G \times W) \subset TM$ является

- (1) интегрируемой тогда и только тогда, когда для всех (фиксированных) векторов $\xi, \eta \in \mathfrak{m}$ и $w \in W$

$$(L_{P\xi} P)_w(\eta) - (L_{P\eta} P)_w(\xi) = -[w, [\xi, \eta]], \quad (2.7)$$

- (2) кэлеровой структурой с кэлеровой формой Ω тогда и только тогда, когда выполнено условие (1) и для каждого $w \in W$ эндоморфизм P_w симметричен (относительно билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{m}$), а его вещественная часть $\text{Re } P_w$ положительно определена.

Для каждой G -инвариантной кэлеровой структуры J на D с кэлеровой формой Ω существует единственное отображение $P \in \text{Alm}(W)$ такое, что $J = J(P)$.

Отметим следующий факт.

СЛЕДСТВИЕ 2.8.1. Если структура $J(P)$ интегрируема, то таковыми являются структуры $J(-P)$ и $J(\overline{P})$.

СЛЕДСТВИЕ 2.8.2. Предположим, что $(J(P), \Omega)$ – кэлорова структура на D . Если $0 \in W$ и алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста, то $P_0 = \psi_0 \cdot \text{Id}_{\mathfrak{m}}$, где $\text{Re } \psi_0 \in \mathbb{R}^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathfrak{g}$ – простая алгебра, то $\mathfrak{m}$ – простой $\text{Ad}(K)$ -модуль [11; (8.5.1)]. Так как P_0 – симметричный эндоморфизм, который коммутирует с каждым автоморфизмом $\text{Ad}_k|_{\mathfrak{m}}$, $k \in K$ (условие (2.6)), то $P_0 = \psi_0 \cdot \text{Id}_{\mathfrak{m}}$ для некоторого числа $\psi_0 \in \mathbb{C}$.

§3. Инвариантные кэлеровы структуры на эрмитовых симметрических пространствах

Мы продолжаем изложение, используя прежние обозначения, но в этом параграфе предположим дополнительно, что G/K – эрмитово симметрическое пространство, т.е. существует эндоморфизм $I: \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$ со следующими свойствами:

- (1) $I^2 = -\text{Id}_{\mathfrak{m}}$;
- (2) $\text{Ad}_k I = I \text{Ad}_k$ на $\mathfrak{m} \quad \forall k \in K$;
- (3) форма $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{m}}$ I -инвариантна и

$$[I\xi, I\eta] = [\xi, \eta], \quad I[\zeta, \eta] = [\zeta, I\eta] \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{m}, \zeta \in \mathfrak{k}. \quad (3.1)$$

Такую тройку $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, I)$ мы будем называть *эрмитовой ортогональной симметрической алгеброй Ли*. Из (3.1) следует, что $[\xi^l + i(I\xi)^l, \eta^l + i(I\eta)^l] = 0 \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{m}$. Таким образом, комплексное подраспределение в $T^{\mathbb{C}}G$, порожденное векторными полями $\xi^l + i(I\xi)^l$, $\xi \in \mathfrak{m}$, инволютивно. Так как оно еще и (лево) G -инвариантно и (право) K -инвариантно, то его образ при канонической проекции $G \rightarrow G/K$ определяет G -инвариантную комплексную структуру на $M = G/K$.

3.1. Гиперкомплексные структуры на касательных расслоениях эрмитовых симметрических пространств. Теперь мы применим общие результаты §2 в специальной ситуации этого пункта. G -инвариантная комплексная структура на M индуцирует G -инвариантные комплексные структуры J^+ и J^- на TM и на $T^*M \simeq TM$ соответственно. Ясно, что распределение $F^{\pm} \subset T^{\mathbb{C}}(TM)$ $(0, 1)$ -векторов структуры $J^{\pm}$ совпадает с образом $\Pi_*(\mathcal{F}^{\pm})$, где $\mathcal{F}^{\pm}$ – (лево) G -инвариантное и (право) K -инвариантное подраспределение в $T^{\mathbb{C}}(G \times \mathfrak{m})$:

$$\mathcal{F}^{\pm}(g, w) = \{(\xi^l(g) + i(I\xi)^l(g), u \pm i(Iu)), \xi, u \in \mathfrak{m}\} \oplus \mathcal{K}(g, w). \quad (3.2)$$

Зафиксируем некоторое отображение $P \in \text{Alm}(W)$. Ясно, что отображение PI , $(PI)_w \stackrel{\text{def}}{=} P_w I$, также является элементом множества $\text{Alm}(W)$, поскольку группа $\text{Ad}(K)|_{\mathfrak{m}}$ коммутирует поэлементно с I .

ЛЕММА 3.1. *Если $J(P)$, $P \in \text{Alm}(W)$, – комплексная структура, то таковой является и структура $J(PI)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $F(P)$ – инволютивное распределение и эндоморфизм I не зависит от w , то из предложения 2.8 и соотношений (3.1) вытекает, что

$$(L_{P(I\xi)}P)_w(I\eta) - (L_{P(I\eta)}P)_w(I\xi) = -[w, [I\xi, I\eta]] = -[w, [\xi, \eta]]$$

на W для произвольных векторов $\xi, \eta \in \mathfrak{m}$, т.е. распределение $F(PI)$ инволютивно.

Чтобы описать определенные выше комплексные структуры в терминах их почти комплексных тензоров, рассмотрим два (лево) G -инвариантных и (право) K -инвариантных подраспределения $\mathcal{T}_h$ и $\mathcal{T}_v$ касательного расслоения $T(G \times W)$:

$$\mathcal{T}_h(g, w) = \{(\xi^l(g), 0), \xi \in \mathfrak{m}\}, \quad \mathcal{T}_v(g, w) = \{(0, u), u \in \mathfrak{m} = T_w W\}.$$

Положим $\mathcal{T} = \mathcal{T}_h \oplus \mathcal{T}_v$. Тогда $T(G \times W) = \mathcal{K} \oplus \mathcal{T}$. Отображение $(\xi^l(g), 0) \mapsto (0, \xi)$ определяет канонический изоморфизм пространств $\mathcal{T}_h(g, w)$ и $\mathcal{T}_v(g, w)$. Используя его, мы получаем, что $(1, 1)$ -тензоры $\tilde{J}^{\pm}$ и $\tilde{J}(P)$ на $G \times W$ (см. (2.1)) в точке (g, w) задаются формулами

$$\tilde{J}_{(g,w)}^{\pm}|_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \pm I \end{pmatrix}, \quad \tilde{J}_{(g,w)}(P)|_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} -R_w^{-1}S_w & -R_w^{-1} \\ R_w + S_w R_w^{-1}S_w & S_w R_w^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где $R = \operatorname{Re} P$, $S = \operatorname{Im} P$. Теперь нетрудно проверить, что тензоры $\tilde{J}^-$ и $\tilde{J}(P)$ антикоммутируют тогда и только тогда, когда $RI = IR$ и $SI = -IS$, т.е. ввиду замечания 2.5

$$J^- J(P) = -J(P) J^- \Leftrightarrow RI = IR, SI = -IS \Leftrightarrow IP = \overline{PI}. \quad (3.4)$$

Рассматривая почти комплексные структуры $J(P)$ и $J(PI)$ с вещественным отображением $P \in \operatorname{Alm}(W)$ (т.е. $\operatorname{Im} P = 0$), мы получаем, что

$$\tilde{J}_{(g,w)}(P)|_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & -P_w^{-1} \\ P_w & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{J}_{(g,w)}(PI)|_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & IP_w^{-1} \\ P_w I & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае $J(P)J(PI) = -J(PI)J(P)$. Установлен следующий результат:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $J(P)$, $P \in \operatorname{Alm}(W)$, — комплексная структура на D такая, что $\operatorname{Im} P = 0$. Тогда пара $(J(P), J(PI))$ задает гиперкомплексную структуру на D .

3.2. Гиперкэлэровы структуры на касательных расслоениях эрмитовых симметрических пространств. В этом пункте мы изучим свойства пары $(J^-, (J(P), \Omega))$, где $(J(P), \Omega)$ — кэлэрова структура на области $D \subset TM$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $(J(P), \Omega)$, $P \in \operatorname{Alm}(W)$, — кэлэрова структура на области D с эрмитовой метрикой $\mathbf{g} = \mathbf{g}(J(P), \Omega)$. Тройка $(\mathbf{g}, J^-, J(P))$ является гиперкэлэровой структурой (на D) тогда и только тогда, когда $IP = \overline{PI}$ на W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду соотношений (3.4) комплексные структуры J^- и $J(P)$ антикоммутируют тогда и только тогда, когда $IP = \overline{PI}$. Для пары $(J^-, J(P))$ антикоммутирующих комплексных структур почти комплексная структура $J' = J^- J(P)$ интегрируема [8]. Поэтому тройки $(\mathbf{g}, J^-, J(P))$ и $(\mathbf{g}, J^- J(P), J(P))$ являются гиперкомплексными структурами одновременно. Таким образом, чтобы доказать теорему, достаточно показать, что для пары $(J', (J, \Omega))$, где $J = J(P)$, выполнены условия (1) и (2) леммы 2.7.

Так как по определению форма Ω J -инвариантна и $JJ' = -J'J$, мы имеем тождества $\Omega(JJ'X, JY) = \Omega(J'X, Y)$ и $\Omega(X, JJ'(JY)) = \Omega(X, J'Y)$, где $X, Y \in \Gamma(TD)$. Другими словами, тензор J' симметричен относительно Ω тогда и только тогда, когда таковым является тензор JJ' . Но тензор $JJ' = J^-$ симметричен относительно Ω , поскольку $(\Pi^* \Omega)(\mathcal{F}^-, \overline{\mathcal{F}^-}) = 0$ (см. следствие 2.2.1). В самом деле, используя соотношение $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \perp \mathfrak{m}$, свойство (3) эндоморфизма I и определения (2.5), (3.2) для $\Pi^* \Omega$ и $\mathcal{F}^-$, мы получаем, что для всех $\xi_1, \xi_2, u_1, u_2 \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned} & (\Pi^* \Omega)((\xi_1^l + i(I\xi_1)^l, u_1 - i(Iu_1)), (\xi_2^l - i(I\xi_2)^l, u_2 + i(Iu_2))) \\ & = \langle \xi_2 - iI\xi_2, u_1 - iIu_1 \rangle - \langle \xi_1 + iI\xi_1, u_2 + iIu_2 \rangle = 0 - 0. \end{aligned}$$

Определим 1-форму θ' и тензор Ω' на D , положив для $X, Y \in \Gamma(TD)$

$$\theta'(X) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(-J^- X), \quad \Omega'(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \Omega(-J^- X, Y) = \Omega(J' J X, Y). \quad (3.5)$$

Поскольку симметричность тензора J^- относительно формы Ω уже доказана, мы имеем $\Omega'(X, Y) = -\Omega'(Y, X)$. Для доказательства замкнутости формы Ω' покажем, что $\Omega' = d\theta'$. В силу формул (3.3) и по определению формы θ

$$(\Pi^* \theta')_{(g,w)}(\xi^l(g), u) = \langle w, -I\xi_{\mathfrak{m}} \rangle = \langle Iw, \xi \rangle, \quad \xi \in \mathfrak{g}, \quad u \in \mathfrak{m}.$$

Применяя хорошо известную формулу $d\theta'(X, Y) = X\theta'(Y) - Y\theta'(X) - \theta'([X, Y])$ к форме $\Pi^*\theta'$, мы получаем, что для $\xi_1, \xi_2, u_1, u_2 \in \mathfrak{m}$

$$d(\Pi^*\theta')_{(g,w)}((\xi_1^l(g), u_1), (\xi_2^l(g), u_2)) = \langle \xi_2, Iu_1 \rangle - \langle \xi_1, Iu_2 \rangle, \quad (3.6)$$

поскольку $\langle Iw, [\xi_1, \xi_2] \rangle = 0$. Но, используя выражение (3.3) для почти комплексного тензора J^- , мы выведем из (2.2) следующую формулу для $(\Pi^*\Omega')|(\mathcal{T}_h \oplus \mathcal{T}_v)$:

$$\begin{aligned} (\Pi^*\Omega')((\xi_1^l, u_1), (\xi_2^l, u_2)) &= (\Pi^*\Omega)((-I\xi_1)^l, Iu_1), (\xi_2^l, u_2)) \\ &= \langle \xi_2, Iu_1 \rangle - \langle -I\xi_1, u_2 \rangle = \langle \xi_2, Iu_1 \rangle - \langle \xi_1, Iu_2 \rangle, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\xi_1, \xi_2, u_1, u_2 \in \mathfrak{m}$. Из (3.6) и (3.7) следует, что формы $d(\Pi^*\theta') = \Pi^*(d\theta')$ и $\Pi^*\Omega'$ совпадают при ограничении на распределение $\mathcal{T}_h \oplus \mathcal{T}_v$ и, следовательно, на всем касательном расслоении $T(G \times W) = \mathcal{K} \oplus \mathcal{T}_h \oplus \mathcal{T}_v$, поскольку $\mathcal{K}$ — ядро отображения Π_* . Поэтому $\Omega' = d\theta'$. Таким образом, для пары $(J^-J(P), (J(P), \Omega))$ выполнены условия (1) и (2) леммы 2.7; доказательство завершено.

Из доказательства теоремы 3.3 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.3.1. Пусть $P, \mathbf{g}$ такие же, как в теореме 3.3, и $IP = \bar{P}I$. Пусть θ' и Ω' — формы, заданные формулами (3.5). Тогда Ω' — кэлэрова форма кэлэровой структуры $(J^-J(P), \mathbf{g})$ и $\Omega' = d\theta'$.

Очевидно, что условие интегрируемости (2.7) для отображения P эквивалентно паре вещественных уравнений для его вещественной и мнимой частей R и S . Следующее предложение устанавливает более ограничительные условия на R и S , если пара $(J^-, (J(P), \Omega))$ задает гиперкэлэрову структуру.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть $(J(P), \Omega)$ — кэлэрова структура на D такая, что $IP = \bar{P}I$ на W . Тогда

$$(L_\xi(R + SR^{-1}S))_w(I\eta) = [[w, IR_w^{-1}\xi], \eta], \quad w \in W, \quad \xi, \eta \in \mathfrak{m}, \quad (3.8)$$

$$L_\xi(SR^{-1})\eta = L_\eta(SR^{-1})\xi, \quad w \in W, \quad \xi, \eta \in \mathfrak{m}. \quad (3.9)$$

Локально отображение $w \mapsto (SR^{-1})_w$ является касательным отображением некоторой вектор-функции со значениями в пространстве $\mathfrak{m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $J = J(P)$. Пусть $\mathbf{g}$ — эрмитова метрика, соответствующая паре (J, Ω) . В силу теоремы 3.3 тройка $(\mathbf{g}, J^-, J)$ — гиперкэлэрова структура, в частности, 2-форма $\omega_1 = \Omega^-, \Omega^-(\cdot, \cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \Omega(J^-J \cdot, \cdot)$ на D замкнута, а значит, таковой является и форма $\Pi^*\Omega^-$ на $G \times W$. Согласно (2.2) форма $(\Pi^*\Omega^-)(\cdot, \cdot) = (\Pi^*\Omega)(\tilde{J}^- \tilde{J} \cdot, \cdot)$. Поэтому для произвольных векторных полей $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ на $G \times W$ имеем

$$\sum_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}} \tilde{X}((\Pi^*\Omega)(\tilde{J}^- \tilde{Y}\tilde{Z}, \tilde{Z})) + \sum_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}} (\Pi^*\Omega)(\tilde{J}^- \tilde{X}\tilde{Z}, [\tilde{Y}, \tilde{Z}]) = 0 \quad (3.10)$$

(суммирование ведется по всем циклическим перестановкам $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$).

Полагая в формуле (3.10) $\tilde{X} = (0, \xi)$, $\tilde{Y} = (\eta^l, 0)$ и $\tilde{Z} = (\chi^l, 0)$ для (фиксированных) $\xi, \eta, \chi \in \mathfrak{m}$, мы получаем только два ненулевых члена в левой части формулы (3.10) (здесь все объекты лево G -инвариантны) и, следовательно,

$$(L_\xi \langle -I(R + SR^{-1}S)\eta, \chi \rangle)_w - \langle w, [-IR^{-1}\xi, [\eta, \chi]] \rangle = 0,$$

поскольку $\tilde{J}^- \tilde{J}(0, \xi) = ((-IR^{-1}\xi)^l, -ISR^{-1}\xi)$. Так как форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $\text{Ad}(G)$ -инвариантна и $IR = RI$, $IS = -IS$, мы выведем условие (3.8).

Чтобы доказать соотношение (3.9), положим в формуле (3.10) $\tilde{X} = (0, \xi)$, $\tilde{Y} = (0, \eta)$ и $\tilde{Z} = (\chi^l, 0)$. Тогда в левой части формулы (3.10) имеем только два ненулевых члена, т.е. мы получим следующее равенство:

$$L_\xi \langle -ISR^{-1}\eta, \chi \rangle - L_\eta \langle \xi, -IR^{-1}S\chi \rangle = 0.$$

В силу предложения 2.8 эндоморфизмы R_w и S_w симметричны, а по определению эндоморфизм I кососимметричен (относительно формы $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{m}}$). Используя (3.4), мы получаем, что $IR^{-1}S = -R^{-1}SI$ и, следовательно, $L_\xi(SR^{-1})\eta = L_\eta(SR^{-1})\xi$. Из этого тождества вытекает последнее утверждение предложения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Нетрудно проверить, что условия (3.8) и (3.9) эквивалентны условию (2.8) работы [4].

ЛЕММА 3.6. Пусть $P \in \text{Alm}(W)$ и $IP = \overline{P}I$. Предположим, что для P выполнены условия (3.8) и (3.9). Почти комплексная структура $J(P)$ на D интегрируема тогда и только тогда, когда для всех $w \in W$

$$(SR^{-1})_w([w, [\xi, \eta]]) = [[w, (R^{-1}S)_w\xi], \eta] - [[w, (R^{-1}S)_w\eta], \xi], \quad \xi, \eta \in \mathfrak{m}. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $R + SR^{-1}S = (1 - iSR^{-1})(R + iS)$, имеем

$$L_X(R + SR^{-1}S) = -iL_X(SR^{-1}) \cdot P + (1 - iSR^{-1}) \cdot L_X P$$

для $X \in \Gamma(TW)$ и, следовательно, согласно условиям (3.8) и (3.9)

$$\begin{aligned} & (1 - iSR^{-1})_w(L_{P\xi}P(\eta) - L_{P\eta}P(\xi))_w \\ &= i((L_{P\xi}(SR^{-1}))(P\eta) - (L_{P\eta}(SR^{-1}))(P\xi))_w \\ &+ (L_{P\xi}(R + SR^{-1}S)(\eta) - L_{P\eta}(R + SR^{-1}S)(\xi))_w \\ &= [[w, I(R^{-1}P)_w\xi], -I\eta] - [[w, I(R^{-1}P)_w\eta], -I\xi]. \end{aligned}$$

Так как оператор $1 - iSR^{-1} = \overline{P}R^{-1}$ обратим и $IP = \overline{P}I$, то условие интегрируемости (2.7) выполнено тогда и только тогда, когда

$$(\overline{P}R^{-1})_w([w, [\xi, \eta]]) = [[w, (R^{-1}\overline{P})_wI\xi], I\eta] - [[w, (R^{-1}\overline{P})_wI\eta], I\xi]. \quad (3.12)$$

Используя тождество Якоби и свойства (3.1) эндоморфизма I , мы получаем, что вещественная часть выражения, стоящего справа в (3.12), равняется $[w, [I\xi, I\eta]] = [w, [\xi, \eta]]$. Мнимая часть формулы (3.12) эквивалентна формуле (3.11).

§ 4. Гиперкэлеровы структуры на неприводимых эрмитовых симметрических пространствах

В этом параграфе доказана основная теорема, описывающая кэлеровы структуры, антикоммутирующие с J^- на инвариантных областях в $T(G/K)$. Получена общая формула для кэлеровых потенциалов. Эту формулу мы ищем в таком же виде, как в работе [4].

Мы продолжаем изложение, используя прежние обозначения, но в этом параграфе предположим дополнительно, что эрмитово симметрическое пространство G/K неприводимо, имеет компактный тип и форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}$ положительно определена. В частности, тогда $\mathfrak{g}$ – простая компактная алгебра Ли ранга l , а подгруппа K связна.

4.1. Системы корней эрмитовых симметрических пространств. Здесь мы изложим основные факты об эрмитовых симметрических пространствах [12; гл. VIII, §§ 4–7]. Подалгебра Ли $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ имеет одномерный центр $\mathfrak{z}$ и совпадает с централизатором $\mathfrak{g}^{\mathfrak{z}}$ центра $\mathfrak{z}$ в $\mathfrak{g}$, в частности $\mathrm{rk} \mathfrak{g} = \mathrm{rk} \mathfrak{k} = l$. Пусть $\mathfrak{t}$ – подалгебра Картана в $\mathfrak{k}$. Тогда $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{t}$ и $\mathfrak{t}$ – подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Комплексное пространство $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ является подалгеброй Картана простой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Пусть Δ – система корней алгебры Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ относительно $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$. Обозначим через $\Delta_{\mathfrak{k}}$ множество тех корней из Δ , которые равны тождественно нулю на $\mathfrak{z}$. Это система корней для $(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$. Положим $\Delta_{\mathfrak{m}} = \Delta \setminus \Delta_{\mathfrak{k}}$. Тогда имеем прямые разложения

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \tilde{\mathfrak{g}}^{\alpha}, \quad \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{k}}} \tilde{\mathfrak{g}}^{\alpha}, \quad \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{m}}} \tilde{\mathfrak{g}}^{\alpha}.$$

Алгебра $\mathfrak{k}$ – максимальная подалгебра в $\mathfrak{g}$ [11; (8.5.1)]. Так как эта подалгебра $\mathrm{ad}(\mathfrak{t})$ -инвариантна, то существует система простых корней $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \Delta$ такая, что для произвольного $\alpha \in \Delta$ имеем $n_1^{\alpha} \in \{0, 1, -1\}$, где $\alpha = n_1^{\alpha} \alpha_1 + \dots + n_l^{\alpha} \alpha_l$ [11; (8.3.7)]. Тогда $\Delta_{\mathfrak{k}} = \{\alpha \in \Delta : n_1^{\alpha} = 0\}$. Обозначим через $\Delta^+ \subset \Delta$ соответствующее множество положительных корней.

Выберем для каждого $\alpha \in \Delta^+$ тройку векторов $(H_{\alpha}, E_{\alpha}, E_{-\alpha}) \in i\mathfrak{t} \times \tilde{\mathfrak{g}}^{\alpha} \times \tilde{\mathfrak{g}}^{-\alpha}$, для которой $[H_{\alpha}, E_{\pm\alpha}] = \pm 2E_{\pm\alpha}$ и $[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = -H_{\alpha}$. Этот выбор может быть сделан так, что алгебра $\mathfrak{g}$ имеет базис, состоящий из базиса подалгебры $\mathfrak{t}$ и векторов $X_{\alpha} = \frac{1}{2}(E_{\alpha} + E_{-\alpha})$, $Y_{\alpha} = \frac{i}{2}(E_{\alpha} - E_{-\alpha})$, $\alpha \in \Delta^+$ (пространство $\mathfrak{t}$ порождается векторами $T_{\alpha} = \frac{i}{2}H_{\alpha}$, $\alpha \in \Delta^+$). Имеют место соотношения

$$[X_{\alpha}, Y_{\alpha}] = T_{\alpha}, \quad [T_{\alpha}, X_{\alpha}] = Y_{\alpha}, \quad [T_{\alpha}, Y_{\alpha}] = -X_{\alpha}, \quad \alpha \in \Delta^+.$$

Положив $\Delta_{\mathfrak{k}}^+ = \Delta_{\mathfrak{k}} \cap \Delta^+$ и $\Delta_{\mathfrak{m}}^+ = \Delta_{\mathfrak{m}} \cap \Delta^+$, мы получим

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{t} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{k}}^+} (\mathbb{R}X_{\alpha} \oplus \mathbb{R}Y_{\alpha}), \quad \mathfrak{m} = \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{m}}^+} (\mathbb{R}X_{\alpha} \oplus \mathbb{R}Y_{\alpha}).$$

Так как для каждой пары корней $\alpha, \beta \in \Delta_{\mathfrak{m}}^+$ их сумма $\alpha + \beta$ не является корнем, то $-2i\alpha(T_{\beta}) = \alpha(H_{\beta}) \geq 0$. Существует единственный элемент $Z_0 \in \mathfrak{z}$ такой, что $\alpha_1(Z_0) = i(\alpha_j | \mathfrak{z} = 0$ для $j = 2, \bar{l}$). Полагая $I = \mathrm{ad}_{Z_0} | \mathfrak{m} : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$, мы видим, что $IX_{\alpha} = Y_{\alpha}$ и $IY_{\alpha} = -X_{\alpha}$ для всех $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{m}}^+$. Тогда

$$[T, \xi_{\alpha}] = -i\alpha(T)I\xi_{\alpha}, \quad T \in \mathfrak{t}, \quad \xi_{\alpha} \in (\mathbb{R}X_{\alpha} \oplus \mathbb{R}Y_{\alpha}) \subset \mathfrak{m}. \quad (4.1)$$

Отсюда $I^2 = -\text{Id}_m$. Более того, I и автоморфизм $\exp(\frac{\pi}{2} \text{ad}_{Z_0}) \in \text{Ad}(K)$ совпадают при ограничении на подпространство m . Так как группа Ли K связна, то группа $\text{Ad}(K)$ коммутирует поэлементно с $\exp(\frac{\pi}{2} \text{ad}_{Z_0})$.

Поскольку все подпространства Картана (максимальные абелевы подалгебры) в m сопряжены относительно линейной группы $\text{Ad}(K)$, в нашей специальной ситуации выбор подпространства Картана a можно непосредственно связать с системой корней Δ . Два корня $\alpha, \beta \in \Delta$ называются строго ортогональными, если $\alpha \pm \beta \notin \Delta \cup \{0\}$. Существует подмножество в Δ_m^+ , состоящее из $r = \text{rk}(G/K)$ строго ортогональных корней $\beta_1, \dots, \beta_r$ [12; гл. VIII, предложение 7.4]. Тогда подпространства $a = \sum_{j=1}^r \mathbb{R}X_{\beta_j}$ и $Ia = \sum_{j=1}^r \mathbb{R}Y_{\beta_j}$ являются подпространствами Картана в m ; подалгебра Ли в g , порожденная подпространствами a и Ia , изоморфна полупростой компактной алгебре Ли $\hat{g} = \bigoplus_{j=1}^r \hat{g}_j$, где каждое слагаемое $\hat{g}_j = (\mathbb{R}X_{\beta_j} \oplus \mathbb{R}Y_{\beta_j} \oplus \mathbb{R}T_{\beta_j}) \simeq \text{su}(2)$. Тогда $-i\beta_k(T_{\beta_j}) = \frac{1}{2}\beta_k(H_{\beta_j}) = \delta_j^k$. Итак, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1 [12]. *Произвольное подпространство Картана a в m имеет вид $a = \sum_{j=1}^r \mathbb{R}X_{\beta_j}$. Подалгебра Ли алгебры g , порожденная подпространствами a и Ia , изоморфна полупростой компактной алгебре Ли $\hat{g} = \bigoplus_{j=1}^r \hat{g}_j$, где $\hat{g}_j \simeq \text{su}(2)$.*

Обозначим через g^a и $\mathfrak{k}^a$ централизаторы подпространства Картана a в алгебрах Ли g и $\mathfrak{k}$ соответственно. Ввиду соотношений (2.3) $g^a = a \oplus \mathfrak{k}^a$. В частности, $\text{rk } \mathfrak{k}^a = \text{rk } g - r$ и ввиду соотношений (3.1) $[Ia, \mathfrak{k}^a] = I[a, \mathfrak{k}^a] = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Пусть $a \subset m$ – подпространство Картана. Для неприводимого симметрического пространства G/K или a является подалгеброй Картана в g (и $\mathfrak{k}^a = 0$), или централизатор алгебры Ли $\mathfrak{k}^a$ в m совпадает с пространством $a \oplus Ia$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n(\mathfrak{k}^a)$ – нормализатор алгебры $\mathfrak{k}^a$ в g . Так как $\mathfrak{k}^a$ – идеал компактной алгебры $n(\mathfrak{k}^a)$, мы получим следующее разложение: $n(\mathfrak{k}^a) = \mathfrak{k}^a \oplus g_*$, где $g_* = \{X \in g : [X, \mathfrak{k}^a] = 0, \langle X, \mathfrak{k}^a \rangle = 0\}$. Ясно, что ранг алгебры Ли g_* не превосходит $\text{rk } g - \text{rk } \mathfrak{k}^a = r$. Ввиду тождества Якоби $[[a, Ia], \mathfrak{k}^a] = 0$. Поэтому $[\hat{g}, \mathfrak{k}^a] = 0$ и $\langle \hat{g}, \mathfrak{k}^a \rangle = 0$. Отсюда g_* – полупростая алгебра ранга r , содержащая полупростую подалгебру $\hat{g}$ максимального ранга. Так как Z_0 – элемент из центра подалгебры $\mathfrak{k}$, мы получим, что $\text{ad}_{Z_0}(g_*) \subset g_*$, а тройка $(g_*, \mathfrak{k}_*, I_*)$, где $\mathfrak{k}_* = \mathfrak{k} \cap g_*$, $m_* = m \cap g_*$, $I_* = I|_{m_*}$, – эрмитова ортогональная симметрическая алгебра Ли. Учитывая, что $a \subset m_*$, мы заключаем, что эта ортогональная алгебра Ли имеет максимальный возможный ранг $r = \text{rk } g_*$. Ее каждая неприводимая компонента также имеет максимальный возможный ранг (a – подалгебра Картана в g_*), т.е. соответствует компактному симметрическому пространству $\text{Sp}(n)/U(n)$ для подходящего $n \geq 1$ [12; гл. X, §6]. Поэтому g_* – полупростая алгебра Ли типа $C_{n_1} \oplus C_{n_2} \oplus \dots$. Мы утверждаем, что или $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 1$, или $\mathfrak{k}^a = 0$.

Действительно, по построению алгебра $g_* \oplus \mathfrak{k}^a$ – подалгебра в g максимального ранга. Отсюда g_* – регулярная подалгебра в g , т.е. $[t_1, g_*] \subset g_*$ для некоторой подалгебры Картана t_1 в g . Но алгебра g – компактная алгебра Ли из следующего списка: $A_l, B_l, C_l, D_l, E_6, E_7$ [12; гл. X, §6]. Так как для алгебр Ли типов A_l, D_l, E_6, E_7 все корни их корневых систем имеют одну и ту же длину, эти алгебры не содержат регулярных подалгебр типа C_n , $n \geq 2$. Так что мы должны рассмотреть только два случая, когда G/K – это симметрическое пространство $\text{SO}(2l+1)/(\text{SO}(2) \times \text{SO}(2l-1))$ с $l \geq 3$ или $\text{Sp}(l)/U(l)$ с $l \geq 2$. В первом случае

$\mathfrak{k}^a \simeq \mathfrak{so}(2l-3)$ и $\mathfrak{g}_* \simeq \mathfrak{so}(4) \simeq C_1 \oplus C_1$ [12; гл. X]. Во втором случае ранги группы G и симметрического пространства G/K совпадают, т.е. $\mathfrak{k}^a = 0$. Утверждение доказано.

4.2. Инвариантные отображения и корневые системы эрмитовых симметрических пространств. В этом пункте изучается преобразование ограниченной системы корней для $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, индуцированное действием I на $\mathfrak{m}$.

Пусть $\mathfrak{a}$ – некоторое подпространство Картана в $\mathfrak{m}$. Для каждого λ из дуального пространства к $\mathfrak{a}^\mathbb{C}$ пусть $\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g}^\mathbb{C} : [H, X] = \lambda(H)X, H \in \mathfrak{a}^\mathbb{C}\}$. Тогда λ называется *ограниченным корнем*, если $\lambda \neq 0$ и $\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda \neq 0$. Множество всех таких λ обозначим через Σ . Одновременная диагонализация $\text{ad}(\mathfrak{a}^\mathbb{C})$ в $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ дает разложение $\mathfrak{g}^\mathbb{C} = \tilde{\mathfrak{g}}_0 \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+} (\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_{-\lambda})$, где Σ^+ – произвольное подмножество положительных ограниченных корней в Σ .

Для каждой линейной формы λ на $\mathfrak{a}^\mathbb{C}$ положим

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_\lambda &\stackrel{\text{def}}{=} \{\eta \in \mathfrak{m} : \text{ad}_w^2(\eta) = \lambda^2(w)\eta \quad \forall w \in \mathfrak{a}\}, \\ \mathfrak{k}_\lambda &\stackrel{\text{def}}{=} \{\zeta \in \mathfrak{k} : \text{ad}_w^2(\zeta) = \lambda^2(w)\zeta \quad \forall w \in \mathfrak{a}\}. \end{aligned}$$

Тогда $\mathfrak{m}_\lambda = \mathfrak{m}_{-\lambda}$, $\mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{k}_{-\lambda}$, $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{k}_0$ равно $\mathfrak{k}^a$, централизатору $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{k}$. Согласно [12; гл. VII, лемма 11.3] следующие разложения являются прямыми и ортогональными:

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{m}_\lambda, \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{k}^a \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{k}_\lambda. \quad (4.2)$$

Нам понадобится следующее слабое обобщение леммы 2.3 из [12; гл. VII].

ЛЕММА 4.3. *Для произвольного вектора $\xi_\lambda \in \mathfrak{m}_\lambda$, $\lambda \in \Sigma^+$, существует единственный вектор $\zeta_\lambda \in \mathfrak{k}_\lambda$ такой, что*

$$[w, \xi_\lambda] = i\lambda(w)\zeta_\lambda, \quad [w, \zeta_\lambda] = -i\lambda(w)\xi_\lambda \quad \forall w \in \mathfrak{a}. \quad (4.3)$$

В частности, $\dim \mathfrak{m}_\lambda = \dim \mathfrak{k}_\lambda$ и

$$\text{ad}_{w'} \text{ad}_{w''}(\xi_\lambda) = \lambda(w')\lambda(w'')\xi_\lambda, \quad w', w'' \in \mathfrak{a}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для полноты изложения, а главным образом, чтобы зафиксировать обозначения, докажем эту лемму здесь. Ясно, что $(\mathfrak{m}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda)^\mathbb{C} = (\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_{-\lambda})^\mathbb{C}$. Поэтому $\text{ad}_w(\mathfrak{m}_\lambda) \subset \mathfrak{k}_\lambda$ и $\text{ad}_w(\mathfrak{k}_\lambda) \subset \mathfrak{m}_\lambda$ для $w \in \mathfrak{a}$. Так что эндоморфизмы ad_w и ad_w^2 при ограничении на $\mathfrak{m}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda$ вырождены или невырождены одновременно. Отсюда подпространство $\{[w, \xi_\lambda], w \in \mathfrak{a}\} \subset \mathfrak{k}_\lambda$ одномерно. Так как $\lambda(\mathfrak{a}) \in i\mathbb{R}$, то существует элемент $\zeta_\lambda \in \mathfrak{k}_\lambda$ такой, что для пары $\{\xi_\lambda, \zeta_\lambda\}$ выполнено условие (4.3). Теперь последнее утверждение леммы очевидно.

Пусть $f: W \rightarrow \mathfrak{m}$ – некоторое отображение. Отождествляя касательные пространства $T_w \mathfrak{m}$ и $T_{f(w)} \mathfrak{m}$ с $\mathfrak{m}$, мы можем рассматривать касательное отображение $f_{*w}: T_w \mathfrak{m} \rightarrow T_{f(w)} \mathfrak{m}$ как эндоморфизм на $\mathfrak{m}$. Мы говорим, что отображение f K -эквивариантно, если $\text{Ad}_k \circ f = f \circ \text{Ad}_k$ на W для всех $k \in K$. Для таких отображений их касательное отображение f_* : $w \mapsto f_{*w} \in \text{End}(\mathfrak{m})$ также K -эквивариантно, т.е. удовлетворяет условию (2.6). Обозначим через $\text{EC}(W)$ множество всех K -эквивариантных отображений f (на W), которые оставляют инвариантным некоторое (а значит, и каждое) подпространство Картана $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{m}$, т.е. $f(W \cap \mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$.

Пусть $f \in \text{EC}(W)$. В силу K -эквивариантности $f_{*w}([\zeta, w]) = [\zeta, f(w)]$ для любого $\zeta \in \mathfrak{k}$. Отсюда согласно (4.3) для произвольного $w \in W \cap \mathfrak{a}$ и $\xi_\lambda \in \mathfrak{m}_\lambda$, $\lambda \in \Sigma^+$,

$$f_{*w}(i\lambda(w)\xi_\lambda) = f_{*w}([\zeta_\lambda, w]) = [\zeta_\lambda, f(w)] = i\lambda(f(w))\xi_\lambda. \quad (4.4)$$

Мы докажем две леммы, которые будем использовать далее.

ЛЕММА 4.4. Пусть $f \in \text{EC}(W)$. Если $w \in W \cap \mathfrak{a}$, то $f_{*w}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$, а для каждого $\lambda \in \Sigma^+$ подпространство $\mathfrak{m}_\lambda$ – собственное подпространство эндоморфизма f_{*w} с собственным значением $\lambda(f(w))/\lambda(w)$. Больше того, для всех $w \in W$, $\xi, \eta \in \mathfrak{m}$

$$f_{*w}([w, [\xi, \eta]]) = [[w, f_{*w}(\xi)], \eta] - [[w, f_{*w}(\eta)], \xi]. \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w \in W \cap \mathfrak{a}$. Предположим, что $\xi \in \mathfrak{a}$. Так как по определению $f_{*w}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$, то первый член в правой части формулы (4.5) обращается в нуль. Но $[\text{ad}_w, \text{ad}_\xi] = 0$. Поэтому соотношение (4.5) эквивалентно соотношению

$$[(\text{ad}_w \text{ad}_\xi)|\mathfrak{m}, f_{*w}] = 0,$$

которое выполнено, так как $\text{ad}_w \text{ad}_\xi(\mathfrak{a}) = 0$ и каждое подпространство $\mathfrak{m}_\lambda$, $\lambda \in \Sigma^+$, – собственное подпространство эндоморфизмов $\text{ad}_w \text{ad}_\xi$ и f_{*w} .

Так как соотношение (4.5) кососимметрично относительно переменных ξ и η , осталось доказать это соотношение, если $\xi = \xi_\lambda \in \mathfrak{m}_\lambda$ и $\eta = \xi'_\nu \in \mathfrak{m}_\nu$ для $\lambda, \nu \in \Sigma^+$. Существуют векторы $\zeta_\lambda \in \mathfrak{k}_\lambda$ и $\zeta'_\nu \in \mathfrak{k}_\nu$ такие, что для пар $(\xi_\lambda, \zeta_\lambda)$ и (ξ'_ν, ζ'_ν) выполнено условие (4.3) при всех $w \in W \cap \mathfrak{a}$. Но

$$[\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{m}_\nu] + [\mathfrak{m}_\lambda, \mathfrak{k}_\nu] \subset \mathfrak{m}_{\lambda+\nu} + \mathfrak{m}_{\lambda-\nu}, \quad [\mathfrak{m}_\lambda, \mathfrak{m}_\nu] \subset \mathfrak{k}_{\lambda+\nu} + \mathfrak{k}_{\lambda-\nu}$$

(см. [12; гл. VII, лемма 11.4]). В частности, $[\xi_\lambda, \xi'_\nu] = \zeta_+ + \zeta_-$, где $\zeta_\pm \in \mathfrak{k}_{\lambda \pm \nu}$. Если $\lambda - \nu = 0$, то $[\mathfrak{a}, \zeta_-] = 0$. Поэтому существуют векторы $\xi_\pm \in \mathfrak{m}_{\lambda \pm \nu}$, для которых $[w', \zeta_\pm] = -i(\lambda \pm \nu)(w')\xi_\pm$ при всех $w' \in \mathfrak{a}$. Теперь из тождества Якоби

$$[w', [\xi_\lambda, \xi'_\nu]] = [[w', \xi_\lambda], \xi'_\nu] - [[w', \xi'_\nu], \xi_\lambda]$$

вытекает тождество

$$-i(\lambda + \nu)(w')\xi_+ - i(\lambda - \nu)(w')\xi_- = i\lambda(w')[\zeta_\lambda, \xi'_\nu] - i\nu(w')[\zeta'_\nu, \xi_\lambda]. \quad (4.6)$$

Принимая во внимание, что $f_{*w}(\xi_\pm) = \frac{(\lambda \pm \nu)(f(w))}{(\lambda \pm \nu)(w)}\xi_\pm$ и похожие соотношения выполняются для ξ_λ , ξ'_ν , мы получаем формулу (4.5), заменяя w' на $f(w)$ в тождестве (4.6). Отметив, что $\mathfrak{m}$ – объединение своих подпространств Картана, мы завершим доказательство.

ЛЕММА 4.5. Пусть $f \in \text{EC}(W)$ и σ – 1-форма на W такая, что $\sigma_w(\cdot) = \langle f(w), \cdot \rangle$. Тогда

- (1) форма σ $\text{Ad}(K)$ -инвариантна,
- (2) форма σ замкнута тогда и только тогда, когда замкнуто ее ограничение на множество $W \cap \mathfrak{a}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Инвариантность σ проверяется непосредственно. По определению

$$d\sigma_w(\xi, \eta) = \langle f_{*w}(\xi), \eta \rangle - \langle f_{*w}(\eta), \xi \rangle, \quad \xi, \eta \in \mathfrak{m}.$$

Для $w \in \mathfrak{a}$ по лемме 4.4 $f_{*w}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$, $f_{*w}(\mathfrak{a}^\perp) \subset \mathfrak{a}^\perp$ и ограничение $f_{*w}|_{\mathfrak{a}^\perp}$ — симметричный оператор. Поэтому $d\sigma_w = 0$ тогда и только тогда, когда $d\sigma_w(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = 0$ для всех $w \in W \cap \mathfrak{a}$.

Пусть $O \subset \mathbb{R}$ — область, содержащая спектры всех операторов $(-\text{ad}_w^2 - \text{ad}_{Iw}^2)|_{\mathfrak{m}}$, $w \in W$. Для вещественно-аналитической функции q на O определим отображение $\hat{q}: W \rightarrow \mathfrak{m}$, положив $\hat{q}(w) = q(-\text{ad}_w^2 - \text{ad}_{Iw}^2)(w)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *Отображение $\hat{q}: W \rightarrow \mathfrak{m}$ K -эквивариантно, и каждое подпространство Картана $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{m}$ инвариантно относительно $\hat{q}$, т.е. $\hat{q} \in \text{EC}(W)$. Больше того,*

$$\mathfrak{m} = \sum_{j=1}^r \mathbb{R}X_j \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{m}_\lambda, \quad X_j = X_{\beta_j}, \quad (4.7)$$

— ортогональное разложение в сумму собственных подпространств для всех эндоморфизмов $\hat{q}_{*w}$, $w \in W \cap \mathfrak{a}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как эндоморфизм I принадлежит центру группы $\text{Ad}(K)|_{\mathfrak{m}}$, то $\text{Ad}_k \circ \text{ad}_{Iw} = \text{ad}_{I(\text{Ad}_k w)} \circ \text{Ad}_k$ и, следовательно, $\text{Ad}_k \circ \hat{q} = \hat{q} \circ \text{Ad}_k$ на W для всех $k \in K$. Теперь зафиксируем подпространство Картана $\mathfrak{a} = \sum_{j=1}^r \mathbb{R}X_{\beta_j}$ в $\mathfrak{m}$ (как в п. 4.1) и переобозначим векторы $X_{\beta_j}, Y_{\beta_j}, T_{\beta_j}$ через X_j, Y_j, T_j , $j = \overline{1, r}$. Имеем

$$[X_j, Y_k] = \delta_j^k T_j, \quad [T_j, X_k] = \delta_j^k Y_j, \quad [T_j, Y_k] = -\delta_j^k X_j, \quad j, k = \overline{1, r}. \quad (4.8)$$

В частности, $IX_j = Y_j$ и $IY_j = -X_j$. Так как $\text{ad}_{IX_j}^2(X_k) = -\delta_k^j X_k$ и $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0$, для произвольного $w = \sum_{j=1}^r x_j X_j \in W \cap \mathfrak{a}$ имеем

$$\hat{q}(w) = \sum_{j=1}^r x_j q(x_j^2) X_j, \quad \hat{q}_{*w}(X_j) = (q(x_j^2) + 2x_j^2 q'(x_j^2)) X_j, \quad j = \overline{1, r}, \quad (4.9)$$

т.е. $\hat{q}(W \cap \mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$. Последнее утверждение вытекает из формул (4.4) и (4.9).

Зафиксируем в подпространстве Картана $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ базис $\{X_j\}_{j=1}^r$ (4.8). Лексикографически упорядочим множество ограниченных корней Σ в $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ относительно базиса $\{-iX_j\}_{j=1}^r$ в $i\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^\mathbb{C}$ (все $\lambda \in \Sigma$ вещественны на подпространстве $i\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}^\mathbb{C}$), а через Σ^+ обозначим соответствующую систему положительных ограниченных корней. Выберем в (комплексном) пространстве $(\mathfrak{a}^\mathbb{C})^*$ базис $\{\epsilon_j\}_{j=1}^r$, дуальный к базису $\{X_j\}_{j=1}^r$ в $\mathfrak{a}^\mathbb{C}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. *Для произвольного вектора $\xi \in \mathfrak{m}_\lambda$, $\lambda \in \Sigma^+$, вектор $I\xi$ принадлежит подпространству $\mathfrak{m}_{\lambda_I}$, $\lambda_I \in \Sigma^+ \cup \{0\}$, т.е. равенство $\text{ad}_w^2(\xi) = \lambda^2(w)\xi \quad \forall w \in \mathfrak{a}$ влечет $\text{ad}_w^2(I\xi) = \lambda_I^2(w)(I\xi)$. Множество Σ^+ есть подмножество множества*

$$(BC)_r^+ = \left\{ \frac{i}{2} \epsilon_j, i\epsilon_j, j = \overline{1, r}; \frac{i}{2}(\epsilon_p \pm \epsilon_k), 1 \leq p < k \leq r \right\},$$

а множество $\{(\lambda, \lambda_I), \lambda \in \Sigma^+\}$ есть подмножество множества

$$\left\{ \left(\frac{i}{2} \epsilon_j, \frac{i}{2} \epsilon_j \right), (i\epsilon_j, 0), j = \overline{1, r}; \left(\frac{i}{2}(\epsilon_p \pm \epsilon_k), \frac{i}{2}(\epsilon_p \mp \epsilon_k) \right), 1 \leq p < k \leq r \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем корень $\lambda \in \Sigma^+$. Тогда для любого вектора $w = \sum_{j=1}^r x_j X_j \in \mathfrak{a}$ верно соотношение $\lambda(w) = \sum_{j=1}^r i c_j x_j$, где $c_j \in \mathbb{R}$. Применяя формулы (4.4) и (4.9) к функции $\hat{q}$ с $q(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, получаем, что если $\lambda(x_1, \dots, x_r) = 0$, то $\lambda(x_1^{2n+1}, \dots, x_r^{2n+1}) = 0$. Поэтому

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_r \\ x_1^3 & x_2^3 & \dots & x_r^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{2r-1} & x_2^{2r-1} & \dots & x_r^{2r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_r \end{pmatrix} = 0$$

для всех вещественных векторов $(x_1, \dots, x_r) \in \ker \lambda$. Так как столбец $(c_1, \dots, c_r)$ ненулевой, то определитель $\pm \prod_{j=1}^r x_j \prod_{1 \leq p < j \leq r} (x_p^2 - x_k^2)$ вышеприведенной матрицы равен нулю в этих точках. Другими словами,

$$\ker \lambda = \bigcup_{\sigma \in (BC)_r^+} (\ker \lambda \cap \ker \sigma).$$

Отсюда $\ker \lambda = \ker \sigma$ для некоторого $\sigma \in (BC)_r^+$, так как $(BC)_r^+$ — конечное множество, или, что эквивалентно, $a_\lambda^{-1} \lambda \in (BC)_r^+$ для некоторого $a_\lambda > 0$.

Положим теперь $q(z) = -z$. Тогда $\hat{q}(w) = [Iw, [Iw, w]]$ и

$$\begin{aligned} \hat{q}_{*w}(\eta) &\stackrel{\text{def}}{=} [I\eta, [Iw, w]] + [Iw, [I\eta, w]] + [Iw, [Iw, \eta]] \\ &= [I\eta, [Iw, w]] - 2I[w, [w, I\eta]] = \text{ad}_{[w, Iw]}(I\eta) - 2(I \text{ad}_w^2)(I\eta) \end{aligned}$$

для каждого $\eta \in \mathfrak{m}$ (см. (3.1)). Используя тождество Якоби для векторов $I\eta, Iw, w$ и соотношения (3.1) повторно, мы вычислим вектор $\text{ad}_{[w, Iw]}(I\eta)$:

$$[[w, Iw], I\eta] = [w, [Iw, I\eta]] - [Iw, [w, I\eta]] = [w, [w, \eta]] - I[w, [w, I\eta]]. \quad (4.10)$$

Стало быть, $\hat{q}_{*w}(\eta) = \text{ad}_w^2(\eta) - 3(I \text{ad}_w^2)(I\eta)$. Теперь из соотношений (4.4) для данного вектора $\xi_\lambda \in \mathfrak{m}_\lambda$ вытекает уравнение

$$\lambda^2(x_1, \dots, x_r) \xi_\lambda - 3(I \text{ad}_w^2)(I \xi_\lambda) = \frac{\lambda(-x_1^3, \dots, -x_r^3)}{\lambda(x_1, \dots, x_r)} \xi_\lambda. \quad (4.11)$$

Применяя I к уравнению (4.11), мы получим, что $I \xi_\lambda$ — общий собственный вектор для всех эндоморфизмов ad_w^2 , $w \in \mathfrak{a}$. Поэтому существует единственный элемент $\lambda_I \in \Sigma^+ \cup \{0\}$, для которого $\text{ad}_w^2(I \xi_\lambda) = \lambda_I^2(w) I \xi_\lambda$ и

$$\lambda^2(x_1, \dots, x_r) + 3\lambda_I^2(x_1, \dots, x_r) = -\frac{\lambda(x_1^3, \dots, x_r^3)}{\lambda(x_1, \dots, x_r)}. \quad (4.12)$$

Легко проверить, что если $\lambda = a_\lambda \cdot \frac{i}{2}(\epsilon_p \pm \epsilon_k)$, $p \neq k$, то пара (λ, λ_I) удовлетворяет уравнению (4.12) тогда и только тогда, когда $a_\lambda = 1$ и $\lambda_I = \frac{i}{2}(\epsilon_p \mp \epsilon_k)$.

Так как $\text{ad}_{X_j}^2(I X_k) = -\delta_k^j(I X_k)$, то ковекторы $i\epsilon_j$, $j = \overline{1, r}$, — положительные ограниченные корни из Σ^+ . Поэтому если ограниченные корни $\sigma, \lambda \in \Sigma^+$ пропорциональны, то $\sigma = i\epsilon_j$ для некоторого $j \in \{1, \dots, r\}$, а λ равен $\frac{i}{2}\epsilon_j$ или $2i\epsilon_j$. В этом случае все возможные решения (λ, λ_I) , $\lambda \in \Sigma^+$, уравнения (4.12) — это пары $(i\epsilon_j, 0)$ и $(\frac{i}{2}\epsilon_j, \frac{i}{2}\epsilon_j)$, $j = \overline{1, r}$.

Пусть

$$\Sigma^{++} = \Sigma^+ \cap \left\{ \frac{i}{2}\epsilon_j, i\epsilon_j, j = \overline{1, r}; \frac{i}{2}(\epsilon_p + \epsilon_k), 1 \leq p < k \leq r \right\}.$$

А значит,

$$\mathfrak{m} = \sum_{\lambda \in \Sigma^{++}} \mathfrak{M}_\lambda, \quad \mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{m}_\lambda + I\mathfrak{m}_\lambda, \quad (4.13)$$

— ортогональное разложение $\mathfrak{m}$. Так как $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_0$ и $\dim \mathfrak{a} = r$, имеем

СЛЕДСТВИЕ 4.7.1. *Ковектор $\lambda = i\epsilon_j$, $1 \leq j \leq r$, — положительный ограниченный корень (из множества Σ^+) кратности один и $\mathfrak{m}_\lambda = \mathbb{R}(IX_j)$. Если $\lambda \in \Sigma^+ \setminus \{i\epsilon_1, \dots, i\epsilon_r\}$, то $I\mathfrak{m}_\lambda = \mathfrak{m}_{\lambda_I}$.*

Пусть $\mathfrak{t}'$ — подпространство в $\mathfrak{t}$, порожденное векторами $\{T_j\}_{j=1}^r$. В (комплексном) пространстве $(\mathfrak{t}'^{\mathbb{C}})^*$ выберем базис $\{\epsilon'_j\}_{j=1}^r$, дуальный к базису $\{T_j\}_{j=1}^r$ пространства $\mathfrak{t}'^{\mathbb{C}}$. Обозначим через ρ отображение ограничения $(\mathfrak{t}'^{\mathbb{C}})^* \rightarrow (\mathfrak{t}'^{\mathbb{C}})^*$. Пусть $\rho_{\mathfrak{m}}$ — отображение из $(BC)_r^+ \subset (\mathfrak{a}^{\mathbb{C}})^*$ в $(\mathfrak{t}'^{\mathbb{C}})^*$ с графиком

$$\left\{ \left(\frac{i}{2}\epsilon_j, \frac{i}{2}\epsilon'_j \right), (i\epsilon_j, i\epsilon'_j), j = \overline{1, r}; \left(\frac{i}{2}(\epsilon_p \pm \epsilon_k), \frac{i}{2}(\epsilon'_p \pm \epsilon'_k) \right), 1 \leq p < k \leq r \right\}. \quad (4.14)$$

СЛЕДСТВИЕ 4.7.2. *Для каждого $j = \overline{1, r}$ $\rho(\beta_j) = i\epsilon'_j$. Множество $\rho(\Delta_{\mathfrak{m}}^+)$ есть подмножество множества*

$$\left\{ \frac{i}{2}\epsilon'_j, i\epsilon'_j, j = \overline{1, r}; \frac{i}{2}(\epsilon'_p + \epsilon'_k), 1 \leq p < k \leq r \right\}. \quad (4.15)$$

Для каждого $\lambda \in \Sigma^+$

$$\mathfrak{m}_\lambda + I\mathfrak{m}_\lambda = \sum_{\alpha \in \rho^{-1}(\rho_{\mathfrak{m}}(\lambda))} (\mathbb{R}X_\alpha \oplus \mathbb{R}Y_\alpha).$$

В частности, пространство $\mathfrak{m}_\lambda + I\mathfrak{m}_\lambda$ — собственное подпространство эндоморфизма $I\text{ad}_T$, $T \in \mathfrak{t}'$, с собственным значением $i\rho_{\mathfrak{m}}(\lambda)(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем корень $\lambda \in \Sigma^+$ и вектор $\xi_\lambda \in \mathfrak{m}_\lambda$. Ввиду формул (4.8) $T_j = [X_j, IX_j]$. Полагая в соотношении (4.10) $w = X_j$ и $\eta = -I\xi_\lambda$, получаем, что $\text{ad}_{T_j}(\xi_\lambda) = -(\lambda_I^2(X_j) + \lambda^2(X_j))I\xi_\lambda$. Но $[I, \text{ad}_{T_j}|\mathfrak{m}] = 0$. Поэтому

$$[T, \xi] = -\left(\sum_{j=1}^r (\lambda^2(X_j) + \lambda_I^2(X_j))\epsilon'_j(T) \right) \cdot I\xi \quad \forall T \in \mathfrak{t}', \quad \xi \in (\mathfrak{m}_\lambda + I\mathfrak{m}_\lambda). \quad (4.16)$$

Таким образом, $\xi \pm iI\xi \in \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ — корневой вектор, соответствующий корню $\pm i \sum_{j=1}^r (\lambda^2(X_j) + \lambda_I^2(X_j))\epsilon'_j$ из множества $\rho(\Delta_{\mathfrak{m}})$. Теперь из разложения (4.13) и предложения 4.7 вытекает, что $\rho(\Delta_{\mathfrak{m}}^+) \subset Q \cup (-Q)$, где Q — множество (4.15). Учитывая, что $-i\alpha(T_{\beta_j}) \geq 0$ для $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{m}}^+$ и $-i\beta_k(T_{\beta_j}) = \delta_j^k$ (см. п. 4.1), мы завершаем доказательство.

Пусть $\rho_{\mathfrak{t}}$ — отображение из $(BC)_r^+ \subset (\mathfrak{a}^{\mathbb{C}})^*$ в $(\mathfrak{t}'^{\mathbb{C}})^*$ с графиком

$$\left\{ \left(\frac{i}{2}\epsilon_j, \frac{i}{2}\epsilon'_j \right), (i\epsilon_j, 0), j = \overline{1, r}; \left(\frac{i}{2}(\epsilon_p \pm \epsilon_k), \frac{i}{2}(\epsilon'_p - \epsilon'_k) \right), 1 \leq p < k \leq r \right\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.7.3. Пусть $\lambda \in \Sigma^+$ – ограниченный корень. Предположим, что $\lambda_I \neq 0$. Пусть $\xi_\lambda \in \mathfrak{m}_\lambda$ и $\xi'_{\lambda_I} = I\xi_\lambda \in \mathfrak{m}_{\lambda_I}$. Тогда для любого вектора $T \in \mathfrak{t}'$ и $\zeta_\lambda \in \mathfrak{k}_\lambda$, $\zeta'_{\lambda_I} \in \mathfrak{k}_{\lambda_I}$ (в обозначениях леммы 4.3)

$$\mathrm{ad}_T(\zeta_\lambda) = i\rho_{\mathfrak{k}}(\lambda)(T)\zeta'_{\lambda_I}.$$

Если $\lambda_I = 0$, то $[\mathfrak{t}', \mathfrak{k}_\lambda] = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя обозначения леммы 4.3 и тождество Якоби для векторов X_j, IX_j и $\zeta_\lambda \in \mathfrak{k}_\lambda$, мы получаем, что

$$\begin{aligned} [[X_j, IX_j], \zeta_\lambda] &= [X_j, [IX_j, \zeta_\lambda]] - [IX_j, [X_j, \zeta_\lambda]] = 2[X_j, I[X_j, \zeta_\lambda]] \\ &= -2i\lambda(X_j)[X_j, I\xi_\lambda] = 2\lambda(X_j)\lambda_I(X_j)\zeta'_{\lambda_I}. \end{aligned}$$

Если $\lambda_I = 0$, то в приведенной цепочке уравнений $[X_j, I\xi_\lambda] = 0$, так как $I\xi_\lambda \in \mathfrak{a} = \mathfrak{m}_0$. Теперь следствие вытекает из предложения 4.7.

Согласно (3.1) $\mathrm{ad}_{Iw}^2(I\xi) = I\mathrm{ad}_w^2(\xi)$ и согласно (4.10) $I\mathrm{ad}_{[w, Iw]}(\xi) = (\mathrm{ad}_w^2 + \mathrm{ad}_{Iw}^2)(\xi)$ (для всех $\xi \in \mathfrak{m}$). А значит, как непосредственное следствие из предложения 4.7 получим

СЛЕДСТВИЕ 4.7.4. Сумма (4.7) (соответственно (4.13)) есть ортогональное разложение $\mathfrak{m}$ в сумму собственных подпространств для всех операторов $\mathrm{ad}_w^2, \mathrm{ad}_{Iw}^2$, $w \in \mathfrak{a}$ (соответственно для всех $I\mathrm{ad}_{[w, Iw]}, \mathrm{ad}_w^2 + \mathrm{ad}_{Iw}^2$, $w \in \mathfrak{a}$). В частности, для каждого элемента $w \in \mathfrak{m}$ $[\mathrm{ad}_w^2, \mathrm{ad}_{Iw}^2]\mathfrak{m} = 0$ и $I\mathrm{ad}_{[w, Iw]} = \mathrm{ad}_w^2 + \mathrm{ad}_{Iw}^2$ на $\mathfrak{m}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. Хорошо известная теорема Хариш-Чандры–Мура для эрмитовых симметрических пространств (см. [13]) описывает ограниченную систему корней для $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}')$ и с помощью преобразования Кэли описывает эту же систему для пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ (пространства $\mathfrak{t}'$ и $\mathfrak{a}$ сопряжены в $\mathfrak{g}$ как подалгебры Картана одной и той же компактной алгебры Ли $\mathfrak{a} \oplus I\mathfrak{a} \oplus [\mathfrak{a}, I\mathfrak{a}]$). Эта теорема вытекает из следствий 4.7.2 и 4.7.3. Но отображение $\Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+ \cup \{0\}$, $\lambda \mapsto \lambda_I$, из предложения 4.7 позволяет найти прямую связь между ограниченными корневыми разложениями для $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ и $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}')$.

4.3. Основная теорема. Здесь, используя результаты предыдущих пунктов, мы построим все антиголоморфные K -эквивариантные отображения на инвариантных областях в $\mathfrak{m}$ и докажем основную теорему.

Пусть $\sigma: T(G/K) \rightarrow T(G/K)$ – инволюция, которая отображает произвольный касательный вектор Y в точке gK в вектор $-Y$ в той же точке gK , и пусть $P \in \mathrm{Alm}(W)$, где $W = -W$. Легко видеть, что σ является антиголоморфной инволюцией для почти комплексной структуры $J(P)$, т.е. $\sigma_*(F(P)) = \overline{F(P)}$, тогда и только тогда, когда $\overline{P}_w = P_{-w}$ для всех $w \in W$. Но $I \in \mathrm{Ad}(K)|_{\mathfrak{m}}$ (см. п. 4.1) и, стало быть, согласно (2.6) $IP_w = P_{Iw}I$, следовательно, $P_w = P_{-w}$. Доказана

ЛЕММА 4.9. Пусть $P \in \mathrm{Alm}(W)$. Отображение σ является антиголоморфной инволюцией для почти комплексной структуры $J(P)$ тогда и только тогда, когда $\overline{P} = P$.

Следующие предложение и лемма имеют решающее значение для последующей части работы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.10. Пусть $P = R + iS \in \text{Alm}(W)$ и $RI = IR$, $SI = -IS$. Предположим, что $L_\xi(SR^{-1})\eta = L_\eta(SR^{-1})\xi$ для всех (фиксированных) $\xi, \eta \in \mathfrak{m}$. Тогда $SR^{-1} = (a_1 + a_2I)\Upsilon_*$ на W , где $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ – некоторые числа и Υ – рациональное K -эквивариантное отображение на $\mathfrak{m}$, определенное формулой

$$\Upsilon(w) = (-\text{ad}_w^2 - \text{ad}_{Iw}^2)^{-1}(w).$$

Эндоморфизм $\Upsilon_{*w}: \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$, где w принадлежит множеству W_Υ регулярных точек функции Υ , антикоммутирует с I тогда и только тогда, когда все ограниченные корни из Σ неделимы, т.е. Σ имеет тип C_r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем подпространство Картана $\mathfrak{a} = \sum_{j=1}^r \mathbb{R}X_{\beta_j}$ в $\mathfrak{m}$. Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{a} \oplus I\mathfrak{a}$. Рассмотрим $(\mathfrak{m}, I)$ как пространство над $\mathbb{C}$ с фиксированным базисом $\{X_\alpha, \alpha \in \Delta_m^+\}$. Для каждого комплексного числа $z_0 = x + iy$ положим $z_0X_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} xX_\alpha + yIX_\alpha = xX_\alpha + yY_\alpha \in \mathfrak{m}$ (здесь $i^2 = -1$, $x, y \in \mathbb{R}$). Обозначим через $C: \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$ соответствующее отображение комплексного сопряжения, т.е. $C(z_0X_\alpha) = \bar{z}_0X_\alpha$, где $\bar{z}_0 \stackrel{\text{def}}{=} x - iy$. Для произвольного комплексного вектора $z = (z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{C}^r$ обозначим через zX вектор $\sum_{j=1}^r z_jX_j \in \mathfrak{A}$. Положим $Z = \{z \in \mathbb{C}^r : zX \in W \cap \mathfrak{A}\}$. Так как $ICSR^{-1} = CSR^{-1}I$, то существует комплексная матричная функция $z \mapsto (h_{\alpha\beta}(z))$, $\alpha, \beta \in \Delta_m^+$, на Z такая, что $\mathbb{C}$ -линейное отображение $C(SR^{-1})_{zX}$ отображает каждый вектор $\sum_\beta v_\beta X_\beta \in \mathfrak{m}$ в $\sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\beta}(z)v_\beta \cdot X_\alpha \in \mathfrak{m}$. Рассматривая C как $\mathbb{R}$ -линейное отображение на множестве $W \cap \mathfrak{A}$ и используя соотношения (3.9), мы заключаем, что локально каждая функция $h_{\alpha\beta}: Z \rightarrow \mathbb{C}$ – частная производная некоторой голоморфной функции, т.е. функция $h_{\alpha\beta}$ голоморфна на множестве $Z \subset \mathbb{C}^r$. В частности, каждая голоморфная 1-форма $\sum_{j=1}^r h_{\alpha\beta_j}(z) \cdot dz_j$ замкнута. Из (4.1) следует, что для любого вектора $T \in \mathfrak{t}'$ $\exp(\text{ad}_T)(X_\alpha) = e^{i\alpha'(T)}X_\alpha$, где $\alpha' = -i\alpha|t' -$ вещественный линейный функционал на $\mathfrak{t}'$. В силу K -эквивариантности отображения SR^{-1} имеем

$$\text{Ad}_k C(CSR^{-1})_w \text{Ad}_{k^{-1}} = C(CSR^{-1})_{\text{Ad}_k w} \quad \forall w \in W, \quad k \in K$$

и, следовательно,

$$e^{-i(\alpha' + \beta')(T)} h_{\alpha\beta}(z_1, \dots, z_r) = h_{\alpha\beta}(e^{i\beta'_1(T)}z_1, \dots, e^{i\beta'_r(T)}z_r) \quad \forall z \in Z, \quad T \in \mathfrak{t}'.$$

Поэтому $h_{\alpha\beta}(z_1, \dots, z_r) = a_{\alpha\beta} \cdot z_1^{p_1} \cdots z_r^{p_r}$, если $\alpha' + \beta' = -\sum_{k=1}^r p_k \beta'_k$ для некоторых целых чисел $p_k \in \mathbb{Z}$, иначе $h_{\alpha\beta}(z) = 0$. Здесь $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ – некоторая константа. Тогда согласно предложению 4.7 и следствию 4.7.2

$$h_{\alpha\beta}(z) = \begin{cases} a_{\alpha\beta} \cdot z_k^{-1} z_j^{-1}, & \alpha = \beta_k, \beta = \beta_j, k, j = \overline{1, r}, \\ a_{\alpha\beta} \cdot z_p^{-1} z_k^{-1}, & \alpha' = \beta' = \frac{1}{2}(\epsilon'_p + \epsilon'_k), p \neq k, \\ a_{\alpha\beta} \cdot z_j^{-1}, & \alpha' = \beta' = \frac{1}{2}\epsilon'_j, j = \overline{1, r}, \end{cases}$$

иначе $h_{\alpha\beta}(z) = 0$.

Пусть $\mathfrak{m}_1$ – подпространство в $\mathfrak{m}$, натянутое на векторы X_α, Y_α с $\alpha' = \frac{1}{2}(\epsilon'_p + \epsilon'_k)$, $1 \leq p \leq k \leq r$. Обозначим через $\mathfrak{m}_{1/2}$ ортогональное дополнение к пространству $\mathfrak{m}_1$ в $\mathfrak{m}$. Используя выражения для матричных элементов $h_{\alpha\beta}$ оператор-функции

CSR^{-1} , мы получаем, что подпространства $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_{1/2}$ инвариантны относительно всех операторов $(CSR^{-1})_w$ с $w \in W \cap \mathfrak{a}$ и

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_0 (CSR^{-1})_{w+tw} \mathfrak{m}_1 &= -2(CSR^{-1})_w \mathfrak{m}_1, \\ \frac{d}{dt} \Big|_0 (CSR^{-1})_{w+tw} \mathfrak{m}_{1/2} &= -(CSR^{-1})_w \mathfrak{m}_{1/2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим отображение

$$\tilde{\Upsilon}: W \rightarrow \mathfrak{m}, \quad \tilde{\Upsilon}(w) = -(SR^{-1})_w \cdot w.$$

Это отображение K -эквивариантно, поскольку отображение $w \mapsto (SR^{-1})_w$ удовлетворяет условию (2.6). Ввиду соотношений (3.9) для $\xi \in \mathfrak{m}$

$$\tilde{\Upsilon}_{*w}(\xi) = -(L_\xi(SR^{-1}))_w w - (SR^{-1})_w \xi = -\left(\frac{d}{dt} \Big|_0 (SR^{-1})_{w+tw}\right) \xi - (SR^{-1})_w \xi.$$

Таким образом, для всех $w \in W \cap \mathfrak{a}$

$$\tilde{\Upsilon}_{*w} \mathfrak{m}_1 = (SR^{-1})_w \mathfrak{m}_1, \quad \tilde{\Upsilon}_{*w} \mathfrak{m}_{1/2} = 0. \quad (4.17)$$

Найдем эту функцию $\tilde{\Upsilon}$. Так как голоморфная форма $\sum_{j=1}^r h_{\beta_k \beta_j} \cdot dz_j$ замкнута, $h_{\beta_k \beta_j} = 0$, если $k \neq j$. Переобозначим функцию $h_{\beta_j \beta_j}$ через h_j . Так как G/K — неприводимое эрмитово симметрическое пространство, ограниченная система корней для $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ имеет тип C_r или $(BC)_r$ [12; гл. X, §6]. Поэтому ограниченная группа Вейля для $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ индуцирует все перестановки со знаком $X_j \mapsto \pm X_{k(j)}$. Принимая во внимание K -эквивариантность (2.6), получаем, что $h_{s(j)}(z_1, \dots, z_r) = h_j(z_{s(1)}, \dots, z_{s(r)})$, где s — произвольная перестановка. Но функция $h_j(z)$ зависит только от j -й координаты z_j вектора z . Стало быть, существует единственная функция $h(t) = z_0 t^{-2}$, $z_0, t \in \mathbb{C}$, для которой $\overline{h_j(z)} = h(z_j)$. Тогда $(SR^{-1})_{zX}$ отображает каждый вектор $v_j X_j \in \mathfrak{A}$ в вектор $z_0 \overline{z_j}^{-2} v_j \cdot X_j \in \mathfrak{A}$, т.е. $\tilde{\Upsilon}(\sum_j x_j X_j) = (a_1 + a_2 I) \sum_j \overline{x_j}^{-1} X_j$, где $-\overline{z_0} = a_1 + ia_2$, $x_j \in \mathbb{R}$.

Ограничение отображения $w \mapsto (-\text{ad}_w^2 - \text{ad}_{Iw}^2)^{-1}(w)$ на подпространство $\mathfrak{a}$ отображает каждый вектор $\sum_j x_j X_j$ в $\sum_j \overline{x_j}^{-1} X_j$. Таким образом, отображения $\tilde{\Upsilon}$ и $(a_1 + a_2 I)\Upsilon$ совпадают на множестве $W \cap \mathfrak{a}$ и в силу K -эквивариантности отображений $\tilde{\Upsilon}$ и Υ

$$\tilde{\Upsilon}(w) = (a_1 + a_2 I)\Upsilon(w) \quad \forall w \in W. \quad (4.18)$$

Разложение (4.7) — совместное разложение в сумму собственных подпространств для всех операторов Υ_{*w} , $w \in \mathfrak{a}$ (см. предложение 4.6). Ограничения Υ_{*w} и I на $\mathfrak{A} = \mathfrak{a} \oplus I\mathfrak{a}$ антикоммутируют, поскольку ввиду соотношений (4.4) и (4.9)

$$\Upsilon_{*w}(X_j) = -\overline{x_j}^{-2} X_j, \quad \Upsilon_{*w}(IX_j) = \overline{x_j}^{-2} IX_j, \quad w \in W \cap \mathfrak{a}, \quad j = \overline{1, r}.$$

Предположим, что $\lambda_{pk}^\pm = i(\epsilon_p \pm \epsilon_k)/2$, $p \neq k$, $\lambda_{j/2} = i\epsilon_j/2$, $1 \leq j \leq r$, —ограниченные корни и $\xi_{pk}^\pm \in \mathfrak{m}_{\lambda_{pk}^\pm}$, $\xi_{j/2} \in \mathfrak{m}_{\lambda_{j/2}}$. Тогда, применяя (4.4) к K -эквивариантному отображению Υ , мы получаем, что

$$\Upsilon_{*w}(\xi_{pk}^\pm) = \frac{x_p^{-1} \pm x_k^{-1}}{x_p \pm x_k} \xi_{pk}^\pm = \pm \frac{1}{x_p x_k} \xi_{pk}^\pm, \quad \Upsilon_{*w}(\xi_{j/2}) = \frac{1}{x_j^2} \xi_{j/2}, \quad (4.19)$$

где $w = \sum_{j=1}^r x_j X_j$. Но $\tilde{\Upsilon}_{*w}|_{\mathfrak{m}_{1/2}} = 0$ (см. (4.17)). Поэтому в силу соотношений (4.18) и (4.19) $a_1 = a_2 = 0$, если $\mathfrak{m}_{1/2} \neq 0$, т.е. $S = 0$. Таким образом, всегда $\tilde{\Upsilon}_* = SR^{-1}$. Принимая во внимание, что $I(\mathfrak{m}_{\lambda_{pk}^\pm}) = \mathfrak{m}_{\lambda_{pk}^\mp}$ и $I(\mathfrak{m}_{\lambda_{j/2}}) = \mathfrak{m}_{\lambda_{j/2}}$, мы завершаем доказательство.

Мы можем дополнить предложение 4.10 следующим простым утверждением.

СЛЕДСТВИЕ 4.10.1. *Предположим, что ограниченная система корней Σ для $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ имеет тип C_r . Тогда для произвольных $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ отображение $(a_1 + a_2 I) \circ \Upsilon$ удовлетворяет условию (4.5).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\Upsilon \in \text{EC}(W_\Upsilon)$, то осталось только доказать (4.5) для отображения $I \circ \Upsilon$. Но $I\Upsilon_{*w} = \Upsilon_{*Iw}I$, поскольку отображение Υ K -эквивариантно, а I и автоморфизм $\exp(\frac{\pi}{2} \text{ad}_{Z_0}) \in \text{Ad}(K)$ совпадают при ограничении на $\mathfrak{m}$ (см. п. 4.1). Согласно предложению 4.10 $I\Upsilon_{*w} = -\Upsilon_{*w}I$. Так что $\Upsilon_{*Iw} = -\Upsilon_{*w}$. Принимая во внимание уже доказанное тождество (4.5) для Υ в точке Iw и свойства (3.1) эндоморфизма I , мы получаем, что

$$\begin{aligned} I\Upsilon_{*w}([w, [\xi, \eta]]) &= \Upsilon_{*Iw}([Iw, [\xi, \eta]]) \\ &= [[Iw, \Upsilon_{*Iw}(\xi)], \eta] - [[Iw, \Upsilon_{*Iw}(\eta)], \xi] \\ &= [[w, -I\Upsilon_{*Iw}(\xi)], \eta] - [[w, -I\Upsilon_{*Iw}(\eta)], \xi] \\ &= [[w, I\Upsilon_{*w}(\xi)], \eta] - [[w, I\Upsilon_{*w}(\eta)], \xi]. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4.11. *Пусть $(J(P), \Omega)$ — кэлерова структура на D такая, что $IP = \overline{PI}$ на W . Тогда для каждого подпространства Картана $\mathfrak{a} = \sum_{j=1}^r \mathbb{R}X_j \subset \mathfrak{m}$ $R_w(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, где $w \in W \cap \mathfrak{a}$. Больше того, $R_w(X_j) \in \mathbb{R}X_j$, $j = \overline{1, r}$, и $R_w(\mathfrak{M}_\lambda) \subset \mathfrak{M}_\lambda$ для всех корней $\lambda \in \Sigma^{++}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного отображения $A \in \text{Eqv}(W)$ из соотношений (2.6) вытекает, что $[\text{ad}_\zeta, A_w] = (L_{[\zeta, w]}A)_w$, где $\zeta \in \mathfrak{k}$. Тогда согласно (3.8)

$$[\text{ad}_\zeta, (1 + (SR^{-1})_w^2)R_w](\eta) = I[\eta, [w, R_w^{-1}I[\zeta, w]]] \quad \forall \zeta \in \mathfrak{k}, \quad \eta \in \mathfrak{m}. \quad (4.20)$$

Сначала мы докажем, что $R_w(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A} = \mathfrak{a} \oplus I\mathfrak{a}$. Чтобы увидеть это, обозначим через $K^\mathfrak{a}$ связную подгруппу в K с алгеброй Ли $\mathfrak{k}^\mathfrak{a}$ (централизатором подпространства Картана $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{k}$). Все автоморфизмы Ad_k , $k \in K^\mathfrak{a}$, оставляют точки пространства $\mathfrak{a} \oplus I\mathfrak{a}$ неподвижными. Тогда согласно (2.6) все эти автоморфизмы оставляют и точки из $R_w(\mathfrak{a})$ неподвижными. Теперь из предложения 4.2 следует, что $R_w(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{A}$, если $\mathfrak{k}^\mathfrak{a} \neq 0$.

Осталось рассмотреть случай, когда $\mathfrak{k}^\mathfrak{a} = 0$, т.е. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$ и Σ — система корней для $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Тогда $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t}$ и согласно следствию 4.7.2 для каждого корня $\alpha \in \Delta_\mathfrak{m}^+$ существует единственный корень $\lambda^+ \in \Sigma^{++}$ такой, что

$\mathbb{R}X_\alpha \oplus \mathbb{R}Y_\alpha = \mathfrak{m}_{\lambda^+} \oplus \text{Im}_{\lambda^+}$. Здесь $\alpha = \frac{i}{2}(\epsilon'_p + \epsilon'_k)$ и $\lambda^+ = \frac{i}{2}(\epsilon_p + \epsilon_k)$, где $1 \leq p \leq k \leq r$. Если $\lambda^+ \neq i\epsilon_p$, то $\text{Im}_{\lambda^+} = \mathfrak{m}_{\lambda^-}$, где $\lambda^- = \frac{i}{2}(\epsilon_p - \epsilon_k)$, иначе $\text{Im}_{\lambda^+} = \mathbb{R}X_p$. В этом одномерном подпространстве Im_{λ^+} зафиксируем ненулевой вектор X_α^- , предполагая, что $X_{\beta_j}^- = X_j$, $j = \overline{1, r}$. Тогда для $\alpha = \frac{i}{2}(\epsilon'_p + \epsilon'_k)$, $T = \sum_{j=1}^r t_j T_j \in \mathfrak{t}'$, $w = \sum_{j=1}^r x_j X_j \in \mathfrak{a}$

$$\begin{aligned} \text{ad}_T(X_\alpha^-) &= \frac{1}{2}(t_p + t_k)IX_\alpha^-, \\ \text{ad}_w^2(X_\alpha^-) &= -\frac{1}{4}(x_p - x_k)^2 X_\alpha^-, \\ \text{ad}_w^2(IX_\alpha^-) &= -\frac{1}{4}(x_p + x_k)^2 IX_\alpha^-. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Теперь рассмотрим $(\mathfrak{m}, I, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ как эрмитово пространство над $\mathbb{C}$ с фиксированным ортогональным базисом $\{X_\beta^-, \beta \in \Delta_{\mathfrak{m}}^+\}$. Предположим, что все базисные векторы имеют одинаковую длину, равную длине (сопряженных) векторов $\{X_j\}_{j=1}^r$. Так как каждый оператор $R_w: \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$ симметричен и коммутирует с I , соответствующая комплексная матрица эрмитова. Пусть (R_{β_j}) и (r_{β_j}) , $\beta \in \Delta^+$, $j = \overline{1, r}$, — две комплексные матричные функции, соответствующие оператор-функциям $R|\mathfrak{A}$ и $R^{-1}|\mathfrak{A}$. Тогда $\sum_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{m}}^+} \overline{R}_{\beta p} r_{\beta k} = \delta_k^p$.

Положим $\eta = X_{\beta_n}^- \in \mathfrak{a}$ и $\zeta = T \in \mathfrak{t}'$ в (4.20). Согласно предложению 4.10 $(SR^{-1})_w^2 = (a_1^2 + a_2^2)(Y_*)^2_w$. Принимая во внимание соотношения (4.21) и (4.19), мы получаем из (4.20) следующее уравнение:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}t_p + \frac{1}{2}t_k - t_n\right)(1 + (a_1^2 + a_2^2)x_p^{-2}x_k^{-2})R_{\alpha n} \\ &= \sum_{j=1}^r t_j x_j \left(\frac{1}{4}(\delta_p^n - \delta_k^n)(x_p - x_k)\hat{r}_{\alpha j} + \frac{i}{4}(\delta_p^n + \delta_k^n)(x_p + x_k)\check{r}_{\alpha j}\right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Здесь $\alpha = \frac{i}{2}(\epsilon'_p + \epsilon'_k)$, $\hat{r}_{\alpha j}$ и $\check{r}_{\alpha j}$ — вещественная и мнимая части комплексной функции $r_{\alpha j}$. Это уравнение дает нам $R_{\alpha n} = r_{\alpha n} = 0$, если $n \neq p$ и $n \neq k$.

Предположим теперь, что $p \neq k$. Из (4.22) следует, что $R_{\alpha p} = \overline{R}_{\alpha k}$ и

$$\begin{aligned} R_{\alpha p}(1 + (a_1^2 + a_2^2)x_p^{-2}x_k^{-2}) &= -\frac{1}{2}x_p((x_p - x_k)\hat{r}_{\alpha p} + i(x_p + x_k)\check{r}_{\alpha p}) \\ &= \frac{1}{2}x_k((x_p - x_k)\hat{r}_{\alpha k} + i(x_p + x_k)\check{r}_{\alpha k}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Но

$$\sum_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{m}}^+} \overline{R}_{\beta p} r_{\beta k} = \overline{R}_{\alpha p} r_{\alpha k} = \delta_k^p = 0,$$

т. е. или $R_{\alpha p}$, или число $r_{\alpha k}$ равно нулю. Согласно (4.23) эти две функции на $W \cap \mathfrak{a}$ равны нулю одновременно. Таким образом, $R_w(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{A}$.

Возвращаясь к общему случаю, рассмотрим опять соотношения (4.20). Используя базис $\{X_j\}$, $j = \overline{1, r}$, в $\mathfrak{a}$, мы выведем следующие уравнения для матричных элементов R_{pn} и r_{pn} эндоморфизмов $R, R^{-1}: \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{A}$

$$(t_p - t_n)(1 + (a_1^2 + a_2^2)x_p^{-4})R_{pn} = i\delta_p^n \sum_{j=1}^r t_j x_j x_p (\text{Im } r_{pj}) \quad \forall t_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, r}.$$

Таким образом, $R_{pn} = 0$, если $n \neq p$, и $r_{pp} \in \mathbb{R}$, т.е. $R_w(\mathbb{R}X_p) \subset \mathbb{R}X_p$. Но $I[\mathfrak{t}', \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$. Поэтому для любого $\zeta \in \mathfrak{t}'$ выражение в правой части равенства (4.20) обращается в нуль и, следовательно, $(1 + (SR^{-1})_w^2)R_w(\mathfrak{M}_\lambda) \subset \mathfrak{M}_\lambda$.

Выше мы показали, что структура отображения P зависит от типа ограниченной системы корней Σ симметрического пространства G/K . Для каждого из типов мы определим множество $\mathcal{A}^\Sigma \subset \mathbb{R}^3 \times \{\pm 1\}$:

$$\mathcal{A}^C = \mathbb{R}^3 \times \{1\}, \quad \mathcal{A}^{BC} = \mathbb{R}^+ \times \{0\} \times \{0\} \times \{\pm 1\} \cup \{(0, 0, 0, -1)\}. \quad (4.24)$$

Для элемента $\mathfrak{a} = (a_0, a_1, a_2, \varepsilon) \in \mathcal{A}^C$ пусть $a_\dagger = \frac{1}{2}(\sqrt{a_0^2 + 4a_1^2 + 4a_2^2} - a_0)$, если $a_1^2 + a_2^2 > 0$, и $a_\dagger = -a_0$, если $a_1 = a_2 = 0$. Положим $\mathfrak{a}_\dagger = \{\sum_{j=1}^r x_j X_j \in \mathfrak{a} : x_j^2 > a_\dagger\}$. Это подмножество подпространства Картана $\mathfrak{a}$ определяет единственное $\text{Ad}(K)$ -инвариантное открытое связное подмножество $W_{\mathfrak{a}}^C$ в $\mathfrak{m}$ такое, что $W_{\mathfrak{a}}^C \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\dagger$. Для $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}^{BC}$ пусть $W_{\mathfrak{a}}^{BC} = \mathfrak{m}$, если $\varepsilon = 1$, и $W_{\mathfrak{a}}^{BC} = \mathfrak{m} \setminus \{0\}$, если $\varepsilon = -1$. Положим $D_{\mathfrak{a}}^\Sigma = \Pi(G \times W_{\mathfrak{a}}^\Sigma)$.

Центральным результатом работы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.12. Пусть $(J(P), \Omega)$ – G -инвариантная кэлерова структура на G -инвариантной области $D \subset T(G/K)$, где G/K – неприводимое эрмитово симметрическое пространство компактного типа. Предположим, что $IP = \overline{PI}$ на W . Тогда существует единственная четверка $(a_0, a_1, a_2, \varepsilon) \in \mathcal{A}^\Sigma$ такая, что $W \subset W_{\mathfrak{a}}^\Sigma$ и

$$P_w = (1 + i(a_1 + a_2 I)\Upsilon_{*w}) \cdot (1 + (a_1^2 + a_2^2)(\Upsilon_*)^2_w)^{-1} \cdot B_w, \quad w \in W \subset \mathfrak{m}, \quad (4.25)$$

$$B_w = (I \cdot \text{ad}_{[I\widehat{\phi}(w), w]} + \varepsilon \sqrt{|a_0|} \cdot \text{Id})|_{\mathfrak{m}}, \quad \widehat{\phi}(w) = \phi(-\text{ad}_w^2 - \text{ad}_{Iw}^2)w, \quad (4.26)$$

$$\phi(t) = \frac{\sqrt{a_0 + t - (a_1^2 + a_2^2)t^{-1}} - \varepsilon \sqrt{|a_0|}}{t}.$$

Для произвольного $(a_0, a_1, a_2, \varepsilon) \in \mathcal{A}^\Sigma$ оператор-функция P (4.25) определяет кэлерову структуру $(J(P), \Omega)$ на G -инвариантной области $D_{\mathfrak{a}}^\Sigma \subset T(G/K)$. Эта структура антикоммутирует с J^- .

Больше того, если $a_2 = 0$, то эта кэлерова структура $(J(P), \Omega = d\theta)$ (4.25) допускает потенциальную функцию Q , т.е. $\Omega = 2i\bar{\partial}\partial Q$; если дополнительно $a_1 = 0$, то $\theta = 2\text{Im} \bar{\partial}Q$. Функция $(\Pi^*Q)(g, w) = \langle q(-\text{ad}_w^2 - \text{ad}_{Iw}^2)w, w \rangle$, где $q(t) = \frac{1}{2t} \int \frac{dt}{\sqrt{a_0 + t - a_1^2 t^{-1}}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 4.10 $SR^{-1} = (a_1 + a_2 I)\Upsilon_*$ на W . Определим K -эквивариантное отображение $B \in \text{Eqv}(W)$, полагая

$$B_w = (1 + c^2(\Upsilon_*)^2_w)R_w, \quad c^2 = a_1^2 + a_2^2.$$

Замена $R_w \mapsto (1 + c^2(\Upsilon_*)^2_w)^{-1}B_w$ превращает условие (3.8) в

$$(L_\xi B)_w(\eta) = -[[w, IB_w^{-1}(1 + c^2(\Upsilon_*)^2_w)\xi], I\eta], \quad w \in W, \quad \xi, \eta \in \mathfrak{m}. \quad (4.27)$$

Ввиду леммы 4.11 $B_w(X_j) = b_j(w)X_j$ для всех $w \in W \cap \mathfrak{a}$. Полагая в формуле (4.27) $\eta = X_j$ и $\xi = X_k$, мы получаем, что функция b_j на $W \cap \mathfrak{a}$ зависит только

от j -й координаты вектора $w = \sum_{j=1}^r x_j X_j$. Принимая во внимание действие ограниченной группы Вейля для $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ на $\mathfrak{a}$ и K -эквивариантность отображения B , мы заключаем, что все b_j совпадают как функции на некотором подмножестве в $\mathbb{R}$ (см. доказательство предложения 4.10 и условие (2.6)). Эту единственную функцию обозначим через b , т.е. $b_j(w) = b(x_j)$. Разрешая уравнение (4.27) с $\xi = \eta = X_j$, т.е. $b'(x) = b^{-1}(x)(1 + c^2 x^{-4})x$, мы находим, что

$$b(x) = \sqrt{a_0 + x^2 - (a_1^2 + a_2^2)x^{-2}} \quad (4.28)$$

для некоторой константы $a_0 \in \mathbb{R}$. Также $B_w(IX_j) = b_j(w)IX_j$, поскольку $B_w I = IB_w$.

Согласно лемме 4.11 $B_w(\mathfrak{M}_\lambda) = \mathfrak{M}_\lambda$ для каждого $\lambda \in \Sigma^{++}$. Так как $[\mathfrak{a}, I\mathfrak{a}] \subset \mathfrak{t}'$, из (4.27) и следствия 4.7.2 следует, что (4.13) – ортогональное разложение в сумму собственных подпространств для всех $(L_\xi B)_w$, $w \in W \cap \mathfrak{a}$, $\xi \in \mathfrak{a}$, и, следовательно, существует постоянный оператор $B_\dagger: \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$ такой, что $(B_w - B_\dagger)|\mathfrak{M}_\lambda = b_\lambda(w) \cdot \text{Id}_{\mathfrak{M}_\lambda}$. Мы можем выбрать оператор $B_\dagger$ с нулевым следом при ограничении на каждое подпространство $\mathfrak{M}_\lambda$.

Положим $B_w^\lambda = B_w|_{\mathfrak{M}_\lambda}$ для $w \in W \cap \mathfrak{a}$. Зафиксируем элемент $\lambda \in \Sigma^{++}$ и вектор $\xi_\lambda \in \mathfrak{m}_\lambda$. Существует вектор $\zeta_\lambda \in \mathfrak{k}_\lambda$, удовлетворяющий условию (4.3). Замена $R_w \mapsto (1 + c^2(\Upsilon_*)^2_w)^{-1}B_w$ превращает формулу (4.20) в

$$[\text{ad}_\zeta, B_w](\eta) = I[\eta, [w, B_w^{-1}(1 + c^2(\Upsilon_*)^2_w)I[\zeta, w]]] \quad \forall \zeta \in \mathfrak{k}, \quad \eta \in \mathfrak{m}. \quad (4.29)$$

Мы утверждаем, что $B_w(\mathfrak{m}_\lambda) \subset \mathfrak{m}_\lambda$. Действительно, если $\lambda = \lambda_I$, то $\mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{m}_\lambda$, т.е. утверждение справедливо. Предположим теперь, что $\lambda \neq \lambda_I$ и $\lambda_I \neq 0$. Тогда $\mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{m}_\lambda \oplus \mathfrak{m}_{\lambda_I}$. Положим в (4.29) $\zeta = \zeta_\lambda$ и $\eta = w' \in \mathfrak{a}$. Ввиду (4.19) $\Upsilon_{*w}(\xi_\lambda) = u_\lambda(w)\xi_\lambda$. В силу леммы 4.3 уравнение (4.29) даст

$$\begin{aligned} \lambda(B_w w')\xi_\lambda - \lambda(w')B_w(\xi_\lambda) &= -\lambda(w)\lambda_I(w)\lambda_I(w')(1 + c^2 u_\lambda^2(w)) \cdot (B_w^{-1}\xi_\lambda)_{\mathfrak{m}_\lambda} \\ &\quad - \lambda(w)\lambda(w)\lambda(w')(1 + c^2 u_\lambda^2(w)) \cdot (B_w^{-1}\xi_\lambda)_{\mathfrak{m}_{\lambda_I}}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Приравнивая в формуле (4.30) компоненты, принадлежащие подпространству $\mathfrak{m}_{\lambda_I}$, мы получаем, что

$$(B_w \xi_\lambda)_{\mathfrak{m}_{\lambda_I}} = \lambda^2(w)(1 + c^2 u_\lambda^2(w)) \cdot (B_w^{-1}\xi_\lambda)_{\mathfrak{m}_{\lambda_I}}.$$

Аналогично, для вектора $\xi_{\lambda_I} = I\xi_\lambda \in \mathfrak{m}_{\lambda_I}$ имеем

$$(B_w \xi_{\lambda_I})_{\mathfrak{m}_\lambda} = \lambda_I^2(w)(1 + c^2 u_{\lambda_I}^2(w)) \cdot (B_w^{-1}\xi_{\lambda_I})_{\mathfrak{m}_\lambda}.$$

Но $(B_w I\xi_\lambda)_{\mathfrak{m}_\lambda} = I(B_w \xi_\lambda)_{\mathfrak{m}_{\lambda_I}}$ и похожие соотношения выполнены для оператора B_w^{-1} . Отметим также, что $u_\lambda^2 = u_{\lambda_I}^2$ и $\lambda^2 \neq \lambda_I^2$. Поэтому $(B_w \xi_\lambda)_{\mathfrak{m}_{\lambda_I}} = 0$. Утверждение доказано.

Возвращаясь к общему случаю, мы получаем для произвольного $\lambda \in \Sigma^{++}$, что

$$\lambda(B_w w')\xi_\lambda - \lambda(w')B_w(\xi_\lambda) = -\lambda(w)\lambda_I(w)\lambda_I(w')(1 + c^2 u_\lambda^2(w))B_w^{-1}(\xi_\lambda).$$

Больше того, мы можем заменить вектор ξ_λ в этом уравнении на вектор $I\xi_\lambda$, поскольку $B_w I = IB_w$. Таким образом,

$$\lambda(B_w w') \cdot B_w^\lambda - \lambda(w') \cdot (B_w^\lambda)^2 = -\lambda(w)\lambda_I(w)\lambda_I(w')(1 + c^2 u_\lambda^2(w)) \cdot \text{Id}_{\mathfrak{M}_\lambda}.$$

Так как $B_w w' = \sum_{j=1}^r b(x_j) x_j' X_j$, линейные функционалы $\lambda(B_w w')$ и $\lambda(w')$ на $\mathfrak{a}$ линейно независимы для любого вектора w в общем положении. Таким образом, $B_{\dagger} = 0$ и B_w^λ — скалярный оператор. Тогда вещественная функция $b_\lambda(w)$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda(B_w w') \cdot b_\lambda(w) - \lambda(w') \cdot b_\lambda^2(w) = -\lambda(w) \lambda_I(w) \lambda_I(w') (1 + c^2 u_\lambda^2(w)).$$

Это уравнение имеет следующие решения:

$$\begin{aligned} b_\lambda &= \frac{1}{2}(b_p + b_k), & \text{если } \lambda &= \frac{i}{2}(\epsilon_p + \epsilon_k), \\ b_\lambda &= \frac{1}{2}(b_j + \varepsilon \sqrt{a_0}), & \text{если } \lambda &= \frac{i}{2}\epsilon_j, \end{aligned} \quad (4.31)$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Другими словами, с ограничениями (4.24) на параметры $a_0, a_1, a_2, \varepsilon$

$$B_w = (I \operatorname{ad}_{T(w)} + \varepsilon \sqrt{|a_0|} \operatorname{Id})|_{\mathfrak{m}}, \quad T(w) = \sum_{j=1}^r -(b_j(w) - \varepsilon \sqrt{|a_0|}) T_j. \quad (4.32)$$

Так как $[IX_j, X_j] = -T_j$ и $-\operatorname{ad}_{Iw}^2(X_j) = x_j^2 X_j$, выражения (4.26) и (4.32) для B_w , $w \in W \cap \mathfrak{a}$, совпадают. Эquivариантность отображения $B: w \mapsto B_w$ (4.26) доказывает первое утверждение теоремы.

Так как $\Upsilon_{*w} I = -I \Upsilon_{*w}$, то каждый оператор $1 + i(a_1 + a_2 I) \Upsilon_{*w}$ обратим. Значит, по построению оператор-функция P (4.25) определяет почти комплексную структуру на $D_{\mathfrak{a}}^\Sigma$, антикоммутирующую с J^- . Поэтому, чтобы доказать второе утверждение теоремы, достаточно показать, что почти комплексная структура $J(P)$ с P из (4.25) интегрируема. Следующая лемма обобщает некоторые утверждения леммы 2.1 из работы [4], где рассмотрен случай $\operatorname{Im} P = 0$.

ЛЕММА 4.13. Пусть $P \in \operatorname{Alm}(W)$, $RS = SR$ и $IP = \overline{P}I$. Предположим, что P удовлетворяет условиям (3.8) и (3.9). Тогда почти комплексная структура $J(P)$ на D интегрируема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма вытекает непосредственно из леммы 3.6, предложения 4.10 и его следствия 4.10.1.

Из предложения 4.10 и доказательства выше следует, что (4.7) — разложение в сумму собственных подпространств для всех операторов $(SR^{-1})_w$ и B_w , $w \in W \cap \mathfrak{a}$, и, следовательно, для всех S_w и R_w . Используя эквивариантность, получаем, что R_w, S_w — пара коммутирующих операторов для всех $w \in W$.

Таким образом, чтобы доказать интегрируемость $J(P)$, мы должны проверить только условие (4.27). Без ограничения общности мы можем предположить, что $w \in W \cap \mathfrak{a}$. Но отображение B эквивариантно. Поэтому это условие эквивалентно условиям (4.27) с $\xi \in \mathfrak{a}$ и (4.29).

Рассматривая уравнение (4.27) с $\eta = \xi_\lambda$, $\lambda \in \Sigma^{++}$, и ограничение $b_\lambda|_{\mathfrak{a}}$ как функцию переменных $x_1, \dots, x_r$, получаем, что

$$\frac{\partial b_\lambda}{\partial x_j} \cdot \xi_\lambda = -I \operatorname{ad}_{T_j}(\xi_\lambda) \cdot (1 + c^2 x_j^{-4}) x_j b_j^{-1}, \quad j = \overline{1, r}. \quad (4.33)$$

Согласно следствию 4.7.2 $I \operatorname{ad}_{T_j}(\xi_\lambda) = i \rho_{\mathfrak{m}}(\lambda)(T_j) \xi_\lambda$, а значит, уравнение (4.33) — линейная комбинация уравнений для b_j с решениями $b(x_j)$ (4.28).

Так как I коммутирует с ad_ζ , из (4.32) следует, что левая часть формулы (4.29) равняется $I \text{ad}_{[\zeta, T(w)]}$. Но ad -представление алгебры Ли $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{m}$ точное (инеприводимое) [11; (8.5.1)]. Отсюда вытекает, что формула (4.29) эквивалентна уравнению

$$[T(w), \zeta] = [w, B_w^{-1}(1 + c^2(\Upsilon_*)^2_w)I[\zeta, w]] \quad \forall \zeta \in \mathfrak{k}. \quad (4.34)$$

Для $\zeta \in \mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}^{\mathfrak{a}}$ левая и правая части формулы (4.34) обращаются в нуль, поскольку $w \in \mathfrak{a}$ и $T(w) \in \mathfrak{k}' = [\mathfrak{a}, I\mathfrak{a}]$. Аналогично имеем нули для $\zeta \in \mathfrak{k}_\lambda$, $\lambda \in \Sigma^+$, где $\lambda_I = 0$, поскольку $[\mathfrak{k}', \mathfrak{k}_\lambda] = 0$ согласно следствию 4.7.3 и $I[\mathfrak{a}, \mathfrak{k}_\lambda] \subset I\mathfrak{m}_\lambda \subset \mathfrak{a}$.

Предположим теперь, что $\zeta = \zeta_\lambda \in \mathfrak{k}_\lambda$ и $\lambda_I \neq 0$. Применяя следствие 4.7.3, мы получаем, что

$$i\rho_{\mathfrak{k}}(\lambda)(T(w)) \cdot \zeta'_{\lambda_I} = -\lambda(w)\lambda_I(w)(1 + c^2u_\lambda^2)b_\lambda^{-1} \cdot \zeta'_{\lambda_I}.$$

Здесь $\lambda = \frac{i}{2}(\epsilon_p \pm \epsilon_k)$, $p \neq k$, или $\lambda = \frac{i}{2}\epsilon_j$. Это алгебраическое тождество легко проверить, используя (4.19), (4.28), (4.31) и выражения для $\rho_{\mathfrak{k}}(\lambda)$ (4.14). Таким образом, почти комплексная структура $J(P)$ интегрируема.

Чтобы доказать последнее утверждение теоремы для комплексной структуры $(J(P), \Omega)$, рассмотрим ее распределение $F(P)$ $(0, 1)$ -векторов. По определению $\bar{\partial}Q|F(P) = dQ|F(P)$ и $\bar{\partial}Q|\overline{F(P)} = 0$. Обозначим через Φ 1-форму $\Pi^*(\bar{\partial}Q)$ на $G \times W$. Тогда для любых $\xi \in \mathfrak{m}$, $\zeta \in \mathfrak{k}$, $w \in \mathfrak{m}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{(g,w)}(\xi^l(g), -i\overline{P}_w(\xi)) &= 0, & \Phi_{(g,w)}(\zeta^l(g), [w, \zeta]) &= 0, \\ \Phi_{(g,w)}(\xi^l(g), iP_w(\xi)) &= i\langle \hat{q}(w), P_w(\xi) \rangle + i\langle \hat{q}_{*w}(P_w(\xi)), w \rangle. \end{aligned}$$

Зафиксируем точку $w \in W \cap \mathfrak{a}$. Тогда $\hat{q}(w) \in \mathfrak{a}$, $\hat{q}_{*w}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$ и $P_w(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$, поскольку $a_2 = 0$. Теперь, используя инвариантность пространства $\mathfrak{a}^\perp \subset \mathfrak{m}$ относительно P_w и $\hat{q}_{*w}$, мы получаем, что $\Phi_{(e,w)}(\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a}^\perp, \mathfrak{a}^\perp) = 0$ ($[w, \mathfrak{k}] \perp \mathfrak{a}$). Так как эндоморфизмы P_w и $\hat{q}_{*w}$ коммутируют и симметричны, то для $\xi_0 \in \mathfrak{a}$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{(e,w)}(\xi_0, -i(R - iS)_w \xi_0) &= 0, \\ \Phi_{(e,w)}(\xi_0, i(R + iS)_w \xi_0) &= i\langle (R + iS)_w(\hat{q}(w) + \hat{q}_{*w}(w)), \xi_0 \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, для любых $\eta \in \mathfrak{g}$, $u \in \mathfrak{m}$

$$\Phi_{(e,w)}(\eta, u) = \frac{i}{2}\langle (1 + SR^{-1}SR^{-1})_w R_w(w'), \eta \rangle + \frac{1}{2}\langle (1 + iSR^{-1})_w(w'), u \rangle. \quad (4.35)$$

Здесь w' — это вектор $\hat{q}(w) + \hat{q}_{*w}(w) \in \mathfrak{a}$. Ясно, что $d\Phi = \frac{1}{2}i d\tilde{\theta}$, если первое слагаемое в правой части формулы (4.35) равняется $\frac{1}{2}i\tilde{\theta}$, а второе слагаемое определяет замкнутую 1-форму σ на $W_{\mathfrak{a}}^\Sigma$, другими словами, если $(1 + SR^{-1}SR^{-1})_w R_w(w') = w$, т.е. $b(x)(2xq(x^2) + 2x^3q'(x^2)) = b(x)(x^2q(x^2))' = x$, в силу соотношений (2.4) и (4.9). Далее, форма $\sigma_w(u) = 2^{-1}\langle (1 + iSR_w^{-1})(\hat{q}(w) + \hat{q}_{*w}(w)), u \rangle$ замкнута. Действительно, $SR_w^{-1} = a_1\Upsilon_{*w}$. Отображение $w \mapsto (1 + ia_1\Upsilon_{*w})(\hat{q}(w) + \hat{q}_{*w}(w))$ K -эквивариантно, поскольку таковыми являются отображения $\hat{q}$, $w \mapsto \hat{q}_{*w}$ и $w \mapsto \Upsilon_{*w}$. Теперь согласно лемме 4.5 $d\sigma = 0$, поскольку ограничение формы σ на $W \cap \mathfrak{a}$ — линейная комбинация замкнутых форм $(1 - i/x_j^2)d(x_j^2q(x_j^2))$.

ПРИМЕР 4.14. Гиперкэлеровы структуры на инвариантных областях в $T(\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1))$. Пусть $G/K = \mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)$. Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ имеет базис X_1, Y_1, T_1 (4.8). Для каждого комплексного числа $z = x + iy$ положим $zX_1 \stackrel{\text{def}}{=} xX_1 + yIX_1 = xX_1 + yY_1 \in \mathfrak{m}$. Пусть $(J(R + iS), \Omega)$ – кэлерова структура, антикоммутирующая с J^- . Тогда для каждого $w = zX_1, |z|^2 > a_\dagger$,

$$R_w = \psi(|z|) \cdot \mathrm{Id}_{\mathfrak{m}}, \quad \psi(x) = \frac{\sqrt{x^6 \cdot (x^4 + a_0x^2 - (a_1^2 + a_2^2))}}{x^4 + (a_1^2 + a_2^2)},$$

$$S_w(vX_1) = \psi(|z|)(a_1 + ia_2)\overline{z^{-2}v} \cdot X_1 \quad \forall v \in \mathbb{C}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.15. Глобальная гиперкэлерова структура $(\mathfrak{g}, J^-, J(P))$, где $J(P)$ определяется формулой (4.25) с $a_0 > 0$, $\varepsilon = 1$ и $a_1 = a_2 = 0$, совпадает со структурой, построенной в [4; теорема 1]. Здесь $\mathfrak{g}$ – соответствующая паре $(J(P), \Omega)$ (гипер)кэлерова метрика. Это единственная метрика, для которой ее ограничение на G/K совпадает с метрикой $\sqrt{a_0} \cdot \mathbf{g}_M$ на $M = G/K$ (поскольку $P_0 = \sqrt{a_0} \cdot \mathrm{Id}_{\mathfrak{m}}$). Наша формула для потенциала обобщает такую же формулу из [5].

Список литературы

1. Burns D. Some examples of the twistor construction // Contributions to several complex variables: in honor of W. Stoll / ed. A. Howard, P.M. Wong. Vieweg, 1986. P. 51–67.
2. Biquard O. Sur les équations de Nahm et la structure de Poisson des algèbres de Lie semi-simples complexes // Math. Ann. 1996. V. 304. P. 253–276.
3. Dancer A., Szöke R. Symmetric spaces, adapted complex structures and hyperkähler structures // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1997. V. 48. №2. P. 27–38.
4. Biquard O., Gauduchon P. Hyperkähler metrics on cotangent bundles of Hermitian symmetric spaces // Geometry and physics / ed. J. Andersen et al. New York: Dekker, 1997. P. 287–298. (Lecture Notes in Pure and Appl. Math. V. 184.)
5. Biquard O., Gauduchon P. Géométrie hyperkählérienne des espaces Hermitiens symétriques complexifiés // Sémin. Théor. Spectr. Géom. 1998. V. 16. P. 127–173.
6. Микитюк И. В. Кэлеровы структуры на касательных расслоениях симметрических пространств ранга один // Матем. сб. 2001. Т. 192. №11. С. 93–122.
7. Mykytyuk I. V. Invariant Kähler structures on the cotangent bundle of compact symmetric spaces // Nagoya Math. J. 2003. V. 169. P. 191–217.
8. Obata M. Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure // Japan J. Math. (N.S.). 1956. V. 26. P. 43–77.
9. Hitchin N. J. Hyperkähler manifolds // Seminaire Bourbaki. V. 748. Paris: Soc. Math. France, 1992. P. 137–166.
10. Guillemin V., Sternberg S. Geometric quantization and multiplicities of group representations // Invent. Math. 1982. V. 67. P. 515–538.
11. Goto M., Grosshans F. Semisimple Lie algebras. New York: Dekker, 1978. (Lecture Notes in Pure and App. Math. V. 38.)
12. Helgason S. Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. New York: Academic Press, 1978.
13. Wolf J. A. Fine structure of Hermitian symmetric spaces // Symmetric spaces / ed. W.M. Boothby, G. L. Weiss. New York: Dekker, 1972. P. 271–357.

Институт прикладной математики и фундаментальных наук,
Национальный университет “Львовская политехника”,
Львов, Украина
E-mail: viva@iapmm.lviv.ua

Поступила в редакцию
11.03.2003