Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Терехин, О наилучшем приближении функций в метрике L_p полиномами по аффинной системе, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 2, 131–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7630>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:23:33

УДК 517.518+517.982

П. А. Терехин

О наилучшем приближении функций в метрике L_p полиномами по аффинной системе

Получены оценки величин наилучшего приближения функций в метрике L_p полиномами по аффинной системе (системе сжатий и сдвигов), аналогичные известным оценкам П. Л. Ульянова и Б. И. Голубова для приближений по системе Хаара. Доказано, что при выполнении некоторых условий на порождающую функцию аффинной системы справедлив аналог неравенства А. Ф. Тимана и М. Ф. Тимана, который не имеет места для системы Хаара при $1 < p < \infty$.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: система Хаара, система сжатий и сдвигов, аффинная система, наилучшее приближение.

§ 1. Введение

Для функции $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с носителем $\text{supp } \varphi \subset [0, 1]$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ по стандартному представлению $n = 2^k + j$, где $k = 0, 1, \dots$ и $j = 0, \dots, 2^k - 1$, положим

$$\varphi_n(t) = \varphi_{k,j}(t) = 2^{k/2} \varphi(2^k t - j).$$

Пусть, кроме того, $\varphi_0 = \chi_{[0,1]}$ — характеристическая функция отрезка $[0, 1]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система функций $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ называется *аффинной системой* или *системой сжатий и сдвигов*, порожденной функцией φ .

Система Хаара (см. [1]) является примером аффинной системы функций $\{\chi_n\}_{n \geq 0}$, порожденной функцией $\chi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1]}$.

Рассмотрим пространство $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, всех вещественных измеримых на отрезке $[0, 1]$ функций $f(t)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Пусть

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |f(t+h) - f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 0 \leq \delta \leq 1,$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00097), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-4383.2010.1) и Программы поддержки молодых кандидатов наук РФ (грант № МК-346.2009.1).

– модуль непрерывности функции $f(t)$ в метрике пространства $L_p[0, 1]$. Далее, предположим, что неотрицательная неубывающая функция $\omega(\delta)$, $0 \leq \delta \leq 1$, удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0, \quad \omega(\delta + \eta) \leq \omega(\delta) + \omega(\eta).$$

Такая функция $\omega(\delta)$ называется *модулем непрерывности*. Соотношение

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \omega\left(\frac{1}{\nu}\right) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad n \rightarrow \infty,$$

называется *условием Бари* (см. [2]).

Обозначим через $H_p^\omega(M)$, где $M > 0$ – постоянная, класс функций $f \in L_p[0, 1]$, для которых

$$\omega_p(\delta, f) \leq M\omega(\delta).$$

Пусть $H_p^\omega = \bigcup_{M>0} H_p^\omega(M)$ – пространство Гёльдера всех функций f с заданным порядком модуля непрерывности $\omega_p(\delta, f) = O[\omega(\delta)]$, $\delta \rightarrow 0$. Если $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, то вместо $H_p^\omega(M) = H_p^{\delta^\alpha}(M)$ и $H_p^\omega = H_p^{\delta^\alpha}$ пишем $\text{Lip}_M(\alpha, p)$ и $\text{Lip}(\alpha, p)$ соответственно.

Полиномом порядка не выше n по аффинной системе $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ будем называть функцию вида

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k(t).$$

Величина наилучшего приближения функции $f \in L_p[0, 1]$ полиномами порядка не выше n по аффинной системе определяется равенством

$$E_n(f)_p = \inf_{\{P_n\}} \|f - P_n\|_p.$$

Для частного случая приближения по системе Хаара $\{\chi_n\}_{n \geq 0}$ мы будем использовать обозначение $E_n^H(f)_p$. Оценка последней величины (аналог неравенства Джексона) получена П. Л. Ульяновым в [3]:

$$E_n^H(f)_p \leq C\omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right). \quad (1.1)$$

Обратные оценки модуля непрерывности функций из $L_p[0, 1]$ через их наилучшие приближения $E_n^H(f)_p$ полиномами по системе Хаара найдены Б. И. Голубовым (см. [4], [5]). Одна из оценок Б. И. Голубова имеет следующий вид:

$$\omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right) \leq \frac{C}{n^{1/p}} \sum_{\nu=1}^n \nu^{1/p-1} E_\nu^H(f)_p. \quad (1.2)$$

В настоящей работе установлены подобные неравенства для величин наилучшего приближения $E_n(f)_p$ полиномами по аффинной системе $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$. Как мы покажем, конкретный вид неравенства зависит от свойств порождающей функции аффинной системы. Поэтому нам требуется указать такие условия на порождающую функцию, при которых справедливы искомые неравенства. Эти условия будем формулировать в терминах принадлежности функции φ пространству $\mathfrak{L}_p$ абсолютно сходящихся по пачкам рядов Фурье–Хаара и некоторым его подклассам. Перейдем к их определению.

§ 2. Пространство $\mathfrak{L}_p$

Говорят, что ряд Фурье–Хаара функции f абсолютно сходится по пачкам в метрике пространства $L_p[0, 1]$, если $f \in L_p[0, 1]$ и ее коэффициенты Фурье–Хаара удовлетворяют условию

$$\|f\|_p^* = |(f, \chi_0)| + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f, \chi_n)|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Множество всех функций f , для которых ряд Фурье–Хаара абсолютно сходится по пачкам в $L_p[0, 1]$, будем обозначать через $\mathfrak{L}_p$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{L}_p$ – банахово пространство с нормой $\|f\|_p^*$, причем $\mathfrak{L}_p \subset L_p[0, 1]$ и $\|f\|_p \leq \|f\|_p^*$.

Напомним, что при фиксированном k набор из 2^k функций $\{\chi_n\}_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}$ называется k -й пачкой системы Хаара. Норма линейной комбинации функций k -й пачки вычисляется по следующей формуле:

$$\left\| \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} c_n \chi_n \right\|_p = 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |c_n|^p \right)^{1/p}$$

(см., например, [6]). Таким образом, принадлежность $f \in \mathfrak{L}_p$ означает сходимость числового ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} (f, \chi_n) \chi_n \right\|_p < \infty,$$

что соответствует принятым определениям.

Для нормы линейной комбинации функций k -й пачки произвольной аффинной системы справедлива следующая формула.

ЛЕММА 1 (см. [7]). Для любого $k \geq 0$ и любых c_n имеем

$$\left\| \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} c_n \varphi_n \right\|_p = 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |c_n|^p \right)^{1/p} \|\varphi\|_p.$$

Аналогичная формула будет верна и для $\mathfrak{L}_p$ -нормы.

ЛЕММА 2 (см. [7]). Для любого $k \geq 0$ и любых c_n имеем

$$\left\| \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} c_n \varphi_n \right\|_p^* = 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |c_n|^p \right)^{1/p} \|\varphi\|_p^*.$$

Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \omega\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

Обозначим через $\mathfrak{L}_p^\omega(M)$, где $M > 0$, класс функций $f \in \mathfrak{L}_p$, для которых

$$2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f, \chi_n)|^p \right)^{1/p} \leq M \omega(2^{-k}), \quad k = 0, 1, \dots$$

Положим $\mathfrak{L}_p^\omega = \bigcup_{M>0} \mathfrak{L}_p^\omega(M)$. Заметим, что $H_p^\omega(M) \subset \mathfrak{L}_p^\omega(M)$, откуда $H_p^\omega \subset \mathfrak{L}_p^\omega$. Эти включения прямо следуют из оценки Ульянова коэффициентов Фурье–Хаара функции $f \in L_p[0, 1]$, полученной в работе [3]:

$$2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f, \chi_n)|^p \right)^{1/p} \leq \omega_p(2^{-k}, f), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если функция $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию Бари и условию

$$\sum_{\nu=1}^n \nu^{1/p-1} \omega\left(\frac{1}{\nu}\right) = O\left[n^{1/p} \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad (2.2)$$

то справедливо равенство $H_p^\omega = \mathfrak{L}_p^\omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется доказать включение $\mathfrak{L}_p^\omega \subset H_p^\omega$. Пусть $f \in \mathfrak{L}_p^\omega(M)$. Имеем

$$E_{2^N}^H(f)_p \leq \sum_{k=N}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f, \chi_n)|^p \right)^{1/p} \leq M \sum_{k=N}^{\infty} \omega(2^{-k}) = O[\omega(2^{-N})]$$

(в последнем равенстве учли условие Бари). Тогда $E_n^H(f)_p = O[\omega(\frac{1}{n})]$ и согласно неравенству (1.2) с учетом условия (2.2) находим

$$\omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right) = O\left[\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{\nu=1}^n \nu^{1/p-1} \omega\left(\frac{1}{\nu}\right)\right] = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Отсюда $\omega_p(\delta, f) = O[\omega(\delta)]$, т.е. $f \in H_p^\omega$. Включение $\mathfrak{L}_p^\omega \subset H_p^\omega$ доказано.

Условие (2.2) в предложении 1 нельзя отбросить. В самом деле, если $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, то равенство $\text{Lip}(\alpha, p) = \mathfrak{L}_p^{\delta^\alpha}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha p < 1$. Это следует из результатов Голубова (см. [5; теорема 2 и теорема 5]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ – числовая последовательность такая, что $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, и сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty.$$

Будем говорить, что функция f принадлежит классу $\mathfrak{L}_p(\Lambda)$, если для ее коэффициентов Фурье–Хаара, во-первых, выполняются условия нормировки

$$(f, \chi_0) = 0, \quad (f, \chi_1) = 1 \quad (2.3)$$

и, во-вторых, выполняются неравенства

$$2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f, \chi_n)|^p \right)^{1/p} \leq \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Отметим, что в принятом нами определении 2 последовательность Λ не предполагается невозрастающей. Пусть $\Lambda^\beta(M) = \{M2^{-k\beta}\}_{k=1}^\infty$, $\beta > 0$.

Обсудим нормировку (2.3). Для порождающей функции φ аффинной системы эти условия означают, что

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = 0, \quad 2 \int_0^{1/2} \varphi(t) dt = 1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для минимальности в пространстве $L_p[0, 1]$ аффинной системы функций $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$, $\varphi \in L_p[0, 1] \setminus \{0\}$, необходимо и достаточно, чтобы $\int_0^1 \varphi(t) dt = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Если $\int_0^1 \varphi(t) dt \neq 0$, то, как установлено в статье В.И. Филиппова и П. Освальда [8], система $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ является системой представления в пространстве $L_p[0, 1]$. В частности, справедливо представление

$$\varphi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n.$$

Поэтому аффинная система $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ не является минимальной.

Достаточность. Предположим, что $\int_0^1 \varphi(t) dt = 0$. Положим

$$\Delta(n) = [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}], \quad I_n = \int_{\Delta(n)} \varphi(t) dt,$$

где $n \in \mathbb{N}$ и $n = 2^k + j$ – стандартное представление. Обозначим $n_0 = 2^{k_0} + j_0 > 1$ – наименьшее натуральное число, для которого $I_{n_0} \neq 0$. Определим матрицу $\|c_{nm}\|_{n,m=1}^\infty$ с помощью равенств

$$c_{nm} = \int_{\Delta(\tilde{n})} \varphi_m(t) dt,$$

где $\tilde{n} = 2^{k_0}n + j_0 = 2^{k+k_0} + j2^{k_0} + j_0$. Видим, что

$$\Delta(\tilde{n}) = [j2^{-k} + j_02^{-k-k_0}, j2^{-k} + (j_0+1)2^{-k-k_0}].$$

Пусть $m = 2^K + J$. Будем иметь

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \int_{\Delta(\tilde{n})} \varphi_m(t) dt = \int_{j2^{-k}+j_02^{-k-k_0}}^{j2^{-k}+(j_0+1)2^{-k-k_0}} 2^{K/2} \varphi(2^K t - J) dt \\ &= 2^{-K/2} \int_{j2^{K-k}-J+j_02^{K-k-k_0}}^{j2^{K-k}-J+(j_0+1)2^{K-k-k_0}} \varphi(t) dt = 2^{-K/2} \int_a^b \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Сразу заметим, что при $n = m$ имеем $c_{nn} = 2^{-k/2} I_{n_0} \neq 0$. Покажем, что $c_{nm} = 0$ при $n < m$. Если $K = k$, то $[a, b] = \Delta(n_0) + j - J$. Так как $j < J$, то $[a, b] \cap [0, 1] = \emptyset$. Поэтому $\int_a^b \varphi(t) dt = 0$, а вместе с этим и $c_{nm} = 0$. Если $K \geq k + k_0$, то $a, b \in \mathbb{Z}$. Снова $\int_a^b \varphi(t) dt = 0$ и $c_{nm} = 0$. Наконец, рассмотрим случай $k < K < k + k_0$. Пусть $p = K - k \in \{1, \dots, k_0 - 1\}$ и $q = j2^{K-k} - J \in \mathbb{Z}$. Тогда $[a, b] = 2^p \Delta(n_0) + q$. Следовательно, отрезок $[a, b]$ является двоично-рациональным отрезком длины $2^{-(k_0-p)}$ и имеет вид $[a, b] = [i2^{-(k_0-p)}, (i+1)2^{-(k_0-p)}]$ при некотором $i \in \mathbb{Z}$. Если $i < 0$ или $i \geq 2^{k_0-p}$, то $[a, b] \cap [0, 1] = \emptyset$ и $\int_a^b \varphi(t) dt = 0$. Если $0 \leq i < 2^{k_0-p}$, то $n' = 2^{k_0-p} + i < 2^{k_0-p+1} \leq 2^{k_0} \leq n_0$, откуда $\int_a^b \varphi(t) dt = I_{n'} = 0$. В любом случае $c_{nm} = 0$ при $n < m$. Итак, матрица $\|c_{nm}\|_{n,m=1}^\infty$ — верхняя треугольная с ненулевыми элементами на главной диагонали. Значит, существует обратная матрица $\|d_{nm}\|_{n,m=1}^\infty$, которая также будет верхней треугольной. Рассмотрим ступенчатые функции

$$s_k = \sum_{n=1}^k d_{kn} \chi_{\Delta(\tilde{n})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Вычислим

$$(\varphi_m, s_k) = \sum_{n=1}^k d_{kn} \int_{\Delta(\tilde{n})} \varphi_m(t) dt = \sum_{n=1}^k d_{kn} c_{nm} = \delta_{km}.$$

Здесь δ_{km} — символ Кронекера. Таким образом, система ступенчатых функций $\{s_n\}_{n \geq 1}$ является биортогонально сопряженной к системе $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$. Это означает, что система $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ является минимальной в $L_p[0, 1]$. Так как $\int_0^1 \varphi_n(t) dt = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\varphi_0 \notin \text{span} \{\varphi_n\}_{n \geq 1}$. Следовательно, аффинная система $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ также минимальна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если аффинная система $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ является полной и минимальной в пространстве $L_p[0, 1]$, то $2 \int_0^{1/2} \varphi(t) dt \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Иначе

$$(\varphi, \chi) = \int_0^{1/2} \varphi(t) dt - \int_{1/2}^1 \varphi(t) dt = 0.$$

Тогда функция χ ортогональна всем функциям аффинной системы.

Предложения 2, 3 показывают, что условие $\int_0^1 \varphi(t) dt = 0$ эквивалентно минимальности аффинной системы $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$, и если оно выполняется, то условие $2 \int_0^{1/2} \varphi(t) dt \neq 0$ является необходимым условием полноты. Этим объясняется происхождение нормировки (2.3).

§ 3. Биортогональные ряды по аффинной системе

Предположим, что порождающая функция $\varphi \in L_p[0, 1]$ аффинной системы $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ удовлетворяет условиям нормировки (2.3). Рассмотрим биортогональное разложение

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} (f, \psi_n) \varphi_n \quad (3.1)$$

функции $f \in L_p[0, 1]$ по аффинной системе $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$. Укажем явный вид биортогонально сопряженной системы $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$. Фактически, структуру этой системы можно усмотреть из доказательства предложения 2. Нам потребуется техника, позволяющая получить удобное представление для биортогонально сопряженной системы. Примем следующие обозначения:

$\mathbb{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{0, 1\}^k$ – семейство всех конечных наборов $a = (a_1, \dots, a_k)$, состоящих из нулей и единиц (включая при $k = 0$ пустой набор);

$|a|$ – длина набора $a \in \mathbb{A}$, т.е. $|a| = k$ для $a = (a_1, \dots, a_k)$, длину пустого набора полагаем равной нулю;

ab – конкатенация наборов $a, b \in \mathbb{A}$: если $a = (a_1, \dots, a_k)$ и $b = (b_1, \dots, b_l)$, то $ab = (a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l)$.

Имеется естественное взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и семейством $\mathbb{A}$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n = 2^k + j$ – стандартное представление. Рассмотрим двоичное разложение $j = \sum_{\nu=1}^k a_{\nu} 2^{k-\nu}$ числа $j = 0, \dots, 2^k - 1$. Набор $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{A}$ поставим в соответствие натуральному числу n .

В дальнейшем мы будем использовать указанное взаимно однозначное соответствие для замены индекса $x_n = x_{k,j} = x(a_1, \dots, a_k) = x_a$, где на месте семейства x может оказаться как числовая последовательность, так и система функций.

Пусть $x_n = (\varphi, \chi_n)$, $n = 0, 1, \dots$, – последовательность коэффициентов Фурье–Хаара функции φ . Ввиду нормировки (2.3) имеем $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$. Построим числовую последовательность $\{y_n\}_{n \geq 0}$ с той же нормировкой $y_0 = 0$ и $y_1 = 1$. Воспользуемся заменой индекса $x_n = x_a$ и $y_n = y_a$, где $n \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{A}$. В частности, для пустого набора a , соответствующего $n = 1$, имеем $x_a = y_a = 1$. Остальные y_a определяем последовательно из рекуррентных соотношений

$$\sum_{\nu=0}^k x(a_1, \dots, a_{\nu}) y(a_{\nu+1}, \dots, a_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Теперь определим систему функций $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ посредством равенств

$$\psi_n = \psi_a = \sum_{\nu=0}^k y(a_{\nu+1}, \dots, a_k) \chi(a_1, \dots, a_{\nu}), \quad n \in \mathbb{N},$$

и, кроме того, $\psi_0 = \chi_{[0,1]}$.

ЛЕММА 3 (см. [7]). Система функций $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ является биортогонально сопряженной к аффинной системе $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$.

Заметим, что функции биортогонально сопряженной системы $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ суть полиномы по системе Хаара. Поэтому они являются ступенчатыми функциями, постоянными на двоично-рациональных интервалах. Следовательно, коэффициенты (f, ψ_n) биортогонального разложения (3.1) корректно определены для любой суммируемой функции f .

Вопрос о сходимости биортогонального ряда (3.1) как в метрике пространства $L_p[0, 1]$, так и в метрике пространства $\mathfrak{L}_p$ изучался в статье автора [7]. В настоящей работе будут получены оценки скорости сходимости этого ряда.

Теперь предположим, что функция φ принадлежит классу $\mathfrak{L}_p(\Lambda)$. По определению этого класса для коэффициентов Фурье–Хаара функции φ выполняются неравенства (2.4), которые запишем в следующем виде:

$$2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|a|=k} |x_a|^p \right)^{1/p} \leq \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Обозначим

$$\lambda(z) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k z^k, \quad \mu(z) = \frac{1}{\lambda(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z^k,$$

где числовая последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ определяется рекуррентными соотношениями

$$\mu_k = \lambda_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k-\nu} \mu_\nu, \quad k = 1, 2, \dots$$

ЛЕММА 4 (см. [7]). *Справедливы неравенства*

$$2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|a|=k} |y_a|^p \right)^{1/p} \leq \mu_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Оценим коэффициенты биортогонального ряда (3.1). Обозначим

$$A_k(f)_p = 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f, \psi_n)|^p \right)^{1/p}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

и для частного случая системы Хаара –

$$A_k^H(f)_p = 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f, \chi_n)|^p \right)^{1/p}, \quad k = 0, 1, \dots$$

ЛЕММА 5. *Для любой функции $f \in L_p[0, 1]$ и любого $k = 0, 1, \dots$ имеет место неравенство¹*

$$A_k(f)_p \leq \sum_{\nu=0}^k \mu_{k-\nu} A_\nu^H(f)_p.$$

¹Здесь и далее полагаем $\mu_0 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{A}$. Тогда по определению биортонгально сопряженной системы имеем

$$(f, \psi_a) = \sum_{\nu=0}^k y(a_{\nu+1}, \dots, a_k) (f, \chi(a_1, \dots, a_\nu)).$$

Применив неравенство треугольника для l_p -нормы, получим

$$\begin{aligned} \left(\sum_{|a|=k} |(f, \psi_a)|^p \right)^{1/p} &\leq \sum_{\nu=0}^k \left(\sum_{|a|=k} |y(a_{\nu+1}, \dots, a_k)|^p |(f, \chi(a_1, \dots, a_\nu))|^p \right)^{1/p} \\ &= \sum_{\nu=0}^k \left(\sum_{|b|=k-\nu} |y_b|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{|c|=\nu} |(f, \chi_c)|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом леммы 4 и принятых обозначений находим

$$\begin{aligned} A_k(f)_p &= 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f, \psi_n)|^p \right)^{1/p} = 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|a|=k} |(f, \psi_a)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \sum_{\nu=0}^k 2^{(k-\nu)(1/2-1/p)} \left(\sum_{|b|=k-\nu} |y_b|^p \right)^{1/p} 2^{\nu(1/2-1/p)} \left(\sum_{|c|=\nu} |(f, \chi_c)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \sum_{\nu=0}^k \mu_{k-\nu} A_\nu^H(f)_p. \end{aligned}$$

Для дальнейшего нам понадобится установить зависимость свойств последовательности $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ от свойств последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$. Будем говорить, что Λ удовлетворяет *мультипликативному свойству с постоянной* $M > 0$ (короче, *M-свойству*), если выполняются неравенства

$$\lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \leq M \lambda_{k_1+k_2}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N}.$$

Далее, соотношение

$$\sum_{k=N}^\infty \lambda_k = O(\lambda_N), \quad N \rightarrow \infty,$$

называется *условием Бари*.

ЛЕММА 6. Если Λ удовлетворяет *M-свойству*, то

$$\mu_k \leq (M+1)^k \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по k . База индукции очевидна. Предположим, что доказываемое неравенство справедливо для всех $\nu < k$ (после замены индекса k на ν). Тогда

$$\begin{aligned} \mu_k &= \lambda_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k-\nu} \mu_\nu \leq \lambda_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k-\nu} (M+1)^\nu \lambda_\nu \\ &\leq \lambda_k + M \lambda_k \sum_{\nu=1}^{k-1} (M+1)^\nu = \lambda_k ((M+1)^k - M) \leq (M+1)^k \lambda_k. \end{aligned}$$

ЛЕММА 7. Если Λ удовлетворяет условию Бари и условию

$$q_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < 1, \quad (3.2)$$

то последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ также удовлетворяет условию Бари.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{\infty} \mu_k &= \sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k + \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k-\nu} \mu_{\nu} \\ &= \sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k + \sum_{\nu=1}^{N-1} \mu_{\nu} \sum_{k=N}^{\infty} \lambda_{k-\nu} + \sum_{\nu=N}^{\infty} \mu_{\nu} \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \lambda_{k-\nu} \\ &= \sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k + \sum_{\nu=1}^{N-1} \mu_{\nu} \sum_{k=N-\nu}^{\infty} \lambda_k + \sum_{\nu=N}^{\infty} \mu_{\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \\ &= O\left(\lambda_N + \sum_{\nu=1}^{N-1} \mu_{\nu} \lambda_{N-\nu}\right) + q_0 \sum_{\nu=N}^{\infty} \mu_{\nu}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(1 - q_0) \sum_{k=N}^{\infty} \mu_k = O\left(\lambda_N + \sum_{\nu=1}^{N-1} \mu_{\nu} \lambda_{N-\nu}\right) = O(\mu_N).$$

Условие (3.2) в лемме 7 необходимо, так как его выполнение равносильно сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty$, что заведомо имеет место при выполнении условия Бари для последовательности $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Оценку из леммы 6 невозможно улучшить существенным образом, поскольку при $\lambda_k = M2^{-k\beta}$ имеем $\mu_k = M(M+1)^{k-1}2^{-k\beta}$, $k = 1, 2, \dots$.

§ 4. Прямые теоремы

Сначала укажем на связь между порядком убывания величины $E_n(f)_p$ наилучшего приближения полиномами по аффинной системе и величины $A_k(f)_p$, определенной в § 3.

Напомним, что $\|\cdot\|_p^*$ – норма в пространстве $\mathfrak{L}_p$ абсолютно сходящихся по пачкам рядов Фурье–Хаара, определенная в § 2. Обозначим через

$$E_n(f)_p^* = \inf_{\{P_n\}} \|f - P_n\|_p^*$$

величину наилучшего приближения функции $f \in \mathfrak{L}_p$ полиномами порядка не выше n по аффинной системе $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$. Пусть

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (f, \psi_k) \varphi_k, \quad S_n^H(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (f, \chi_k) \chi_k$$

– частичные суммы n -го порядка биортогонального разложения (3.1) и ортогонального ряда Фурье–Хаара соответственно.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию Бари и последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию (3.2). Пусть, далее, функция φ принадлежит классу $\mathfrak{L}_p(\Lambda)$.

Тогда для любой функции $f \in L_p[0, 1]$ следующие соотношения эквивалентны между собой:

- 1) $E_n(f)_p = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad n \rightarrow \infty;$
- 1*) $E_n(f)_p^* = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad n \rightarrow \infty;$
- 2) $\|f - S_n(f)\|_p = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad n \rightarrow \infty;$
- 2*) $\|f - S_n(f)\|_p^* = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad n \rightarrow \infty;$
- 3) $\left\| \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} (f, \psi_n) \varphi_n \right\|_p = O(\omega(2^{-k})), \quad k \rightarrow \infty;$
- 3*) $\left\| \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} (f, \psi_n) \varphi_n \right\|_p^* = O(\omega(2^{-k})), \quad k \rightarrow \infty;$
- 4) $A_k(f)_p = O(\omega(2^{-k})), \quad k \rightarrow \infty.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сразу заметим, что

$$\left\| \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} (f, \psi_n) \varphi_n \right\| = A_k(f)_p \|\varphi\|,$$

где $\|\cdot\|$ – любая из норм $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_p^*$. Этот факт следует из лемм 1 и 2. Таким образом, условия 3), 3*) и 4) эквивалентны. Так как $\|f\|_p \leq \|f\|_p^*$, то из 1*) следует 1) и из 2*) следует 2). Очевидно также, что из 2) следует 1) и из 2*) следует 1*). Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно установить импликации 1) $\implies$ 4) и 3*) $\implies$ 2*).

Докажем, что из 1) следует 4). Пусть P_{2^k} – произвольный полином порядка не выше 2^k по аффинной системе $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$. Тогда $(P_{2^k}, \psi_n) = 0$ для всех $n \geq 2^k$, откуда следует, что

$$A_k(f)_p = A_k(f - P_{2^k})_p.$$

На основании леммы 5 получаем

$$A_k(f - P_{2^k})_p \leq \sum_{\nu=0}^k \mu_{k-\nu} A_\nu^H(f - P_{2^k})_p \leq \|f - P_{2^k}\|_p \sum_{\nu=0}^k \mu_\nu.$$

При этом мы учли неравенство $A_\nu^H(g)_p \leq \|g\|_p$, которое справедливо для всех функций $g \in L_p[0, 1]$ и всех $\nu = 0, 1, \dots$. В силу условия (3.2) имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k = \mu(1) = \frac{1}{\lambda(1)} = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k} = \frac{1}{1 - q_0} < \infty.$$

Окончательно находим, что

$$A_k(f)_p \leq \frac{1}{1 - q_0} \|f - P_{2^k}\|_p.$$

Отсюда в силу произвольности полинома P_{2^k} и соотношения 1) вытекает соотношение 4), т.е.

$$A_k(f)_p \leq \frac{1}{1 - q_0} E_{2^k}(f)_p = O[\omega(2^{-k})], \quad k \rightarrow \infty.$$

Докажем, что из 3*) следует 2*). Так как функция $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию Бари, то

$$\begin{aligned} \|f - S_{2^k}(f)\|_p^* &= \left\| \sum_{\nu=k}^{\infty} \sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} (f, \psi_n) \varphi_n \right\|_p^* \leq \sum_{\nu=k}^{\infty} \left\| \sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} (f, \psi_n) \varphi_n \right\|_p^* \\ &= O \left[\sum_{\nu=k}^{\infty} \omega(2^{-\nu}) \right] = O[\omega(2^{-k})], \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Если $2^k \leq n < 2^{k+1}$, то

$$\|f - S_n(f)\|_p^* \leq \|f - S_{2^k}(f)\|_p^* + \left\| \sum_{m=2^k}^{n-1} (f, \psi_m) \varphi_m \right\|_p^*.$$

Используя лемму 2, оценим второе слагаемое в полученном неравенстве:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m=2^k}^{n-1} (f, \psi_m) \varphi_m \right\|_p^* &= 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{m=2^k}^{n-1} |(f, \psi_m)|^p \right)^{1/p} \|\varphi\|_p^* \\ &\leq A_k(f)_p \|\varphi\|_p^* = \left\| \sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} (f, \psi_m) \varphi_m \right\|_p^*. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\|f - S_n(f)\|_p^* = O[\omega(2^{-k})] = O \left[\omega \left(\frac{1}{n} \right) \right], \quad n \rightarrow \infty.$$

Отметим, что эквивалентность условий 1), 2), 3) и 4) теоремы 1 для системы Хаара $\{\chi_n\}_{n \geq 0}$ и $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, была установлена в статье Голубова [5; теорема 5].

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция φ принадлежит классу $\mathfrak{L}_p(\Lambda)$, причем при некотором $\alpha \in (0, 1]$ выполняется неравенство

$$q_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k 2^{k\alpha} < 1. \quad (4.1)$$

Тогда для любой функции $f \in \text{Lip}(\alpha, p)$ справедливо соотношение

$$E_n(f)_p = O(n^{-\alpha}), \quad n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что выполнены все условия теоремы 1. По лемме 5, учитывая неравенства (2.1), для функции $f \in \text{Lip}_M(\alpha, p)$ имеем

$$A_k(f)_p \leq M \sum_{\nu=0}^k \mu_{k-\nu} 2^{-\nu\alpha} = M 2^{-k\alpha} \sum_{\nu=0}^k \mu_{k-\nu} 2^{(k-\nu)\alpha} \leq \frac{M 2^{-k\alpha}}{1 - q_\alpha},$$

так как по условию (4.1)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k 2^{k\alpha} = \mu(2^\alpha) = \frac{1}{\lambda(2^\alpha)} = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k 2^{k\alpha}} = \frac{1}{1 - q_\alpha} < \infty.$$

Итак, $A_k(f)_p = O(2^{-k\alpha})$, т.е. выполняется соотношение 4) теоремы 1. По этой теореме также будет иметь место 1). Поэтому $E_n(f)_p = O(n^{-\alpha})$.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 2 для любой функции $f \in \text{Lip}(\alpha, p)$ справедливо соотношение

$$\|f - S_n(f)\|_p^* = O(n^{-\alpha}), \quad n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно сослаться на эквивалентность соотношений 1) и 2*) теоремы 1.

Дальнейшие оценки наилучших приближений $E_n(f)_p$ будут основаны на рассмотрении величин

$$\varepsilon_k = \|\chi - S_{2^k}(\chi)\|_p, \quad k = 1, 2, \dots,$$

– уклонений частных сумм биортогонального разложения функции Хаара χ по аффинной системе $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$.

Пусть функция $\varphi \in L_p[0, 1]$ удовлетворяет нормировке (2.3).

ТЕОРЕМА 3. Для любой функции $f \in L_p[0, 1]$ и любого $k = 0, 1, \dots$ справедливо неравенство

$$\|f - S_{2^k}(f)\|_p \leq \|f - S_{2^k}^H(f)\|_p + \sum_{\nu=0}^{k-1} \varepsilon_{k-\nu} A_\nu^H(f)_p.$$

Для доказательства теоремы 3 нам потребуются следующие обозначения и вспомогательные утверждения.

Рассмотрим, следуя работе [9], операторную структуру мультисдвига $\{V_0, V_1\}$, полагая

$$V_0 f(t) = 2^{1/2} f(2t), \quad V_1 f(t) = 2^{1/2} f(2t - 1),$$

где для удобства определения считаем, что функция $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, имеет носитель $\text{supp } f \subset [0, 1]$. Далее, обозначим через

$$V^a = V_{a_1} \cdots V_{a_k}, \quad a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{A},$$

произведение операторов, где первым действует оператор V_{a_k} , а последним – V_{a_1} , пустое произведение полагаем равным тождественному оператору I . В

принятых обозначениях $\{V^a\varphi\}_{a \in \mathbb{A}} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – аффинная система без постоянной $\varphi_0 = \chi_{[0,1]}$. Покажем это. Имеем

$$\begin{aligned} V^a\varphi(t) &= V_{a_1} \cdots V_{a_k}\varphi(t) = 2^{1/2} \cdots 2^{1/2}\varphi(2(2 \cdots (2t - a_1) - \cdots - a_{k-1}) - a_k) \\ &= 2^{k/2}\varphi(2^k t - 2^{k-1}a_1 - \cdots - 2a_{k-1} - a_k) = 2^{k/2}\varphi(2^k t - j) = \varphi_n(t). \end{aligned}$$

ЛЕММА 8. При $a \in \mathbb{A}$ и $|a| = k < N$ выполняется равенство

$$S_{2^N}(\chi_a) = V^a S_{2^{N-k}}(\chi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим равенства

$$(\chi_a, \psi_b) = \begin{cases} (\chi, \psi_c), & \text{если } b = ac, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $|b| = l$. По определению биортогонально сопряженной системы $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ имеем

$$(\chi_a, \psi_b) = \sum_{\nu=0}^l y(b_{\nu+1}, \dots, b_l) (\chi(a_1, \dots, a_k), \chi(b_1, \dots, b_\nu)).$$

В силу ортогональности системы Хаара последнее выражение отлично от нуля в том и только том случае, когда $k = \nu \leq l$ и $a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k$. В этом случае $b = ac$ для единственного набора $c = (b_{k+1}, \dots, b_l)$, причем $(\chi_a, \psi_b) = y_c$. Для любого набора $c = (c_1, \dots, c_m)$ имеем

$$(\chi, \psi_c) = \sum_{\nu=0}^m y(c_{\nu+1}, \dots, c_m) (\chi, \chi(c_1, \dots, c_\nu)) = y_c.$$

Таким образом, либо $b = ac$ и в этом случае $(\chi_a, \psi_b) = y_c = (\chi, \psi_c)$, либо $(\chi_a, \psi_b) = 0$. Теперь, отбрасывая заведомо равные нулю слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} S_{2^N}(\chi_a) &= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{|b|=l} (\chi_a, \psi_b) \varphi_b = \sum_{m=0}^{N-k-1} \sum_{|c|=m} (\chi, \psi_c) \varphi_{ac} \\ &= V^a \sum_{m=0}^{N-k-1} \sum_{|c|=m} (\chi, \psi_c) \varphi_c = V^a S_{2^{N-k}}(\chi). \end{aligned}$$

ЛЕММА 9. Для любой функции $f \in L_p[0, 1]$ и любого $n = 1, 2, \dots$ справедливо равенство

$$S_n(f) = S_n S_n^H(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению системы $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ каждая функция ψ_n является полиномом порядка не выше n по системе Хаара. Поэтому $(f - S_n^H(f), \psi_k) = 0$ для всех $k < n$. Отсюда $S_n(f - S_n^H(f)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. С учетом лемм 8 и 9 имеем

$$\begin{aligned}
 \|S_{2^k}^H(f) - S_{2^k}(f)\|_p &= \|S_{2^k}^H(f) - S_{2^k}S_{2^k}^H(f)\|_p \\
 &= \left\| \sum_{\nu=0}^{k-1} \sum_{|a|=\nu} (f, \chi_a) \chi_a - \sum_{\nu=0}^{k-1} \sum_{|a|=\nu} (f, \chi_a) S_{2^k}(\chi_a) \right\|_p \\
 &= \left\| \sum_{\nu=0}^{k-1} \sum_{|a|=\nu} (f, \chi_a) V^a(\chi - S_{k-\nu}(\chi)) \right\|_p \leq \sum_{\nu=0}^{k-1} \left\| \sum_{|a|=\nu} (f, \chi_a) V^a(\chi - S_{k-\nu}(\chi)) \right\|_p \\
 &= \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{\nu(1/2-1/p)} \left(\sum_{|a|=\nu} |(f, \chi_a)|^p \right)^{1/p} \|\chi - S_{2^{k-\nu}}(\chi)\|_p = \sum_{\nu=0}^{k-1} \varepsilon_{k-\nu} A_\nu^H(f)_p.
 \end{aligned}$$

В предпоследнем равенстве мы применили лемму 1. Отсюда

$$\begin{aligned}
 \|f - S_{2^k}(f)\|_p &\leq \|f - S_{2^k}^H(f)\|_p + \|S_{2^k}^H(f) - S_{2^k}(f)\|_p \\
 &\leq \|f - S_{2^k}^H(f)\|_p + \sum_{\nu=0}^{k-1} \varepsilon_{k-\nu} A_\nu^H(f)_p.
 \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любой функции $f \in \mathfrak{L}_p$ и любого $k = 0, 1, \dots$ справедливо неравенство

$$\|f - S_{2^k}(f)\|_p^* \leq \|f - S_{2^k}^H(f)\|_p^* + \sum_{\nu=0}^{k-1} \varepsilon_{k-\nu}^* A_\nu^H(f)_p,$$

где $\varepsilon_k^* = \|\chi - S_{2^k}(\chi)\|_p^*$ при $k = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяем доказательство теоремы 3, применяя вместо леммы 1 лемму 2.

Доказанная теорема 3 позволяет получить так же, как и для системы Хаара (1.1), аналог классического неравенства Джексона. Нам потребуется

ЛЕММА 10. Имеют место неравенства

$$\varepsilon_k \leq \|\varphi\|_p \sum_{\nu=k}^{\infty} \mu_\nu, \quad \varepsilon_k^* \leq \|\varphi\|_p^* \sum_{\nu=k}^{\infty} \mu_\nu, \quad k = 1, 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = \infty$, то утверждение леммы очевидно. Пусть поэтому $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty$. В таком случае биортогональное разложение функции Хаара χ по аффинной системе $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$

$$\chi \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\chi, \psi_n) \varphi_n = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|a|=k} y_a \varphi_a$$

абсолютно сходится по пачкам как в пространстве $L_p[0, 1]$, так и в пространстве $\mathfrak{L}_p$. Действительно, пусть $\|\cdot\|$ — любая из норм $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_p^*$. По лемме 4 имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{|a|=k} y_a \varphi_a \right\| = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|a|=k} |y_a|^p \right)^{1/p} \|\varphi\| \leq \|\varphi\| \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty.$$

При получении первого равенства мы учли также леммы 1 и 2. Следовательно, имеет место представление

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} (\chi, \psi_n) \varphi_n = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|a|=k} y_a \varphi_a.$$

Здесь надо воспользоваться тотальностью биортогонально сопряженной системы $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$, которая следует из того факта, что каждая функция ψ_n является полиномом порядка не выше n по системе Хаара с отличным от нуля старшим коэффициентом (так что функции системы Хаара линейно выражаются через функции системы $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ и если $(f, \psi_n) = 0$, то $(f, \chi_n) = 0$, откуда следует, что $f = 0$). Окончательно находим

$$\|\chi - S_{2^k}(\chi)\| \leq \sum_{\nu=k}^{\infty} \left\| \sum_{|a|=\nu} y_a \varphi_a \right\| \leq \|\varphi\| \sum_{\nu=k}^{\infty} \mu_{\nu}.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция φ принадлежит классу $\mathfrak{L}_p(\Lambda)$, причем выполняется условие

$$q_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k 2^k < 1. \quad (4.2)$$

Тогда для любого n и любой функции $f \in L_p[0, 1]$ справедливо неравенство

$$E_n(f)_p \leq C \omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3, учитывая оценки (1.1) и (2.1), получаем

$$\begin{aligned} E_{2^k}(f)_p &\leq \|f - S_{2^k}(f)\|_p \leq C \omega_p(2^{-k}, f) + \sum_{\nu=0}^{k-1} \varepsilon_{k-\nu} \omega_p(2^{-\nu}, f) \\ &= \omega_p(2^{-k}, f) \left[C + \sum_{\nu=0}^{k-1} \varepsilon_{k-\nu} 2^{k-\nu} \right] \leq \omega_p(2^{-k}, f) \left[C + \frac{2\|\varphi\|_p}{1 - q_1} \right]. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались леммой 10, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k 2^k \leq \|\varphi\|_p \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \sum_{\nu=k}^{\infty} \mu_{\nu} = \|\varphi\|_p \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} 2^k \leq 2\|\varphi\|_p \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_{\nu} 2^{\nu} < \infty,$$

а также условием (4.2), т.е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k 2^k = \mu(2) = \frac{1}{\lambda(2)} = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k 2^k} = \frac{1}{1 - q_1} < \infty.$$

Наконец, при $2^k \leq n < 2^{k+1}$ имеем

$$E_n(f)_p \leq E_{2^k}(f)_p = O[\omega_p(2^{-k}, f)] = O\left[\omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right)\right].$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция φ принадлежит классу $\mathfrak{L}_p(\Lambda)$, причем Λ удовлетворяет M -свойству, условию Бари и условию (3.2).

Тогда для любой функции $f \in H_p^\omega$ и любого $k = 0, 1, \dots$ имеем

$$E_{2^k}(f)_p = O \left[\omega(2^{-k}) + \sum_{\nu=0}^{k-1} (M+1)^{k-\nu} \lambda_{k-\nu} \omega(2^{-\nu}) \right].$$

Более того, если функция $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию Бари, то

$$E_{2^k}^*(f)_p = O \left[\omega(2^{-k}) + \sum_{\nu=0}^{k-1} (M+1)^{k-\nu} \lambda_{k-\nu} \omega(2^{-\nu}) \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3, учитывая оценки (1.1) и (2.1), находим

$$E_{2^k}(f)_p = O \left[\omega(2^{-k}) + \sum_{\nu=0}^{k-1} \varepsilon_{k-\nu} \omega(2^{-\nu}) \right].$$

Осталось заметить, что в силу лемм 10, 7 и 6 имеем

$$\varepsilon_k \leq \|\varphi\|_p \sum_{\nu=k}^{\infty} \mu_\nu = O(\mu_k) = O[(M+1)^k \lambda_k].$$

Далее, если функция $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию Бари, то выполнены все условия теоремы 1. Значит, соотношения $\|f - S_{2^k}^H(f)\|_p = O(\omega(2^{-k}))$ и $\|f - S_{2^k}^H(f)\|_p^* = O(\omega(2^{-k}))$ равносильны. Применяя вместо теоремы 3 следствие 2, имеем

$$E_{2^k}(f)_p^* = O \left[\omega(2^{-k}) + \sum_{\nu=0}^{k-1} \varepsilon_{k-\nu}^* \omega(2^{-\nu}) \right].$$

Оценка $\varepsilon_k^* = O[(M+1)^k \lambda_k]$ снова следует из лемм 6, 7 и 10.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть функция φ принадлежит классу $\mathfrak{L}_p(\Lambda^\beta(M))$, причем

$$\gamma = \beta - \log_2(M+1) > 0.$$

Пусть, далее, функция $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{\nu=1}^n \nu^{\gamma-1} \omega\left(\frac{1}{\nu}\right) = O \left[n^\gamma \omega\left(\frac{1}{n}\right) \right]. \quad (4.3)$$

Тогда для любой функции $f \in H_p^\omega$ справедливо соотношение

$$E_n(f)_p = O \left[\omega\left(\frac{1}{n}\right) \right], \quad n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\Lambda^\beta(M)$ удовлетворяет M -свойству и условию Бари. Кроме того, выполняется условие (3.2), так как

$$q_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = M \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k\beta} = \frac{M}{2^\beta - 1} < 1.$$

Применим теорему 5 и заметим, что $(M+1)^k \lambda_k = M2^{-k\gamma}$. Получим

$$E_{2^k}(f)_p = O\left[\omega(2^{-k}) + \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{-(k-\nu)\gamma} \omega(2^{-\nu})\right] = O[\omega(2^{-k})],$$

поскольку в силу (4.3) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{-(k-\nu)\gamma} \omega(2^{-\nu}) &\leq 2^{-k\gamma} \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{\nu\gamma} \frac{2}{2^\nu} \sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\leq 2^{-k\gamma} \sum_{n=1}^{2^k-1} n^\gamma \frac{4}{n} \omega\left(\frac{1}{n}\right) = O[\omega(2^{-k})]. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть выполнены все условия следствия 3 и функция $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию Бари.

Тогда для любой функции $f \in H_p^\omega$ справедливо соотношение

$$\|f - S_n(f)\|_p^* = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство вытекает из теоремы 1 и следствия 3.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть функция φ принадлежит классу $\mathfrak{L}_p(\Lambda^\beta(M))$, причем

$$\gamma = \beta - \log_2(M+1) > 0.$$

Тогда для любой функции $f \in \text{Lip}(\alpha, p)$, $0 < \alpha \leq 1$, имеем

- 1) если $\alpha < \gamma$, то $E_n(f)_p = O(n^{-\alpha})$, $n \rightarrow \infty$;
- 2) если $\alpha = \gamma$, то $E_n(f)_p = O(n^{-\alpha} \log n)$, $n \rightarrow \infty$;
- 3) если $\alpha > \gamma$, то $E_n(f)_p = O(n^{-\gamma})$, $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1). Выполняется условие (4.3), поэтому можно применить следствие 3.

Докажем утверждения 2) и 3). Так же, как и при доказательстве следствия 3, получаем

$$E_{2^k}(f)_p = O\left[\sum_{\nu=0}^k 2^{-(k-\nu)\gamma} 2^{-\nu\alpha}\right].$$

Ясно, что при $\alpha = \gamma$ и $\alpha > \gamma$ имеем $E_{2^k}(f)_p = O(k2^{-k\alpha})$ и $E_{2^k}(f)_p = O(2^{-k\gamma})$ соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть функция φ принадлежит классу $\mathfrak{L}_p(\Lambda^\beta(M))$, причем

$$\gamma = \beta - \log_2(M+1) > 0.$$

Тогда для любой функции $f \in \text{Lip}(\alpha, p)$, $0 < \alpha \leq 1$, имеем

- 1) если $\alpha < \gamma$, то $\|f - S_n(f)\|_p^* = O(n^{-\alpha})$, $n \rightarrow \infty$;
- 2) если $\alpha = \gamma$, то $\|f - S_n(f)\|_p^* = O(n^{-\alpha} \log n)$, $n \rightarrow \infty$;
- 3) если $\alpha > \gamma$, то $\|f - S_n(f)\|_p^* = O(n^{-\gamma})$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство вытекает из теоремы 1 и следствия 5.

Заметим, что утверждения 1) следствий 5 и 6 являются частными случаями теоремы 2 и следствия 1 соответственно. В самом деле, прямое вычисление показывает, что условие $q_\alpha < 1$ равносильно условию $\alpha < \gamma$ для последовательности $\Lambda^\beta(M)$.

§ 5. Обратные теоремы

Рассмотрим, следуя работам Ульянова [3] и Голубова [5], для функции $f \in L_p[0, 1]$ модуль непрерывности

$$\tilde{\omega}_p(\delta, f) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|\Delta_h \tilde{f}\|_p,$$

где $\tilde{f}$ – периодическое продолжение с периодом $T = 1$ функции f и Δ_h – разностный оператор с шагом h , т.е. $\Delta_h g(t) = g(t+h) - g(t)$. Известно, что $\omega_p(\delta, f) \leq \tilde{\omega}_p(\delta, f)$ и эти модули непрерывности при $1 < p < \infty$ могут различаться порядком.

ЛЕММА 11. Пусть $0 < h < 1$, $\text{supp } g \subset [-h, 1]$ и $G = \sum_{j=0}^{2^k} c_{k,j} g_{k,j}$, где $c_{k,0} = c_{k,2^k}$.

Тогда для любого $k = 0, 1, \dots$ выполняется неравенство

$$\|G\|_p \leq 2^{1-1/p} 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |c_{k,j}|^p \right)^{1/p} \left(\int_{-h}^1 |g(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\text{supp } g_{k,j} \subset [(j-h)2^{-k}, (j+1)2^{-k}]$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 |G(t)|^p dt &= \sum_{j=0}^{2^k-1} \int_{j2^{-k}}^{(j+1-h)2^{-k}} |c_{k,j} g_{k,j}(t)|^p dt \\ &\quad + \sum_{j=0}^{2^k-1} \int_{(j+1-h)2^{-k}}^{(j+1)2^{-k}} |c_{k,j} g_{k,j}(t) + c_{k,j+1} g_{k,j+1}(t)|^p dt \\ &\leq \sum_{j=0}^{2^k-1} |c_{k,j}|^p \int_{j2^{-k}}^{(j+1-h)2^{-k}} |2^{k/2} g(2^k t - j)|^p dt \\ &\quad + 2^{p-1} \sum_{j=0}^{2^k-1} |c_{k,j}|^p \int_{(j+1-h)2^{-k}}^{(j+1)2^{-k}} |2^{k/2} g(2^k t - j)|^p dt \\ &\quad + 2^{p-1} \sum_{j=0}^{2^k-1} |c_{k,j+1}|^p \int_{(j+1-h)2^{-k}}^{(j+1)2^{-k}} |2^{k/2} g(2^k t - j - 1)|^p dt \end{aligned}$$

Сделаем соответствующие замены переменного, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 |G(t)|^p dt &\leq 2^{kp/2} 2^{-k} \sum_{j=0}^{2^k-1} |c_{k,j}|^p \left(\int_0^{1-h} |g(t)|^p dt \right. \\ &\quad \left. + 2^{p-1} \int_{1-h}^1 |g(t)|^p dt + 2^{p-1} \int_{-h}^0 |g(t)|^p dt \right). \end{aligned}$$

ЛЕММА 12. Для любой функции $f \in L_p[0, 1]$ и любого $N = 0, 1, \dots$ выполняется неравенство

$$\tilde{\omega}_p(2^{-N}, f) \leq 2\|f - S_{2^N}(f)\|_p + 2^{1-1/p} \sum_{k=1}^N A_{N-k}(f)_p \omega'_p(2^{-k}, \varphi),$$

где

$$\omega'_p(\delta, \varphi) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left(\int_{-h}^1 |\Delta_h \varphi(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_p(2^{-N}, f) &\leq \tilde{\omega}_p(2^{-N}, f - S_{2^N}(f)) + \tilde{\omega}_p(2^{-N}, S_{2^N}(f)) \\ &\leq 2\|f - S_{2^N} f\|_p + \tilde{\omega}_p(2^{-N}, S_{2^N}(f)). \end{aligned}$$

Пусть теперь $0 < h \leq 2^{-N}$. Тогда

$$\|\Delta_h \widetilde{S_{2^N}(f)}\|_p = \left\| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{2^k-1} (f, \psi_{k,j}) \Delta_h \widetilde{\varphi_{k,j}} \right\|_p \leq \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \sum_{j=0}^{2^k-1} (f, \psi_{k,j}) \Delta_h \widetilde{\varphi_{k,j}} \right\|_p.$$

Зафиксируем k и положим $g = \Delta_{2^k h} \varphi$. Ясно, что $\text{supp } g \subset [-2^k h, 1]$, причем $0 < 2^k h < 1$. Установим равенство

$$\Phi(t) = \sum_{j=0}^{2^k-1} c_{k,j} \Delta_h \widetilde{\varphi_{k,j}}(t) = \sum_{j=0}^{2^k} c_{k,j} g_{k,j}(t) = G(t), \quad 0 \leq t < 1,$$

где $c_{k,0} = c_{k,2^k}$. В самом деле, если $0 \leq t \leq 1 - h$, то

$$\begin{aligned} \Delta_h \widetilde{\varphi_{k,j}}(t) &= \Delta_h \varphi_{k,j}(t) = \varphi_{k,j}(t+h) - \varphi_{k,j}(t) \\ &= 2^{k/2} [\varphi(2^k t + 2^k h - j) - \varphi(2^k t - j)] = [\Delta_{2^k h} \varphi]_{k,j}(t) = g_{k,j}(t) \end{aligned}$$

при $0 \leq j \leq 2^k - 1$ и $g_{k,j}(t) = 0$ при $j = 2^k$, так что $\Phi(t) = G(t)$. Если же $1 - h < t < 1$, то

$$\begin{aligned} \Delta_h \widetilde{\varphi_{k,j}}(t) &= \varphi_{k,j}(t+h-1) - \varphi_{k,j}(t) \\ &= 2^{k/2} [\varphi(2^k t + 2^k h - 2^k - j) - \varphi(2^k t - j)] = 0 \end{aligned}$$

при $1 \leq j \leq 2^k - 2$, поскольку $\text{supp } \varphi \subset [0, 1]$ и

$$\begin{aligned} 2^k t + 2^k h - 2^k - j &\leq 2^k + 2^k h - 2^k - 1 < 0, & j \geq 1, \\ 2^k t - j &\geq 2^k(1-h) - 2^k + 2 > 1, & j \leq 2^k - 2. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= c_{k,0} \Delta_h \widetilde{\varphi_{k,0}}(t) + c_{k,2^k-1} \Delta_h \widetilde{\varphi_{k,2^k-1}}(t) \\ &= c_{k,0} 2^{k/2} \varphi(2^k t + 2^k h - 2^k) - c_{k,2^k-1} 2^{k/2} \varphi(2^k t - 2^k + 1). \end{aligned}$$

С другой стороны, если по-прежнему $1 - h < t < 1$, то

$$g_{k,j}(t) = 2^{k/2} [\varphi(2^k t + 2^k h - j) - \varphi(2^k t - j)] = 0$$

при $0 \leq j \leq 2^k - 2$, так как $\text{supp } \varphi \subset [0, 1]$ и

$$\begin{aligned} 2^k t + 2^k h - j &> 2^k(1 - h) + 2^k h - j \geq 1, & j \leq 2^k - 1, \\ 2^k t - j &\geq 2^k(1 - h) - 2^k + 2 > 1, & j \leq 2^k - 2. \end{aligned}$$

Кроме того, имеем $2^k t - j < 0$ при $j = 2^k$. Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} G(t) &= c_{k,2^k-1} g_{k,2^k-1}(t) + c_{k,2^k} g_{k,2^k}(t) \\ &= -c_{k,2^k-1} 2^{k/2} \varphi(2^k t - 2^k + 1) + c_{k,2^k} 2^{k/2} \varphi(2^k t + 2^k h - 2^k). \end{aligned}$$

Таким образом, сравнивая полученные выражения для функций $\Phi(t)$ и $G(t)$ и учитывая равенство $c_{k,0} = c_{k,2^k}$, убеждаемся в совпадении этих функций на интервале $t \in (1 - h, 1)$. Равенство $\Phi(t) = G(t)$ установлено для всех $t \in [0, 1)$. Далее, применение леммы 11 приводит к неравенству

$$\left\| \sum_{j=0}^{2^k-1} (f, \psi_{k,j}) \Delta_h \widetilde{\varphi_{k,j}} \right\|_p \leq 2^{1-1/p} A_k(f)_p \left(\int_{-2^k h}^1 |\Delta_{2^k h} \varphi(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Суммирование по k от нуля до $N - 1$ дает оценку

$$\left\| \Delta_h \widetilde{S_{2^N}(f)} \right\|_p \leq 2^{1-1/p} \sum_{k=0}^{N-1} A_k(f)_p \left(\int_{-2^k h}^1 |\Delta_{2^k h} \varphi(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Так как $0 < h \leq 2^{-N}$, то

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}_p(2^{-N}, S_{2^N}(f)) &= \sup_{0 \leq h \leq 2^{-N}} \left\| \Delta_h \widetilde{S_{2^N}(f)} \right\|_p \\ &\leq 2^{1-1/p} \sum_{k=0}^{N-1} A_k(f)_p \sup_{0 \leq h \leq 2^{-N}} \left(\int_{-2^k h}^1 |\Delta_{2^k h} \varphi(t)|^p dt \right)^{1/p} \\ &= 2^{1-1/p} \sum_{k=0}^{N-1} A_k(f)_p \omega'_p(2^{k-N}, \varphi). \end{aligned}$$

ЛЕММА 13. Если $\text{supp } f \subset [0, 1]$ и $0 \leq \delta \leq 1$, то

$$\widetilde{\omega}_p(\delta, f) \leq 2^{1-1/p} \omega'_p(\delta, f) \quad (5.1)$$

и, кроме того,

$$\omega_p(\delta, f) \leq \omega'_p(\delta, f) \leq \omega_p(\delta, f) + I_0(\delta, f) + I_1(\delta, f) \leq 3^{1-1/p} \omega'_p(\delta, f), \quad (5.2)$$

где

$$I_0(\delta, f) = \left(\int_0^\delta |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad I_1(\delta, f) = \left(\int_{1-\delta}^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\Delta_h f(t) = \begin{cases} f(t+h), & t \in [-h, 0), \\ f(t+h) - f(t), & t \in [0, 1-h], \\ -f(t), & t \in (1-h, 1], \\ 0, & t \notin [-h, 1]. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_{-h}^1 |\Delta_h f(t)|^p dt = \int_0^{1-h} |f(t+h) - f(t)|^p dt + \int_0^h |f(t)|^p dt + \int_{1-h}^1 |f(t)|^p dt.$$

Очевидно, что

$$\omega'_p(\delta, f) = (\omega_p^p(\delta, f) + I_0^p(\delta, f) + I_1^p(\delta, f))^{1/p},$$

откуда следуют неравенства (5.2). Далее, поскольку

$$\Delta_h \tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t+h) - f(t), & t \in [0, 1-h], \\ f(t+h-1) - f(t), & t \in (1-h, 1), \end{cases}$$

то неравенство (5.1) следует из приведенной ниже цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\Delta_h \tilde{f}(t)|^p dt &\leq \int_0^{1-h} |f(t+h) - f(t)|^p dt \\ &\quad + 2^{p-1} \int_{1-h}^1 |f(t+h-1)|^p dt + 2^{p-1} \int_{1-h}^1 |f(t)|^p dt \\ &\leq 2^{p-1} \int_{-h}^1 |\Delta_h f(t)|^p dt. \end{aligned}$$

Модули непрерывности $\tilde{\omega}_p(\delta, f)$ и $\omega'_p(\delta, f)$ не эквивалентны. Простой пример доставляет функция $f = \chi_{[0,1]}$, для которой $\tilde{\omega}_p(\delta, f) \equiv 0$, но $\omega'_p(\delta, f) = (2\delta)^{1/p}$. Тем не менее, аналог леммы 12 может быть получен и для большего по порядку модуля $\omega'_p(\delta, f)$.

Всюду далее $\text{supp } f \subset [0, 1]$ и

$$I_f = \left| \int_0^1 f(t) dt \right|.$$

ЛЕММА 14. Для любой функции $f \in L_p[0, 1]$ и любого $N = 0, 1, \dots$ выполняется неравенство

$$\omega'_p(2^{-N}, f) \leq 2^{1/p} 2^{-N/p} I_f + 2 \|f - S_{2^N}(f)\|_p + 2 \sum_{k=1}^N A_{N-k}(f)_p \omega'_p(2^{-k}, \varphi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и в начале доказательства леммы 12, находим

$$\omega'_p(2^{-N}, f) \leq 2 \|f - S_{2^N}(f)\|_p + \omega'_p(2^{-N}, S_{2^N}(f)).$$

Далее, при $0 < h \leq 2^{-N}$ имеем

$$\|\Delta_h S_{2^N}(f)\|_{L_p[-h,1]} \leq I_f \|\Delta_h \chi_{[0,1]}\|_{L_p[-h,1]} + \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \sum_{j=0}^{2^k-1} (f, \psi_{k,j}) \Delta_h \varphi_{k,j} \right\|_{L_p[-h,1]}.$$

Снова фиксируем k и замечаем, что при $0 \leq t \leq 1 - h$ выполняется следующее равенство (мы используем обозначения леммы 12):

$$\sum_{j=0}^{2^k-1} (f, \psi_{k,j}) \Delta_h \varphi_{k,j}(t) = \Phi(t).$$

Так как $\text{supp } \Delta_h \varphi_{k,j} \subset [j2^{-k} - h, (j+1)2^{-k}]$ и $h \leq 2^{-N} < 2^{-k}$, то

$$\sum_{j=0}^{2^k-1} (f, \psi_{k,j}) \Delta_h \varphi_{k,j}(t) = \begin{cases} (f, \psi_{k,0}) \varphi_{k,0}(t+h), & t \in [-h, 0), \\ -(f, \psi_{k,2^k-1}) \varphi_{k,2^k-1}(t), & t \in (1-h, 1]. \end{cases}$$

Отсюда, с учетом оценки для $\|\Phi\|_p$ из доказательства леммы 12, получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=0}^{2^k-1} (f, \psi_{k,j}) \Delta_h \varphi_{k,j} \right\|_{L_p[-h,1]}^p \\ &= \|\Phi\|_{L_p[0,1-h]}^p + |(f, \psi_{k,0})|^p \|\varphi_{k,0}\|_{L_p[0,h]}^p + |(f, \psi_{k,2^k-1})|^p \|\varphi_{k,2^k-1}\|_{L_p[1-h,h]}^p \\ &\leq 2^{p-1} A_k^p(f)_p \int_{-2^k h}^1 |\Delta_{2^k h} \varphi(t)|^p dt + A_k^p(f)_p I_0^p(2^k h, \varphi) + A_k^p(f)_p I_1^p(2^k h, \varphi) \\ &\leq 2^p A_k^p(f)_p \int_{-2^k h}^1 |\Delta_{2^k h} \varphi(t)|^p dt. \end{aligned}$$

Теперь суммирование по k от 0 до $N-1$ дает оценку

$$\|\Delta_h S_{2^N}(f)\|_{L_p[-h,1]} \leq (2h)^{1/p} I_f + 2 \sum_{k=0}^{N-1} A_k(f)_p \left(\int_{-2^k h}^1 |\Delta_{2^k h} \varphi(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

и мы завершаем доказательство этой леммы так же, как и леммы 12.

Формально оценки из лемм 12 и 14 верны, даже если система $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ не является полной в пространстве $L_p[0,1]$. Нетривиальные оценки для модуля непрерывности через наилучшие приближения требуют условия полноты. Приведем признак полноты аффинной системы.

ЛЕММА 15. Пусть функция φ принадлежит классу $\mathfrak{L}_p(\Lambda)$, причем Λ удовлетворяет условию (3.2).

Тогда аффинная система $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ полна в пространстве $L_p[0,1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $g \in L_q[0,1]$, $1/p + 1/q = 1$, такая, что $(g, \varphi_n) = 0$ для всех $n = 0, 1, \dots$. Запишем ряд Фурье–Хаара функции φ в следующем виде:

$$\varphi = \chi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|a|=k} (\varphi, V^a \chi) V^a \chi.$$

Тогда для любого $b \in \mathbb{A}$, $|b| = l$, имеем

$$V^b \varphi = V^b \chi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|a|=k} (\varphi, V^a \chi) V^b V^a \chi.$$

Так как $(g, V^b \varphi) = 0$, то

$$-(g, V^b \chi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|a|=k} (\varphi, V^a \chi) (g, V^b V^a \chi).$$

На основании неравенства треугольника для l_q -нормы получаем

$$\left(\sum_{|b|=l} |(g, V^b \chi)|^q \right)^{1/q} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|a|=k} |(\varphi, V^a \chi)| \left(\sum_{|b|=l} |(g, V^b V^a \chi)|^q \right)^{1/q}.$$

Согласно неравенству Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} \sum_{|a|=k} |(\varphi, V^a \chi)| \left(\sum_{|b|=l} |(g, V^b V^a \chi)|^q \right)^{1/q} \\ \leq \left(\sum_{|a|=k} |(\varphi, V^a \chi)|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{|a|=k} \sum_{|b|=l} |(g, V^b V^a \chi)|^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} 2^{l(1/2-1/q)} \left(\sum_{|b|=l} |(g, V^b \chi)|^q \right)^{1/q} \\ \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|a|=k} |(\varphi, V^a \chi)|^p \right)^{1/p} 2^{(l+k)(1/2-1/q)} \left(\sum_{|c|=l+k} |(g, V^c \chi)|^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Это означает, что

$$A_l^H(g)_q \leq \sum_{k=1}^{\infty} A_k^H(\varphi)_p A_{l+k}^H(g)_q.$$

Так как $A_k^H(\varphi)_p \leq \lambda_k$ и $q_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < 1$, то

$$A_l^H(g)_q \leq q_0 \sup_{k \in \mathbb{N}} A_{l+k}^H(g)_q.$$

Повторяя последнюю оценку n раз, получаем

$$A_l^H(g)_q \leq q_0^n \sup_{k_1 \in \mathbb{N}} \dots \sup_{k_n \in \mathbb{N}} A_{l+k_1+\dots+k_n}^H(g)_q \leq q_0^n \|g\|_q \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Значит, $A_l^H(g)_q = 0$, а вместе с тем и $(g, \chi_n) = 0$ для всех $n = 0, 1, \dots$. Отсюда в силу полноты системы Хаара $\{\chi_n\}_{n \geq 0}$ в пространстве $L_p[0, 1]$ следует, что $g = 0$.

ЛЕММА 16. Пусть функция φ принадлежит классу $\mathfrak{L}_p(\Lambda)$, причем Λ удовлетворяет условию Бари² и условию (3.2).

Тогда аффинная система $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ образует базис пространства $L_p[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 7 последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ также удовлетворяет условию Бари. По лемме 10 имеем $\varepsilon_k = O(\mu_k)$. Наконец, по теореме 3 при $k \rightarrow \infty$ имеем $\|f - S_{2^k}(f)\|_p \rightarrow 0$ вместе с выражением

$$\sum_{\nu=0}^k \mu_{k-\nu} A_\nu^H(f)_p \leq \|f\|_p \sum_{\nu=0}^{[k/2]-1} \mu_{k-\nu} + \omega_p(2^{-[k/2]}, f) \sum_{\nu=[k/2]}^k \mu_{k-\nu} \rightarrow 0.$$

При $2^k \leq n < 2^{k+1}$ будем иметь

$$\|f - S_n(f)\|_p \leq \|f - S_{2^k}(f)\|_p + A_k(f)_p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

в силу оценки для $A_k(f)_p$ из леммы 5 и уже доказанного.

ТЕОРЕМА 6. Пусть функция φ принадлежит классу $\mathfrak{L}_p(\Lambda)$, причем Λ удовлетворяет условию Бари и условию (3.2).

Тогда для любого N и любой функции $f \in L_p[0, 1]$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_p(2^{-N}, f) &\leq C \sum_{k=0}^N E_{2^{N-k}}(f)_p \omega'_p(2^{-k}, \varphi), \\ \omega'_p(2^{-N}, f) &\leq C \left(2^{-N/p} I_f + \sum_{k=0}^N E_{2^{N-k}}(f)_p \omega'_p(2^{-k}, \varphi) \right), \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 16 аффинная система $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ образует базис пространства $L_p[0, 1]$. Поэтому

$$\|f - S_n(f)\|_p \leq C E_n(f)_p, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда

$$A_k(f)_p = \|S_{2^{k+1}}(f) - S_{2^k}(f)\|_p \leq \|f - S_{2^{k+1}}(f)\|_p + \|f - S_{2^k}(f)\|_p \leq 2C E_{2^k}(f)_p.$$

Теперь видим, что утверждение доказываемой теоремы прямо следует из лемм 12 и 14.

ТЕОРЕМА 7. Пусть функция φ принадлежит классу $\mathfrak{L}_p(\Lambda)$, причем Λ удовлетворяет условию Бари и условию (3.2). Пусть, далее, выполняется условие

$$\omega'_p(\delta, \varphi) = O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0.$$

Тогда для любого n и любой функции $f \in L_p[0, 1]$ справедливо неравенство

$$\tilde{\omega}_p\left(\frac{1}{n}, f\right) \leq \frac{C}{n} \sum_{\nu=1}^n E_\nu(f)_p.$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы 6.

²При $p = 2$ это условие можно отбросить (см. [10]).

Теорема 7 показывает, что для приближений полиномами по аффинной системе может выполняться аналог неравенства А. Ф. Тимана и М. Ф. Тимана. Как известно, такое неравенство не может иметь место при $1 < p < \infty$ в случае приближений полиномами Хаара и, вообще, в случае приближений полиномами по любой системе функций, которая содержит, по крайней мере, одну функцию, не эквивалентную непрерывной (см. статью Голубова [5]).

Совместность условий теоремы 7 подтверждает следующий пример.

ПРИМЕР. Пусть

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} \sin 2\pi t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Тогда $\omega_p(\delta, \varphi) = O(\delta)$ и $I_0(\delta, \varphi) = I_1(\delta, \varphi) = o(\delta)$. Значит, $\omega'_p(\delta, \varphi) = O(\delta)$. Далее, $(\varphi, \chi) = 1$, $(\varphi, \chi_{1,0}) = (\varphi, \chi_{1,1}) = 0$ и при $k \geq 2$ имеем

$$(\varphi, \chi_{k,j}) = -2^{k/2} \sin^2 \frac{\pi}{2^{k+1}} \cos \frac{2\pi(j+1/2)}{2^k},$$

откуда

$$\begin{aligned} 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |(\varphi, \chi_{k,j})|^p \right)^{1/p} &= 2^k \sin^2 \frac{\pi}{2^{k+1}} \left(2^{-k} \sum_{j=0}^{2^k-1} \left| \cos \frac{2\pi(j+1/2)}{2^k} \right|^p \right)^{1/p} \\ &\leq 2^k \sin^2 \frac{\pi}{2^{k+1}} \left(\int_0^1 |\cos 2\pi t|^p dt \right)^{1/p} \end{aligned}$$

в силу выпуклости вверх функции $|\cos 2\pi t|^p$ на отрезках $[i/4, (i+1)/4]$, $i = 0, 1, 2, 3$. Следовательно, функция φ принадлежит классу $\mathfrak{L}_p(\Lambda)$ для $\lambda_1 = 0$ и

$$\lambda_k = \frac{\pi^2}{4} 2^{-k} \left(\int_0^1 |\cos 2\pi t|^p dt \right)^{1/p}, \quad k \geq 2.$$

При этом

$$q_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \frac{\pi^2}{8} \left(\int_0^1 |\cos 2\pi t|^p dt \right)^{1/p} < 1$$

для $p < p_0 \in (5, 6)$, по крайней мере, для $p = 2$.

Нетрудно указать функцию, удовлетворяющую условиям теоремы 7 для любого показателя $p \in [1, \infty)$. Например, такой будет функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{32}{3}t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{8}, \\ \frac{4}{3}, & \frac{1}{8} \leq t \leq \frac{3}{8}, \\ \frac{32}{3} \left(\frac{1}{2} - t \right), & \frac{3}{8} \leq t \leq \frac{5}{8}, \\ -\frac{4}{3}, & \frac{5}{8} \leq t \leq \frac{7}{8}, \\ \frac{32}{3}(t-1), & \frac{7}{8} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Здесь

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}, \quad \lambda_k = \frac{8}{3 \cdot 2^{1/p}} 2^{-k}, \quad k \geq 3,$$

так что

$$q_0 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 2^{1/p}} < 1,$$

но мы опускаем детали.

ТЕОРЕМА 8. Пусть функция φ удовлетворяет нормировке (2.3), и пусть

$$\omega'_p(\delta, \varphi - \chi) \leq M\delta^{1/p},$$

причем

$$\gamma = \frac{1}{p} - \log_2(M+1) > 0.$$

Тогда для любого n и любой функции $f \in L_p[0, 1]$ справедливо неравенство

$$\tilde{\omega}_p\left(\frac{1}{n}, f\right) \leq \frac{C}{n^{1/p}} \sum_{\nu=1}^n \nu^{1/p-1} E_\nu(f)_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию

$$A_k^H(\varphi)_p = A_k^H(\varphi - \chi)_p \leq \omega_p(2^{-k}, \varphi - \chi) \leq M2^{-k/p}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поэтому $\varphi \in \mathfrak{L}_p(\Lambda^{1/p}(M))$. Осталось применить теорему 6 с учетом того, что $\omega'_p(\delta, \chi) = (2 + 2^p)^{1/p} \delta^{1/p}$. Тогда получим, что

$$\omega'_p(\delta, \varphi) \leq \omega'_p(\delta, \varphi - \chi) + \omega'_p(\delta, \chi) = O(\delta^{1/p}).$$

Теорема 8 является аналогом неравенства (1.2), установленного для системы Хаара Голубовым (см. [5; теорема 1]).

СЛЕДСТВИЕ 7. В условиях теоремы 7 из соотношения

$$E_n(f)_p = O(n^{-\alpha}), \quad n \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha < 1,$$

следует, что $f \in \text{Lip}(\alpha, p)$. Кроме того, если

$$E_n(f)_p = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

то $\omega_p(\delta, f) = O(\delta \log \frac{1}{\delta})$, $\delta \rightarrow 0$.

СЛЕДСТВИЕ 8. В условиях теоремы 8 из соотношения

$$E_n(f)_p = O(n^{-\alpha}), \quad n \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

при $\alpha p < 1$ следует, что $f \in \text{Lip}(\alpha, p)$,

при $\alpha p = 1$ вытекает соотношение $\omega_p(\delta, f) = O(\delta^\alpha \log \frac{1}{\delta})$, $\delta \rightarrow 0$,

при $\alpha p > 1$ следует, что $f \in \text{Lip}(\frac{1}{p}, p)$.

Доказательства следствий 7 и 8 получаем непосредственным применением теорем 7 и 8 соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 9. В условиях теоремы 8 и при выполнении неравенств $0 < \alpha < \gamma$ соотношение $E_n(f)_p = O(n^{-\alpha})$, $n \rightarrow \infty$, эквивалентно условию $f \in \text{Lip}(\alpha, p)$.

Доказательство непосредственно вытекает из следствий 5 и 8.

В обозначениях теоремы 8 для функции Хаара $\varphi = \chi$ можно считать, что $M = 0$, откуда получаем, что $\gamma = \frac{1}{p}$. Таким образом, следствие 9 для системы Хаара дает результат, установленный Голубовым в [5; теорема 2].

Список литературы

- [1] А. Хаар, “Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme Erste Mitteilung”, *Math. Ann.*, **69**:3 (1910), 331–371.
- [2] Н. К. Бари, “О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **19**:5 (1955), 285–302.
- [3] П. Л. Ульянов, “О рядах по системе Хаара”, *Матем. сб.*, **63(105)**:3 (1964), 356–391.
- [4] Б. И. Голубов, “Ряды по системе Хаара”, *Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анализ*, ВИНТИ, М., 1971, 109–146; англ. пер.: B. I. Golubov, “Series with respect to the Haar system”, *J. Soviet Math.*, **1**:6 (1973), 704–726.
- [5] Б. И. Голубов, “Наилучшие приближения функций в метрике L_p полиномами Хаара и Уолша”, *Матем. сб.*, **87(129)**:2 (1972), 254–274; англ. пер.: B. I. Golubov, “Best approximations of functions in the L_p metric by Haar and Walsh polynomials”, *Math. USSR-Sb.*, **16**:2 (1972), 265–285.
- [6] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987; англ. пер.: B. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov, *Walsh series and transforms. Theory and applications*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **64**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [7] П. А. Терехин, “О сходимости биортогональных рядов по системе сжатий и сдвигов функций в пространствах $L^p[0, 1]$ ”, *Матем. заметки*, **83**:5 (2008), 722–740; англ. пер.: P. A. Terekhin, “Convergence of biorthogonal series in the system of contractions and translations of functions in the spaces $L^p[0, 1]$ ”, *Math. Notes*, **83**:5 (2008), 657–674.
- [8] V. I. Filippov, P. Oswald, “Representation in L_p by series of translates and dilates of one function”, *J. Approx. Theory*, **82**:1 (1995), 15–29.
- [9] П. А. Терехин, “Мультидвиг в гильбертовом пространстве”, *Функц. анализ и его прил.*, **39**:1 (2005), 69–81; англ. пер.: P. A. Terekhin, “Multishifts in Hilbert spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **39**:1 (2005), 57–67.
- [10] П. А. Терехин, “Базисы Рисса, порожденные сжатиями и сдвигами функции на отрезке”, *Матем. заметки*, **72**:4 (2002), 547–560; англ. пер.: P. A. Terekhin, “Riesz bases generated by contractions and translations of a function on an interval”, *Math. Notes*, **72**:3–4 (2002), 505–518.

П. А. Терехин (P. A. Terekhin)

Саратовский государственный университет

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: terekhinpa@info.sgu.ru

Поступила в редакцию

10.09.2009 и 19.06.2010