Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Бахвалов, О локальном поведении многомерной Λ -вариации, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 11, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7634>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:34:02

УДК 517.518.2

А. Н. Бахвалов

О локальном поведении многомерной Λ -вариации

Пусть заданы два класса $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV$ и $(M^1, \dots, M^m)BV$ на промежутке Δ . В работе найдены необходимые и достаточные условия того, что для любой функции из M -класса ее Λ -вариация по окрестности каждой регулярной точки стремится к нулю при уменьшении этой окрестности.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: обобщенная вариация, регулярная точка, вариация по окрестности.

§ 1. Введение

Как хорошо известно, для функции ограниченной вариации на отрезке справедливо следующее свойство: если в точке x_0 функция непрерывна справа, то ее вариация по отрезку $[x_0, x_0 + h]$ стремится к нулю при $h \rightarrow +0$. В нашей работе рассматриваются аналогичные свойства многомерных классов функций обобщенной ограниченной вариации. Как показано, в частности, в [1]–[7], эти свойства важны при изучении поведения тригонометрических рядов Фурье функций из таких классов.

Введем необходимые обозначения. Через $C(\cdot)$ будут обозначаться величины, зависящие лишь от перечисленных в скобках параметров (не обязательно одинаковые в различных случаях). Для промежутка I на прямой через $\Omega(I)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов $\{I_n\}$ таких, что $\bar{I}_n \subset I$. Через $\dot{I}$ обозначим внутренность множества I .

Пусть $I^k = (a^k, b^k)$. Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x})$ на $\mathbb{R}^m$. При $m = 1$ положим $f(I^1) = f(b^1) - f(a^1)$; если для любой функции $m - 1$ переменных уже определено выражение $f(I^1 \times \dots \times I^{m-1})$, то для функции m переменных положим

$$f(I^1 \times \dots \times I^m) = f(I^1 \times \dots \times I^{m-1}, b^m) - f(I^1 \times \dots \times I^{m-1}, a^m).$$

Величину $f(I^1 \times \dots \times I^m)$ будем называть *смешанным приращением* функции f на I . Мы будем пользоваться тем, что смешанное приращение симметрично относительно перестановок переменных. Через $\text{osc}(f, I)$ будем обозначать колебание функции f на I .

Пусть множество $\{1, \dots, m\}$ разбито на два непересекающихся множества α и β , состоящих из p и $m - p$ элементов соответственно. Если $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$, то x^α – элемент $\mathbb{R}^p$, состоящий из компонент x^j , $j \in \alpha$. Для параллелепипеда $I = \bigotimes_{j=1}^m I^j$ обозначим $I^\alpha = \bigotimes_{j \in \alpha} I^j$. Через $f(I^\alpha, x^\beta)$ будем обозначать

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00302) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3252.2010.1).

смешанное приращение f как функции аргументов x^j , $j \in \alpha$, на I^α при фиксированных значениях x^k , $k \in \beta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Неубывающая последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}$ задает класс функций ограниченной Λ -вариации (класс Ватермана), если $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$. Далее будем рассматривать только такие Λ . Множество последовательностей Λ , удовлетворяющих перечисленным условиям, будем обозначать через $\mathbb{L}$. Частичные суммы $\sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k}$ обозначаются через $\Lambda(N)$. Последовательность $\{\lambda_k\}_{k=n+1}^{\infty}$ будем обозначать через Λ_n . Положим также $H = \{n\}$. Ясно, что $H \in \mathbb{L}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\Lambda^j \in \mathbb{L}$, $j = 1, \dots, m$. Тогда $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариацией функции $f(x^1, \dots, x^m)$ относительно переменных $x^1, \dots, x^m$ по параллелепипеду $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$ называется величина

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}^{x^1, \dots, x^m}(f; \Delta) = V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}^{\mathbf{x}}(f; \Delta) = \sup_{\{I_{k_j}^j\} \in \Omega(\Delta^j)} \sum_{k_1, \dots, k_m} \frac{|f(I_{k_1}^1 \times \dots \times I_{k_m}^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_m}^m}.$$

Пусть непустое множество $\alpha \subset \{1, \dots, m\}$ состоит из элементов $j_1 < \dots < j_p$ и $\beta = \{1, \dots, m\} \setminus \alpha$. Через

$$V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; (\Delta^\alpha, x^\beta)) = V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\alpha}(f; (\Delta^\alpha, x^\beta))$$

обозначим $(\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p})$ -вариацию f как функции переменных $x^{j_1}, \dots, x^{j_p}$ по p -мерному параллелепипеду $\Delta^\alpha = \Delta^{j_1} \times \dots \times \Delta^{j_p}$ при фиксированных значениях x^β остальных переменных (если β не пусто). Возникающие при этом параллелепипеды $\bigotimes_{l=1}^p I_{k_{j_l}}^{j_l}$ будем для краткости записывать как $I_{k^\alpha}^\alpha$.

Далее, $(\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p})$ -вариацией функции $f(x^1, \dots, x^m)$ относительно переменных x^α по параллелепипеду $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$ называется величина

$$V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; \Delta) = V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\alpha}(f; \Delta) = \sup_{x^\beta \in \Delta^\beta} V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\alpha}(f; (\Delta^\alpha, x^\beta)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Величина

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; \Delta) = \sum_{\substack{\alpha \subseteq \{1, \dots, m\} \\ \alpha \neq \emptyset}} V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; \Delta)$$

называется (полной) $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариацией функции $f(x^1, \dots, x^m)$ по параллелепипеду $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$. Множество функций, для которых она конечна, называется классом $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -ограниченной вариации на Δ (классом Ватермана) и обозначается через $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$. Если все последовательности Λ^j совпадают и равны Λ , то для краткости будем записывать $V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}$, V_Λ , $\Lambda BV(\Delta)$ и λ_{k^α} соответственно. Величину V_H называют гармонической вариацией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$ называется *непрерывной по $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариации* на Δ , если для любого непустого множества $\gamma = \{j_1, \dots, j_p\} \subset \{1, \dots, m\}$ и для любого $j_k \in \gamma$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_{k-1}}, \Lambda_n^{j_k}, \Lambda^{j_{k+1}}, \dots, \Lambda^{j_p}}(f; \Delta) = 0.$$

Множество таких функций будем обозначать через $C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Точка $\mathbf{x}_0$ называется *регулярной* точкой функции $f(\mathbf{x})$, если существуют и конечны 2^m пределов

$$f(x_0^1 \pm 0, \dots, x_0^m \pm 0) = \lim_{t^1, \dots, t^m \rightarrow +0} f(x_0^1 \pm t^1, \dots, x_0^m \pm t^m)$$

для всевозможных комбинаций знаков. Для регулярной точки $\mathbf{x}_0$ обозначим

$$f^*(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2^m} \sum f(x_0^1 \pm 0, \dots, x_0^m \pm 0).$$

Пусть $\delta \in (0, \infty)^m$, $\sigma \in \{-1; 1\}^m$. Обозначим через $(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \sigma\delta)$ параллелепипед $\bigotimes_{j=1}^m I^j$, где $I^j = (x^j, x^j + \delta^j)$ при $\sigma^j = 1$ и $I^j = (x^j - \delta^j, x^j)$ при $\sigma^j = -1$. Аналогично, через $[\mathbf{x}, \mathbf{x} + \sigma\delta)$ обозначим параллелепипед $\bigotimes_{j=1}^m I^j$, где $I^j = [x^j, x^j + \delta^j)$ при $\sigma^j = 1$ и $I^j = (x^j - \delta^j, x^j]$ при $\sigma^j = -1$. В качестве нормы в $\mathbb{R}^m$ возьмем $\|\delta\| = \max |\delta^j|$.

Классы ΛBV были определены в одномерном случае Д. Ватерманом (см. [1], [2]), в двумерном – А. А. Саакяном (см. [3]), а для случая более высоких размерностей – А. И. Саблиным (см. [4], [5]). В этих работах, а также в работах автора (в частности, в [6]–[8]) получены результаты о сходимости тригонометрических рядов Фурье функций из таких классов. При доказательстве этих результатов использовались приведенные ниже утверждения о локальном поведении вариации.

ТЕОРЕМА А (Д. Ватерман; см. [2]). Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}$, а $f \in \Lambda BV(\Delta)$ – функция, непрерывная справа в точке $a \in \Delta$. Тогда $V_\Lambda(f; [a, x]) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a + 0$.

ТЕОРЕМА В (А. А. Саакян). Пусть $f \in HBV(\Delta)$, где $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Тогда если в точке $(x, y) \in \Delta$ существует предел $f(x + 0, y + 0)$, то $V_H(f; (x, x + \varepsilon) \times (y, y + \varepsilon)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Если функция непрерывна на открытом множестве E , то для любого компакта $K \subset E$ выполнено условие

$$V_H(f; (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)) \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$ равномерно по $(x, y) \in K$.

ТЕОРЕМА С (А. И. Саблин). Если $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ – замкнутый промежуток, а $f(x) \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$ – непрерывная функция, причем для любого $p \in \{1, \dots, m\}$ справедливо условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^m \frac{1}{\lambda_k^q} = \infty, \quad (1)$$

то

$$\lim_{\text{diam } I \rightarrow 0} V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; I) = 0$$

равномерно по всем параллелепипедам $I \subset \Delta$.

Автором в [6; теорема 4] было показано, что теорема С неусилияема, точнее, имеет место

ТЕОРЕМА D. Пусть последовательности $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что для некоторого $p \in \{1, \dots, m\}$ нарушено условие (1). Тогда существует такая непрерывная функция $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV([-1, 1]^m)$, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; (0, \varepsilon)^m) \geq 1.$$

В той же работе автора [6] было впервые замечено, что если последовательности $\Lambda^j \in \mathbb{L}$ удовлетворяют условиям теоремы D, то локальное стремление вариации к нулю тем не менее можно гарантировать, если функция попадает в некоторый более узкий класс Ватермана. Приведем в связи с этим результаты о вложении классов Ватермана друг в друга.

ТЕОРЕМА E. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^m$. Класс $(M^1, \dots, M^m)BV(\Delta)$ вложен в класс $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$ тогда и только тогда, когда при каждом $p = 1, \dots, m$ найдется такое число $C(p)$, что при всех натуральных N выполнено неравенство

$$\Lambda^p(N) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n^p} \leq C(p)M^p(N) = C(p) \sum_{n=1}^N \frac{1}{\mu_n^p}.$$

При этом если $\tilde{C}(p) = \max\{C(p), 1\}$ для каждого p , то выполняется оценка

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; \Delta) \leq \tilde{C}(1) \cdots \tilde{C}(m) V_{M^1, \dots, M^m}(f; \Delta).$$

Утверждение доказано в одномерном случае С. Перлманом и Д. Ватерманом в [9], а в общем случае – автором (см. [10; теорема 1]).

ТЕОРЕМА F. Пусть последовательности $\Lambda^j \in \mathbb{L}$ и $M^j \in \mathbb{L}$ таковы, что для каждого $j = 1, \dots, m$ выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^j(n)}{M^j(n)} = 0.$$

Тогда для произвольного m -мерного промежутка Δ справедливо вложение

$$(M^1, \dots, M^m)BV(\Delta) \subset C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta).$$

Если функция $f(\mathbf{x})$ принадлежит классу $C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$, то существуют такие последовательности $M^j = \{\mu_n^j\} \in \mathbb{L}$, что $\frac{\mu_n^j}{\lambda_n^j} \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $f \in (M^1, \dots, M^m)BV(\Delta)$.

Это утверждение доказано автором – первая часть в [10; теорема 2], вторая часть в [6; теорема 1].

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку по определению класса $\mathbb{L}$ величины $\Lambda^j(n)$ и $M^j(n)$ неограниченно растут, то из условия $\frac{\mu_n^j}{\lambda_n^j} \downarrow 0$ вытекает условие $\frac{\Lambda^j(n)}{M^j(n)} \rightarrow 0$.

Для класса функций, непрерывных по вариации, автором в [6; теорема 2] было установлено следующее утверждение о локальном стремлении вариации к нулю.

ТЕОРЕМА G. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ и $f \in C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$. Тогда для любой регулярной точки $\mathbf{x} \in \mathring{\Delta}$ и для любого $\sigma \in \{-1; 1\}^m$ справедливо равенство

$$\lim_{\|\delta\| \rightarrow +0} V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; (\mathbf{x}, \mathbf{x} + \sigma\delta)) = 0.$$

Если к тому же $f(\mathbf{x})$ непрерывна в окрестности компакта K , то стремление к нулю происходит равномерно по $\mathbf{x}$ на K .

Некоторые другие частные случаи были рассмотрены автором в [8], в частности там была установлена

ТЕОРЕМА H. Пусть $m \geq 3$, последовательности $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что при некотором $p \in \{1, \dots, m\}$ выполнено соотношение

$$0 < \inf_n \frac{\lambda_n^p}{n} \leq \sup_n \frac{\lambda_n^p}{n} < \infty$$

и $\lambda_n^k = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$ для $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{p\}$, причем последовательности удовлетворяют условию (1) для этого p . Тогда для любой функции $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$ и любой ее регулярной точки $\mathbf{x}_0 \in \mathring{\Delta}$ выполнено условие

$$\lim_{\|\delta\| \rightarrow +0} \sum_{\sigma \in \{-1; 1\}^m} V_H(f; (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \sigma\delta)) = 0.$$

В настоящей работе полностью решается вопрос о локальном стремлении Λ -вариации к нулю для функции из другого класса Ватермана. А именно, получен следующий основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m \geq 2$, а последовательности $\Lambda^j \in \mathbb{L}$ и $M^j \in \mathbb{L}$ таковы, что для каждого $p = 1, \dots, m$ выполнено либо условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^p(n)}{M^p(n)} = 0, \tag{2}$$

либо пара условий

$$\sup_n \frac{\Lambda^p(n)}{M^p(n)} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^m \frac{1}{\mu_k^q} = \infty. \tag{3}$$

Тогда для любого промежутка $\Delta \subset \mathbb{R}^m$, для произвольной функции f из класса $(M^1, \dots, M^m)BV(\Delta)$, для любой ее регулярной точки $\mathbf{x} \in \mathring{\Delta}$ и для каждого $\sigma \in \{-1; 1\}^m$ выполнено условие

$$\lim_{\|\delta\| \rightarrow +0} V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; (\mathbf{x}, \mathbf{x} + \sigma\delta)) = 0.$$

Если к тому же f непрерывна в окрестности компакта K , то

$$\lim_{\|\delta\| \rightarrow +0} V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; (\mathbf{x} - \delta, \mathbf{x} + \delta)) = 0$$

равномерно по $\mathbf{x} \in K$.

Частными случаями этой теоремы являются теорема [Н](#), а также следующий “поточечный” вариант теоремы [С](#).

СЛЕДСТВИЕ. Если $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ и $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$, причем для любого $p \in \{1, \dots, m\}$ справедливо условие (1), то для любой функции $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$, для любой ее регулярной точки $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{\Delta}$ и для любого $\sigma \in \{-1; 1\}^m$ выполнено условие

$$\lim_{\|\delta\| \rightarrow +0} V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; (\mathbf{x}, \mathbf{x} + \sigma\delta)) = 0.$$

Действительно, в этих предположениях можно взять $M^p = \Lambda^p$, и при каждом $p = 1, \dots, m$ будут выполнены условия (3).

С другой стороны, следующий результат обобщает теорему [D](#) и устанавливает неусиливаемость теоремы [1](#).

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательности $\Lambda^j \in \mathbb{L}$ и $M^j \in \mathbb{L}$ таковы, что для некоторого $p \in \{1, \dots, m\}$ нарушены условия (2) и (3). Тогда найдется непрерывная функция из класса $(M^1, \dots, M^m)BV([-1, 1]^m)$, для которой

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; (0, \delta)^m) > 0.$$

§ 2. Вспомогательные результаты

Прежде всего, отметим следующий аналог теоремы Хелли для классов Ватермана.

ЛЕММА 1. Если функции $f_n(\mathbf{x})$ принадлежат классу $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$, их $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариации ограничены в совокупности величиной C_0 и функция $f(\mathbf{x})$ – поточечный предел функций f_n на Δ , то $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$.

Доказательство этого утверждения такое же, как для обычной ограниченной вариации в одномерном случае: любая вариационная сумма для некоторой компоненты вариации функции f является пределом вариационных сумм для функций f_n с теми же системами интервалов и потому не превосходит C_0 .

ЛЕММА 2. Пусть функция f непрерывна на промежутке $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \sigma\delta]$. Тогда

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \sigma\delta]) = V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \sigma\delta)).$$

Доказательство не приводим ввиду его очевидности.

Пусть множество всех номеров переменных $\{1, \dots, m\}$ разбито на три непересекающиеся части α , β и γ , причем α не пусто. Положим для $\delta > 0$

$$\varphi_{\alpha, \beta, \gamma}^{\Lambda^\alpha}(f, \mathbf{x}_0, \delta) = \sup_{\substack{x^j \in (x_0^j, x_0^j + \delta), j \in \gamma \\ I^j \in (x_0^j, x_0^j + \delta), j \in \beta}} \left(\sup_{\substack{\{I_{n_j}^j\} \in \Omega((x_0^j, x_0^j + \delta)) \\ j \in \alpha}} \left(\sum_{n_j, j \in \alpha} \frac{|f(I_{n_j}^\alpha \times I^\beta, x^\gamma)|}{\lambda_{n_j}^\alpha} \right) \right).$$

Следующая лемма составляет значительную техническую часть доказательства теоремы 1.

ЛЕММА 3. Пусть множество $\{1, \dots, m\}$ разбито на три непересекающиеся части α , β и γ , причем α не пусто, даны последовательности $\Lambda^p \in \mathbb{L}$, $p = 1, \dots, m$, и для каждого $p \in \alpha$ выполнено условие (1). Пусть $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$, а $\mathbf{x}_0 \in \mathring{\Delta}$ – регулярная точка функции f . Тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \varphi_{\alpha, \beta, \gamma}^{\Lambda^\alpha}(f, \mathbf{x}_0, \delta) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \in \Delta = [-1, 1]^m$. В работе автора [8] лемма доказана для случаев, когда множество α состоит из одного (лемма 3) или двух (лемма 4) элементов, в частности полностью доказан случай $m = 2$. Проведем индукцию по числу элементов множества α , взяв эти результаты за основание индукции.

Итак, предположим, что лемма доказана для функций $m - 1$ и менее переменных, а для функций m переменных доказана в случае, когда α содержит не более $p - 1$ элементов ($1 < p \leq m$). Докажем лемму для случая, когда число переменных равно m , а множество α содержит p элементов.

Начнем со случая, когда $\gamma = \emptyset$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha = \{1, \dots, p\}$, а $\beta = \{p + 1, \dots, m\}$ ($\beta = \emptyset$ при $p = m$). Предположим, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \varphi_{\alpha, \beta, \emptyset}^{\Lambda^\alpha}(f, \mathbf{0}, \delta) = \eta > 0$$

(предел существует в силу монотонности функции по δ). Возьмем $\delta_0 = 1$ и выберем интервалы $I^j(1) = (a^j(1), b^j(1)) \subseteq (0, \delta_0)$, $j \in \beta$ (если β не пусто), и системы $\{I_{n_k}^k(1)\}_{n_k=1}^{n(1)} \in \Omega((0, \delta_0))$, где $I_{n_k}^k(1) = (a_{n_k}^k(1), b_{n_k}^k(1))$ при $k \in \alpha$, так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{n_1=1}^{n(1)} \dots \sum_{n_p=1}^{n(1)} \frac{|f(I_{n_1}^{\alpha_1}(1) \times \dots \times I_{n_p}^{\alpha_p}(1))|}{\lambda_{n_1}^1 \dots \lambda_{n_p}^p} > \frac{3}{4} \varphi_{\alpha, \beta, \emptyset}^{\Lambda^\alpha}(f, \delta_0) \geq \frac{3\eta}{4}.$$

Положим

$$\tilde{\delta}_1 = \min \left\{ \min_{j \in \beta} a^j(1), \min_{j \in \alpha, n=1, \dots, n(1)} a_n^j(1) \right\}.$$

Пусть $\alpha_k = \alpha \setminus \{k\}$, $\beta_k = \beta \cup \{k\}$. Пользуясь предположением индукции (α_k состоят из $p - 1$ элементов), выберем такое $\delta_1 \in (0, \tilde{\delta}_1)$, чтобы при $k = 1, \dots, p$ выполнялись оценки

$$\left(\sum_{n=1}^{n(1)} \frac{1}{\lambda_n^k} \right) \varphi_{\alpha_k, \beta_k, \emptyset}^{\Lambda^{\alpha_k}}(f, \mathbf{0}, \delta_1) < \frac{\eta}{4p}.$$

Далее, выберем интервалы $I^j(2) = (a^j(2), b^j(2)) \subseteq (0, \delta_1)$, $j \in \beta$ (если β не пусто), и системы интервалов $\{I_n^k(2)\}_{n=1}^{n(2)} \in \Omega((0, \delta_1))$, где $I_n^k(2) = (a_n^k(2), b_n^k(2))$ при $k \in \alpha$, так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{n_1=1}^{n(2)} \dots \sum_{n_p=1}^{n(2)} \frac{|f(I_{n_1}^{\alpha_1}(2) \times \dots \times I_{n_p}^{\alpha_p}(2))|}{\lambda_{n_1}^1 \dots \lambda_{n_p}^p} > \frac{3\eta}{4}.$$

Условие на выбор δ_1 гарантирует, что сумма тех слагаемых, у которых хотя бы один из индексов n_j , $j \in \alpha$, не превосходит $n(1)$, мала, т.е. справедлива оценка

$$\sum_{n_1=1}^{n(1)} \sum_{n_2=1}^{n(2)} \dots \sum_{n_p=1}^{n(2)} \frac{|f(I_{n_1}^\alpha(2) \times I^\beta(2))|}{\lambda_{n_1}^1 \dots \lambda_{n_p}^p} \leq \sum_{n_1=1}^{n(1)} \frac{1}{\lambda_{n_1}^1} \varphi_{\alpha_1, \beta_1, \emptyset}^{\Lambda^{\alpha_1}}(f, \mathbf{0}, \delta_1) < \frac{\eta}{4p}$$

и еще $p-1$ аналогичных оценок. Поэтому

$$\sum_{n_1=n(1)+1}^{n(2)} \dots \sum_{n_p=n(1)+1}^{n(2)} \frac{|f(I_{n_1}^\alpha(2) \times I^\beta(2))|}{\lambda_{n_1}^1 \dots \lambda_{n_p}^p} > \frac{3\eta}{4} - p \frac{\eta}{4p} = \frac{\eta}{2}.$$

Затем положим

$$\tilde{\delta}_2 = \min \left\{ \min_{j \in \beta} a^j(2), \min_{n=n(1)+1, \dots, n(2), j \in \alpha} a_n^j(2) \right\}$$

и выберем такое $\delta_2 \in (0, \tilde{\delta}_2)$, чтобы при $k = 1, \dots, p$ выполнялись оценки

$$\left(\sum_{n=1}^{n(2)} \frac{1}{\lambda_n^k} \right) \varphi_{\alpha_k, \beta_k, \emptyset}^{\Lambda^{\alpha_k}}(f, \mathbf{0}, \delta_2) < \frac{\eta}{4p}.$$

Отметим, что $I^j(1) \cap I^j(2) = \emptyset$ при каждом $j \in \beta$ и что

$$\{I_n^k(1)\}_{n=1}^{n(1)} \sqcup \{I_n^k(2)\}_{n=n(1)+1}^{n(2)} \in \Omega((0, 1))$$

для $k \in \alpha$.

Продолжая этот процесс, мы построим числа δ_s , $n(s)$, интервалы $I^j(s) \subseteq (\delta_s, \delta_{s-1})$, $j \in \beta$ (если β не пусто), и системы интервалов $\{I_n^k(s)\}_{n=n(s-1)+1}^{n(s)} \in \Omega((\delta_s, \delta_{s-1}))$ для $k \in \alpha$, удовлетворяющие соответствующим условиям пустоты попарных пересечений, для которых выполнены неравенства

$$\sum_{n_1=n(s-1)+1}^{n(s)} \dots \sum_{n_p=n(s-1)+1}^{n(s)} \frac{|f(I_{n_1}^\alpha(s) \times I^\beta(s))|}{\lambda_{n_1}^1 \dots \lambda_{n_p}^p} > \frac{3\eta}{4} - p \frac{\eta}{4p} = \frac{\eta}{2}.$$

При любом s_0 будут выполняться условия $\{I^j(s)\}_{s=1}^{s_0} \in \Omega((0, 1))$ для $j \in \beta$ и

$$\bigsqcup_{s=1}^{s_0} \{I_n^k(s)\}_{n=n(s-1)+1}^{n(s)} \in \Omega((0, 1))$$

для $k \in \alpha$. Тогда

$$\sum_{s=1}^{s_0} \sum_{n_1=n(s-1)+1}^{n(s)} \dots \sum_{n_p=n(s-1)+1}^{n(s)} \frac{|f(I_{n_1}^\alpha(s) \times I^\beta(s))|}{\lambda_{n_1}^1 \dots \lambda_{n_p}^p \lambda_s^{p+1} \dots \lambda_s^m} > \frac{\eta}{2} \sum_{s=1}^{s_0} \prod_{j=p+1}^m \frac{1}{\lambda_s^j}.$$

Сумма в правой части неравенства стремится к бесконечности с ростом s_0 , что следует из соотношения (1), выполненного по условиям леммы. Но величина в левой части неравенства при каждом s является частью вариационной суммы

для построенных систем интервалов. Следовательно, существуют сколь угодно большие вариационные суммы. Мы получили противоречие с ограниченностью $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариации функции f . Таким образом, случай $\gamma = \emptyset$ доказан и полностью доказан случай $p = m$.

Предположим теперь, что $m \geq 3$ и утверждение леммы справедливо для множеств γ из $m - k$ элементов для некоторого $k = p + 1, \dots, m$. Докажем его для множеств γ из $m - k + 1$ элементов. Из соображений симметрии достаточно доказать утверждение для множеств $\beta = \{p + 1, \dots, k - 1\}$ и $\gamma = \{k, k + 1, \dots, m\}$. Пусть $\gamma' = \{k + 1, \dots, m\}$ и $\beta' = \{p + 1, \dots, k\}$. Введем функции

$$f_s(x^1, \dots, x^{k-1}, x^{k+1}, \dots, x^m) = f\left(x^1, \dots, x^{k-1}, \frac{1}{s}, x^{k+1}, \dots, x^m\right).$$

Они принадлежат классу $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^{k-1}, \Lambda^{k+1}, \dots, \Lambda^m)BV([-1, 1]^{m-1})$, причем их вариации равномерно ограничены, поскольку

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^{k-1}, \Lambda^{k+1}, \dots, \Lambda^m}(f_s; [-1, 1]^{m-1}) \leq V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; [-1, 1]^m).$$

При фиксированных значениях переменных x^j , $j \neq k$, функция f принадлежит классу $\Lambda^k BV([-1, 1])$; как следствие существует ее предел при $x_k \rightarrow +0$, который мы обозначим через $f_0(x^1, \dots, x^{k-1}, x^{k+1}, \dots, x^m)$. Функция f_0 является поточечным пределом функций f_s , а тогда

$$f_0 \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^{k-1}, \Lambda^{k+1}, \dots, \Lambda^m)BV([-1, 1]^{m-1})$$

по лемме 1.

Заметим, что точка $\mathbf{0} \in (-1, 1)^{m-1}$ является регулярной точкой функции f_0 . Действительно, повторный предел обязательно существует, если существуют внутренний предел и двойной предел. Допустим, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \varphi_{\alpha, \beta, \gamma}^{\Lambda^\alpha}(f, \mathbf{0}, \delta) = \eta > 0,$$

в то время как по предположению индукции

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \varphi_{\alpha, \beta', \gamma'}^{\Lambda^\alpha}(f, \mathbf{0}, \delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow +0} \varphi_{\alpha, \beta, \gamma'}^{\Lambda^\alpha}(f_0, \mathbf{0}, \delta) = 0$$

(второй предел берется для $(m - 1)$ -мерной точки $\mathbf{0}$). Возьмем $\delta > 0$ столь малым, чтобы выполнялись условия $\varphi_{\alpha, \beta', \gamma'}^{\Lambda^\alpha}(f, \mathbf{0}, \delta) < \frac{\eta}{6}$ и $\varphi_{\alpha, \beta, \gamma'}^{\Lambda^\alpha}(f_0, \mathbf{0}, \delta) < \frac{\eta}{6}$. Поскольку $\varphi_{\alpha, \beta, \gamma}^{\Lambda^\alpha}(f, \mathbf{0}, \delta) \geq \eta$, то найдутся интервалы $\{I_{n_k}^k\} \in \Omega((0, \delta))$ для $k \in \alpha$ и $I^j \in (0, \delta)$, $j \in \beta$, а также точки $b^k \in (0, \delta)$ и $x^{k+1}, \dots, x^m \in (0, \delta)$, для которых выполнено неравенство

$$\sum_{n_1=1}^{n(1)} \dots \sum_{n_p=1}^{n(p)} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times \dots \times I_{n_p}^p \times I^{p+1} \times \dots \times I^{k-1}, b^k, x^{\gamma'})|}{\lambda_{n_1}^1 \dots \lambda_{n_p}^p} > \frac{5\eta}{6}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{n_1=1}^{n(1)} \dots \sum_{n_p=1}^{n(p)} \frac{|f_0(I_{n_1}^1 \times \dots \times I_{n_p}^p \times I^{p+1} \times \dots \times I^{k-1}, x^{\gamma'})|}{\lambda_{n_1}^1 \dots \lambda_{n_p}^p} \leq \varphi_{\alpha, \beta, \gamma'}^{\Lambda^\alpha}(f_0, \mathbf{0}, \delta) < \frac{\eta}{6}.$$

Функция f_0 есть поточечный предел функций $f_s(x)$. Поэтому найдется достаточно малое $a^k = \frac{1}{s_0} \in (0, \delta)$, для которого выполнена оценка

$$\sum_{n_1=1}^{n(1)} \dots \sum_{n_p=1}^{n(p)} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times \dots \times I_{n_p}^p \times I^{p+1} \times \dots \times I^{k-1}, a^k, x^{\gamma'})|}{\lambda_{n_1}^1 \dots \lambda_{n_p}^p} < \frac{\eta}{3}.$$

Полагая теперь $I^k = (a^k, b^k)$, получим оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1=1}^{n(1)} \dots \sum_{n_p=1}^{n(p)} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times \dots \times I_{n_p}^p \times I^{p+1} \times \dots \times I^{k-1} \times I^k, x^{\gamma'})|}{\lambda_{n_1}^1 \dots \lambda_{n_p}^p} \\ & \geq \sum_{n_1=1}^{n(1)} \dots \sum_{n_p=1}^{n(p)} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times \dots \times I_{n_p}^p \times I^{p+1} \times \dots \times I^{k-1}, b^k, x^{\gamma'})|}{\lambda_{n_1}^1 \dots \lambda_{n_p}^p} \\ & \quad - \sum_{n_1=1}^{n(1)} \dots \sum_{n_p=1}^{n(p)} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times \dots \times I_{n_p}^p \times I^{p+1} \times \dots \times I^{k-1}, a^k, x^{\gamma'})|}{\lambda_{n_1}^1 \dots \lambda_{n_p}^p} \\ & \geq \frac{5\eta}{6} - \frac{\eta}{3} = \frac{\eta}{2}. \end{aligned}$$

Это противоречит условию $\varphi_{\alpha, \beta, \gamma'}^{\Lambda^\alpha}(f, \mathbf{0}, \delta) < \frac{\eta}{6}$. Следовательно,

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \varphi_{\alpha, \beta, \gamma}^{\Lambda^\alpha}(f, \mathbf{0}, \delta) = 0.$$

Таким образом, утверждение леммы справедливо для любого множества $\gamma \subseteq \{p+1, \dots, m\}$.

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть множество $\{1, \dots, m\}$ разбито на три непересекающиеся части α , β и γ , причем α не пусто, а последовательности $\Lambda^j \in \mathbb{L}$ и $M^j \in \mathbb{L}$ таковы, что для каждого $j \in \alpha$ выполнено условие

$$\sup_n \frac{\Lambda^j(n)}{M^j(n)} \leq C(j).$$

Тогда

$$\varphi_{\alpha, \beta, \gamma}^{\Lambda^\alpha}(f, \mathbf{x}, \delta) \leq \left(\prod_{j \in \alpha} C(j) \right) \varphi_{\alpha, \beta, \gamma}^{M^\alpha}(f, \mathbf{x}, \delta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соображений симметрии достаточно рассмотреть случай $\alpha = \{1, \dots, s\}$, $\beta = \{s+1, \dots, q\}$, где $1 \leq p \leq q \leq m$. Проведем рассуждения для случая, когда $M^k = \Lambda^k$ при $k = 2, \dots, s$; повторяя эти рассуждения s раз, получим утверждение для общего случая. Рассмотрим подходящую сумму

$$\sum_{k_1, \dots, k_s} \frac{|f(I_{k_1}^1 \times \dots \times I_{k_s}^s \times I^{s+1} \times \dots \times I^q, x^{q+1}, \dots, x^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \lambda_{k_2}^2 \dots \lambda_{k_s}^s} = \sum_{k_1=1}^N \frac{1}{\lambda_{k_1}^1} S_{k_1}.$$

Переупорядочивая систему $\{I_{k_1}^1\}$, можно считать, что $S_1 \geq S_2 \geq \dots \geq S_N$, указанная сумма при этом может только увеличиться. Теперь, применяя преобразование Абеля, получаем оценку (здесь для удобства k_1 заменено на k)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k^1} S_k &= \sum_{k=1}^N (\Lambda^1(k) - \Lambda^1(k-1)) S_{k-1} = \sum_{k=1}^{N-1} \Lambda^1(k) (S_k - S_{k+1}) + \Lambda^1(N) S_N \\ &\leq C(1) \left(\sum_{k=1}^{N-1} M^1(k) (S_k - S_{k+1}) + M^1(N) S_N \right) \\ &= C(1) \sum_{k=1}^N \frac{1}{\mu_k^1} S_k \leq C(1) \varphi_{\alpha, \beta, \gamma}^{M^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^s}(f, \mathbf{x}, \delta). \end{aligned}$$

Переходя здесь к точной грани по системам $\{I_{k_j}^j\}$, $j = 1, \dots, s$, отрезкам I^j , $j = s+1, \dots, q$, и точкам x^j , $j = q+1, \dots, m$, получаем оценку

$$\varphi_{\alpha, \beta, \gamma}^{\Lambda^s}(f, \mathbf{x}, \delta) \leq C(1) \varphi_{\alpha, \beta, \gamma}^{M^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^s}(f, \mathbf{x}, \delta) = C(1) \varphi_{\alpha, \beta, \gamma}^{M^\alpha}(f, \mathbf{x}, \delta).$$

Лемма 4 доказана.

§ 3. Доказательства теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. При доказательстве первого утверждения без ограничения общности можно считать, что $\sigma^j = 1$ при всех j и рассматривается точка $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \Delta = [-1, 1]^m$.

Пусть ξ' – множество тех номеров, для которых выполнено (2), а ξ'' – множество остальных номеров; для них выполнены условия (3). Без ограничения общности можно считать, что $\xi'' = \{1, \dots, p\}$ для некоторого $p \in \{1, \dots, m\}$ (случай пустого ξ'' сразу вытекает из теорем F и G).

Возьмем некоторую компоненту вариации $V_{\Lambda^\tau}^{x^\tau}(f; (0, \delta)^m)$. Если $\tau \subset \xi''$, то стремление компоненты к нулю следует из лемм 3 и 4 при $\alpha = \tau$, $\beta = \emptyset$, $\gamma = \{1, \dots, m\} \setminus \tau$. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $\tau' = \tau \cap \xi'$, $\tau'' = \tau \cap \xi''$, $\nu = \{1, \dots, m\} \setminus \tau$, $\nu' = \nu \cap \xi'$, $\nu'' = \nu \cap \xi''$. Из соображений симметрии можно считать, что $\tau = \{s+1, \dots, r\}$, где $0 \leq s \leq p < r \leq m$. Пусть

$$C(p) = \max \left\{ 1, \sup_n \frac{\Lambda^p(n)}{M^p(n)} \right\}$$

при каждом $p = 1, \dots, m$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Положим

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(r-p) \left(\prod_{j=s+1}^r C(j) \right) V_{M^\tau}^{x^\tau}(f; \Delta)}.$$

Так как при $k \in \xi'$ выполнено (2), то найдутся столь большие N_k , $k \in \xi'$, что выполняются условия

$$\frac{\Lambda^k(N_k)}{M^k(N_k)} = \sup_{n \geq N_k} \frac{\Lambda^k(n)}{M^k(n)} = \eta_k \leq \varepsilon_1.$$

Затем по лемме 3 можно выбрать $\delta > 0$ столь малым, что

$$\varphi_{\tau'', \tau', \nu}^{\Lambda_{\tau''}}(f, \mathbf{x}_0, \delta) \prod_{j=p+1}^r \left(\sum_{n_j=1}^{N_j} \frac{1}{\lambda_{n_j}^j} \right) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4)$$

Теперь для любых систем $\{I_{n_j}^j\} \in \Omega((0, \delta))$, $j \in \tau$, и любых точек $x^j \in (0, \delta)$, $j \in \nu$, получаем оценку

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n_{s+1}, \dots, n_r} \frac{|f(x^{\nu''}, I_{n_{s+1}}^{s+1} \times \dots \times I_{n_r}^r, x^{\nu'})|}{\lambda_{n_{s+1}}^{s+1} \dots \lambda_{n_r}^r} \\ &\leq \sum_{j=p+1}^r \sum_{n_j > N_j} \left(\sum_{n_i, i \in \tau \setminus \{j\}} \frac{|f(x^{\nu''}, I_{n_{s+1}}^{s+1} \times \dots \times I_{n_r}^r, x^{\nu'})|}{\lambda_{n_{s+1}}^{s+1} \dots \lambda_{n_r}^r} \right) \\ &\quad + \sum_{n_{p+1}=1}^{N_{p+1}} \dots \sum_{n_r=1}^{N_r} \frac{1}{\lambda_{n_{p+1}}^{p+1} \dots \lambda_{n_r}^r} \left(\sum_{n_{s+1}, \dots, n_p} \frac{|f(x^{\nu''}, I_{n_{s+1}}^{s+1} \times \dots \times I_{n_r}^r, x^{\nu'})|}{\lambda_{n_{s+1}}^{s+1} \dots \lambda_{n_p}^p} \right) \\ &= S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Заметим, что внутренняя сумма в S_2 при любых значениях индексов внешней суммы не превосходит величины $\varphi_{\tau'', \tau', \nu}^{\Lambda_{\tau''}}(f, \mathbf{x}_0, \delta)$. Учитывая (4), получаем неравенство

$$S_2 \leq \varphi_{\tau'', \tau', \nu}^{\Lambda_{\tau''}}(f, \mathbf{x}_0, \delta) \sum_{n_{p+1}=1}^{N_{p+1}} \dots \sum_{n_r=1}^{N_r} \frac{1}{\lambda_{n_{p+1}}^{p+1} \dots \lambda_{n_r}^r} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейдем к оценке суммы S_1 . Возьмем в ней одно слагаемое, например,

$$S_1(r) = \sum_{n_r=N_r+1}^{N'_r} \left(\sum_{n_{s+1}, \dots, n_{r-1}} \frac{|f(x^{\nu''}, I_{n_{s+1}}^{s+1} \times \dots \times I_{n_r}^r, x^{\nu'})|}{\lambda_{n_{s+1}}^{s+1} \dots \lambda_{n_r}^r} \right) = \sum_{n_r=N_r+1}^{N'_r} \frac{\sigma(n_r)}{\lambda_{n_r}^r},$$

где обозначено

$$\sigma(n_r) = \sum_{n_{s+1}, \dots, n_{r-1}} \frac{|f(x^{\nu''}, I_{n_{s+1}}^{s+1} \times \dots \times I_{n_r}^r, x^{\nu'})|}{\lambda_{n_{s+1}}^{s+1} \dots \lambda_{n_{r-1}}^{r-1}}.$$

Положим также

$$\tilde{\sigma}(n_r) = \sum_{n_{s+1}, \dots, n_{r-1}} \frac{|f(x^{\nu''}, I_{n_{s+1}}^{s+1} \times \dots \times I_{n_r}^r, x^{\nu'})|}{\mu_{n_{s+1}}^{s+1} \dots \mu_{n_{r-1}}^{r-1}}.$$

Аналогично доказательству леммы 4 показывается, что

$$\sigma(n_r) \leq \left(\prod_{j=s+1}^{r-1} C(j) \right) \tilde{\sigma}(n_r).$$

Переставим интервалы $\{I_{n_r}^r\}_{r=N_r+1}^{N'_r}$ так, чтобы

$$\sigma(N_r + 1) \geq \sigma(N_r + 2) \geq \dots \geq \sigma(N'_r);$$

при этом сумма $S_1(r)$ может только увеличиться.

Теперь применим преобразование Абеля и получим

$$\begin{aligned} \sum_{n_r=N_r+1}^{N'_r} \frac{1}{\lambda_{n_r}^r} \sigma(n_r) &= \sum_{n_r=N_r+1}^{N'_r} (\Lambda^r(n_r) - \Lambda^r(n_r - 1)) \sigma(n_r) \\ &= \sum_{n_r=N_r+1}^{N'_r-1} \Lambda^r(n_r) (\sigma(n_r) - \sigma(n_r + 1)) + \Lambda^r(N'_r) \sigma(N'_r) - \Lambda^r(N_r) \sigma(N_r + 1). \end{aligned}$$

Поскольку $\sigma(n_r) - \sigma(n_r + 1) \geq 0$, $\Lambda^r(k) \leq \eta_r M^r(k)$ при $k \geq N_r$ и $\Lambda^r(N_r) = \eta_r M^r(N_r)$, то справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_{n_r=N_r+1}^{N'_r} \frac{\sigma(n_r)}{\lambda_{n_r}^r} &\leq \eta_r \left(\sum_{n_r=N_r+1}^{N'_r-1} M^r(n_r) (\sigma(n_r) - \sigma(n_r + 1)) \right. \\ &\quad \left. + M^r(N'_r) \sigma(N'_r) - M^r(N_r) \sigma(N_r + 1) \right). \end{aligned}$$

Преобразуя обратно, получаем оценку

$$\begin{aligned} S_1(r) &= \sum_{n_r=N_r+1}^{N'_r} \frac{\sigma(n_r)}{\lambda_{n_r}^r} \leq \eta_r \sum_{n_r=N_r+1}^{N'_r} \frac{\sigma(n_r)}{\mu_{n_r}^r} \leq \left(\prod_{j=s+1}^{r-1} C(j) \right) \eta_r \sum_{n_r=N_r+1}^{N'_r} \frac{1}{\mu_{n_r}^r} \tilde{\sigma}(n_r) \\ &\leq \varepsilon_1 \left(\prod_{j=s+1}^{r-1} C(j) \right) \sum_{n_r > N_r} \left(\sum_{n_i, i \in \tau \setminus \{j\}} \frac{|f(x^{\nu''}, I_{n_{s+1}}^{s+1} \times \dots \times I_{n_r}^r, x^{\nu'})|}{\mu_{n_{s+1}}^{s+1} \dots \mu_{n_r}^r} \right) \\ &\leq \varepsilon_1 \left(\prod_{j=s+1}^{r-1} C(j) \right) V_{M^\tau}^{x^\tau}(f; \Delta) \leq \frac{\varepsilon}{2(r-p)}. \end{aligned}$$

Объединяя эти неравенства, получим

$$S \leq S_1 + S_2 \leq (r-p) \frac{\varepsilon}{2(r-p)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Тогда и рассматриваемая компонента вариации не превосходит ε . Это завершает доказательство утверждения, относящегося к одной регулярной точке.

Покажем теперь, что если функция $f \in (M^1, \dots, M^m)BV(\Delta)$ непрерывна в окрестности точки $\mathbf{x}_0$, то

$$\lim_{\|\delta\| \rightarrow +0} V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; (\mathbf{x}_0 - \delta, \mathbf{x}_0 + \delta)) = 0. \quad (5)$$

Действительно, пусть взяты системы $\{I_{k_j}^j\} \in \Omega((x_0^j - \delta^j, x_0^j + \delta^j))$. Заметим, что если одно из ребер промежутка I разбито на две части, например, I^1 разбито на I_*^1 и I_{**}^1 , то

$$f(I^1 \times I^2 \times \dots \times I^m) = f(I_*^1 \times I^2 \times \dots \times I^m) + f(I_{**}^1 \times I^2 \times \dots \times I^m),$$

откуда

$$|f(I^1 \times I^2 \times \dots \times I^m)| \leq |f(I_*^1 \times I^2 \times \dots \times I^m)| + |f(I_{**}^1 \times I^2 \times \dots \times I^m)|.$$

Отсюда следует, что если в каждой из систем $\{I_{k,j}^j\}$ заменить тот из интервалов, который содержит внутри точку x_0^j (если таковой существует), на два, разбив его этой точкой, то вариационная сумма не уменьшится, но некоторые номера станут встречаться дважды. Но такую видоизмененную систему можно поделить на две – одну из $\Omega((x_0^j - \delta^j, x_0^j])$, другую из $\Omega([x_0^j, x_0^j + \delta^j))$. Таким образом, мы получаем, что

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; (\mathbf{x} - \boldsymbol{\delta}, \mathbf{x} + \boldsymbol{\delta})) \leq \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \{-1; 1\}^m} V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\delta})).$$

Но по лемме 2 в силу непрерывности функции f в окрестности точки при достаточно малых $\|\boldsymbol{\delta}\|$ для каждого $\boldsymbol{\sigma}$ выполняется равенство

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\delta})) = V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\delta})).$$

Теперь (5) следует из первой части теоремы.

Выведем отсюда второе утверждение теоремы. Предположим, что оно неверно. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ существуют промежутки I_n , $\text{diam } I_n \rightarrow 0$, для которых $V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; I_n) > \varepsilon$, причем каждый промежуток содержит некоторую точку $\mathbf{x}_n$ из рассматриваемого компакта K . Выберем подпоследовательность $\mathbf{x}_{n_l}$, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}_0 \in K$. Так как по условию f непрерывна в окрестности точки $\mathbf{x}_0$, то в силу (5) найдется такое $\boldsymbol{\delta}$, что $V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\delta}, \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta})) < \varepsilon$; но при достаточно больших l выполняется вложение $I_{n_l} \subset (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\delta}, \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta})$, и мы приходим к противоречию.

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Если при некотором p , скажем, $p = 1$, нарушено первое из условий (3), то по теореме Е уже соответствующие одномерные классы не вложены, т.е.

$$M^1BV([-1, 1]) \not\subset \Lambda^1BV([-1, 1]).$$

При этом, как известно, существует последовательность положительных чисел $\{a_n\}$, $a_n \downarrow 0$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^1} = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\mu_n^1} = 1.$$

Определим функцию $g(x)$ следующим образом: $g(\frac{1}{2n-1}) = 0$, $g(\frac{1}{2n}) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$; $g(x) = 0$ при $x \leq 0$, $g(x)$ линейна на $[\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}]$. Нетрудно видеть, что g непрерывна и

$$V_{M^1}(g; [-1, 1]) \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\mu_n^1} = 2,$$

но в то же время для любого натурального N выполнено

$$V_{\Lambda^1}\left(g; \left[0, \frac{1}{2N}\right]\right) \geq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^1} = \infty.$$

Тогда функция $f(\mathbf{x}) = g(x^1)$ искомая.

Пусть теперь первое из условий (3) выполнено при каждом p , но при некотором p , например при $p = 1$, нарушено как условие (2), так и второе из условий (3). Тогда заведомо $m \geq 3$, поскольку при $m = 2$ отрицание второго из условий (3) противоречит определению класса $\mathbb{L}$. Обозначим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^1(n)}{M^1(n)} = a > 0$$

и выберем такую возрастающую последовательность $\{N_k\}$, что

$$\frac{\Lambda^1(2N_k)}{M^1(2N_k)} > \frac{a}{2}.$$

Возьмем интервалы $\Delta_k^1 = (0, \frac{1}{N_k})$ и $\Delta_k^j = (2^{-(k+1)}, 2^{-k})$, $j = 2, \dots, m$. Определим функции $f_k(x)$:

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & x = \frac{2j}{2(N_k)^2}, \quad j = 0, \dots, N_k, \\ \frac{1}{\Lambda^1(2N_k)}, & x = \frac{2j-1}{2(N_k)^2}, \quad j = 1, \dots, N_k, \\ 0, & x \notin \Delta_k^1, \end{cases}$$

и продолжим их линейно на отрезки $[\frac{l-1}{2N_k^2}, \frac{l}{(2N_k)^2}]$, $l = 1, \dots, 2N_k$; а также определим функции $g_k(x)$:

$$g_k(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{3}{2^{k+2}}, \\ 0, & x \notin \Delta_k^j, \end{cases}$$

и продолжим их линейно на отрезки $[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{3}{2^{k+2}}]$ и на $[\frac{3}{2^{k+2}}, \frac{1}{2^k}]$. Положим

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \left(\prod_{j=2}^m g_k(x^j) \right).$$

Заметим, что

$$V_{M^1}(f_k, [-1, 1]) \leq \frac{M^1(2N_k)}{\Lambda^1(2N_k)} < \frac{2}{a}.$$

Тогда, как доказано в [6; лемма 6], из отрицания второго условия (3) вытекает, что функция f попадает в класс $(M^1, \dots, M^m)BV([-1, 1]^m)$. В то же время по построению

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; (0, \delta)^m) \geq V_{\Lambda^1}^{x^1}(f; (0, \delta)^m) \geq \sup_k V_{\Lambda^1}^{x^1} \left(f; (0, \delta), \frac{3}{2^{k+2}}, \dots, \frac{3}{2^{k+2}} \right) = 1.$$

Теорема 2 доказана.

Список литературы

- [1] D. Waterman, "Convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation", *Studia Math.*, **44**:1 (1972), 107–117.
- [2] D. Waterman, "On the summability of Fourier series of functions of Λ -bounded variation", *Studia Math.*, **55**:1 (1976), 87–95.

- [3] А. А. Саакян, “О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации”, *Изв. АН Арм. ССР*, **21**:6 (1986), 517–529; англ. пер.: A. A. Saakyan, “On the convergence of double Fourier series of functions with bounded harmonic variation”, *Soviet J. Contemporary Math. Anal.*, **21**:6 (1986), 1–13.
- [4] А. И. Саблин, *Функции ограниченной Λ -вариации и ряды Фурье*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1987.
- [5] А. И. Саблин, “ Λ -вариация и ряды Фурье”, *Изв. вузов. Матем.*, 1987, № 10, 66–68; англ. пер.: A. I. Sablin, “ Λ -variation and Fourier series”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **31**:10 (1987), 87–90.
- [6] А. Н. Бахвалов, “Непрерывность по Λ -вариации функций многих переменных и сходимость кратных рядов Фурье”, *Матем. сб.*, **193**:12 (2002), 3–20; англ. пер.: A. N. Bakhvalov, “Continuity in Λ -variation of functions of several variables and convergence of multiple Fourier series”, *Sb. Math.*, **193**:12 (2002), 1731–1748.
- [7] А. Н. Бахвалов, “Представление непериодических функций ограниченной Λ -вариации интегралом Фурье в многомерном случае”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:6 (2003), 3–22; англ. пер.: A. N. Bakhvalov, “Representing non-periodic functions of bounded Λ -variation by multi-dimensional Fourier integrals”, *Izv. Math.*, **67**:6 (2003), 1081–1100.
- [8] А. Н. Бахвалов, “О локальном поведении многомерной гармонической вариации”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:4 (2006), 3–20; англ. пер.: A. N. Bakhvalov, “On local behaviour of multi-dimensional harmonic variation”, *Izv. Math.*, **70**:4 (2006), 641–660.
- [9] S. Perlman, D. Waterman, “Some remarks on functions of Λ -bounded variation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **74**:1 (1979), 113–118.
- [10] А. Н. Бахвалов, “О сходимости и локализации кратных рядов Фурье для классов функций ограниченной Λ -вариации”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2008, № 3, 6–12; англ. пер.: A. N. Bakhvalov, “Convergence and localization of multiple Fourier series for the classes of functions of bounded Λ -variation”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **63**:3 (2008), 85–91.

А. Н. Бахвалов (A. N. Bakhvalov)
 Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: an-bakh@yandex.ru

Поступила в редакцию
 25.09.2009 и 29.03.2010