Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Буданов, Об идеалах колец обобщенных матриц,
Матем. сб., 2011, том 202, номер 1, 3–10

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7638>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 12:32:58

УДК 512.552

А. В. Буданов

Об идеалах колец обобщенных матриц

Пусть R, S – кольца, ${}_R M_S, {}_S N_R$ – бимодули. В статье в терминах изоморфизма решеток описаны связи решеток односторонних и двусторонних идеалов кольца обобщенных матриц $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ и соответствующих решеток идеалов колец R и S . Также получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы пара идеалов I, J колец R и S соответственно составляла главную диагональ некоторого идеала кольца K .

Библиография: 8 названий.

Ключевые слова: кольцо обобщенных матриц, решетка идеалов.

Кольца обобщенных матриц составляют интересный класс колец и часто появляются в самых разных разделах теории колец и модулей. Кольца обобщенных матриц находятся во взаимно однозначном соответствии с контекстами Мориты. Класс колец обобщенных матриц совпадает с классом колец эндоморфизмов, разложимых в прямую сумму модулей над всевозможными кольцами. С другой стороны, произвольное кольцо изоморфно кольцу обобщенных матриц тогда и только тогда, когда оно обладает нетривиальными идемпотентами. Кольца обобщенных матриц обладают многими интересными свойствами. Треугольные кольца обобщенных матриц часто служат примерами колец с асимметричными свойствами. С кольцами обобщенных матриц и их связями с контекстами Мориты можно познакомиться в [1; §10], [2; гл. 6, 12]. В последнее время кольца обобщенных матриц и модули над ними активно изучаются. В работах [3]–[5] рассматриваются треугольные кольца обобщенных матриц и модули над ними. Модули над кольцами обобщенных матриц изучаются также в [6]. Интересный вопрос об изоморфизме колец обобщенных матриц рассматривается в [7].

В настоящей статье рассматриваются связи идеалов кольца обобщенных матриц и колец, при помощи которых оно построено. Указаны способы построения идеалов кольца обобщенных матриц по идеалам составляющих его колец, описаны взаимосвязи решеток идеалов кольца обобщенных матриц и колец, с помощью которых оно построено.

Под термином “кольцо” всюду в тексте понимается ассоциативное кольцо, не обязательно имеющее единицу. Пусть R, S – кольца, M – R - S -бимодуль, N – S - R -бимодуль. Пусть существуют бимодульные гомоморфизмы

$$\varphi: M \otimes_S N \longrightarrow R, \quad \psi: N \otimes_R M \longrightarrow S.$$

Для любых $n \in N$ и $m \in M$ положим $mn = \varphi(m \otimes n)$ и $nm = \psi(n \otimes m)$. Пусть гомоморфизмы φ и ψ таковы, что выполняются законы ассоциативности:

$$(mn)m' = m(nm'), \quad (nm)n' = n(mn'), \quad m, m' \in M, \quad n, n' \in N.$$

Пусть

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \mid r \in R, s \in S, m \in M, n \in N \right\}.$$

Можно проверить, что относительно обычного сложения и умножения матриц K образует ассоциативное кольцо, называемое *кольцом обобщенных матриц порядка 2*.

В дальнейшем мы будем использовать следующее общепринятое обозначение для подмножеств кольца K . Подмножество L кольца K

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \mid r \in L_R, s \in L_S, m \in L_M, n \in L_N \right\}$$

будем также обозначать $\begin{pmatrix} L_R & L_M \\ L_N & L_S \end{pmatrix}$.

Пусть $I \subset R$, $J \subset S$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} M(I) &= \{m \in M \mid mN \subset I\}, & M(J) &= \{m \in M \mid Nm \subset J\}, \\ N(I) &= \{n \in N \mid Mn \subset I\}, & N(J) &= \{n \in N \mid nM \subset J\}. \end{aligned}$$

Под IM будем понимать подбимодуль бимодуля M , порожденный множеством $\{\rho m \mid m \in M, \rho \in I\}$. Аналогично можно определить подбимодули $MJ \subset M$, $NI \subset N$ и $JN \subset N$.

Букву K зафиксируем для обозначения кольца: $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$; I будет обозначать идеал кольца R , J – идеал кольца S . Начнем рассмотрение с указания способа построения односторонних идеалов кольца K по односторонним идеалам колец R и S .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если I – правый идеал кольца R , J – правый идеал кольца S , то*

$$K^r(I, J) = \begin{pmatrix} I & M(I) \\ N(J) & J \end{pmatrix}, \quad K_r(I, J) = \begin{pmatrix} I & IM \\ JN & J \end{pmatrix}$$

– *правые идеалы кольца K .*

Если I – левый идеал кольца R , J – левый идеал кольца S , то

$$K^l(I, J) = \begin{pmatrix} I & M(J) \\ N(I) & J \end{pmatrix}, \quad K_l(I, J) = \begin{pmatrix} I & MJ \\ NI & J \end{pmatrix}$$

– *левые идеалы кольца K .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся доказательством первого утверждения. Второе утверждение доказывается аналогично. Очевидно, что в условиях предложения $M(I)$ и $N(J)$ будут подгруппами в соответствующих группах. Следовательно, $K^r(I, J)$ будет подгруппой аддитивной группы кольца K . Покажем замкнутость $K^r(I, J)$ относительно умножения на элементы кольца K справа. Пусть

$$\begin{pmatrix} \rho & \mu \\ \nu & \sigma \end{pmatrix} \in K^r(I, J), \quad \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \in K.$$

Рассмотрим произведение этих матриц

$$\begin{pmatrix} \rho r + \mu n & \rho m + \mu s \\ \nu r + \sigma n & \nu m + \sigma s \end{pmatrix}.$$

Так как I и J – правые идеалы, то $\rho r \in I$ и $\sigma s \in J$. Из определений $M(I)$ и $N(J)$ непосредственно следует, что $\mu n \in I$ и $\nu m \in J$. Пусть $y \in N$. Тогда $(\rho m)y = \rho(my) \in I$, так как $my \in R$, а $\rho \in I$; $(\mu s)y = \mu(sy) \in I$, так как $sy \in N$, а $\mu \in M(I)$. Пусть далее $x \in M$. Тогда $(\nu r)x = \nu(rx) \in J$, так как $rx \in M$, а $\nu \in N(J)$; $(\sigma n)x = \sigma(nx) \in J$, так как $nx \in S$, а $\sigma \in J$. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} \rho & \mu \\ \nu & \sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \in K^r(I, J)$$

и, следовательно, $K^r(I, J)$ – правый идеал кольца K .

По построению IM и JN – подбимодули бимодулей M и N соответственно. Поэтому достаточно проверить замкнутость $K_r(I, J)$ относительно умножения на элементы кольца K справа. Пусть произведение $\begin{pmatrix} \rho r + \mu n & \rho m + \mu s \\ \nu r + \sigma n & \nu m + \sigma s \end{pmatrix}$ вычислено для матрицы $\begin{pmatrix} \rho & \mu \\ \nu & \sigma \end{pmatrix} \in K_r(I, J)$, а $\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}$, как и раньше, – произвольная матрица из кольца K . Очевидно, $\rho r \in I$ и $\sigma s \in J$. Так как $\mu \in IM$, то

$$\mu = \rho_1 m_1 + \dots + \rho_k m_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \rho_i \in I, \quad m_i \in M, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Тогда

$$\mu n = (\rho_1 m_1 + \dots + \rho_k m_k)n = \rho_1(m_1 n) + \dots + \rho_k(m_k n) \in I.$$

Ясно, что $\rho m \in IM$, а используя представление $\mu = \rho_1 m_1 + \dots + \rho_k m_k$, легко убедиться, что $\mu s \in IM$. Так как $\nu \in JN$, то его можно представить в виде $\nu = \sigma_1 n_1 + \dots + \sigma_l n_l$, где $l \in \mathbb{N}$, $\sigma_i \in J$, $n_i \in N$, $i = 1, 2, \dots, l$. Тогда

$$\nu r = (\sigma_1 n_1 + \dots + \sigma_l n_l)r = \sigma_1(n_1 r) + \dots + \sigma_l(n_l r) \in JN.$$

Используя равенство $\nu = \sigma_1 n_1 + \dots + \sigma_l n_l$, легко получить, что $\nu m \in J$. Тем самым, доказано, что

$$\begin{pmatrix} \rho r + \mu n & \rho m + \mu s \\ \nu r + \sigma n & \nu m + \sigma s \end{pmatrix} \in K_r(I, J),$$

откуда следует, что $K_r(I, J)$ – правый идеал кольца K .

Чтобы упорядочить ссылки, сформулируем следующую очевидную лемму.

ЛЕММА 2. Если $\begin{pmatrix} I & M_{IJ} \\ N_{IJ} & J \end{pmatrix}$ – левый (правый) идеал кольца K , то I – левый (правый) идеал кольца R , J – левый (правый) идеал кольца S , M_{IJ} – подмодуль модуля M_S (модуля ${}_R M$), N_{IJ} – подмодуль модуля ${}_S N$ (модуля N_R). Если $\begin{pmatrix} I & M_{IJ} \\ N_{IJ} & J \end{pmatrix}$ – двусторонний идеал кольца K , то I – двусторонний идеал кольца R , J – двусторонний идеал кольца S , M_{IJ} – подбимодуль бимодуля ${}_R M_S$, N_{IJ} – подбимодуль бимодуля ${}_S N_R$.

Первое предложение утверждает, что по паре односторонних идеалов I и J колец R и S соответственно можно построить идеал кольца K . Возникает естественный вопрос о связи (в случае их существования) других идеалов кольца K ,

имеющих на главной диагонали идеалы I и J , с идеалами, указанными в предложении. Оказывается, что построенные идеалы являются границами, между которыми лежат все остальные идеалы кольца K , имеющие на главной диагонали идеалы I и J .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 1) Пусть I – левый (правый) идеал кольца R , J – левый (правый) идеал кольца S . Тогда если $\begin{pmatrix} I & M_{IJ} \\ N_{IJ} & J \end{pmatrix}$ – левый (правый) идеал кольца K , то

$$\begin{aligned} NI \subset N_{IJ} \subset N(I), \quad MJ \subset M_{IJ} \subset M(J) \\ (JN \subset N_{IJ} \subset N(J), \quad IM \subset M_{IJ} \subset M(I)). \end{aligned}$$

2) Пусть I – идеал кольца R , J – идеал кольца S . Тогда если $\begin{pmatrix} I & M_{IJ} \\ N_{IJ} & J \end{pmatrix}$ – идеал кольца K , то

$$JN + NI \subset N_{IJ} \subset N(I) \cap N(J), \quad IM + MJ \subset M_{IJ} \subset M(I) \cap M(J).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся рассмотрением п. 2). Пусть

$$\begin{pmatrix} \rho & \mu \\ \nu & \sigma \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} I & M_{IJ} \\ N_{IJ} & J \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \in K.$$

Так как $\begin{pmatrix} I & M_{IJ} \\ N_{IJ} & J \end{pmatrix}$ – идеал кольца K , то

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \rho & \mu \\ \nu & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \rho r + \mu n & \rho m + \mu s \\ \nu r + \sigma n & \nu m + \sigma s \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} I & M_{IJ} \\ N_{IJ} & J \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & \mu \\ \nu & \sigma \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r\rho + m\nu & r\mu + m\sigma \\ n\rho + s\nu & n\mu + s\sigma \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} I & M_{IJ} \\ N_{IJ} & J \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из первого включения находим, что

$$\mu \in M(I), \quad \nu \in N(J), \quad IM \subset M_{IJ}, \quad JN \subset N_{IJ},$$

а из второго находим, что

$$\mu \in M(J), \quad \nu \in N(I), \quad MJ \subset M_{IJ}, \quad NI \subset N_{IJ}.$$

Таким образом, предложение доказано.

Нетрудно убедиться, что каждый двусторонний идеал кольца K имеет вид $\begin{pmatrix} I & M_{IJ} \\ N_{IJ} & J \end{pmatrix}$, где согласно лемме 2 I – двусторонний идеал кольца R , J – двусторонний идеал кольца S , M_{IJ} – подбимодуль бимодуля ${}_R M_S$, а N_{IJ} – подбимодуль бимодуля ${}_S N_R$. Естественным образом возникает вопрос: когда пара идеалов I и J колец R и S стоит на главной диагонали некоторого идеала кольца K ? В общем случае по произвольной паре двусторонних идеалов I и J колец R и S соответственно нельзя построить двусторонний идеал кольца K , имеющих идеалы I и J на главной диагонали. В качестве простейшего примера можно взять кольцо R_2 “обыкновенных” матриц второго порядка над кольцом R . Как известно, решетка двусторонних идеалов кольца R_2 естественным

образом изоморфна решетке идеалов кольца R . Иными словами, каждый идеал такого кольца имеет вид $\begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}$ для некоторого идеала I кольца R . Следовательно, пара идеалов I, J кольца R стоит на главной диагонали некоторого идеала кольца R_2 в точности тогда, когда $I = J$. В общем случае ответ на поставленный выше вопрос дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть I – идеал кольца R , J – идеал кольца S . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) существуют такие подмножества $M_{IJ} \subset M, N_{IJ} \subset N$, что $\begin{pmatrix} I & M_{IJ} \\ N_{IJ} & J \end{pmatrix}$ – идеал кольца K ;
- 2) $\begin{pmatrix} I & M(I) \cap M(J) \\ N(I) \cap N(J) & J \end{pmatrix}$ – идеал кольца K ;
- 3) $\begin{pmatrix} I & IM + MJ \\ NI + JN & J \end{pmatrix}$ – идеал кольца K ;
- 4) $NIM \subset J$ и $MJN \subset I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, из 2) следует 1) и из 3) следует 1). Докажем, что из 1) следует 4). В силу того, что $\begin{pmatrix} I & M_{IJ} \\ N_{IJ} & J \end{pmatrix}$ – идеал кольца K , для любых матриц

$$\begin{pmatrix} \rho & \mu \\ \nu & \sigma \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} I & M_{IJ} \\ N_{IJ} & J \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \in K$$

матрицы

$$\begin{pmatrix} \rho r + \mu n & \rho m + \mu s \\ \nu r + \sigma n & \nu m + \sigma s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & \mu \\ \nu & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} r\rho + m\nu & r\mu + m\sigma \\ n\rho + s\nu & n\mu + s\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & \mu \\ \nu & \sigma \end{pmatrix}$$

принадлежат $\begin{pmatrix} I & M_{IJ} \\ N_{IJ} & J \end{pmatrix}$. По лемме 2, примененной к первой матрице, $\rho m \in M(J)$, откуда при любом $n \in N$ $n\rho m \in J$, что дает включение $NIM \subset J$. Применяя лемму 2 ко второй матрице, находим $\sigma n \in N(I)$, откуда при любом $m \in M$ $m\sigma n \in J$, что дает включение $MJN \subset I$.

Докажем, что из 4) следует 2). Покажем, что $\begin{pmatrix} I & M(I) \cap M(J) \\ N(I) \cap N(J) & J \end{pmatrix}$ будет левым идеалом кольца K . Для этого рассмотрим произведение матриц

$$\begin{pmatrix} r\rho + m\nu & r\mu + m\sigma \\ n\rho + s\nu & n\mu + s\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & \mu \\ \nu & \sigma \end{pmatrix}$$

для произвольных матриц

$$\begin{pmatrix} \rho & \mu \\ \nu & \sigma \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} I & M(I) \cap M(J) \\ N(I) \cap N(J) & J \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \in K.$$

Очевидно, $r\rho + m\nu \in I$ и $n\mu + s\sigma \in J$. Пусть далее $x \in M, y \in N; r\mu \in M(I)$, так как $(r\mu)y = r(\mu y) \in I$, и $r\mu \in M(J)$, так как $y(r\mu) = (yr)\mu \in I$, в силу того, что $yr \in N$. Далее, $m\sigma \in M(I)$, так как $(m\sigma)y \in MJN \subset I$, и $m\sigma \in M(J)$, так как $y(m\sigma) = (ym)\sigma \in J$. Таким образом,

$$r\mu + m\sigma \in M(I) \cap M(J).$$

Для элемента в нижнем левом углу матрицы-произведения имеем $n\rho \in N(I)$, так как $x(n\rho) = (xn)\rho \in I$, и $(n\rho) \in N(J)$, так как $(n\rho)x \in NIM \subset J$. Наконец,

$s\nu \in N(I)$, так как $x(s\nu) = (xs)\nu \in I$, и $s\nu \in N(J)$, так как $(s\nu)x = s(\nu x) \in J$. Таким образом,

$$n\rho + s\nu \in N(I) \cap N(J).$$

Аналогично доказывается, что $\left(\begin{smallmatrix} I \\ N(I) \cap N(J) \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} M(I) \cap M(J) \\ J \end{smallmatrix} \right)$ будет правым идеалом кольца K .

Докажем, что 4) влечет 3). Снова ограничимся доказательством того, что $\left(\begin{smallmatrix} I \\ NI+JN \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} IM+MJ \\ J \end{smallmatrix} \right)$ – левый идеал кольца K . Возьмем произведение

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & \mu \\ \nu & \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\rho + m\nu & r\mu + m\sigma \\ n\rho + s\nu & n\mu + s\sigma \end{pmatrix}$$

матрицы $\begin{pmatrix} \rho & \mu \\ \nu & \sigma \end{pmatrix} \in \left(\begin{smallmatrix} I \\ NI+JN \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} IM+MJ \\ J \end{smallmatrix} \right)$ на матрицу $\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \in K$. Элементы μ и ν можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mu &= \rho_1 m_1 + \dots + \rho_k m_k + m_{k+1} \sigma_{k+1} + \dots + m_q \sigma_q, \\ \nu &= n_1 \rho'_1 + \dots + n_l \rho'_l + \sigma'_{l+1} n_{l+1} + \dots + \sigma'_p n_p, \end{aligned}$$

где $\rho_i, \rho'_i \in I$, $\sigma_i, \sigma'_i \in J$, $m_i \in M$, $n_i \in N$. Используя эту запись и условие 4), легко показать, что рассматриваемое произведение матриц принадлежит $\left(\begin{smallmatrix} I \\ NI+JN \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} IM+MJ \\ J \end{smallmatrix} \right)$. Рассмотрим, например, элемент $m\nu$. Имеем

$$\begin{aligned} m\nu &= m(n_1 \rho'_1 + \dots + n_l \rho'_l + \sigma'_{l+1} n_{l+1} + \dots + \sigma'_p n_p) \\ &= (mn_1) \rho'_1 + \dots + (mn_l) \rho'_l + m\sigma'_{l+1} n_{l+1} + \dots + m\sigma'_p n_p. \end{aligned}$$

Так как I – идеал в кольце K , то первые l слагаемых будут элементами I , а так как $MJN \subset I$, то и последние $p - l$ слагаемых будут принадлежать I . Таким образом, 3) доказано. Теорема доказана.

Полученные результаты можно сформулировать в терминах решеток идеалов. Мы не приводим определений и результатов из теории решеток, которые будем использовать, так как все они являются стандартными и содержатся в первой главе книги Гретцера [8]. Хорошо известно, что множества всех левых, всех правых и всех двусторонних идеалов произвольного кольца T являются полными дедекиндовыми решетками. Обозначим их $\mathcal{L}(T)$, $\mathcal{R}(T)$ и $\mathcal{D}(T)$ соответственно. На каждой из решеток $\mathcal{L}(K)$, $\mathcal{R}(K)$ и $\mathcal{D}(K)$ определим отношение Δ следующим образом. Для идеала L (одно- или двустороннего) кольца K обозначим

$$\begin{aligned} I(L) &= \{x \in R \mid \exists A = (a_{ij}) \in L : a_{11} = x\}, \\ J(L) &= \{y \in S \mid \exists A = (a_{ij}) \in L : a_{22} = y\}. \end{aligned}$$

Для идеалов L_1 и L_2 (одно- или двусторонних) положим $L_1 \Delta L_2$ тогда и только тогда, когда $I(L_1) = I(L_2)$ и $J(L_1) = J(L_2)$. Если

$$L_1 = \begin{pmatrix} I_1 & M_1 \\ N_1 & J_1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} I_2 & M_2 \\ N_2 & J_2 \end{pmatrix},$$

то $L_1 \Delta L_2$ равносильно тому, что $I_1 = I_2$ и $J_1 = J_2$. Можно доказать, что Δ будет конгруэнтностью на каждой из решеток $\mathcal{L}(T)$, $\mathcal{R}(T)$ и $\mathcal{D}(T)$. Декартовы

произведения $\mathcal{L}(R) \times \mathcal{L}(S)$, $\mathcal{R}(R) \times \mathcal{R}(S)$ и $\mathcal{D}(R) \times \mathcal{D}(S)$ будем считать решетками с “покоординатными” операциями. В этих обозначениях справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. 1. Решетка $\mathcal{L}(R) \times \mathcal{L}(S)$ (соответственно $\mathcal{R}(R) \times \mathcal{R}(S)$) изоморфна факторрешетке $\mathcal{L}(K)/\Delta$ (соответственно $\mathcal{R}(K)/\Delta$).

2. В решетке $\mathcal{D}(R) \times \mathcal{D}(S)$ подмножество $\mathcal{D}(R, S)$ пар идеалов, связанных соотношениями п. 4) теоремы 4, является полной подрешеткой, изоморфной факторрешетке $\mathcal{D}(K)/\Delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Рассмотрим случай левых идеалов. Пусть L – левый идеал кольца K . Учитывая, что $I(L)$ и $J(L)$ будут левыми идеалами колец R и S соответственно, можно определить отображение $L \mapsto (I(L), J(L))$ решетки $\mathcal{L}(K)$ в решетку $\mathcal{L}(R) \times \mathcal{L}(S)$, которое в силу предложения 1 будет сюръективным. Кроме того, легко проверить, что данное отображение сохраняет решеточные операции, т.е. является гомоморфизмом решетки $\mathcal{L}(K)$ на решетку $\mathcal{L}(R) \times \mathcal{L}(S)$. Введенная выше конгруэнция Δ , очевидно, является ядром построенного гомоморфизма. Применяя теперь теорему о гомоморфизме решеток, получаем изоморфизм $\mathcal{L}(K)/\Delta \cong \mathcal{L}(R) \times \mathcal{L}(S)$.

2. Покажем, что $\mathcal{D}(R, S)$ – полная подрешетка решетки $\mathcal{D}(R) \times \mathcal{D}(S)$. Пусть для пар идеалов $\{(I_t, J_t)\}_{t \in T}$ выполнены соотношения $NI_tM \subset J_t$ и $MJ_tN \subset I_t$, $t \in T$. Пусть

$$x = n(\rho_{t_1} + \dots + \rho_{t_k})m \in N\left(\sum_{t \in T} I_t\right)M, \quad \rho_{t_i} \in I_{t_i}, \quad i = \overline{1, k}.$$

Тогда $x = n\rho_{t_1}m + \dots + n\rho_{t_k}m$, и так как $n\rho_{t_i}m \in J_{t_i}$, $i = \overline{1, k}$, то $x \in \sum_{t \in T} J_t$. Аналогично получается включение

$$M\left(\sum_{t \in T} J_t\right)N \subset \sum_{t \in T} I_t.$$

Таким образом,

$$\left(\sum_{t \in T} I_t, \sum_{t \in T} J_t\right) \in \mathcal{D}(R, S).$$

Также легко проверить, что

$$\left(\bigcap_{t \in T} I_t, \bigcap_{t \in T} J_t\right) \in \mathcal{D}(R, S).$$

Мы получили, что $\mathcal{D}(R, S)$ – действительно полная подрешетка решетки $\mathcal{D}(R) \times \mathcal{D}(S)$.

В силу теоремы 4 сужение отображения, построенного в п. 1 доказательства, на решетку $\mathcal{D}(K)$ будет гомоморфизмом решетки $\mathcal{D}(K)$ на решетку $\mathcal{D}(R, S)$, ядро которого совпадает с Δ . Снова применяя теорему о гомоморфизмах решеток, получаем изоморфизм $\mathcal{D}(R, S) \cong \mathcal{D}(K)/\Delta$. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] А. И. Кашу, *Радикалы и кручения в модулях*, Штеница, Кишинев, 1983.
- [2] К. Фейс, *Алгебра: кольца, модули и категории*, т. 1, Мир, М., 1977; пер. с англ.: С. Faith, *Algebra: rings, modules and categories*, v. I, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973.
- [3] A. Haghany, K. Varadarajan, “Study of formal triangular matrix rings”, *Comm. Algebra*, **27**:11 (1999), 5507–5525.
- [4] A. Haghany, K. Varadarajan, “Study of modules over formal triangular matrix rings”, *J. Pure Appl. Algebra*, **147**:1 (2000), 41–58.
- [5] A. Haghany, “Injectivity conditions over a formal triangular matrix ring”, *Arch. Math. (Basel)*, **78**:4 (2002), 268–274.
- [6] Е. Ю. Ярдиков, “Простые модули над кольцами обобщенных матриц”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **13**:3 (2007), 245–247; англ. пер.: E. Yu. Yardykov, “Simple modules over generalized matrix rings”, *J. Math. Sci.*, **154**:3 (2008), 446–447.
- [7] П. А. Крылов, “Об изоморфизме колец обобщенных матриц”, *Алгебра и логика*, **47**:4 (2008), 456–463; англ. пер.: P. A. Krylov, “Isomorphism of generalized matrix rings”, *Algebra and Logic*, **47**:4 (2008), 258–262.
- [8] Г. Гретцер, *Общая теория решеток*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: G. Grätzer, *General lattice theory*, Pure Appl. Math., **75**, Academic Press, New York–London, 1978.

А. В. Буданов (A. V. Budanov)
Томский государственный университет
E-mail: alexandr**bud@mail.ru**

Поступила в редакцию
12.10.2009 и 15.07.2010