Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Лебедев, Количественные оценки в теоремах типа теоремы Берлинга–Хелсона, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 12, 103–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7639>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:25:18

УДК 517.51

В. В. Лебедев

Количественные оценки в теоремах типа теоремы Берлинга–Хелсона

Рассматриваются пространства $A_p(\mathbb{T})$, состоящие из функций f на окружности $\mathbb{T}$ таких, что последовательность коэффициентов Фурье $\hat{f} = \{\hat{f}(k), k \in \mathbb{Z}\}$ принадлежит l^p , $1 \leq p < 2$. Норма в $A_p(\mathbb{T})$ определяется соотношением $\|f\|_{A_p} = \|\hat{f}\|_{l^p}$. Исследуется порядок роста норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$, для C^1 -гладких вещественных функций φ на $\mathbb{T}$. Полученные результаты имеют естественные приложения к задаче о замене переменной в пространствах $A_p(\mathbb{T})$.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: гармонический анализ, ряды Фурье, теорема Берлинга–Хелсона, операторы суперпозиции.

Введение

Рассмотрим ряды Фурье

$$f(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikt}$$

(интегрируемых) функций f на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ($\mathbb{R}$ – вещественная прямая, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел).

Пусть $A_1(\mathbb{T})$ – пространство непрерывных функций f на $\mathbb{T}$ таких, что последовательность коэффициентов Фурье $\hat{f} = \{\hat{f}(k), k \in \mathbb{Z}\}$ принадлежит l^1 . Пусть $A_p(\mathbb{T})$, $1 < p \leq 2$, – пространство интегрируемых функций f на $\mathbb{T}$ таких, что $\hat{f}$ принадлежит l^p . Снабженные естественными нормами

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T})} = \|\hat{f}\|_{l_p} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^p \right)^{1/p}$$

пространства $A_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq 2$, являются банаховыми пространствами. Пространство $A(\mathbb{T}) = A_1(\mathbb{T})$ является банаховой алгеброй (с обычным умножением функций).

Пусть имеется отображение окружности в себя, т.е. функция $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) \pmod{2\pi}$. Согласно известной теореме Берлинга–Хелсона [1] (см. также [2], [3]) если $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$, то по mod 2π функция φ линейна (аффинна) с целым угловым коэффициентом: $\varphi(t) = mt + t_0 \pmod{2\pi}$, $m \in \mathbb{Z}$. Эта теорема дает решение проблемы Леви об описании эндоморфизмов алгебры $A(\mathbb{T})$: все эти эндоморфизмы тривиальны, т.е.

имеют вид $f(t) \rightarrow f(mt + t_0)$. Другими словами, лишь тривиальные замены переменной допустимы в $A(\mathbb{T})$. Отметим также еще одну версию теоремы Берлинга–Хелсона: если U – ограниченный, коммутирующий со сдвигами оператор в l^1 такой, что $\|U^n\|_{l^1 \rightarrow l^1} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$, то $U = \xi S$, где ξ – постоянная, $|\xi| = 1$, и S – оператор сдвига.

Вместе с тем, хотя теорема Берлинга–Хелсона устанавливает неограниченность норм $\|e^{in\varphi}\|_A$ для нелинейных отображений $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, характер роста этих норм при $|n| \rightarrow \infty$ во многом неясен. То же самое касается поведения норм $\|e^{in\varphi}\|_{A_p}$, $p > 1$.

Пусть $C^\nu(\mathbb{T})$ – класс (комплекснозначных) функций на $\mathbb{T}$, имеющих непрерывную производную порядка ν . Имеем $C^1(\mathbb{T}) \subseteq A(\mathbb{T}) \subseteq A_p(\mathbb{T})$.

В настоящей работе мы, в основном, будем рассматривать вещественные C^1 -гладкие функции φ на $\mathbb{T}$ и изучать рост норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Интерес, разумеется, представляют непостоянные функции φ . Соответствующие результаты о поведении экспонент $e^{in\varphi}$ для нелинейных отображений $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ и целых частот n будут получены в качестве простых следствий.

Нетрудно показать, что для любой вещественной функции $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$ (и, более того, для любой абсолютно непрерывной вещественной функции φ с производной из $L^2(\mathbb{T})$) при $1 \leq p < 2$ справедлива оценка

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(|\lambda|^{1/p-1/2}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

(см. [2; гл. VI, § 3] в случае $p = 1$; для $1 < p < 2$ оценка немедленно получается интерполяцией между l^1 и l^2).

С другой стороны, давно известны оценки снизу норм экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ в A_p для функций φ класса C^2 . Предположим, что $\varphi \in C^2(\mathbb{T})$ – вещественная непостоянная функция и $1 \leq p < 2$. Тогда

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \geq c|\lambda|^{1/p-1/2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где $c = c(p, \varphi) > 0$ не зависит от λ . При $p = 1$ эта оценка неявно содержится в работе З. Л. Лейбензона [4] и в явном виде была получена Ж.-П. Каханом в [5] с использованием метода Лейбензона. В общем случае оценка (2) получена (с использованием того же метода) Л. Алпаром в [6]. Простое и короткое доказательство для случая $p = 1$ имеется в [2; гл. VI, § 3], а для общего случая – в [7].

Таким образом, если $\varphi \in C^2(\mathbb{T})$ – вещественная функция, $\varphi \neq \text{const}$, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \simeq |\lambda|^{1/p-1/2}$$

при всех p , $1 \leq p < 2$. В частности, $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A \simeq \sqrt{|\lambda|}$. (Знак $\simeq$ означает, что при всех достаточно больших $|\lambda|$ отношение соответствующих величин заключено между двумя положительными константами).

Отметим, что доказательство оценки Лейбензона–Кахана–Алпара (2) основано на второй части леммы ван дер Корпута (см. [8; гл. V, лемма 4.3]) и существенно использует отделенность от нуля кривизны дуги графика функции φ , т.е. условие $|\varphi''(t)| \geq \rho > 0$, $t \in I$, где I – некоторый интервал.

Вообще говоря, нормы $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A$ могут расти довольно медленно. Кахан показал (см. [2; гл. VI, § 2]), что если φ – непрерывная вещественная кусочно линейная функция на $\mathbb{T}$ (т.е. такая функция, что $[0, 2\pi]$ есть объединение конечного числа интервалов, на каждом из которых φ является линейной), $\varphi \neq \text{const}$, то $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A \simeq \log |\lambda|$. Неясно, существуют ли нетривиальные функции φ , дающие рост норм экспонент в $A(\mathbb{T})$ медленнее логарифмического. Кахану принадлежит гипотеза о том, что теорема Берлинга–Хелсона может быть значительно усилена (см. [2], [3]). В частности, им был сформулирован следующий вопрос: верно ли, что если $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A = o(\log |\lambda|)$, то $\varphi = \text{const}$. Нам неизвестно, так ли это даже в предположении, что $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$.

Отметим еще, что для любой кусочно линейной вещественной функции φ на $\mathbb{T}$ имеем $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p} = O(1)$ при всех $p > 1$ (см. [7]).

Укажем известные результаты в C^1 -гладком случае (помимо оценки (1)).

В работе [7] (совместная работа автора и А. М. Олевского) построена вещественная функция $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$, $\varphi \neq \text{const}$, такая, что $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p} = O(1)$ при всех $p > 1$. Кроме того, эта функция нигде не линейна, т.е. не является линейной ни на каком интервале (и, таким образом, в определенном смысле, существенно отличается от кусочно линейных функций).

Автор настоящей статьи показал в [9], что для функций $\varphi \in C^1$ нормы $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A$ могут расти довольно медленно, а именно, если $\gamma(\lambda) \geq 0$ и $\gamma(\lambda) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, то существует нигде не линейная вещественная функция $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$ такая, что

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_A = O(\gamma(|\lambda|) \log |\lambda|).$$

Таким образом, случай C^1 -гладкой фазы φ существенно отличается от C^2 -гладкого случая.

Насколько нам известно, единственная, ранее полученная оценка снизу норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A$ в случае, когда $\varphi \in C^1$, но дважды дифференцируемость функции φ не предполагается, принадлежит М. Н. Леблану (см. [10]): если вещественная функция $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$ непостоянна и ее производная φ' удовлетворяет условию Липшица с показателем α , $0 < \alpha \leq 1$, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_A \geq c \frac{|\lambda|^{\alpha/(1+\alpha)}}{(\log |\lambda|)^2}, \quad |\lambda| \geq 2. \quad (3)$$

Изложим кратко результаты настоящей работы. В § 1 доказана теорема 1, в которой даны оценки снизу норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ для C^1 -гладких вещественных функций φ на $\mathbb{T}$. В § 2 получена теорема 2, где показано, что оценки теоремы 1 близки к окончательным, а в некоторых случаях являются окончательными. Здесь, во введении, опуская формулировки теорем, отметим лишь их следствия.

Из теоремы 1 вытекает, что если вещественная функция $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$ непостоянна и φ' удовлетворяет условию Липшица с показателем α , $0 < \alpha \leq 1$, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p} \geq c_p |\lambda|^{1/p-1/(1+\alpha)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

при всех p , $1 \leq p < 1 + \alpha$ (см. следствие 1). В частности, полагая здесь $p = 1$, получаем более сильный результат, чем оценка Леблана (3), а именно,

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_A \geq c|\lambda|^{\alpha/(1+\alpha)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Для $\varphi \in C^2$ имеем $\alpha = 1$ и из (4) получаем оценку Лейбензона–Кахана–Алпара (2).

Отметим, что оценка Лейбензона–Кахана–Алпара и оценка Леблана имеют локальный характер; грубо говоря, они остаются в силе, если предположить, что φ нелинейна на некотором интервале и имеет на этом интервале требуемую гладкость. Наши оценки снизу также носят локальный характер (см. теорему 1').

Частным случаем теоремы 2 является следующее утверждение: при каждом α , $0 < \alpha < 1$, существует нигде не линейная вещественная функция $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$ с производной φ' , удовлетворяющей условию Липшица порядка α , такая, что

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_A = O(|\lambda|^{\alpha/(1+\alpha)}(\log |\lambda|)^{(1-\alpha)/(1+\alpha)}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

(см. следствие 2). Для той же функции φ имеем

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p} \simeq |\lambda|^{1/p-1/(1+\alpha)}, \quad \text{если } 1 < p < 1 + \alpha,$$

а также

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p} \simeq 1, \quad \text{если } 1 + \alpha < p < 2.$$

Кроме того,

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p} = O((\log |\lambda|)^{1/p}) \quad \text{при } p = 1 + \alpha.$$

Из оценки (4) и очевидной оценки

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \geq \|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_2(\mathbb{T})} = \|e^{i\lambda\varphi}\|_{L^2(\mathbb{T})} = 1, \quad 1 \leq p \leq 2, \quad (5)$$

следует, что построенная нами функция φ дает минимально возможный рост норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ при $1 < p < 2$, $p \neq 1 + \alpha$.

Отметим еще, что из теоремы 2 немедленно вытекает указанный выше результат автора о существовании нетривиальной C^1 -гладкой функции φ с крайне медленным (как угодно близким к логарифмическому) ростом норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A$ (см. следствие 3).

В §3 рассмотрены C^1 -гладкие отображения окружности в себя и даны соответствующие версии результатов, полученных в §§1, 2. Эти версии имеют естественные приложения к изучению операторов замены переменной (операторов суперпозиции) $f \rightarrow f \circ \varphi$ в пространствах A_p . В частности, указана гладкость, которой может обладать нелинейное отображение $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ такое, что $f \circ \varphi \in \bigcap_{p>1} A_p$ для любой функции $f \in A$.

Через $\omega(I, g, \delta)$ будем обозначать модуль непрерывности функции g на интервале $I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\omega(I, g, \delta) = \sup_{\substack{|t_1 - t_2| \leq \delta \\ t_1, t_2 \in I}} |g(t_1) - g(t_2)|, \quad \delta \geq 0.$$

Если $I = \mathbb{R}$, будем писать просто $\omega(g, \delta)$. Класс $\text{Lip}_\omega(I)$ состоит из всех функций g на I таких, что $\omega(I, g, \delta) = O(\omega(\delta))$, $\delta \rightarrow +0$, где $\omega(\delta)$ – заданная непрерывная неубывающая функция на $[0, +\infty)$, $\omega(0) = 0$. Класс $C^{1,\omega}(I)$ состоит из функций g на I с производной $g' \in \text{Lip}_\omega(I)$. Класс $C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ состоит из 2π -периодических функций, принадлежащих $C^{1,\omega}(\mathbb{R})$. Для $0 < \alpha \leq 1$ будем писать $C^{1,\alpha}$ вместо C^{1,δ^α} . Класс $C^1(I)$ состоит из непрерывно дифференцируемых функций на I . Для произвольного множества $E \subseteq \mathbb{T}$ через 1_E обозначим его характеристическую функцию: $1_E(t) = 1$ при $t \in E$, $1_E(t) = 0$ при $t \in \mathbb{T} \setminus E$ и (если E измеримо) через $|E|$ – его (лебегову) меру. Если f и E – соответственно функция на $\mathbb{T}$ и множество на $\mathbb{T}$, то будем писать $\text{supp } f \subseteq E$, если $f(t) = 0$ для почти всех $t \in \mathbb{T} \setminus E$. Те же обозначения используются для множеств на $[0, 2\pi]$ или на $\mathbb{R}$ и функций, заданных на $[0, 2\pi]$ или на $\mathbb{R}$. Стандартным образом мы отождествляем интегрируемые функции на $[0, 2\pi]$ с интегрируемыми функциями на $\mathbb{T}$. Через c , c_1 , c_p , $c_{p,1}$, $c(p)$ и т.д. будем обозначать различные положительные константы, зависящие, может быть, только от p и φ .

§ 1. Оценки снизу

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq p < 2$. Пусть φ – вещественная функция на $\mathbb{T}$. Предположим, что φ непостоянна и $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$. Тогда

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \geq c|\lambda|^{1/p}\chi^{-1}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| \geq 1,$$

где χ^{-1} – функция, обратная к $\chi(\delta) = \delta\omega(\delta)$, и $c = c(p, \varphi) > 0$ не зависит от λ .

Разумеется, ввиду очевидной оценки (5) оценка теоремы 1 содержательна лишь в случае, когда ее правая часть неограниченно растет с ростом λ . (Это всегда имеет место при $p = 1$.)

Из теоремы 1 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $0 < \alpha \leq 1$. Если φ – вещественная непостоянная функция на $\mathbb{T}$ и $\varphi \in C^{1,\alpha}(\mathbb{T})$, то при всех p , $1 \leq p < 1 + \alpha$, имеем

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \geq c_p|\lambda|^{1/p-1/(1+\alpha)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

В частности, $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \geq c|\lambda|^{\alpha/(1+\alpha)}$.

Как мы отметили во введении, частным случаем следствия 1 является оценка Лейбензона–Кахана–Алпара. Оценка следствия 1 при $p = 1$ является улучшением результата Леблана.

Приведенная ниже теорема 1' является локальным вариантом теоремы 1.

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – интервал длины, меньшей 2π . Будем говорить, что функция f , заданная на I , принадлежит $A_p(\mathbb{T}, I)$, если существует функция F из $A_p(\mathbb{T})$ такая, что ее сужение $F|_I$ на интервал I совпадает с f . Положим

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T}, I)} = \inf_{F \in A_p(\mathbb{T}), F|_I = f} \|F\|_{A_p(\mathbb{T})}.$$

Ясно, что $A_p(\mathbb{T}, I)$ – банахово пространство, $1 \leq p \leq 2$.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть $1 \leq p < 2$. Пусть φ – вещественная функция на интервале $I \subset \mathbb{R}$, $|I| < 2\pi$. Предположим, что φ нелинейна на I и $\varphi \in C^{1,\omega}(I)$. Тогда

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}, I)} \geq c|\lambda|^{1/p} \chi^{-1}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| \geq 1.$$

Локальный аналог следствия 1 очевиден.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть

$$m = \min_{t \in [0, 2\pi]} \varphi'(t), \quad M = \max_{t \in [0, 2\pi]} \varphi'(t).$$

Поскольку φ непостоянна и всякая непрерывная 2π -периодическая функция, линейная на $[0, 2\pi]$, является постоянной, имеем $m < M$.

Фиксируем $c > 0$ так, чтобы

$$\omega(\varphi', \delta) \leq c\omega(\delta), \quad \delta \geq 0.$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda > 0$ (комплексное сопряжение не меняет норму функций в A_p). Определим $\delta_\lambda > 0$ соотношением

$$\chi(2\delta_\lambda) = \frac{1}{2c\lambda}. \quad (6)$$

При $0 < \varepsilon \leq \pi$ пусть Δ_ε – “треугольная” функция, сосредоточенная на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, т.е. функция на $\mathbb{T}$, заданная следующим образом:

$$\Delta_\varepsilon(t) = \max\left(1 - \frac{|t|}{\varepsilon}, 0\right), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Для произвольного интервала $J \subseteq [0, 2\pi]$ пусть Δ_J означает треугольную функцию, сосредоточенную на J , а именно, $\Delta_J(t) = \Delta_{|J|/2}(t - c_J)$, где c_J – центр интервала J (и $|J|$ – его длина).

ЛЕММА 1. Пусть $\lambda > 0$ достаточно велико. Тогда для любого $k \in \mathbb{Z}$ такого, что $m\lambda < k < M\lambda$, найдется интервал $I_{\lambda,k} \subseteq [0, 2\pi]$ такой, что $|I_{\lambda,k}| = 2\delta_\lambda$ и

$$|(\Delta_{I_{\lambda,k}} e^{i\lambda\varphi})^\wedge(k)| \geq \frac{\delta_\lambda}{4\pi}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать λ столь большим, что

$$2\delta_\lambda < 2\pi \quad (7)$$

и, кроме того,

$$\lambda > \frac{2}{M - m}. \quad (8)$$

Возьмем произвольное $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющее условию $m\lambda < k < M\lambda$ (см. (8)). Мы можем найти точку $t_{\lambda,k}$ в $(0, 2\pi)$ такую, что $\varphi'(t_{\lambda,k}) = k/\lambda$. Существует интервал $I_{\lambda,k} \subseteq [0, 2\pi]$, который содержит точку $t_{\lambda,k}$ и имеет длину $2\delta_\lambda$ (см. (7)). Рассмотрим следующую линейную функцию:

$$\varphi_{\lambda,k}(t) = \varphi(t_{\lambda,k}) + \frac{k}{\lambda}(t - t_{\lambda,k}), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Если $t \in I_{\lambda,k}$, то для некоторой точки θ , лежащей между t и $t_{\lambda,k}$, имеем

$$\varphi(t) - \varphi(t_{\lambda,k}) = \varphi'(\theta)(t - t_{\lambda,k}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi_{\lambda,k}(t)| &= \left| (\varphi(t) - \varphi(t_{\lambda,k})) - \frac{k}{\lambda}(t - t_{\lambda,k}) \right| \\ &= |\varphi'(\theta)(t - t_{\lambda,k}) - \varphi'(t_{\lambda,k})(t - t_{\lambda,k})| = |t - t_{\lambda,k}| |\varphi'(\theta) - \varphi'(t_{\lambda,k})| \\ &\leq 2\delta_\lambda \omega(\varphi', 2\delta_\lambda) \leq 2\delta_\lambda c\omega(2\delta_\lambda) = c\chi(2\delta_\lambda). \end{aligned}$$

Отсюда в силу (6) имеем

$$|e^{i\lambda\varphi(t)} - e^{i\lambda\varphi_{\lambda,k}(t)}| \leq |\lambda\varphi(t) - \lambda\varphi_{\lambda,k}(t)| \leq \lambda c\chi(2\delta_\lambda) = \frac{1}{2}, \quad t \in I_{\lambda,k}. \quad (9)$$

Пользуясь оценкой (9), получаем

$$\begin{aligned} |(\Delta_{I_{\lambda,k}} e^{i\lambda\varphi})^\wedge(k) - (\Delta_{I_{\lambda,k}} e^{i\lambda\varphi_{\lambda,k}})^\wedge(k)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_{I_{\lambda,k}}(t) |e^{i\lambda\varphi(t)} - e^{i\lambda\varphi_{\lambda,k}(t)}| dt \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_{I_{\lambda,k}}(t) dt = \frac{1}{2} \widehat{\Delta_{I_{\lambda,k}}}(0). \end{aligned}$$

Вместе с тем имеем

$$\begin{aligned} |(\Delta_{I_{\lambda,k}} e^{i\lambda\varphi_{\lambda,k}})^\wedge(k)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_{I_{\lambda,k}}(t) e^{i(\lambda\varphi_{\lambda,k}(t) - kt)} dt \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_{I_{\lambda,k}}(t) dt = \widehat{\Delta_{I_{\lambda,k}}}(0) \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$|(\Delta_{I_{\lambda,k}} e^{i\lambda\varphi})^\wedge(k)| \geq \frac{1}{2} \widehat{\Delta_{I_{\lambda,k}}}(0) = \frac{\delta_\lambda}{4\pi}.$$

Лемма доказана.

При каждом $\lambda \in \mathbb{R}$ определим функцию g_λ ее разложением в ряд Фурье:

$$g_\lambda(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k)| e^{ikt}.$$

Очевидно, что $g_\lambda \in L^2(\mathbb{T})$.

Хорошо известно, что $\Delta_\varepsilon \in A(\mathbb{T})$ и коэффициенты Фурье функции Δ_ε неотрицательны¹. Поскольку для произвольного интервала J функция Δ_J получается из $\Delta_{|J|/2}$ сдвигом, имеем $|\widehat{\Delta_J}(k)| = \widehat{\Delta_{|J|/2}}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, из леммы 1 следует, что если λ достаточно велико, то

$$\begin{aligned} \frac{\delta_\lambda}{4\pi} &\leq |(\Delta_{I_{\lambda,k}} e^{i\lambda\varphi})^\wedge(k)| = \left| \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{\Delta_{I_{\lambda,k}}}(\nu) \widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k - \nu) \right| \leq \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\widehat{\Delta_{I_{\lambda,k}}}(\nu)| |\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k - \nu)| \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{\Delta_{\delta_\lambda}}(\nu) \widehat{g_\lambda}(k - \nu) = (\widehat{\Delta_{\delta_\lambda}} \cdot \widehat{g_\lambda})(k), \quad m\lambda < k < M\lambda. \end{aligned} \quad (10)$$

¹Прямое вычисление дает $\widehat{\Delta_\varepsilon}(k) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2(\varepsilon k/2)}{\varepsilon k^2}$, $k \neq 0$, $\widehat{\Delta_\varepsilon}(0) = \frac{\varepsilon}{2\pi}$.

Так как $\|\Delta_\varepsilon\|_A = \sum_k \widehat{\Delta_\varepsilon}(k) = \Delta_\varepsilon(0) = 1$, то для любой функции $f \in A_p(\mathbb{T})$ имеем $\|\Delta_\varepsilon \cdot f\|_{A_p} \leq \|f\|_{A_p}$, $1 \leq p \leq 2$, $0 < \varepsilon \leq \pi$. Поэтому, пользуясь оценкой (10), получаем, что при всех достаточно больших λ

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}(M-m)\lambda\right)^{1/p} \frac{\delta_\lambda}{4\pi} &\leq \left(\sum_{m\lambda < k < M\lambda} \left(\frac{\delta_\lambda}{4\pi}\right)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{m\lambda < k < M\lambda} |(\Delta_{\delta_\lambda} \cdot g_\lambda)^\wedge(k)|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \|\Delta_{\delta_\lambda} \cdot g_\lambda\|_{A_p} \leq \|g_\lambda\|_{A_p} = \|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим теперь, что условие (6) дает

$$1 = 2c\lambda 2\delta_\lambda \omega(2\delta_\lambda) \leq 4c\lambda \delta_\lambda \omega(4\delta_\lambda) \leq \lambda(c+1)4\delta_\lambda \omega((c+1)4\delta_\lambda) = \lambda\chi((c+1)4\delta_\lambda),$$

и, следовательно,

$$\delta_\lambda \geq \frac{1}{4(c+1)} \chi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Подставляя эту оценку в (11), получаем утверждение теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1'. Оно получается очевидной модификацией доказательства теоремы 1, а именно, считая, что I — отрезок, содержащийся в $[0, 2\pi]$ (это не ограничивает общности рассуждений), положим $m = \min_{t \in I} \varphi'(t)$ и $M = \max_{t \in I} \varphi'(t)$. Поскольку φ нелинейна на I , имеем $m < M$. Фиксируем p , $1 \leq p < 2$. При каждом λ фиксируем функцию $F_\lambda \in A_p(\mathbb{T})$, являющуюся 2π -периодическим продолжением функции $e^{i\lambda\varphi}$ с I на $\mathbb{R}$, такую, что

$$\|F_\lambda\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq 2\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}, I)}.$$

В доказательстве теоремы 1 следует заменить $\omega(\varphi', 2\delta_\lambda)$ на $\omega(I, \varphi', 2\delta_\lambda)$ и, считая, что λ достаточно велико, следует заменить соотношение (7) на соотношение $2\delta_\lambda < |I|$. При $m\lambda < k < M\lambda$ точку $t_{\lambda,k}$ с условием $\varphi'(t_{\lambda,k}) = k/\lambda$ выбираем во внутренности отрезка I . Интервал $I_{\lambda,k}$ длиной $2\delta_\lambda$, содержащий $t_{\lambda,k}$, выбираем так, что он содержится в I . Вместо $e^{i\lambda\varphi}$ следует рассмотреть F_λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из следствия 1 и приведенной во введении оценки

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(|\lambda|^{1/p-1/2}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

верной для вещественных функций $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$, вытекает, что для любой вещественной функции $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{T})$, $\varphi \neq \text{const}$, мы имеем

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \simeq |\lambda|^{1/p-1/2}.$$

Таким образом, порядок роста норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ в случае $C^{1,1}$ -гладкой фазы φ такой же, как и в C^2 -гладком случае.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Простая модификация доказательства теорем 1, 1' позволяет получить их аналоги в многомерном случае. Наши результаты о поведении норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}$ для гладких функций φ на торе $\mathbb{T}^m$, $m \geq 2$, будут изложены в другой публикации.

§ 2. Медленный рост норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})}$

В этом параграфе для каждого класса $C^{1,\omega}$ (при некотором простом условии, наложенном на ω) мы построим нетривиальную функцию $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ с медленным ростом норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})}$.

Случай $\omega(\delta) = \delta$ исчерпывается замечанием 1.

Напомним, что мы называем функцию нигде не линейной, если она не является линейной ни на каком интервале.

Как и выше, χ^{-1} – функция, обратная к $\chi(\delta) = \delta\omega(\delta)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\omega(2\delta) < 2\omega(\delta)$ при всех достаточно малых $\delta > 0$. Существует нигде не линейная вещественная функция $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ такая, что:

- (i) $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq c \frac{|\lambda|}{\log |\lambda|} \chi^{-1} \left(\frac{(\log |\lambda|)^2}{|\lambda|} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| \geq 2;$
- (ii) $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_p \left(\int_1^{|\lambda|} \left(\chi^{-1} \left(\frac{1}{\tau} \right) \right)^p d\tau \right)^{1/p}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| \geq 2,$

при всех p , $1 < p < 2$. Положительные константы c, c_p не зависят от λ .

Полагая $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, в теореме 2 и пользуясь следствием 1, а также тривиальной оценкой $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p} \geq 1$, $1 \leq p \leq 2$, немедленно получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $0 < \alpha < 1$. Существует нигде не линейная вещественная функция $\varphi \in C^{1,\alpha}(\mathbb{T})$ такая, что

- (i) $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(|\lambda|^{\alpha/(1+\alpha)} (\log |\lambda|)^{(1-\alpha)/(1+\alpha)});$
- (ii) $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \simeq |\lambda|^{1/p-1/(1+\alpha)} \quad \text{при} \quad 1 < p < 1 + \alpha,$
 $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \simeq 1 \quad \text{при} \quad 1 + \alpha < p < 2,$
 $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O((\log |\lambda|)^{1/p}) \quad \text{при} \quad p = 1 + \alpha.$

Таким образом, при $p \neq 1$ оценка следствия 1 окончательна. Функция $\varphi \in C^{1,\alpha}$ из следствия 2 дает минимально возможный рост норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ при $1 < p < 2$, $p \neq 1 + \alpha$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Неясно, существует ли при $1 < p < 2$ нетривиальная функция $\varphi \in C^{1,p-1}(\mathbb{T})$ такая, что $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(1)$.

Из теоремы 2 следует также отмеченный во введении результат, ранее полученный автором в работе [9], а именно, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\gamma(\lambda) \geq 0$ и $\gamma(\lambda) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Существует нигде не линейная вещественная функция $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$ такая, что

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(\gamma(|\lambda|) \log |\lambda|), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что правая часть оценки (i) в теореме 2 не превосходит $c|\lambda|\chi^{-1}(1/|\lambda|) \log |\lambda|$, и мы можем выбрать ω так, что $|\lambda|\chi^{-1}(1/|\lambda|)$ растет сколь угодно медленно. Следствие доказано.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2, напомним, что, как было отмечено во введении, для кусочно линейных непрерывных функций φ мы имеем $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A = O(\log |\lambda|)$ и $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p} = O(1)$ при $p > 1$, причем логарифмический рост в $A(\mathbb{T})$ является самым медленным из известных. Поэтому если мы хотим получить медленный рост нормы $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ для C^1 -гладкой нетривиальной функции φ , представляется естественным рассмотреть первообразные канторовых лестниц. Эти первообразные, будучи C^1 -гладкими, вместе с тем схожи с кусочно линейными функциями.

С целью сделать доказательство теоремы 2 более прозрачным, мы сначала построим функцию $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$, $\varphi \neq \text{const}$, для которой выполнены оценки (i), (ii) теоремы 2, не требуя нигде нелинейности. При этом мы получим ряд лемм, которые будут использованы далее для построения нигде не линейной функции φ с теми же свойствами.

Подбирая (при необходимости) подходящим образом числа $a, b > 0$ и заменяя $\omega(\delta)$ на $a\omega(b\delta)$ (это приводит лишь к изменению констант c, c_p в оценках (i), (ii) теоремы 2), мы можем считать, что $\omega(2\pi) = 1$ и $\omega(2\delta) < 2\omega(\delta)$ при $0 < \delta \leq 2\pi$.

Определим положительные числа ρ_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, соотношением

$$\omega(\rho_j) = 2^{-j}. \quad (12)$$

Мы можем считать, что $\rho_0 = 2\pi$. Поскольку $\omega(2\rho_{j+1}) < 2\omega(\rho_{j+1}) = 2^{-j} = \omega(\rho_j)$, имеем $2\rho_{j+1} < \rho_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$.

Построим симметричное совершенное множество $E \subset [0, 2\pi]$ следующим образом (см. [8; гл. V, § 3], [11; гл. XIV, § 19]). Удалим из отрезка $[0, 2\pi] = [0, \rho_0]$ концентрический открытый интервал так, чтобы два оставшихся отрезка имели одинаковую длину, равную ρ_1 . Из каждого из оставшихся отрезков удалим соответствующий концентрический открытый интервал так, чтобы остались четыре отрезка длины ρ_2 и т.д. На j -ом шаге мы получаем 2^j отрезков I_ν^j , $\nu = 1, 2, \dots, 2^j$, длины ρ_j . Продолжив этот процесс, получим множество оставшихся точек:

$$E = \bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{\nu=1}^{2^j} I_\nu^j.$$

Пусть ψ – функция типа лестницы Кантора, соответствующая множеству E , а именно, вещественная непрерывная неубывающая функция на $[0, 2\pi]$, которая принимает постоянные значения на интервалах, дополнительных к E в $[0, 2\pi]$ (т.е. на компонентах связности дополнения $[0, 2\pi] \setminus E$), и прирастает на величину, равную 2^{-j} , на каждом отрезке I_ν^j , $\nu = 1, 2, \dots, 2^j$, полученном на j -ом шаге построения множества E . Заметим, что из условия (12) следует, что $\psi \in \text{Lip}_\omega([0, 2\pi])$. В этом легко убедиться, повторяя практически дословно рассуждения из [8; гл. V, § 3], где рассмотрен случай $\omega(\delta) = \delta^\alpha$.

Дальнейшей модификацией лестницы легко получить функцию ψ на $[0, 2\pi]$ со следующими свойствами:

- 1) ψ принимает постоянные значения на интервалах, дополнительных к E в $[0, 2\pi]$;

- 2) $\psi \in \text{Lip}_\omega([0, 2\pi])$;
- 3) $\psi(0) = \psi(2\pi) = 0$;
- 4) $\int_0^{2\pi} \psi(\theta) d\theta = 0$;
- 5) $\max_{t \in [0, 2\pi]} |\psi(t)| = 1$;
- 6) $[0, 2\pi] = J_1 \cup J_2 \cup J_3$, где J_1, J_2, J_3 – попарно непересекающиеся интервалы, на каждом из которых функция ψ монотонна.

Определим функцию φ на $\mathbb{T}$, полагая

$$\varphi(t) = \int_0^t \psi(\theta) d\theta, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Имеем $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = \varphi'(0) = \varphi'(2\pi) = 0$. Таким образом, $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$. При этом функция φ непостоянна на $\mathbb{T}$ и линейна на каждом интервале, дополнительном к E в $[0, 2\pi]$.

Покажем, что для функции φ имеет место оценка (i) теоремы 2.

Положим

$$\Theta(y) = \frac{y}{\log y} \chi^{-1} \left(\frac{(\log y)^2}{y} \right), \quad y > 1. \quad (13)$$

ЛЕММА 2. Пусть g – вещественная функция на $[0, 2\pi]$, линейная на интервале $\Delta \subseteq [0, 2\pi]$. Тогда для всех $y \geq 2$ имеем

$$\sum_{|k| \leq y} |\widehat{1_\Delta e^{ig}}(k)| \leq c \log y,$$

где $c > 0$ не зависит от Δ, g и y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $y \geq 2$. Считая, что $g(t) = at + b$ при $t \in \Delta$, где $a, b \in \mathbb{R}$, прямым вычислением получаем

$$|\widehat{1_\Delta e^{ig}}(k)| = \left| \frac{\sin((k-a)|\Delta|/2)}{\pi(k-a)} \right| \leq \frac{1}{|k-a|}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq a. \quad (14)$$

Вместе с тем имеем

$$|\widehat{1_\Delta e^{ig}}(k)| \leq \frac{|\Delta|}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

Таким образом,

$$\sum_{|k| \leq y} |\widehat{1_\Delta e^{ig}}(k)| \leq \sum_{|k| \leq y} \min \left(\frac{1}{|k-a|}, 1 \right).$$

Рассмотрим два случая: $|a| \geq 2y$ и $|a| < 2y$. В первом случае при $|k| \leq y$ имеем $|k-a| \geq y$. Поэтому

$$\sum_{|k| \leq y} \min \left(\frac{1}{|k-a|}, 1 \right) \leq \sum_{|k| \leq y} \frac{1}{y} \leq 3.$$

Во втором случае при $|k| \leq y$ имеем $|k - a| \leq 3y$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{|k| \leq y} \min\left(\frac{1}{|k - a|}, 1\right) &\leq \sum_{|k - a| \leq 3y} \min\left(\frac{1}{|k - a|}, 1\right) \\ &\leq \sum_{|k - a| < 2} 1 + \sum_{2 \leq |k - a| \leq 3y} \frac{1}{|k - a|} \leq 5 + \int_{1 \leq |x - a| \leq 3y} \frac{dx}{|x - a|} = 5 + 2 \log(3y). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть g – вещественная функция на $[0, 2\pi]$, линейная на каждом интервале, дополнительном к E в $[0, 2\pi]$. Пусть $\lambda \geq 2$. Тогда

$$\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{e^{ig}}(k)| \leq c\Theta(\lambda),$$

где $c > 0$ не зависит от λ и g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем целое положительное j , которое мы выберем позже. Множество E покрывается 2^j отрезками равной длины ρ_j . Обозначим их объединение через F_j . Дополнение $G_j = [0, 2\pi] \setminus F_j$ является объединением $2^j - 1$ попарно непересекающихся открытых интервалов, на каждом из которых функция g линейна. Применяя лемму 2 к каждому из этих интервалов, получаем

$$\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{1_{G_j} e^{ig}}(k)| \leq c_1 2^j \log \lambda. \quad (16)$$

Вместе с тем, $|F_j| = 2^j \rho_j$. Поэтому (пользуясь неравенством Коши и равенством Парсеваля) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{1_{F_j} e^{ig}}(k)| &\leq (4\lambda + 1)^{1/2} \left(\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{1_{F_j} e^{ig}}(k)|^2 \right)^{1/2} \leq (4\lambda + 1)^{1/2} \|1_{F_j} e^{ig}\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= (4\lambda + 1)^{1/2} \left(\frac{|F_j|}{2\pi} \right)^{1/2} \leq c_2 \lambda^{1/2} (2^j \rho_j)^{1/2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из оценок (16), (17) получаем

$$\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{e^{ig}}(k)| \leq c_1 2^j \log \lambda + c_2 \lambda^{1/2} (2^j \rho_j)^{1/2}. \quad (18)$$

Константы $c_1, c_2 > 0$ не зависят от λ, g и j .

Заметим, что

$$\log y = o(\Theta(y)), \quad y \rightarrow +\infty. \quad (19)$$

Поэтому если λ достаточно велико, скажем, $\lambda \geq \lambda_0$, то

$$\frac{\Theta(\lambda)}{\log \lambda} \geq 1.$$

Достаточно получить оценку леммы при дополнительном предположении, что $\lambda \geq \lambda_0$.

Пусть $\lambda \geq \lambda_0$. Подберем j так, чтобы минимизировать правую часть в (18). Определим целое положительное число $j(\lambda)$ из условия

$$2^{j(\lambda)-1} \leq \frac{\Theta(\lambda)}{\log \lambda} < 2^{j(\lambda)}. \quad (20)$$

Легко проверить, что

$$\frac{\log y}{\Theta(y)} = \omega\left(\frac{\log y}{y} \Theta(y)\right), \quad y > 1.$$

Поэтому, пользуясь правым неравенством условия (20), имеем (см. (12))

$$\omega(\rho_{j(\lambda)}) = 2^{-j(\lambda)} \leq \frac{\log \lambda}{\Theta(\lambda)} = \omega\left(\frac{\log \lambda}{\lambda} \Theta(\lambda)\right),$$

откуда

$$\rho_{j(\lambda)} \leq \frac{\log \lambda}{\lambda} \Theta(\lambda). \quad (21)$$

В силу левого неравенства условия (20) и оценки (21) получаем, что при $j = j(\lambda)$ правая часть в (18) не превосходит $c\Theta(\lambda)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть f – вещественная функция на $[0, 2\pi]$. Пусть $I \subseteq [0, 2\pi]$ – интервал. Предположим, что $f \in C^1(I)$, производная f' монотонна на I и $|f'(t)| \leq 1$ при $t \in I$. Пусть $\lambda > 0$. Тогда при всех $k \in \mathbb{Z}$ таких, что $|k| \geq 2\lambda$, имеем

$$|\widehat{1_I e^{i\lambda f}}(k)| \leq \frac{2}{|k|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно первой части леммы ван дер Корпута (см. [8; гл. V, лемма 4.3]), если $I \subset \mathbb{R}$ – ограниченный интервал и $g \in C^1(I)$ – вещественная функция такая, что ее производная g' монотонна и $|g'(t)| \geq \rho > 0$ при всех $t \in I$, то

$$\left| \int_I e^{ig(t)} dt \right| \leq \frac{2\pi}{\rho}.$$

Фиксируем $\lambda > 0$ и $k \in \mathbb{Z}$, $|k| \geq 2\lambda$. Положим $g(t) = \lambda f(t) - kt$. Ясно, что производная $g'(t) = \lambda f'(t) - k$ монотонна на I и $|g'(t)| \geq |k| - \lambda \geq |k|/2$. Отсюда получаем, что

$$|\widehat{1_I e^{i\lambda f}}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_I e^{ig(t)} dt \right| \leq \frac{2}{|k|}.$$

Лемма доказана.

Оценим норму $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A$. Можно считать, что $\lambda \geq 2$. Отдельно оценим суммы модулей коэффициентов Фурье $\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k)$ по $k \in \mathbb{Z}$ таким, что $|k| \leq 2\lambda$, $2\lambda < |k| \leq \lambda^2$ и $\lambda^2 < |k|$.

Применяя лемму 3 к функции $g = \lambda\varphi$, получаем

$$\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k)| \leq c_1 \Theta(\lambda). \quad (22)$$

Заметим, что $|\varphi'(t)| = |\psi(t)| \leq 1$ на $[0, 2\pi]$ и отрезок $[0, 2\pi]$ является объединением трех попарно непересекающихся интервалов, на каждом из которых производная $\varphi' = \psi$ монотонна. Применяя лемму 4 к каждому из этих интервалов, находим, что

$$|\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k)| \leq \frac{6}{|k|}, \quad |k| > 2\lambda. \quad (23)$$

Поэтому

$$\sum_{2\lambda < |k| \leq \lambda^2} |\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k)| \leq \sum_{2\lambda < |k| \leq \lambda^2} \frac{6}{|k|} \leq c_2 \log \lambda. \quad (24)$$

Далее заметим, что

$$\sum_{|k| > \lambda^2} |\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k)| = \sum_{|k| > \lambda^2} \frac{1}{|k|} |(\widehat{e^{i\lambda\varphi}})'(k)| \leq \left(\sum_{|k| > \lambda^2} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \| (e^{i\lambda\varphi})' \|_{L^2(\mathbb{T})} \leq c_3. \quad (25)$$

Складывая неравенства (22), (24), (25) и учитывая соотношение (19), получаем оценку (i) теоремы 2.

Покажем теперь, что для той же функции φ имеет место оценка (ii) теоремы 2. При $p > 1$ положим

$$\Theta_p(y) = \left(\int_1^y \left(\chi^{-1} \left(\frac{1}{\tau} \right) \right)^p d\tau \right)^{1/p}, \quad y > 1. \quad (26)$$

ЛЕММА 5. Пусть $1 < p < 2$. Пусть g – вещественная функция на $[0, 2\pi]$, линейная на интервале $\Delta \subseteq [0, 2\pi]$. Тогда

$$\|1_\Delta e^{ig}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_p |\Delta|^{1/q},$$

где $1/p + 1/q = 1$ и константа $c_p > 0$ не зависит от g и Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считая, что $g(t) = at + b$ при $t \in \Delta$, из оценок (14), (15), использованных в доказательстве леммы 2, получаем

$$\|1_\Delta e^{ig}\|_{A_p(\mathbb{T})}^p = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{1_\Delta e^{ig}}(k)|^p \leq \sum_{|k-a| > 1/|\Delta|} \frac{1}{|k-a|^p} + \sum_{|k-a| \leq 1/|\Delta|} |\Delta|^p \leq c_p |\Delta|^{p-1}.$$

Лемма доказана.

Ниже нам будет удобно использовать аналоги пространств $A_p(\mathbb{T})$ для функций, заданных на прямой $\mathbb{R}$. Преобразование Фурье умеренных распределений на $\mathbb{R}$ мы также обозначаем символом $\widehat{\cdot}$. При $1 < p < \infty$ пусть $A_p(\mathbb{R})$ – пространство умеренных распределений g на $\mathbb{R}$ таких, что $\widehat{g}$ принадлежит $L_p(\mathbb{R})$. Положим

$$\|g\|_{A_p(\mathbb{R})} = \|\widehat{g}\|_{L_p(\mathbb{R})}.$$

Известно (см., например, [12]), что при $1 \leq p \leq 2$ преобразование Фурье (так же как и его обратное) является ограниченным оператором, действующим из $L^p(\mathbb{R})$ в $L^q(\mathbb{R})$, $1/p + 1/q = 1$. Таким образом, всякое распределение из $A_p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq 2$, является функцией из $L^q(\mathbb{R})$.

Пусть $1 < p \leq 2$. Легко проверить (и хорошо известно, см., например, [13; § 44]), что если f есть 2π -периодическая функция и f^* – ее сужение на $[0, 2\pi]$, продолженное нулем на $\mathbb{R}$, т.е. $f^* = f$ на $[0, 2\pi]$, $f^* = 0$ на $\mathbb{R} \setminus [0, 2\pi]$, то f принадлежит $A_p(\mathbb{T})$ тогда и только тогда, когда $f^* \in A_p(\mathbb{R})$, причем

$$c_1(p)\|f^*\|_{A_p(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_2(p)\|f^*\|_{A_p(\mathbb{R})}.$$

Мы называем это утверждение правилом переноса.

Пусть $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ – произвольный интервал. Как известно (см., например, [14]), оператор S_Δ , задаваемый соотношением

$$S_\Delta(g) = (1_\Delta \cdot \widehat{g})^\vee, \quad g \in L^p \cap L^2(\mathbb{R}),$$

где $^\vee$ – обратное преобразование Фурье, является ограниченным оператором в $L^p(\mathbb{R})$ при $1 < p < \infty$.

Для произвольного семейства $\{\Delta_\nu\}$ попарно непересекающихся интервалов на $\mathbb{R}$ определим квадратичную функцию Литтлвуда–Пэли:

$$S(g) = \left(\sum_\nu |S_{\Delta_\nu}(g)|^2 \right)^{1/2}.$$

Напомним неравенство Рубио де Франсия (см. [15]):

$$\|S(g)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c_p \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad g \in L^p(\mathbb{R}),$$

верное при $2 < p < \infty$. Константа $c_p > 0$ не зависит ни от g , ни от семейства $\{\Delta_\nu\}$. Двойственным образом при $1 < p < 2$ для любой функции $g \in L^p(\mathbb{R})$ такой, что

$$\text{supp } \widehat{g} \subseteq \bigcup_\nu \Delta_\nu, \quad (27)$$

имеем

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c_p \|S(g)\|_{L^p(\mathbb{R})}. \quad (28)$$

Следующая лемма легко вытекает из неравенства Рубио де Франсия.

ЛЕММА 6. Пусть $1 < p < 2$. Пусть $\Delta_\nu \subset \mathbb{T}$, $\nu = 1, 2, \dots, N$, – конечное семейство попарно непересекающихся интервалов и f_ν , $\nu = 1, 2, \dots, N$, – функции из $A_p(\mathbb{T})$ такие, что $\text{supp } f_\nu \subseteq \Delta_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, N$. Тогда

$$\left\| \sum_\nu f_\nu \right\|_{A_p(\mathbb{T})}^p \leq c_p \sum_\nu \|f_\nu\|_{A_p(\mathbb{T})}^p,$$

где $c_p > 0$ не зависит ни от N , ни от семейств $\{\Delta_\nu\}$, $\{f_\nu\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное конечное семейство Δ_ν , $\nu = 1, 2, \dots, N$, попарно непересекающихся ограниченных интервалов на прямой $\mathbb{R}$. При $1 < p < 2$, учитывая очевидное неравенство

$$S(g) \leq \left(\sum_\nu |S_{\Delta_\nu}(g)|^p \right)^{1/p},$$

из неравенства (28) получаем, что

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq c_p^p \sum_{\nu} \|S_{\Delta_{\nu}}(g)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \quad (29)$$

для любой функции $g \in L^p(\mathbb{R})$ с условием (27).

Пусть $f_{\nu}, \nu = 1, 2, \dots, N$, — функции из $A_p(\mathbb{R})$, $1 < p < 2$, с носителями на Δ_{ν} , $\nu = 1, 2, \dots, N$, соответственно. Применяя оценку (29) к функции

$$g = \left(\sum_{\nu} f_{\nu} \right)^{\vee}$$

и учитывая, что прямое и обратное преобразования Фурье на $\mathbb{R}$ отличаются лишь знаком переменной, находим, что

$$\left\| \sum_{\nu} f_{\nu} \right\|_{A_p(\mathbb{R})}^p \leq c_p^p \sum_{\nu} \|f_{\nu}\|_{A_p(\mathbb{R})}^p.$$

(Так как функции f_{ν} принадлежат $L^q(\mathbb{R})$ и интервалы Δ_{ν} ограничены, то $f_{\nu} \in L^2(\mathbb{R})$, $\nu = 1, 2, \dots, N$. Поэтому $g \in L^2(\mathbb{R})$.)

Остается воспользоваться правилом переноса. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $1 < p < 2$ и g — вещественная функция на $[0, 2\pi]$, линейная на каждом интервале, дополнительном к E в $[0, 2\pi]$. Пусть $\lambda \geq 2$. Тогда

$$\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{e^{ig}}(k)|^p \leq c_p (\Theta_p(\lambda))^p,$$

где $c_p > 0$ не зависит от λ и g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При произвольном $j = 1, 2, \dots$ множество E покрывается 2^j отрезками равной длины ρ_j . Их объединение F_j имеет меру $|F_j| = 2^j \rho_j$. Дополнение $G_j = [0, 2\pi] \setminus F_j$ является объединением $2^j - 1$ попарно непересекающихся открытых интервалов, которые обозначим через Δ_{ν}^j , $\nu = 1, 2, \dots, 2^j - 1$. Функция g линейна на каждом интервале Δ_{ν}^j , поэтому, пользуясь леммами 6 и 5, получаем, что

$$\|1_{G_j} e^{ig}\|_{A_p(\mathbb{T})}^p \leq c_p \sum_{\nu=1}^{2^j-1} \|1_{\Delta_{\nu}^j} e^{ig}\|_{A_p(\mathbb{T})}^p \leq c_{p,1} \sum_{\nu=1}^{2^j-1} |\Delta_{\nu}^j|^{p-1}. \quad (30)$$

Семейство интервалов Δ_{ν}^j , $\nu = 1, 2, \dots, 2^j - 1$, состоит из одного интервала длины $\rho_0 - 2\rho_1 < \rho_0$, двух интервалов длины $\rho_1 - 2\rho_2 < \rho_1$ и т.д., из 2^m интервалов длины $\rho_m - 2\rho_{m+1} < \rho_m$, где $m = 0, 1, \dots, j-1$. Поэтому получаем (см. (30)), что

$$\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{1_{G_j} e^{ig}}(k)|^p \leq \|1_{G_j} e^{ig}\|_{A_p(\mathbb{T})}^p \leq c_{p,1} \sum_{m=0}^{j-1} 2^m \rho_m^{p-1}. \quad (31)$$

Вместе с тем, пользуясь неравенством Гёльдера с $p^* = 2/p$ и $1/p^* + 1/q^* = 1$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{1_{F_j} e^{ig}}(k)|^p &\leq \left(\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{1_{F_j} e^{ig}}(k)|^{pp^*} \right)^{1/p^*} \left(\sum_{|k| \leq 2\lambda} 1 \right)^{1/q^*} \\ &\leq \left(\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{1_{F_j} e^{ig}}(k)|^2 \right)^{p/2} (4\lambda + 1)^{1-p/2} \leq \|1_{F_j} e^{ig}\|_{L^2(\mathbb{T})}^p (4\lambda + 1)^{1-p/2} \\ &= \left(\frac{|F_j|}{2\pi} \right)^{p/2} (4\lambda + 1)^{1-p/2} \leq c_{p,2} (2^j \rho_j)^{p/2} \lambda^{1-p/2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Из оценок (31), (32) получаем, что

$$\left(\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{e^{ig}}(k)|^p \right)^{1/p} \leq c_{p,3} \left(\sum_{m=0}^{j-1} 2^m \rho_m^{p-1} \right)^{1/p} + c_{p,4} (2^j \rho_j)^{1/2} \lambda^{1/p-1/2}, \quad (33)$$

где $c_{p,3}, c_{p,4} > 0$ не зависят от λ , g и j .

Легко выбрать j так, чтобы минимизировать выражение в правой части соотношения (33) в случае $\omega(\delta) = \delta^\alpha$. Общий случай требует некоторых вычислений.

Положим

$$a_m = \frac{1}{\chi(\rho_m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Последовательность $\{a_m\}$ неограничена, строго возрастает и $a_0 = 1/(2\pi)$.

Ясно, что достаточно получить оценку леммы при дополнительном условии $\lambda \geq a_1$.

Выберем $j(\lambda) = 2, 3, \dots$ так, чтобы

$$a_{j(\lambda)-1} \leq \lambda < a_{j(\lambda)}. \quad (34)$$

Оценим первый член в правой части соотношения (33). Заметим, что при $m = 1, 2, \dots$

$$\frac{a_m}{a_{m-1}} = \frac{\chi(\rho_{m-1})}{\chi(\rho_m)} = \frac{\rho_{m-1}\omega(\rho_{m-1})}{\rho_m\omega(\rho_m)} = \frac{\rho_{m-1}2^{-(m-1)}}{\rho_m 2^{-m}} = \frac{2\rho_{m-1}}{\rho_m} \geq 2,$$

откуда

$$a_m \leq 2(a_m - a_{m-1}), \quad m = 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{j(\lambda)-1} 2^m \rho_m^{p-1} &= \sum_{m=1}^{j(\lambda)-1} \frac{\rho_m^{p-1}}{\omega(\rho_m)} = \sum_{m=1}^{j(\lambda)-1} \frac{\rho_m^p}{\chi(\rho_m)} = \sum_{m=1}^{j(\lambda)-1} a_m \left(\chi^{-1} \left(\frac{1}{a_m} \right) \right)^p \\ &\leq 2 \sum_{m=1}^{j(\lambda)-1} (a_m - a_{m-1}) \left(\chi^{-1} \left(\frac{1}{a_m} \right) \right)^p \leq 2 \sum_{m=1}^{j(\lambda)-1} \int_{a_{m-1}}^{a_m} \left(\chi^{-1} \left(\frac{1}{\tau} \right) \right)^p d\tau \\ &= 2 \int_{a_0}^{a_{j(\lambda)-1}} \left(\chi^{-1} \left(\frac{1}{\tau} \right) \right)^p d\tau \leq 2 \int_{a_0}^{\lambda} \left(\chi^{-1} \left(\frac{1}{\tau} \right) \right)^p d\tau = c_{p,5} + 2(\Theta_p(\lambda))^p. \end{aligned} \quad (35)$$

Оценим второй член в правой части соотношения (33). Пусть $t = \chi^{-1}(1/\lambda)$. Тогда (см. (34))

$$\rho_{j(\lambda)} < t \leq \rho_{j(\lambda)-1}.$$

Отсюда, пользуясь правым неравенством, получаем, что $\omega(t) \leq 2^{-(j(\lambda)-1)}$ и, следовательно,

$$2^{j(\lambda)} \leq \frac{2}{\omega(t)} = \frac{2t}{\chi(t)} = 2\chi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\lambda.$$

Вместе с тем левое неравенство дает

$$\rho_{j(\lambda)} < t = \chi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Поэтому

$$(2^{j(\lambda)}\rho_{j(\lambda)})^{p/2}\lambda^{1-p/2} \leq 2^{p/2}\lambda\left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^p.$$

Поскольку $\lambda \geq 2$ и функция χ^{-1} возрастающая, получаем

$$\lambda\left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^p \leq 2(\lambda-1)\left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^p \leq 2\int_1^\lambda\left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)^p d\tau = 2(\Theta_p(\lambda))^p.$$

Таким образом,

$$(2^{j(\lambda)}\rho_{j(\lambda)})^{p/2}\lambda^{1-p/2} \leq c_{p,6}(\Theta_p(\lambda))^p.$$

Пользуясь этим неравенством и неравенством (35), заключаем, что при $j = j(\lambda)$ правая часть в (33) не превосходит $c_p\Theta_p(\lambda)$. Лемма доказана.

Оценим нормы $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$, $p > 1$. Применяя лемму 7 к функции $g = \lambda\varphi$, имеем (можно считать, что $\lambda \geq 2$)

$$\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k)|^p \leq c_{p,1}(\Theta_p(\lambda))^p.$$

Вместе с тем в силу оценки (23)

$$\sum_{|k| > 2\lambda} |\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k)|^p \leq \sum_{|k| > 2\lambda} \left(\frac{6}{|k|}\right)^p \leq 6^p \sum_{|k| \geq 1} \frac{1}{|k|^p} = c_{p,2}.$$

Таким образом,

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})}^p \leq c_{p,1}(\Theta_p(\lambda))^p + c_{p,2}$$

и мы получаем (ii).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. При $m = 0, 1, 2, \dots$ пусть E_m – порция множества E , сосредоточенная на отрезке $[0, \rho_m]$, т.е. $E_m = E \cap [0, \rho_m]$. Разумеется, $E_0 = E$.

Пусть снова ψ – функция типа лестницы Кантора, соответствующая множеству E . При каждом $m = 0, 1, 2, \dots$ сужение функции ψ на $[0, \rho_m]$ принадлежит $\text{Lip}_\omega([0, \rho_m])$. Таким образом, легко видеть, что существуют функции ψ_m , $m = 0, 1, 2, \dots$, на $[0, 2\pi]$ (модифицированные лестницы) со следующими свойствами:

- 1) ψ_m принимает постоянные значения на интервалах, дополнительных к E_m в $[0, \rho_m]$;
- 2) $\psi_m \in \text{Lip}_\omega([0, \rho_m])$;
- 3) $\psi_m(0) = \psi_m(\rho_m) = 0$ и $\psi_m = 0$ на $[0, 2\pi] \setminus [0, \rho_m]$;
- 4) $\int_0^{\rho_m} \psi_m(\theta) d\theta = 0$;
- 5) $\max_{t \in [0, \rho_m]} |\psi_m(t)| = 1$;
- 6) $[0, \rho_m]$ является объединением трех попарно не пересекающихся интервалов, на каждом из которых функция ψ_m монотонна.

При $m = 0, 1, 2, \dots$ положим

$$\varphi_m(t) = \int_0^t \psi_m(\theta) d\theta, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ясно, что $\varphi_m(0) = \varphi_m(\rho_m) = \varphi'_m(0) = \varphi'_m(\rho_m) = 0$, $\varphi_m = 0$ на $[0, 2\pi] \setminus [0, \rho_m]$ и $\varphi'_m \in \text{Lip}_\omega[0, \rho_m]$, $m = 0, 1, 2, \dots$.

Пусть $I \subseteq [0, 2\pi]$ – произвольный отрезок. Пусть $E_m(I)$ – аффинная копия множества E_m , сосредоточенная на I , а именно, $E_m(I) = l_{m,I}^{-1}(E_m)$, где $l_{m,I}$ – аффинное отображение, при котором I отображается на $[0, \rho_m]$. Пусть φ_m^I – аффинная копия функции φ_m , сосредоточенная на I , а именно, такая функция на $[0, 2\pi]$, что $\varphi_m^I = \varphi_m \circ l_{m,I}$ на I и $\varphi_m^I = 0$ на $[0, 2\pi] \setminus I$.

Определим по индукции последовательность отрезков $I_m \subseteq [0, 2\pi]$ с условием

$$|I_m| \leq 2^{-m} \rho_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (36)$$

и последовательность множеств $B_m \subset I_m$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Пусть $I_0 = [0, 2\pi]$ и $B_0 = E_0$. Если $I_0, I_1, I_2, \dots, I_m$ и $B_0, B_1, B_2, \dots, B_m$ уже определены, то определим I_{m+1} и B_{m+1} следующим образом. Рассмотрим объединение $\bigcup_{s=1}^m B_s$ и выберем интервал максимальной длины, дополнительный к этому объединению в $[0, 2\pi]$ (если таких интервалов несколько, то берем один из них). Обозначим этот интервал через J . Пусть I_{m+1} – отрезок, содержащийся в J , концентрический с J и имеющий длину $|I_{m+1}| \leq 2^{-(m+1)} \rho_{m+1}$. Положим $B_{m+1} = E_{m+1}(I_{m+1})$.

Определим теперь функции f_m , $m = 0, 1, 2, \dots$, полагая $f_m = \varphi_m^{I_m}$.

Продолжая 2π -периодическим образом функции φ_m , f_m , $m = 0, 1, 2, \dots$, с отрезка $[0, 2\pi]$ на $\mathbb{R}$, всюду далее мы будем считать эти функции функциями на $\mathbb{T}$. Все эти функции принадлежат $C^{1,\omega}(\mathbb{T})$. Каждая функция f_m равна нулю на $[0, 2\pi] \setminus I_m$ и линейна на интервалах, дополнительных к B_m в I_m . Имеем также

$$|\varphi'_m(t)| \leq 1, \quad t \in \mathbb{T}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

и поскольку l_{m,I_m} – линейная функция на $[0, 2\pi]$ с угловым коэффициентом, равным (с точностью до знака) $\rho_m/|I_m|$, то

$$|f'_m(t)| \leq \frac{\rho_m}{|I_m|}, \quad t \in \mathbb{T}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (37)$$

Положим

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m f_m,$$

где числа $\varepsilon_m > 0$ убывают к нулю так быстро, что $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$.

Ясно, что функция φ нигде не линейна.

Потребуем еще, чтобы последовательность $\{\varepsilon_m\}$ удовлетворяла условию

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \frac{\rho_m}{|I_m|} = 1 \quad (38)$$

и убывала так быстро, что

$$\delta_{j(\lambda)} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (39)$$

где

$$\delta_j = \sum_{m=j+1}^{\infty} \varepsilon_m \frac{\rho_m}{|I_m|} \quad (40)$$

и $j(\lambda)$ – целое положительное число, определенное при каждом достаточно большом λ условием (20) (ясно, что $j(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, см. (19)).

Оценим нормы $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A$. Можно считать, что $\lambda \geq 2$.

Положим

$$S_j = \sum_{m=0}^j \varepsilon_m f_m, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

При любом j множество E_m , $m \leq j$, можно покрыть 2^{j-m} отрезками длины ρ_j . Поскольку B_m получено из E_m сжатием (см. (36)), видим, что множество B_m , $m \leq j$, можно покрыть 2^{j-m} отрезками, длины которых не превосходят ρ_j . Следовательно, множество

$$\bigcup_{m=0}^j B_m \quad (41)$$

можно покрыть

$$2^j + 2^{j-1} + 2^{j-2} + \dots + 2^1 + 1 \leq 2^{j+1}$$

отрезками длины ρ_j . Обозначим объединение этих отрезков через F_j . Имеем

$$|F_j| \leq 2^{j+1} \rho_j.$$

Положим $G_j = [0, 2\pi] \setminus F_j$. Ясно, что G_j является объединением не более чем $2^{j+1} + 1$ попарно непересекающихся интервалов. Ясно, что функция S_j линейна на каждом интервале, дополнительном к объединению (41) в $[0, 2\pi]$. Следовательно, функция λS_j линейна на интервалах, образующих G_j и, применяя лемму 2 к каждому из этих интервалов, имеем

$$\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{1_{G_j} e^{\lambda S_j}}(k)| \leq c_1 2^j \log \lambda. \quad (42)$$

Вместе с тем

$$\begin{aligned} \sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{1_{F_j} e^{\lambda S_j}}(k)| &\leq (4\lambda + 1)^{1/2} \left(\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{1_{F_j} e^{\lambda S_j}}(k)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq (4\lambda + 1)^{1/2} \|1_{F_j} e^{\lambda S_j}\|_{L^2(\mathbb{T})} = (4\lambda + 1)^{1/2} \left(\frac{|F_j|}{2\pi} \right)^{1/2} \leq c_2 \lambda^{1/2} (2^j \rho_j)^{1/2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Сложив оценки (42) и (43), получаем

$$\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{e^{\lambda S_j}}(k)| \leq c_1 2^j \log \lambda + c_2 \lambda^{1/2} (2^j \rho_j)^{1/2}, \quad (44)$$

где $c_1, c_2 > 0$ не зависят от λ и j .

Заметим, что (см. (37), (38))

$$|S'_j(t)| \leq \sum_{m=0}^j \varepsilon_m \frac{\rho_m}{|I_m|} \leq 1, \quad t \in \mathbb{T}. \quad (45)$$

Заметим также, что при каждом $j = 0, 1, 2, \dots$ отрезок $[0, 2\pi]$ является объединением трех попарно непересекающихся интервалов, на каждом из которых производная f'_j функции f_j монотонна. При этом f'_j сосредоточена на некотором интервале, на котором производная f'_m всякой функции f_m , $m < j$, постоянна. Поэтому при каждом $j = 0, 1, 2, \dots$ отрезок $[0, 2\pi]$ является объединением не более чем $4j + 3$ попарно непересекающихся интервалов, на каждом из которых функция S_j имеет монотонную производную (это легко проверить индукцией по j).

Учитывая оценку (45) и применяя лемму 4 к каждому из интервалов, на которых S'_j монотонна, получаем при $|k| > 2\lambda$

$$|\widehat{e^{i\lambda S_j}}(k)| \leq \frac{8j + 6}{|k|},$$

откуда следует, что

$$\sum_{2\lambda < |k| \leq \lambda^2} |\widehat{e^{\lambda S_j}}(k)| \leq c_3 (8j + 6) \log \lambda. \quad (46)$$

Далее, поскольку $|S'_j(t)| \leq 1$ при $t \in \mathbb{T}$ (см. (45)), имеем

$$\sum_{|k| > \lambda^2} |\widehat{e^{\lambda S_j}}(k)| = \sum_{|k| > \lambda^2} \frac{1}{|k|} |(\widehat{e^{\lambda S_j}})'(k)| \leq \left(\sum_{|k| > \lambda^2} \frac{1}{|k|^2} \right)^{1/2} \| (e^{\lambda S_j})' \|_{L^2(\mathbb{T})} \leq c_4. \quad (47)$$

Из (44), (46), (47) получаем

$$\|e^{i\lambda S_j}\|_{A(\mathbb{T})} \leq c_5 2^j \log \lambda + c_6 \lambda^{1/2} (2^j \rho_j)^{1/2}, \quad (48)$$

где $c_5, c_6 > 0$ не зависят от λ, j .

Положим теперь

$$r_j = \sum_{m=j+1}^{\infty} \varepsilon_m f_m.$$

Очевидно, что для любой функции $g \in C^1(\mathbb{T})$ имеем

$$\|g\|_{A(\mathbb{T})} \leq c \|g\|_{C^1(\mathbb{T})}, \quad (49)$$

где

$$\|g\|_{C^1(\mathbb{T})} = \max_{t \in \mathbb{T}} |g(t)| + \max_{t \in \mathbb{T}} |g'(t)|$$

и $c > 0$ не зависит от g . Так как

$$|r'_j(t)| \leq \delta_j, \quad t \in \mathbb{T}$$

(см. (37), (40)), то

$$\|e^{i\lambda r_j}\|_{A(\mathbb{T})} \leq c \|e^{i\lambda r_j}\|_{C^1(\mathbb{T})} \leq c(1 + \lambda \delta_j). \quad (50)$$

Заметим теперь, что выражение в правой части в (48) имеет тот же вид, что и в (18). Минимизируем его так же, как при доказательстве леммы 3, а именно, считая, что λ достаточно велико, выберем $j = j(\lambda)$ из условия (20). Мы видим, что при этом j правая часть в (48) не превосходит $c_7 \Theta(\lambda)$. Таким образом,

$$\|e^{i\lambda S_{j(\lambda)}}\|_{A(\mathbb{T})} \leq c_7 \Theta(\lambda). \quad (51)$$

Вместе с тем из неравенства (50), учитывая условие (39), получаем

$$\|e^{i\lambda r_{j(\lambda)}}\|_{A(\mathbb{T})} \leq c_8. \quad (52)$$

Так как $\varphi = S_j + r_j$ при любом j , то

$$\|e^{i\lambda \varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|e^{i\lambda S_j}\|_{A(\mathbb{T})} \|e^{i\lambda r_j}\|_{A(\mathbb{T})}.$$

Таким образом, из (51), (52) получаем оценку (i) теоремы 2.

Оценим нормы $\|e^{i\lambda \varphi}\|_{A_p}$, $p > 1$. Нам потребуются две простые леммы.

ЛЕММА 8. Пусть $1 < p < 2$. Пусть I, J – два интервала, содержащиеся в $[0, 2\pi]$, и U, V – две функции из $A_p(\mathbb{T})$, равные нулю на $[0, 2\pi] \setminus I$ и $[0, 2\pi] \setminus J$ соответственно. Предположим, что $U(t) = V \circ l(t)$ при $t \in I$, где l – аффинное отображение интервала I на J . Тогда $\|U\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_p |a|^{-1/q} \|V\|_{A_p(\mathbb{T})}$, где a – угловой коэффициент отображения l , $|a| = |J|/|I|$, и $1/p + 1/q = 1$. Постоянная $c_p > 0$ не зависит от U, V, l, I, J .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $l(t) = at + b$, $t \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, то для произвольной функции $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap A_p(\mathbb{R})$ прямое вычисление дает

$$|\widehat{g \circ l}(u)| = \left| \frac{1}{a} \widehat{g}\left(\frac{u}{a}\right) \right|,$$

и, следовательно,

$$\|g \circ l\|_{A_p(\mathbb{R})} = \frac{1}{|a|^{1/q}} \|g\|_{A_p(\mathbb{R})}.$$

Остается воспользоваться правилом переноса. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть $1 < p < 2$ и l – вещественная 2π -периодическая функция, линейная на $(0, 2\pi)$. Тогда для любой функции $f \in A_p(\mathbb{T})$ имеем $e^{il}f \in A_p(\mathbb{T})$ и $\|e^{il}f\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_p \|f\|_{A_p(\mathbb{T})}$, где $c_p > 0$ не зависит от f и l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной линейной функции $l(t) = at + b$ на $\mathbb{R}$ и для произвольной функции $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap A_p(\mathbb{R})$ имеем

$$|\widehat{e^{il}g}(u)| = |\widehat{g}(u - a)|, \quad u \in \mathbb{R},$$

откуда $e^{il}g \in A_p(\mathbb{R})$ и $\|e^{il}g\|_{A_p(\mathbb{R})} = \|g\|_{A_p(\mathbb{R})}$. Остается воспользоваться правилом переноса. Лемма доказана.

Пусть $\lambda \geq 2$. При каждом $m = 0, 1, 2, \dots$ функция φ_m линейна на интервалах, дополнительных к E_m в $[0, 2\pi]$ и, следовательно (так как $E_m \subseteq E_0 = E$), на интервалах, дополнительных к E в $[0, 2\pi]$. Пользуясь леммой 7, получаем

$$\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{e^{i\lambda\varphi_m}}(k)|^p \leq c_{p,1}(\Theta_p(\lambda))^p, \quad \lambda \geq 2, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (53)$$

При любом $m = 0, 1, 2, \dots$ имеем $|\varphi'_m(t)| \leq 1, t \in [0, 2\pi]$, и отрезок $[0, 2\pi]$ разбивается на три интервала, на каждом из которых производная φ'_m монотонна. Пользуясь леммой 4, получаем

$$|\widehat{e^{i\lambda\varphi_m}}(k)| \leq \frac{6}{|k|}$$

при $|k| > 2\lambda$. Поэтому

$$\sum_{|k| > 2\lambda} |\widehat{e^{i\lambda\varphi_m}}(k)|^p \leq c_{p,2}, \quad \lambda \geq 2, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Вместе с (53) это дает

$$\|e^{i\lambda\varphi_m}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_{p,3}\Theta_p(\lambda), \quad \lambda \geq 2, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (54)$$

Пусть теперь $0 \leq \lambda < 2$. Получаем, что (см. (49))

$$\begin{aligned} \|e^{i\lambda\varphi_m}\|_{A_p(\mathbb{T})} &\leq \|e^{i\lambda\varphi_m}\|_{A(\mathbb{T})} \leq c \|e^{i\lambda\varphi_m}\|_{C^1(\mathbb{T})} \\ &\leq c(1 + \lambda) \leq 3c, \quad 0 \leq \lambda < 2, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (55)$$

Всюду далее мы считаем, что $\lambda \geq 2$. Ясно, что $0 < \varepsilon_m \leq 1$ при всех m (см. (36), (38)). Применяя оценки (54), (55) в случаях $\lambda\varepsilon_m \geq 2$ и $\lambda\varepsilon_m < 2$ соответственно, имеем

$$\|e^{i\lambda\varepsilon_m\varphi_m}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_{p,4}\Theta_p(\lambda), \quad \lambda \geq 2, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (56)$$

откуда

$$\|e^{i\lambda\varepsilon_m\varphi_m} - 1\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_{p,5}\Theta_p(\lambda), \quad \lambda \geq 2, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (57)$$

При фиксированном m применим лемму 8 к отрезкам $I = I_m$, $J = [0, \rho_m]$ и функциям $U = e^{i\lambda\varepsilon_m f_m} - 1$, $V = e^{i\lambda\varepsilon_m \varphi_m} - 1$. Для соответствующего углового коэффициента a мы имеем $|a| = \rho_m/|I_m| \geq 2^m$ (см. (36)), поэтому из (57) получаем, что

$$\begin{aligned} \|e^{i\lambda\varepsilon_m f_m} - 1\|_{A_p(\mathbb{T})} &\leq c_{p,6} 2^{-m/q} \|e^{i\lambda\varepsilon_m \varphi_m} - 1\|_{A_p(\mathbb{T})} \\ &\leq c_{p,7} 2^{-m/q} \Theta_p(\lambda), \quad \lambda \geq 2, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (58)$$

Заметим теперь, что при $j = 0, 1, 2, \dots$

$$e^{i\lambda S_{j+1}} - e^{i\lambda S_j} = 1_{I_{j+1}}(e^{i\lambda S_{j+1}} - e^{i\lambda S_j}) = 1_{I_{j+1}} e^{i\lambda S_j} (e^{i\lambda\varepsilon_{j+1} f_{j+1}} - 1)$$

и функция S_j линейна на I_{j+1} . Поэтому в силу леммы 9 имеем

$$\|e^{i\lambda S_{j+1}} - e^{i\lambda S_j}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_{p,8} \|1_{I_{j+1}}(e^{i\lambda\varepsilon_{j+1} f_{j+1}} - 1)\|_{A_p(\mathbb{T})},$$

и так как $f_{j+1} = 0$ на $[0, 2\pi] \setminus I_{j+1}$, то

$$\|e^{i\lambda S_{j+1}} - e^{i\lambda S_j}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_{p,8} \|e^{i\lambda\varepsilon_{j+1} f_{j+1}} - 1\|_{A_p(\mathbb{T})}.$$

Следовательно (см. (58)),

$$\|e^{i\lambda S_{j+1}} - e^{i\lambda S_j}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_{p,9} 2^{-j/q} \Theta_p(\lambda), \quad \lambda \geq 2, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Кроме того, поскольку $S_0 = \varepsilon_0 f_0 = \varepsilon_0 \varphi_0$, имеем (см. (56))

$$\|e^{i\lambda S_0}\|_{A_p(\mathbb{T})} = \|e^{i\lambda\varepsilon_0 \varphi_0}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_{p,4} \Theta_p(\lambda), \quad \lambda \geq 2.$$

Таким образом,

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq \|e^{i\lambda S_0}\|_{A_p(\mathbb{T})} + \sum_{j=0}^{\infty} \|e^{i\lambda S_{j+1}} - e^{i\lambda S_j}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_p \Theta_p(\lambda).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Производная φ' функции φ , построенной в теореме 2, имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{T}$. Это ясно, поскольку выполняются соотношения (37), (38) и при каждом m отрезок $[0, 2\pi]$ разбивается на три интервала, на каждом из которых производная f'_m монотонна.

§ 3. Оператор суперпозиции

В этом параграфе мы рассмотрим отображения окружности $\mathbb{T}$ в себя, т.е. функции $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) \pmod{2\pi}. \quad (59)$$

Если такая функция непрерывна или принадлежит классу $C^1(\mathbb{R})$, или классу $C^{1,\omega}(\mathbb{R})$, то φ — это непрерывное или C^1 -гладкое, или $C^{1,\omega}$ -гладкое отображение

окружности в себя соответственно. Если функция φ , удовлетворяющая соотношению (59), непрерывна и взаимно однозначна, то φ – гомеоморфизм окружности. Если гомеоморфизм окружности φ и обратный к нему φ^{-1} являются C^1 -гладкими, то φ – диффеоморфизм окружности. Если диффеоморфизм φ является $C^{1,\omega}$ -гладким, то φ называется $C^{1,\omega}$ -диффеоморфизмом (как легко убедиться, в этом случае обратное отображение φ^{-1} также является $C^{1,\omega}$ -гладким).

Приведенные далее теоремы 3 и 4 вытекают из теорем 1 и 2 соответственно и являются их версиями для отображений окружности в себя и целых частот.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 \leq p < 2$. Пусть φ – нелинейное $C^{1,\omega}$ -гладкое отображение окружности в себя. Тогда

$$\|e^{in\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \geq c_p |n|^{1/p} \chi^{-1}\left(\frac{1}{|n|}\right), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\varphi(t+2\pi) = \varphi(t) + 2\pi k$. Ясно, что $k \in \mathbb{Z}$ не зависит от t . Полагая

$$\varphi_0(t) = \varphi(t) - kt,$$

получаем, что $\varphi_0(t+2\pi) = \varphi_0(t)$ и, таким образом, φ_0 – вещественная функция, принадлежащая $C^{1,\omega}(\mathbb{T})$. Функция φ_0 непостоянна. Остается заметить, что $\|e^{in\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = \|e^{in\varphi_0}\|_{A_p(\mathbb{T})}$, и применить теорему 1 к φ_0 . Теорема доказана.

Положим $\Theta_1 = \Theta$, где Θ – функция, определенная в (13). При $p > 1$ функции Θ_p были определены в (26).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\omega(2\delta) < 2\omega(\delta)$ при всех достаточно малых $\delta > 0$. Существует нигде не линейный $C^{1,\omega}$ -диффеоморфизм h окружности $\mathbb{T}$ такой, что

$$\|e^{inh}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(\Theta_p(|n|)), \quad |n| \rightarrow \infty, \quad n \in \mathbb{Z},$$

при всех p , $1 \leq p < 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Взяв функцию φ из теоремы 2 и положив

$$h(t) = t + \varepsilon\varphi(t),$$

где $0 < \varepsilon \leq 1$ достаточно мало, получаем нигде не линейный диффеоморфизм h окружности $\mathbb{T}$ класса $C^{1,\omega}$. Остается заметить, что

$$\|e^{inh}\|_{A_p(\mathbb{T})} = \|e^{in\varepsilon\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_p \Theta_p(|n|\varepsilon) \leq c_p \Theta_p(|n|).$$

Теорема доказана.

Соответствующие аналоги следствий 1–3 (как и оценки (1)) очевидны. Ясно также, что случай $C^{1,1}$ -гладких отображений окружности в себя исчерпывается соотношением $\|e^{in\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \simeq |n|^{1/p-1/2}$, верным для любого нелинейного $C^{1,1}$ -гладкого отображения $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ (см. замечание 1).

Укажем теперь некоторые естественные и очевидные приложения теорем 3, 4 к задаче о замене переменной в пространствах A_p .

Пусть $1 < p < 2$ и $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ – такое непрерывное отображение, что если $f \in A(\mathbb{T})$, то $f \circ \varphi \in A_p(\mathbb{T})$. Будем говорить в этом случае, что φ действует из A в A_p . Стандартные соображения (теорема о замкнутом графике) показывают, что это имеет место тогда и только тогда, когда оператор суперпозиции $f \rightarrow f \circ \varphi$ является ограниченным оператором из $A(\mathbb{T})$ в $A_p(\mathbb{T})$, что, в свою очередь, равносильно условию $\|e^{in\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пользуясь теоремой 3, получаем, что если $\omega(\delta) = o(\delta^{p-1})$, то любое $C^{1,\omega}$ -гладкое отображение φ окружности в себя, действующее из A в A_p , является линейным. Вместе с тем из теоремы 4 следует, что если $p > 1$, то при любом $\varepsilon > 0$ существует нигде не линейный $C^{1,p-1-\varepsilon}$ -диффеоморфизм h окружности $\mathbb{T}$ такой, что $\|e^{inh}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(1)$ и, следовательно, h действует из A в A_p . Можно ли здесь взять $\varepsilon = 0$, нам неизвестно (см. замечание 3).

Подобным образом легко показать, что нетривиальные $C^{1,\omega}$ -гладкие замены переменной, переводящие функции из $A(\mathbb{T})$ в $\bigcap_{p>1} A_p(\mathbb{T})$, существуют тогда и только тогда, когда $\omega(\delta)$ убывает к нулю медленнее любой степени, т.е. когда

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\omega(\delta)}{\delta^\varepsilon} = \infty \quad \text{при всех } \varepsilon > 0. \quad (60)$$

Необходимость этого условия следует из теоремы 3. Достаточность – из теоремы 4 (условие (60) влечет $\Theta_p(y) = O(1)$, $y \rightarrow \infty$, при всех p , $1 < p < 2$). Более того, если условие (60) выполнено, то существует нигде не линейный $C^{1,\omega}$ -диффеоморфизм окружности h такой, что соответствующий оператор суперпозиции является ограниченным оператором из $A(\mathbb{T})$ в $A_p(\mathbb{T})$ при всех $p > 1$.

По поводу этого диффеоморфизма отметим, что порождаемый им оператор суперпозиции $f \rightarrow f \circ h$ является ограниченным оператором из $A_p(\mathbb{T})$ в $A_{p+\varepsilon}(\mathbb{T})$ при любом p , $1 \leq p < 2$, и любом $\varepsilon > 0$. В этом легко убедиться, интерполируя l^p между l^1 и l^2 с учетом того, что указанный оператор суперпозиции является ограниченным оператором в $A_2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$ (всякий гомеоморфизм, обратный к которому удовлетворяет условию Липшица с показателем 1, порождает оператор суперпозиции, ограниченный в $L^2(\mathbb{T})$). Вместе с тем отметим, что, как было показано нами ранее совместно с А. М. Олевским в [7], всякое C^1 -гладкое отображение окружности в себя, порождающее ограниченный оператор суперпозиции в A_p , $p \neq 2$, является линейным.

В заключение упомянем одну открытую проблему, сформулированную нами в [9]: существует ли нетривиальное отображение $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ такое, что

$$\|e^{in_k\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(1),$$

где n_k , $k = 1, 2, \dots$, – какая-то (неограниченная) последовательность целых чисел. Как показал автор [9], такое отображение не может быть абсолютно непрерывным².

²В доказательстве (см. [9; замечание]) имеется неточность. Вместо целых n всюду должны быть вещественные λ .

Результаты настоящей работы были частично представлены на II-м Международном симпозиуме по рядам Фурье и их приложениям в Дюрсо в 2002 г. (см. [16]) и на конференции по гармоническому анализу HARP 2006 г. (см. [17]).

Автор благодарен Е. А. Горину за замечания, способствовавшие улучшению рукописи настоящей статьи.

Список литературы

- [1] A. Beurling, H. Helson, “Fourier–Stieltjes transforms with bounded powers”, *Math. Scand.*, **1** (1953), 120–126.
- [2] Ж.-П. Кахан, *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье*, Мир, М., 1976; пер. с фр.: J.-P. Kahane, *Séries de Fourier absolument convergentes*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.
- [3] J.-P. Kahane, “Quatre leçons sur les homéomorphismes du cercle et les séries de Fourier”, *Topics in modern harmonic analysis*. v. II (Turin–Milan, 1982), Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Roma, 1983, 955–990.
- [4] З. Л. Лейбензон, “О кольце функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье”, *УМН*, **9:3** (1954), 157–162.
- [5] J.-P. Kahane, “Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergentes”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **35:3** (1956), 249–259.
- [6] L. Alpár, “Sur une classe particulière de séries de Fourier à certaines puissances absolument convergentes”, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **3** (1968), 279–286.
- [7] V. Lebedev, A. Olevskii, “ C^1 changes of variable: Beurling–Helson type theorem and Hörmander conjecture on Fourier multipliers”, *Geom. Funct. Anal.*, **4:2** (1994), 213–235.
- [8] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*. т. 1, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*. v. I, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.
- [9] В. В. Лебедев, “Диффеоморфизмы окружности и теорема Берлинга–Хелсона”, *Функц. анализ и его прил.*, **36:1** (2002), 30–35; англ. пер.: V. V. Lebedev, “Diffeomorphisms of the circle and the Beurling–Helson theorem”, *Funct. Anal. Appl.*, **36:1** (2002), 25–29.
- [10] N. Leblanc, “Sur la réciproque de l’inégalité de Carlson”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **267** (1968), 332–334.
- [11] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
- [12] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
- [13] M. Plancherel, G. Pólya, “Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples. II”, *Comment. Math. Helv.*, **10:2** (1937), 110–163.
- [14] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
- [15] J. L. Rubio de Francia, “A Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **1:2** (1985), 1–14.
- [16] В. В. Лебедев, “Количественные оценки в теореме Берлинга–Хелсона”, II междунар. симп. *Ряды Фурье и их приложения*, Тез. докл. (Дюрсо, 2002), Ростов-на-Дону, 2002, 33–34.

- [17] V. Lebedev, “Rate of growth in Beurling–Helson theorem”, *Harmonic analysis and related problems*, Abstracts (Zaros, Crete, Greece), 2006.

В. В. Лебедев (V. V. Lebedev)

Московский государственный институт электроники и
математики (технический университет)

E-mail: lebedevhome@gmail.com

Поступила в редакцию

15.10.2009 и 15.08.2010