Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Муранов, Д. Реповш, Ф. Спаггиари, Перестройка троек многообразий, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 8, 139–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm764>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 18:00:50

УДК 513.8+515.1

Ю. В. Муранов, Д. Реповш, Ф. Спаггиари

Перестройка троек многообразий

Группы препятствий к перестройкам пары многообразий были введены Уоллом для изучения задачи перестройки многообразия с подмногообразием. Эти группы тесно связаны с задачей расщепления гомотопической эквивалентности вдоль подмногообразия, и они используются во многих топологических и геометрических приложениях.

В работе вводится понятие перестройки тройки многообразий и описываются алгебраические и геометрические свойства соответствующих групп препятствий. Затем показано, что эти группы тесно связаны с нормальными инвариантами и классическими группами препятствий к перестройкам и расщеплениям данного многообразия. В частном случае односторонних подмногообразий получены связи между введенными группами и спектральной последовательностью в теории перестроек, построенной Хэмблтоном и Харшиладзе.

Библиография: 25 названий.

§ 1. Введение

Пусть X^n — замкнутое топологическое n -мерное многообразие с фундаментальной группой $\pi_1(X)$ и гомоморфизмом ориентации $w: \pi_1(X) \rightarrow \{\pm 1\}$. Основной вопрос алгебраической и геометрической топологии состоит в описании всех возможных замкнутых топологических (кусочно линейных гладких) многообразий, которые (просто) гомотопически эквивалентны X (см., например, [1]–[3]).

В настоящей работе мы будем рассматривать топологические многообразия и простые гомотопические эквивалентности между ними (см. [1], [4]).

Две простые гомотопические эквивалентности $f_i: M_i \rightarrow X$, $i = 0, 1$, называются *эквивалентными*, если существует такой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $g: M_0 \rightarrow M_1$, что композиция $f_1 \circ g$ гомотопна f_0 . Пусть $\mathcal{S}^{TOP}(X)$ обозначает множество таких классов эквивалентности. Элементы этого множества называются *гомотопическими триангуляциями* (*s-триангуляциями*) многообразия X . Теория Ранишко о полном препятствии к перестройке (см. [1], [4]) дает отображение спектров

$$X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet \rightarrow \mathbb{L}(\pi_1(X)), \quad (1)$$

где $\mathbb{L}(\pi_1(X))$ обозначает L -спектр теории перестроек для фундаментальной группы $\pi_1(X)$ с

$$\pi_n(\mathbb{L}(\pi_1(X))) \cong L_n(\pi_1(X))$$

и $\mathbf{L}_\bullet$ обозначает односвязное накрытие Ω -спектра $\mathbb{L}(\mathbb{Z})$ с $\mathbf{L}_{\bullet 0} \simeq G/TOP$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00014), Министерства образования, науки и спорта Республики Словения (исследовательская программа № 101-509), Национального исследовательского совета и MURST Италии.

Пусть $\mathbb{S}$ – гомотопический кослой отображения в (1). Для гомотопических групп $\mathcal{S}_m(X) = \pi_m(\mathbb{S})$ мы имеем изоморфизм $\mathcal{S}_{n+1}(X) \cong \mathcal{S}^{TOP}(X)$. Алгебраическая точная последовательность теории перестроек для многообразия X (см. [1], [4])

$$\cdots \rightarrow L_{m+1}(\pi_1(X)) \rightarrow \mathcal{S}_{m+1}(X) \rightarrow H_m(X; \mathbf{L}_\bullet) \xrightarrow{\sigma} L_m(\pi_1(X)) \rightarrow \cdots \quad (2)$$

является гомотопической длинной точной последовательностью расслоения в (1). Мы имеем изоморфизм $H_n(X_+; \mathbf{L}_\bullet) \cong [X, G/TOP]$. Множество нормальных инвариантов $[X, G/TOP]$ состоит из классов нормальных кобордизмов нормальных отображений в многообразии X , и отображение ассамблеи σ задается взятием препятствия к перестройке нормального отображения (см. [2]–[4]). Изучение отображения ассамблеи тесно связано со многими проблемами топологии многообразий (см., например, [3], [5]).

Пусть $Y \subset X$ – подмногообразие коразмерности q в X . В этом случае отображение σ разлагается в композицию

$$[X, G/TOP] \rightarrow LP_{n-q}(F) \rightarrow L_n(\pi_1(X)),$$

где $LP_{n-q}(F)$ – группа препятствий к перестройкам пары многообразий (см. [1], [3]). Группа $LP_{n-q}(F)$ функториально зависит от квадрата фундаментальных групп с ориентацией

$$F = \begin{pmatrix} \pi_1(\partial U) & \longrightarrow & \pi_1(X \setminus Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(Y) & \longrightarrow & \pi_1(X) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где ∂U – граница трубчатой окрестности Y в X . Группы $LP_{n-q}(F)$ тесно связаны с другими алгебраическими объектами, появляющимися в L -теории, посредством различных типов диаграмм точных последовательностей (см. [1], [3], [6]). В частности, эти группы входят в следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathcal{S}_{n+1}(X) & \longrightarrow & H_n(X; \mathbf{L}_\bullet) & \xrightarrow{\sigma} & L_n(\pi_1(X)) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow \sigma_1 & & \downarrow = \\ \cdots & \longrightarrow & LS_{n-q}(F) & \longrightarrow & LP_{n-q}(F) & \xrightarrow{p} & L_n(\pi_1(X)) \longrightarrow \cdots \end{array} \quad (4)$$

в которой все строки являются точными последовательностями и $LS_{n-q}(F)$ обозначает группу препятствий к расщеплению. Нижняя точная последовательность дает дополнительную информацию об отображении ассамблеи. В некоторых частных случаях эта последовательность применялась для исследования проблемы реализации элементов групп Уолла нормальными отображениями замкнутых многообразий и для построения спектральной последовательности Хэмблтона и Харшиладзе в теории перестроек (см., например, [7]–[9]). В случае односторонних подмногообразий имеется много результатов о связи групп LS_* и LP_* с классическими L_* -группами [6], [10]–[16].

Пусть $Z \subset Y \subset X$ – тройка замкнутых топологических многообразий, так что n – размерность X , q – коразмерность Y в X и q' – коразмерность Z в Y .

Мы будем предполагать, что для каждой пары многообразий задано нормальное расслоение к подмногообразию (см. [1; § 7.2]). В настоящей работе мы вводим группы $LT_{n-q-q'}(X, Y, Z)$, которые содержат препятствия к перестройкам тройки многообразий. Предположим, что $n - q - q' \geq 5$. Для любого нормального отображения $(f, b) \in [X, G/TOP]$, где $f: M \rightarrow X$, мы определяем препятствие $\Theta_*(f, b) \in LT_{n-q-q'}(X, Y, Z)$, которое тривиально тогда и только тогда, когда (f, b) нормально кобордантно некоторой s -триангуляции тройки (X, Y, Z) . Понятие s -триангуляции для тройки многообразий (см. § 3) является естественным обобщением s -триангуляции для пары многообразий, определенной в [1].

Отображение Θ_* входит в следующее естественное разложение отображений σ_1 и σ :

$$[X, G/TOP] \rightarrow LT_{n-q-q'}(X, Y, Z) \rightarrow LP_{n-q}(F) \rightarrow L_n(\pi_1(X)).$$

Группы LT_* тесно связаны с точной последовательностью теории перестроек (2) и с группами препятствий к перестройкам и расщеплению для пар многообразий $Y \subset X$ и $Z \subset Y$. Эти связи определяются некоторыми косами точных последовательностей, которые содержат классические группы препятствий.

Пусть (X, Y, Z) – тройка многообразий, для которой (X, Y) и (Y, Z) являются парами Браудера–Ливси (см. [7], [17], [18]). Для такой тройки [19] Хэмблтон и Педерсен ввели группы LNS_* , которые связаны с группами препятствий к расщеплению и L_* -группами в этом случае. Группы LT_* также связаны с итерированными трансферами и с LNS_* -группами (см. [20]).

Для доказательства наших основных результатов мы будем использовать L -спектры и реализацию естественных отображений в L -теории на уровне спектров (см. [3], [4], [6], [21]–[24]).

Работа организована следующим образом. В § 2 мы напомним необходимые определения и факты о L -спектрах и их связях с теорией перестроек. Далее, мы доказываем несколько технических лемм. В § 3 мы определяем спектр $\mathbb{L}T$ с гомотопическими группами $\pi_n(\mathbb{L}T) = LT_n(X, Y, Z)$ и доказываем основную теорему работы. Затем мы получаем некоторые косы точных последовательностей, которые содержат группы $LT_n(X, Y, Z)$ и классические группы препятствий к перестройкам и расщеплениям. В § 4 мы описываем некоторые применения спектра $\mathbb{L}T$ и групп $LT_n(X, Y, Z)$ к случаю односторонних подмногообразий и их связи со спектральной последовательностью в теории перестроек, построенной Хэмблтоном и Харшиладзе в [8].

§ 2. Спектры в L -теории

В этом параграфе мы напомним некоторые основные определения и известные факты о реализации алгебраических объектов и естественных отображений в теории перестроек на уровне спектров (см. [1], [3], [4], [11], [21]–[25]). Затем мы доказываем две технические леммы.

Топологическое нормальное отображение $(f, b): M \rightarrow X$ в замкнутое топологическое n -мерное многообразие X (t -триангуляция X) определяется следующими условиями (см. [1], [4]):

- i) замкнутым топологическим n -мерным многообразием M с нормальным

блочным топологическим расслоением

$$\begin{aligned}\nu_M &= \nu_{M \subset S^{n+k}}: M \rightarrow BTOP(k), \\ \rho_M: S^{n+k} &\rightarrow S^{n+k} / \overline{S^{n+k} \setminus E(\nu_M)} = T(\nu_M);\end{aligned}$$

ii) нормальным блочным топологическим расслоением над многообразием X

$$\begin{aligned}\nu_X: X &\rightarrow BTOP(k), \\ \rho_X: S^{n+k} &\rightarrow T(\nu_X);\end{aligned}$$

iii) отображением степени один $f: M \rightarrow X$ с отображением $b: \nu_M \rightarrow \nu_X$ блочных топологических расслоений, которое покрывает f . Более того, мы имеем

$$T(b)_*(\rho_M) = \rho_X \in \pi_{n+k}(T(\nu_X)).$$

Множество топологических нормальных инвариантов многообразия X состоит из всех классов конкордантности топологических нормальных отображений $(f, b): M \rightarrow X$. В соответствии с [1] для любого $n \geq 5$ это множество совпадает с множеством $[X, G/TOP]$.

Пусть $Y \subset X$ — замкнутое подмногообразие коразмерности q в замкнутом топологическом многообразии X . В нашей работе мы будем рассматривать только *пары многообразий* (X, Y, ξ) в смысле Ранишко (см. [1; § 7.2]). Это значит, что Y является локально плоским подмногообразием и нормальное расслоение

$$\xi = \xi_{Y \subset X}: Y \rightarrow \widetilde{BTOP}(q)$$

таково, что

$$X = E(\xi) \bigcup_{S(\xi)} \overline{X \setminus E(\xi)}.$$

В частности, ассоциированное (D^q, S^{q-1}) расслоение

$$(D^q, S^{q-1}) \rightarrow (E(\xi), S(\xi)) \rightarrow Y$$

определено.

Топологическое нормальное отображение (t -триангуляция (X, Y, ξ)) задается следующим объектом (подробнее см. в [1]):

$$((f, b), (g, c)): (M, N) \rightarrow (X, Y).$$

Здесь (f, b) является t -триангуляцией многообразия X , для которой f трансверсально Y с $N = f^{-1}(Y)$, и (M, N) является топологической парой многообразий с нормальным расслоением

$$\nu: N \xrightarrow{f|_N} Y \xrightarrow{\xi} \widetilde{BTOP}(q).$$

Ограничение

$$(f, b)|_N = (g, c): N \rightarrow Y$$

является t -триангуляцией Y . Ограничение

$$(f, b)|_P = (h, d): (P, S(\nu)) \rightarrow (Z, S(\xi))$$

является t -триангуляцией $(Z, S(\xi))$, где

$$P = \overline{M \setminus E(\nu)}, \quad Z = \overline{X \setminus E(\xi)}.$$

Ограничение

$$(h, d)|_{S(\nu)}: S(\nu) \rightarrow S(\xi)$$

совпадает с индуцированным отображением

$$(g, c)^!: S(\nu) \rightarrow S(\xi)$$

и $(f, b) = (g, c)^! \cup (h, d)$.

В соответствии с [1] множество классов конкордантности t -триангуляций (X, Y, ξ) совпадает с множеством классов t -триангуляций многообразия X .

Некоторая t -триангуляция

$$((f, b), (g, c)): (M, N) \rightarrow (X, Y)$$

пары многообразий (X, Y, ξ) задает s -триангуляцию этой пары (см. [1]), если отображения

$$f: M \rightarrow X, \quad g: N \rightarrow Y, \quad h: (P, S(\nu)) \rightarrow (Z, S(\xi)) \quad (5)$$

являются s -триангуляциями.

Далее мы будем всегда предполагать, что $n - q \geq 5$. Простая гомотопическая эквивалентность $f: M \rightarrow X$ расщепляется вдоль подмногообразия Y , если она гомотопически эквивалентна отображению g , которое удовлетворяет свойствам (5). То есть отображение g является s -триангуляцией (X, Y, ξ) . Существует группа $LS_{n-q}(F)$ препятствий к расщеплению простой гомотопической эквивалентности. Эта группа зависит только от $n - q \pmod{4}$ и универсально-отталкивающего квадрата F фундаментальных групп с ориентацией (3) (см. [1]). Рассмотрим нормальное отображение $(f, b) \in [X, G/TOP]$ с $f: M \rightarrow X$. Тогда согласно [1] существует группа $LP_{n-q}(F)$ препятствий к перестройкам пары многообразий (X, Y) , которая зависит также только от $n - q \pmod{4}$ и квадрата F . Препятствие $\sigma_1(f, b) \in LP_{n-q}(F)$ к перестройке нормального отображения в пару (X, Y) будет тривиально тогда и только тогда, когда класс конкордантности (f, b) содержит s -триангуляцию пары (X, Y, ξ) .

Верхняя строка в диаграмме (4) является точной последовательностью в теории перестроек для многообразия X , а нижняя строка — точная последовательность, содержащая группы $LS_*(F)$, $LP_*(F)$ и $L_*(\pi_1(X))$. Глубокие связи между этими группами даются следующей косой точных последовательностей (см. [1] и [3]):

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & L_{n+1}(C) & \rightarrow & L_{n+1}(D) & \xrightarrow{\partial} & LS_{n-q}(F) & \rightarrow \\ & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\ & & LP_{n-q+1}(F) & & & & \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ \rightarrow & LS_{n-q+1}(F) & \rightarrow & L_{n-q+1}(B) & \rightarrow & L_n(C) & \rightarrow \end{array} \quad (6)$$

где $A = \pi_1(\partial U)$, $B = \pi_1(Y)$, $C = \pi_1(X \setminus Y)$ и $D = \pi_1(X)$. Отображение

$$\partial: L_{n+1}(\pi_1(X)) \rightarrow LS_{n-q}(F)$$

в диаграмме (6) совпадает с композицией

$$L_{n+1}(\pi_1(X)) \rightarrow \mathcal{S}_{n+1}(X) \rightarrow LS_{n-q}(F),$$

возникающей из диаграммы (4).

Пусть $\mathcal{S}_{n+1}(X, Y, \xi)$ — множество классов конкордантности s -триангуляций пары многообразий (X, Y, ξ) (см. [1]).

Из [17] следует, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathcal{S}_{n+1}(X, Y, \xi) & \longrightarrow & H_n(X; \mathbf{L}_\bullet) & \xrightarrow{\sigma_1} & LP_{n-q}(F) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & \mathcal{S}_{n-q+1}(Y) & \longrightarrow & H_{n-q}(Y; \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & L_{n-q}(Y) \longrightarrow \cdots \end{array}, \quad (7)$$

строки которой — точные последовательности. Нижняя строка является алгебраической точной последовательностью теории перестроек для многообразия Y . Заметим, что множество $\mathcal{S}_{n+1}(X, Y, \xi)$ имеет групповую структуру.

Теперь мы напомним некоторые необходимые определения и свойства, касающиеся гомотопической категории спектров (см., например, [25]). Спектр $\mathbb{E}$ состоит из семейства CW -комплексов $\{E_n, *\}$, $n \in \mathbb{Z}$, с семейством клеточных отображений $\{\varepsilon_n: SE_n \rightarrow E_{n+1}\}$, где SE_n является надстройкой пространства E_n .

Для каждого отображения ε_n существует сопряженное отображение $\varepsilon'_n: E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}$. Спектр $\mathbb{E}$ называется Ω -спектром, если все сопряженные отображения являются гомотопическими эквивалентностями.

Напомним определение спектра $\Sigma \mathbb{E}$ с $\{\Sigma \mathbb{E}\}_n = \mathbb{E}_{n+1}$ и $\{\Sigma \varepsilon\}_n = \varepsilon_{n+1}$. Легко видеть, что функтор Σ имеет обратный функтор Σ^{-1} . Таким образом, можно определить итерированные функторы Σ^k , $k \in \mathbb{Z}$, на категории спектров. Имеет место изоморфизм гомотопических групп $\pi_n(\mathbb{E}) = \pi_{n+k}(\Sigma^k \mathbb{E})$ для любого спектра $\mathbb{E}$ (см. [25]).

В гомотопической категории спектров понятия универсально-отталкивающего и универсально-притягивающего квадрата эквивалентны. Таким образом, гомотопически коммутативный квадрат спектров

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{F} \end{array}$$

является универсально-притягивающим (универсально-отталкивающим) квадратом тогда и только тогда, когда слои (кослои) двух горизонтальных или двух вертикальных отображений естественно гомотопически эквивалентны (см., например, [8]).

Пусть $f: \pi \rightarrow \pi'$ — гомоморфизм ориентированных групп. Тогда может быть определено расслоение Ω -спектров

$$\mathbb{L}(\pi) \rightarrow \mathbb{L}(\pi') \rightarrow \mathbb{L}(f), \quad (8)$$

как показано, например, в [21]. Здесь мы имеем $\pi_n(\mathbb{L}(\pi)) = L_n(\pi)$ и аналогичные соотношения для других спектров. Гомотопическая длинная точная последовательность корасслоения (8) дает относительно точную последовательность L -групп для отображения f

$$\cdots \rightarrow L_n(\pi) \rightarrow L_n(\pi') \rightarrow L_n(f) \rightarrow L_{n-1}(\pi) \rightarrow \cdots.$$

Пусть X – замкнутое n -мерное топологическое многообразие и $p: E \rightarrow X$ – расслоение со слоем M^m (M^m – m -мерное замкнутое топологическое многообразие). Тогда отображение трансфера

$$p^*: L_n(\pi_1(X)) \rightarrow L_{n+m}(\pi_1(E))$$

может быть определено (см. [3], [23], [24]). Это отображение реализуется на уровне спектров отображением Ω -спектров

$$p^!: \mathbb{L}(\pi_1(X)) \rightarrow \Sigma^{-m}\mathbb{L}(\pi_1(E)).$$

Для пары многообразий (X, Y) рассмотрим гомотопически коммутативную диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{L}(\pi_1(Y)) & \xrightarrow{p_1^!} & \Sigma^{-q}\mathbb{L}(\pi_1(\partial U) \rightarrow \pi_1(U)) & \xrightarrow{\alpha} & \Sigma^{-q}\mathbb{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) \\ & \searrow p^! & \downarrow \delta & & \downarrow \delta_1 \\ & & \Sigma^{1-q}\mathbb{L}(\pi_1(\partial U)) & \xrightarrow{\beta} & \Sigma^{1-q}\mathbb{L}(\pi_1(X \setminus Y)) \end{array}, \quad (9)$$

где левые отображения являются отображениями трансфера, а правые горизонтальные отображения индуцированы горизонтальными отображениями квадрата F .

Определим спектр $\mathbb{L}S(F)$ как гомотопический кослой отображения

$$\Sigma^{-1}(\alpha p_1^!): \Sigma\mathbb{L}(\pi_1(Y)) \rightarrow \Sigma^{-q-1}\mathbb{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X))$$

и спектр $\mathbb{L}P(F)$ как гомотопический кослой отображения

$$\Sigma^{-1}(\beta p^!): \Sigma^{-1}\mathbb{L}(\pi_1(Y)) \rightarrow \Sigma^{-q}\mathbb{L}(\pi_1(X \setminus Y))$$

(см. подробнее [10], [11], [14], [22]). Пусть $LS_n(F)$ и $LP_n(F)$ – группы препятствий к расщеплению и группы препятствий к перестройке пары многообразий (X, Y) соответственно. Тогда имеют место изоморфизмы

$$\pi_n(\mathbb{L}S(F)) \cong LS_n(F), \quad \pi_n(\mathbb{L}P(F)) \cong LP_n(F).$$

Используя эти определения и гомотопически коммутативную диаграмму спектров (9), мы получаем следующую гомотопически коммутативную диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^{-1}\mathbb{L}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \Sigma^{-q-1}\mathbb{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) & \longrightarrow & \mathbb{L}S(F) \\ = \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^{-1}\mathbb{L}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \Sigma^{-q}\mathbb{L}(\pi_1(X \setminus Y)) & \longrightarrow & \mathbb{L}P(F) \end{array}, \quad (10)$$

в которой правый квадрат является универсально-отталкивающим квадратом. Гомотопические длинные точные последовательности отображений из правого квадрата дают коммутативную диаграмму (6).

Пусть $Y^{n-q} \subset X^n$ – замкнутое подмногообразие коразмерности q в n -мерном замкнутом топологическом многообразии X . Тогда коммутативная диаграмма (4) определена.

ЛЕММА 1. В приведенных выше обозначениях имеет место такой гомотопически коммутативный квадрат спектров

$$\begin{array}{ccc} X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet & \longrightarrow & \mathbb{L}(\pi_1(X)) \\ \downarrow & & \downarrow = \\ \Sigma^q \mathbb{L}P(F) & \longrightarrow & \mathbb{L}(\pi_1(X)) \end{array}, \quad (11)$$

что коммутативная диаграмма (4) получается индуцированным отображением гомотопической длинной точной последовательности верхнего отображения в (11) в соответствующую точную последовательность нижнего отображения в (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_{n-q}(Y; \mathbb{L}_\bullet) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X, X \setminus Y; \mathbb{L}_\bullet) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & H_{n-1}(X \setminus Y; \mathbb{L}_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(X; \mathbb{L}_\bullet) \end{array}, \quad (12)$$

где верхнее горизонтальное отображение является трансфером. Вертикальное отображение и нижнее горизонтальное отображение происходят из гомологической длинной точной последовательности пары $(X, X \setminus Y)$. Таким образом, диаграмма (12) порождается следующей гомотопически коммутативной диаграммой спектров:

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^{-1}(Y_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & \Sigma^{-q-1}(\mathrm{Cof} \, \mathbf{j}) & \longrightarrow & * \\ = \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^{-1}(Y_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & \Sigma^{-q}((X \setminus Y)_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & \Sigma^{-q}(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) \end{array}, \quad (13)$$

где $\mathrm{Cof} \, \mathbf{j}$ – гомотопический кослой естественного вложения

$$\mathbf{j}: (X \setminus Y)_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet \rightarrow X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet.$$

Верхняя строка и вертикальные строки в диаграмме (13) являются корасслоениями. Кослой двух правых вертикальных отображений в (13) гомотопически эквивалентны $\Sigma^{-q}(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet)$. Кослой двух правых вертикальных отображений в (10) гомотопически эквивалентны $\Sigma^{-q}\mathbb{L}(\pi_1(X))$. Отображение ассамблеи в (1) (см. [1]) индуцирует отображения спектров из левого квадрата диаграммы (13) в левый квадрат диаграммы (10). По [25] мы получаем отображения спектров из правого столбца диаграммы (13) в правый столбец диаграммы (10). Таким образом, мы имеем гомотопически коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{-q}(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & \mathbb{L}P(F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^{-q}(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & \Sigma^{-q}\mathbb{L}(\pi_1(X)) \end{array}.$$

Применение функтора Σ^q к этой диаграмме дает требуемый результат.

ЛЕММА 2. Существует такой гомотопически коммутативный квадрат спектров

$$\begin{array}{ccc} X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet & \longrightarrow & \Sigma^q \mathbb{L}P(F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^q(Y_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & \Sigma^q(\mathbb{L}(\pi_1(Y))) \end{array}, \quad (14)$$

что коммутативная диаграмма (7) получается индуцированным отображением гомотопической длинной точной последовательности верхнего отображения в (14) в соответствующую точную последовательность нижнего отображения в (14).

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

§ 3. Перестройки троек многообразий

Пусть $Z \subset Y \subset X$ — такая тройка замкнутых топологических многообразий, что n — размерность X , q — коразмерность Y в X и q' — коразмерность Z в Y . В этом параграфе мы предполагаем, что для данной тройки заданы пары многообразий (X, Y, ξ) и (Y, Z, ξ_1) . Иногда мы не будем записывать расслоения в обозначениях, если это не будет приводить к недоразумению. Мы предполагаем, что размерность k многообразия Z больше или равна 5, т.е. $k = n - q - q' \geq 5$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Топологическое нормальное отображение (*t-триангуляция*)

$$((f, b), (g, c), (h, d)): (M, N, K) \rightarrow (X, Y, Z)$$

тройки многообразий (X, Y, Z) состоит из *t*-триангуляций пар многообразий

$$\begin{aligned} ((f, b), (g, c)): (M, N) &\rightarrow (X, Y), \\ ((g, c), (h, d)): (N, K) &\rightarrow (Y, Z). \end{aligned}$$

В частности, топологическое нормальное отображение

$$(f, b): M \rightarrow X$$

топологически трансверсально к Y относительно ξ с $N = f^{-1}(Y)$ и топологическое нормальное отображение

$$(g, c): N \rightarrow Y$$

топологически трансверсально к Z относительно ξ_1 с $K = g^{-1}(Z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем *t*-триангуляцию

$$((f, b), (g, c), (h, d)): (M, N, K) \rightarrow (X, Y, Z)$$

тройки (X, Y, Z) *s-триангуляцией*, если составляющие *t*-триангуляции

$$\begin{aligned} ((f, b), (g, c)): (M, N) &\rightarrow (X, Y), \\ ((g, c), (h, d)): (N, K) &\rightarrow (Y, Z) \end{aligned}$$

являются *s*-триангуляциями.

Рассмотрим топологическое нормальное отображение $(f, b) \in [X, G/TOP]$ с $f: M \rightarrow X$. Из топологической теоремы трансверсальности (см. [1]) следует, что (f, b) задает некоторую t -триангуляцию

$$((f, b), (g, c), (h, d)): (M, N, K) \rightarrow (X, Y, Z)$$

тройки (X, Y, Z) . Мы будем говорить, что существует перестройка многообразия M до получения s -триангуляции тройки (X, Y, Z) , если полученная t -триангуляция нормально кобордантна некоторой s -триангуляции тройки многообразий (X, Y, Z) .

Напомним, что множество классов нормальных кобордизмов нормальных отображений в данное замкнутое топологическое многообразие X совпадает с множеством $[X, G/TOP] = H_n(X; \mathbf{L}_\bullet)$ (см. [1], [4]).

Квадрат F в (3) и группы препятствий $LP_*(F)$ и $LS_*(F)$ определены для пары многообразий $Y \subset X$. Обозначим через

$$\Psi = \begin{pmatrix} \pi_1(\partial V) & \longrightarrow & \pi_1(Y \setminus Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(Z) & \longrightarrow & \pi_1(Y) \end{pmatrix} \quad (15)$$

квадрат фундаментальных групп с ориентациями, где ∂V — граница трубчатой окрестности Z в Y . Тогда группы препятствий к перестройкам $LP_*(\Psi)$ и группы препятствий к расщеплению $LS_*(\Psi)$ определены для пары многообразий (Y, Z) .

Рассмотрим отображение

$$v: LP_{n-q+1}(F) \rightarrow LS_{n-q-q'}(\Psi),$$

определяемое композицией

$$LP_{n-q+1}(F) \rightarrow \mathcal{S}_{n+1}(X, Y, \xi) \rightarrow \mathcal{S}_{n-q+1}(Y) \rightarrow LS_{n-q-q'}(\Psi). \quad (16)$$

Два первых отображения композиции (16) лежат в диаграмме (7), а третье отображение $\mathcal{S}_{n-q+1}(Y) \rightarrow LS_{n-q-q'}(\Psi)$ лежит в диаграмме, аналогичной диаграмме (4), записанной для пары многообразий (Y, Z) .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображение v может быть реализовано отображением Ω -спектров*

$$\mathbf{v}: \mathbb{L}P(F) \rightarrow \Sigma^{q'+1}\mathbb{L}S(\Psi)$$

так, что индуцированный гомоморфизм гомотопических групп

$$\mathbf{v}_*: \pi_{n-q+1}(\mathbb{L}P(F)) = LP_{n-q+1}(F) \rightarrow LS_{n-q-q'}(\Psi) = \pi_{n-q+1}(\Sigma^{q'+1}\mathbb{L}S(\Psi))$$

совпадает с v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathbb{S}(X, Y, \xi)$ гомотопический кослой отображения

$$X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet \rightarrow \Sigma^q \mathbb{L}P(F),$$

рассмотренного в утверждении леммы 2. Тогда мы имеем

$$\pi_{n+1}(\mathbb{S}(X, Y, \xi)) = \mathcal{S}_{n+1}(X, Y, \xi).$$

Композиция

$$LP_{n-q+1}(F) \rightarrow \mathcal{S}_{n+1}(X, Y, \xi) \rightarrow \mathcal{S}_{n-q+1}(Y)$$

отображений, возникающих из диаграммы (7), реализуется следующей композицией отображений спектров:

$$\mathbb{L}P(F) \rightarrow \Sigma^{-q} \mathcal{S}_{n+1}(X, Y, \xi) \rightarrow \mathbb{S}(Y)$$

по лемме 2 и [25]. Отображение $\mathcal{S}_{n-q+1}(Y) \rightarrow LS_{n-q-q'}(\Psi)$ реализуется на уровне спектров по лемме 1 для пары многообразий (Y, Z) . Таким образом, отображение v реализуется на уровне спектров, что и требовалось доказать.

Обозначим через $\mathbb{L}T(X, Y, Z)$ гомотопический кослой отображения $\Sigma^{-q'-1} \mathbf{v}$ и через

$$LT_n(X, Y, Z) = \pi_n(\mathbb{L}T(X, Y, Z))$$

— гомотопические группы полученного спектра. В частности, мы имеем корасслоение Ω -спектров

$$\Sigma^{-q'-1} \mathbb{L}P(F) \rightarrow \mathbb{L}S(\Psi) \rightarrow \mathbb{L}T(X, Y, Z). \quad (17)$$

Гомотопическая длинная точная последовательность корасслоения (17) дает следующую точную последовательность:

$$\cdots \rightarrow LP_{n-q+1}(F) \rightarrow LS_{n-q-q'}(\Psi) \rightarrow LT_{n-q-q'}(X, Y, Z) \rightarrow \cdots. \quad (18)$$

ТЕОРЕМА 1. *Существует отображение спектров*

$$\Theta: X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet \rightarrow \Sigma^{q+q'} \mathbb{L}T(X, Y, Z),$$

которое индуцирует гомоморфизм

$$\Theta_*: H_n(X; \mathbf{L}_\bullet) \rightarrow LT_{n-q-q'}(X, Y, Z)$$

гомотопических групп. Пусть $(f, b) \in [X, G/TOP] = H_n(X; \mathbf{L}_\bullet)$ — топологическое нормальное отображение с $f: M \rightarrow X$. Тогда (f, b) нормально кобордантно некоторой s -триангуляции тройки (X, Y, Z) тогда и только тогда, когда $\Theta_*(f, b) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{L}P(F) & \longrightarrow & \Sigma^{-q}\mathbb{S}(X, Y, \xi) & \longrightarrow & \Sigma^{-q+1}(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) \\ \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{L}P(F) & \longrightarrow & \Sigma^{q'+1}\mathbb{L}S(\Psi) & \longrightarrow & \Sigma^{q'+1}\mathbb{L}T(X, Y, Z) \end{array}, \quad (19)$$

в которой левый квадрат существует по предложению 1 и горизонтальные строки являются корасслоениями. Следовательно, существует такое правое вертикальное отображение (см. [25]), что диаграмма (19) будет гомотопически коммутативна. Применение функтора Σ^{q-1} к правому вертикальному отображению дает отображение Θ . Заметим здесь, что правый квадрат диаграммы (19) является универсально-отталкивающим (и универсально-притягивающим), поскольку слои горизонтальных отображений естественно гомотопически эквивалентны. Рассмотрение гомотопических длинных точных последовательностей строк гомотопически коммутативной диаграммы (19) дает следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathcal{S}_{n+1}(X, Y, \xi) & \xrightarrow{\mu} & H_n(X; \mathbf{L}_\bullet) & \xrightarrow{\sigma_1} & LP_{n-q}(F) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \omega & & \downarrow \Theta_* & & \downarrow = \\ \cdots & \longrightarrow & LS_{n-q-q'}(\Psi) & \xrightarrow{\nu} & LT_{n-q-q'}(X, Y, Z) & \xrightarrow{\gamma} & LP_{n-q}(F) \longrightarrow \cdots \end{array} \quad (20)$$

Предположим, что нормальное отображение (f, b) нормально кобордантно s -триангуляции

$$((f', b'), (g', c'), (h', d')): (M, N, K) \rightarrow (X, Y, Z).$$

Гомоморфизм Θ_* зависит только от класса нормального кобордизма $x = [(f, b)] = [(f', b')] \in H_n(X; \mathbf{L}_\bullet)$. По определению s -триангуляции тройки (X, Y, Z) представитель $((f', b'), (g', c'))$ класса x лежит в множестве $\mathcal{S}_{n+1}(X, Y, \xi)$, которое состоит из классов конкордантности s -триангуляций пары многообразий (X, Y, ξ) [1]. Обозначим через y класс $((f', b'), (g', c'))$ в $\mathcal{S}_{n+1}(X, Y, \xi)$. Тогда $x = \mu(y)$. По определению s -триангуляции $((f', b'), (g', c'), (h', d'))$ мы получаем, что простая гомотопическая эквивалентность $g': N \rightarrow Y$ уже расщеплена вдоль подмногообразия Z . Следовательно, по определению отображения ω мы имеем $\omega(y) = 0 \in LS_{n-q-q'}(\Psi)$ и $\nu\omega(y) = 0$. Тогда коммутативность диаграммы (20) влечет

$$\Theta_*(x) = \Theta_*\mu(y) = \nu\omega(y) = 0.$$

Это доказывает первую импликацию.

Обратно, пусть $\Theta_*(x) = 0$ для некоторого элемента $x = [(f, b)] \in H_n(X; \mathbf{L}_\bullet)$.

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A_n & \xrightarrow{=} & A_n \\
 \downarrow \tau & & \downarrow \lambda \\
 \mathcal{S}_{n+1}(X, Y, \xi) & \xrightarrow{\mu} & H_n(X; \mathbf{L}_\bullet) \\
 \downarrow \omega & & \downarrow \Theta_* \\
 LS_{n-q-q'}(\Psi) & \xrightarrow{\nu} & LT_{n-q-q'}(X, Y, Z) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A_{n-1} & \xrightarrow{=} & A_{n-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}, \quad (21)$$

в которой вертикальные столбцы – точные последовательности. Диаграмма (21) следует из правого универсально-отталкивающего квадрата в (19). Здесь A_i – гомотопические группы гомотопического кослоя вертикального отображения в правом квадрате диаграммы (19). Поскольку $\Theta_*(x) = 0$, существует такой элемент $a \in A_n$, что $\lambda(a) = x$ и, следовательно, $x = \mu\tau(a)$. Класс $\tau(a) \in \mathcal{S}_{n+1}(X, Y, \xi)$ представляется s -триангуляцией

$$((f, b), (g, c)): (M, N) \rightarrow (X, Y).$$

Поскольку $\omega \circ \tau = 0$, то s -триангуляция $(g, c): N \rightarrow Y$ гомотопна s -триангуляции

$$((g_1, c_1), (h, d)): (N, K) \rightarrow (Y, Z).$$

Пусть $F: N \times I \rightarrow Y$ – некоторая гомотопия с $F|_{N \times 0} = g$, $F|_{N \times 1} = g_1$. По определению мы имеем трубчатую окрестность Y в X с нормальным расслоением ξ , для которой $g^*(\xi)$ будет трубчатой окрестностью N в M . Мы можем записать индуцированное расслоение $F^*(\xi)$ над $N \times I$ как $g^*(\xi) \times I$. Следовательно, мы можем продолжить гомотопию F посредством гомотопии $G: M \times I \rightarrow X$ с $G(x, t) = g(x)$ для таких $x \in M$, которые не лежат в трубчатой окрестности подмногообразия N . Ограничение $G|_{M \times 1}$ дает s -триангуляцию тройки (X, Y, Z) .

ТЕОРЕМА 2. В приведенных выше обозначениях имеет место коммутативная диаграмма точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow & L_n(C) & \rightarrow & LP_{n-q}(F) & \rightarrow & LS_{k-1}(\Psi) & \rightarrow \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & LT_k(X, Y, Z) & & L_{n-q}(\pi_1(Y)) & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 \rightarrow & LS_k(\Psi) & \rightarrow & LP_k(\Psi) & \rightarrow & L_{n-1}(C) & \rightarrow
 \end{array}, \quad (22)$$

где $k = n - q - q'$ – размерность подмногообразия Z и $C = \pi_1(X \setminus Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диаграмма (6) для пары многообразий (X, Y) порождается следующим универсально-отталкивающим квадратом спектров [25] (см. также [6], [8] и [11] для случая односторонних подмногообразий):

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^q \mathbb{L}P(F) & \longrightarrow & \mathbb{L}(\pi_1(X)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^q \mathbb{L}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \mathbb{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) \end{array}, \quad (23)$$

где верхнее горизонтальное отображение следует из диаграммы (11), а левое вертикальное отображение является отображением из диаграммы (14).

Для пары многообразий (Y, Z) существует аналогичный универсально-отталкивающий квадрат спектров

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{q+q'} \mathbb{L}P(\Psi) & \longrightarrow & \Sigma^q \mathbb{L}(\pi_1(Y)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^{q+q'} \mathbb{L}(\pi_1(Z)) & \longrightarrow & \Sigma^q \mathbb{L}(\pi_1(Y \setminus Z) \rightarrow \pi_1(Y)) \end{array}, \quad (24)$$

записанный со сдвигом размерностей. Из диаграмм (23) и (24), используя определение спектра $\mathbb{L}T(X, Y, Z)$, получаем гомотопически коммутативную диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^{q+q'} \mathbb{L}T(X, Y, Z) & \longrightarrow & \Sigma^q \mathbb{L}P(F) & \longrightarrow & \Sigma^{q+q'+1} \mathbb{L}S(\Psi) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^{q+q'} \mathbb{L}P(\Psi) & \longrightarrow & \Sigma^q \mathbb{L}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \Sigma^{q+q'+1} \mathbb{L}S(\Psi) \end{array}, \quad (25)$$

где существование левого отображения следует из [25]. Левый квадрат в диаграмме (25) является универсально-отталкивающим квадратом, поскольку гомотопические кослои левых горизонтальных отображений естественно гомотопически эквивалентны. Гомотопический кослой среднего вертикального отображения будет $\Sigma^1 \mathbb{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X))$, как следует из диаграмм (6) и (23). Рассматривая гомотопические длинные точные последовательности в левом квадрате диаграммы (25), мы получаем диаграмму из утверждения теоремы.

Заметим, что точная последовательность (18) лежит в коммутативной диаграмме (22).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $q \geq 3$ – коразмерность подмногообразия Y в многообразии X и $q' \geq 3$ – коразмерность подмногообразия Z в многообразии Y . Тогда имеет место изоморфизм

$$LT_{n-q-q'}(X, Y, Z) = L_n(\pi_1(X)) \oplus L_{n-q}(\pi_1(Y)) \oplus L_{n-q-q'}(\pi_1(Z)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с [1] мы имеем следующие изоморфизмы:

$$LP_{n-q}(F) \cong L_n(\pi_1(X)) \oplus L_{n-q}(\pi_1(Y))$$

для $q \geq 3$ и

$$\begin{aligned} LP_k(\Psi) &\cong L_{n-q}(\pi_1(Y)) \oplus L_k(\pi_1(Z)), \\ LS_k(\Psi) &\cong L_k(Z) \end{aligned}$$

для $q' \geq 3$. Для $q \geq 3$ мы еще имеем изоморфизм фундаментальных групп $C = \pi_1(X \setminus Y) \cong \pi_1(X)$. Используя диаграмму (6), мы можем записать часть диаграммы (22) в следующей форме:

$$\begin{array}{ccccc} L_n(\pi_1(X)) & \xrightarrow{\text{mono}} & L_n(\pi_1(X)) \oplus L_{n-q}(\pi_1(Y)) & & \\ & \searrow & \nearrow & \text{epi} \searrow & \\ & & LT_k(X, Y, Z) & & L_{n-q}(\pi_1(Y)), \\ & \nearrow & \searrow & \text{epi} \nearrow & \\ L_k(\pi_1(Z)) & \xrightarrow{\text{mono}} & L_k(\pi_1(Z)) \oplus L_{n-q}(\pi_1(Y)) & & \end{array} \quad (26)$$

где $k = n - q - q'$. В частности, диаграмма (26) содержит короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow L_n(\pi_1(X)) \rightarrow LT_k(X, Y, Z) \rightarrow L_k(\pi_1(Z)) \oplus L_{n-q}(\pi_1(Y)) \rightarrow 0.$$

Так как верхнее горизонтальное отображение в диаграмме (26) имеет левое обратное отображение и отображение

$$LT_k(X, Y, Z) \rightarrow L_n(\pi_1(X)) \oplus L_{n-q}(\pi_1(Y))$$

эпиморфно, то отображение $L_n(\pi_1(X)) \rightarrow LT_k(X, Y, Z)$ имеет левое обратное отображение. Это дает нужный изоморфизм.

Обозначим через $\mathbb{S}(X, Y, Z)$ гомотопический кослой отображения Θ , полученного в теореме 1. Тогда гомотопические группы

$$\mathcal{S}_n(X, Y, Z) = \pi_n(\mathbb{S}(X, Y, Z))$$

будут естественным обобщением структурных групп $\mathcal{S}_n(X)$ и $\mathcal{S}_n(X, Y, \xi)$. Из расслоения

$$X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet \xrightarrow{\Theta} \Sigma^{q+q'} \mathbb{L}T(X, Y, Z) \longrightarrow \mathbb{S}(X, Y, Z)$$

мы получаем гомотопическую длинную точную последовательность

$$\cdots \rightarrow LT_{k+1}(X, Y, Z) \rightarrow \mathcal{S}_{n+1}(X, Y, Z) \rightarrow H_n(X; \mathbf{L}_\bullet) \rightarrow LT_k(X, Y, Z) \rightarrow \cdots, \quad (27)$$

где $k = n - q - q'$ — размерность подмногообразия Z . Точная последовательность (27) для тройки многообразий (X, Y, Z) обобщает как точную последовательность теории перестроек (2) для многообразия X , так и верхнюю точную последовательность в диаграмме (7) для пары многообразий (X, Y) .

ТЕОРЕМА 4. В приведенных выше обозначениях имеет место коммутативная диаграмма точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow & \mathcal{S}_{n+1}(X, Y, Z) & \rightarrow & H_n(X; \mathbf{L}_\bullet) & \rightarrow & LP_{n-q}(F) & \rightarrow \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
 & & \mathcal{S}_{n+1}(X, Y, \xi) & & LT_k(X, Y, Z) & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 \rightarrow & LP_{n-q+1}(F) & \rightarrow & LS_k(\Psi) & \rightarrow & \mathcal{S}_n(X, Y, Z) & \rightarrow
 \end{array} \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правый квадрат в диаграмме (19) является универсально-отталкивающим квадратом. Следовательно, кослои двух правых вертикальных отображений естественно гомотопически эквивалентны $\Sigma^{-q+1}\mathbb{S}(X, Y, Z)$. Теперь гомотопические длинные точные последовательности отображений, составляющих этот квадрат, дают диаграмму (26). Таким образом, теорема доказана.

Заметим, что диаграмма (28) является относительной версией диаграммы, описанной в [1; предложение 7.2.6, п. iv].

ТЕОРЕМА 5. В приведенных выше обозначениях существует коммутативная диаграмма точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow & \mathcal{S}_n(X \setminus Y) & \rightarrow & \mathcal{S}_n(X, Y) & \rightarrow & LS_{k-1}(\Psi) & \rightarrow \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
 & & \mathcal{S}_n(X, Y, Z) & & \mathcal{S}_{n-q}(Y) & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 \rightarrow & LS_k(\Psi) & \rightarrow & \mathcal{S}_{n-q}(Y, Z) & \rightarrow & \mathcal{S}_{n-1}(X \setminus Y) & \rightarrow
 \end{array} \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 мы можем записать коммутативный квадрат спектров

$$\begin{array}{ccc}
 X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet & \longrightarrow & X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Sigma^q(Y_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & \Sigma^q(Y_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet)
 \end{array}, \quad (30)$$

в котором горизонтальные отображения тождественны. Из диаграммы (25) следует гомотопически коммутативный квадрат спектров

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma^{q+q'}\mathbb{L}T(X, Y, Z) & \longrightarrow & \Sigma^q\mathbb{L}P(F) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Sigma^{q+q'}\mathbb{L}P(\Psi) & \longrightarrow & \Sigma^q\mathbb{L}(\pi_1(Y))
 \end{array}. \quad (31)$$

Рассмотрим естественные отображения спектров из диаграммы (30) в соответствующие спектры диаграммы (31), так что мы получаем гомотопически коммутативную диаграмму в форме куба. Коммутативность этой диаграммы следует из определения спектра $LT(X, Y, Z)$ аналогично леммам 1 и 2. Квадраты (30) и (31) универсально-отталкивающие. Следовательно, кослои отображений спектров из

квадрата (30) в спектры из квадрата (31) дают универсально-отталкивающий квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}(X, Y, Z) & \longrightarrow & \mathbb{S}(X, Y, \xi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^q \mathbb{S}(Y, Z, \xi_1) & \longrightarrow & \Sigma^q \mathbb{S}(Y) \end{array} \quad (32)$$

Гомотопические длинные точные последовательности отображений из универсально-отталкивающего квадрата (32) дают диаграмму (29).

СЛЕДСТВИЕ. В приведенных выше обозначениях существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots \rightarrow & \mathcal{S}_{n+1}(X, Y, Z) & \rightarrow & H_n(X; \mathbf{L}_\bullet) & \rightarrow & LT_k(X, Y, Z) & \rightarrow \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots \rightarrow & \mathcal{S}_{n-q+1}(Y, Z) & \rightarrow & H_{n-q}(Y; \mathbf{L}_\bullet) & \rightarrow & LP_k(\Psi) & \rightarrow \cdots, \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots \rightarrow & \mathcal{S}_n(X \setminus Y) & \rightarrow & H_{n-q}(X \setminus Y; \mathbf{L}_\bullet) & \rightarrow & L_{n-1}(X \setminus Y) & \rightarrow \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array} \quad (33)$$

в которой строки и столбцы являются точными последовательностями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гомотопические длинные точные последовательности отображений гомотопически коммутативного квадрата спектров

$$\begin{array}{ccc} X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet & \longrightarrow & \Sigma^{q+q'} \mathbb{L}T(X, Y, Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^q(Y_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & \Sigma^{q+q'} \mathbb{L}P(\Psi) \end{array}$$

дают коммутативную диаграмму (33).

§ 4. Применение к односторонним подмногообразиям

В этом параграфе мы рассматриваем тройки многообразий $Z \subset Y \subset X$, где $Y \subset X$ и $Z \subset Y$ – пары Браудера–Ливси. В этом случае (см. [17] и [18]) Y является односторонним подмногообразием коразмерности 1 в многообразии X , а Z является односторонним подмногообразием коразмерности 1 в многообразии Y .

Квадрат F фундаментальных групп, рассмотренный в (3), имеет следующую форму:

$$F = \begin{pmatrix} \pi_1(\partial U) & \longrightarrow & \pi_1(X \setminus Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(Y) & \longrightarrow & \pi_1(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \xrightarrow{\cong} & A \\ \downarrow i_- & & \downarrow i_+ \\ B^- & \xrightarrow{\cong} & B^+ \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Все группы в квадрате (34) ориентированы. Более того, ориентация группы B^- отличается от ориентации группы B^+ вне образов вертикальных отображений (которые являются вложениями индекса 2). Все отображения в квадрате F (34), кроме нижнего горизонтального отображения, сохраняют ориентацию. Нижний изоморфизм сохраняет ориентацию на образе i_- и меняет ориентацию вне этого образа. В этом случае группы препятствий к расщеплению $LS_*(F)$ называются *группами Браудера–Ливси*, обозначаемыми $LN_*(A \rightarrow B^+) = LN_*(A \rightarrow B)$. Мы имеем также изоморфизм [15]

$$LP_n(F) \cong L_{n+1}(i_-^*),$$

где $i_-^*: L_{n+1}(B^-) \rightarrow L_{n+1}(A)$ – отображение трансфера.

Квадрат Ψ (15) фундаментальных групп для пары многообразий $Z \subset Y$ имеет вид

$$\Psi = F^- = \begin{pmatrix} A & \xrightarrow{\cong} & A \\ \downarrow i_+ & & \downarrow i_- \\ B^+ & \xrightarrow{\cong} & B^- \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Квадрат (35) совпадает с квадратом (34) как коммутативный квадрат групп.

Аналогично § 3 для тройки многообразий (X, Y, Z) с парами Браудера–Ливси (X, Y) и (Y, Z) мы можем определить спектр $\mathbb{L}T(X, Y, Z)$ и группы $LT_*(X, Y, Z)$ препятствий к перестройке тройки многообразий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Спектр $\mathbb{L}T(X, Y, Z)$ и группы $LT_n(X, Y, Z)$ функториально зависят от вложения $A \rightarrow B$ индекса 2 ориентированных групп и числа $n \pmod{4}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в этом случае левый универсально-отталкивающий квадрат

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^2 \mathbb{L}T(X, Y, Z) & \longrightarrow & \mathbb{L}(i_-^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^1 \mathbb{L}(i_+^*) & \longrightarrow & \Sigma^1 \mathbb{L}(B^-) \end{array}, \quad (36)$$

который возникает из диаграммы (25). Правое вертикальное отображение и нижнее горизонтальное отображение зависят функториально от вложения $A \rightarrow B$ ориентированных групп, поскольку реализация диаграммы (6) на уровне спектров функториальна (см. [15], [21]). Из этих отображений мы можем получить спектр $\Sigma^2 \mathbb{L}T(X, Y, Z)$ в (36), используя конструкцию универсально-притягивающего квадрата, которая функториальна. Отсюда немедленно следует утверждение предложения.

По предложению 2 мы можем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}T(F) &= \mathbb{L}T(F^+) = \mathbb{L}T(X, Y, Z), \\ LT_*(F) &= LT_*(F^+) = LT_*(A \rightarrow B) = LT_*(A \rightarrow B^+) = LT_*(X, Y, Z) \end{aligned}$$

в рассматриваемом случае.

ТЕОРЕМА 6. В этих обозначениях существует коммутативная диаграмма точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow & L_{n+1}(A) & \rightarrow & L_{n+1}(i_-^*) & \rightarrow & LN_{n-2}(A \rightarrow B^-) & \rightarrow \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
 & & LT_{n-1} & & & L_n(B^-) & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 \rightarrow & LN_{n-1}(A \rightarrow B^-) & \rightarrow & L_n(i_+^*) & \rightarrow & L_n(A) & \rightarrow
 \end{array} \quad (37)$$

где $LT_{n-1} = LT_{n-1}(A \rightarrow B^+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, этот результат является переформулировкой теоремы 2 в обозначениях этого параграфа.

В [8] была построена спектральная последовательность в теории перестроек. Основной шаг этой конструкции состоит в рассмотрении универсально-отталкивающих квадратов (23) и (24) для пар Браудера–Ливси (X, Y) и (Y, Z) соответственно. Затем мы можем рассмотреть фильтрацию спектров из [8]

$$\cdots \rightarrow \mathbb{X}_{3,0} \rightarrow \mathbb{X}_{2,0} \rightarrow \mathbb{X}_{1,0} \rightarrow \mathbb{X}_{0,0} \rightarrow \mathbb{X}_{-1,0} \rightarrow \cdots, \quad (38)$$

которая была использована для построения вышеупомянутой спектральной последовательности. Здесь $\mathbb{X}_{0,0} = \mathbb{L}(B^+)$ и $\mathbb{X}_{1,0} = \Sigma \mathbb{L}P(F) = \mathbb{L}(i_-^*)$. В соответствии с [8] спектр $\mathbb{X}_{2,0}$ получается использованием конструкции универсально-притягивающего квадрата для отображений спектров из (36)

$$\mathbb{L}(i_-^*) \rightarrow \Sigma^1 \mathbb{L}(B^-) \leftarrow \Sigma^1 \mathbb{L}(i_+^*). \quad (39)$$

Другие спектры $\mathbb{X}_{k,0}$ получаются итерацией этого процесса (см. [8]).

Согласно [8] мы имеем изоморфизмы

$$E_1^{p,s} = \pi_{s-p}(\mathbb{X}_{p,0}, \mathbb{X}_{p+1,0}) = LN_{s+2}(A \rightarrow B),$$

а первый дифференциал

$$d_1^{p,s}: E_1^{p,s} \rightarrow E_1^{p+1,s}$$

совпадает с композицией

$$LN_{s-2p-2}(A \rightarrow B^{(-)^p}) \rightarrow L_{s-2p-2}(B^{(-)^{p+1}}) \rightarrow LN_{s-2p}(A \rightarrow B^{(-)^{p+1}}). \quad (40)$$

Отображения в диаграмме (40) возникают из диаграммы (6), рассматриваемой для случаев односторонних подмногообразий с квадратами F (34) и F^- (35).

ТЕОРЕМА 7. Спектр $\mathbb{X}_{2,0}$ фильтрации (38) совпадает со спектром $\Sigma^2 \mathbb{L}T(F)$, определенным в этом параграфе для задачи перестройки тройки многообразий. Отображение $\mathbb{X}_{2,0} \rightarrow \mathbb{X}_{1,0}$ фильтрации (38) совпадает с отображением

$$\Sigma^2 \mathbb{L}T(A \rightarrow B) \rightarrow \mathbb{L}(i_-^*) = \Sigma^1 \mathbb{L}P(F)$$

из диаграммы (36).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с (39) определение спектра $\mathbb{X}_{2,0}$ совпадает с определением спектра $\Sigma^2 \mathbb{L}T(F)$ посредством универсально-притягивающего квадрата (36).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. С алгебраической точки зрения мы можем построить спектр $\mathbb{L}T(A \rightarrow B^+)$ по вложению $A \rightarrow B^+$ индекса 2 ориентированных групп. Фактически имеется реализация алгебраической версии диаграммы (6) на уровне спектров (см. [11], [12], [15]). В частности, мы можем определить спектр $\mathbb{L}T(A \rightarrow B^-)$, входящий в следующий универсально-притягивающий квадрат спектров:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^2 \mathbb{L}T(A \rightarrow B^-) & \longrightarrow & \mathbb{L}(i_+^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^1 \mathbb{L}(i_-^*) & \longrightarrow & \Sigma^1 \mathbb{L}(B) \end{array} \quad (41)$$

Тогда группы препятствий $LT_*(A \rightarrow B^-) = \pi_*(\mathbb{L}T(A \rightarrow B^-))$ определены. Гомотопические длинные точные последовательности квадрата (41) дают следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & L_{n+1}(A) & \rightarrow & L_{n+1}(i_+^*) & \rightarrow & LN_{n-2}(A \rightarrow B) & \rightarrow \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ & & LT_{n-1}^- & & L_n(B) & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \rightarrow & LN_{n-1}(A \rightarrow B) & \rightarrow & L_n(i_-^*) & \rightarrow & L_n(A) & \rightarrow \end{array} \quad (42)$$

где $LT_{n-1}^- = LT_{n-1}(A \rightarrow B^-)$. Группы $LT_*(A \rightarrow B^-)$ отличаются от групп $LT_*(A \rightarrow B^+)$ в общем случае. В действительности можно перенести все результаты этого параграфа на случай квадратичного расширения антиструктур и L -групп с декорациями (см. [6] и [15]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Спектр $\mathbb{X}_{3,0}$ фильтрации (38) входит в следующий универсально-притягивающий квадрат спектров:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X}_{3,0} & \longrightarrow & \Sigma^2 \mathbb{L}T(A \rightarrow B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^3 \mathbb{L}T(A \rightarrow B^-) & \longrightarrow & \Sigma^1 \mathbb{L}(i_+^*) \end{array} \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результат немедленно следует из рассмотрения универсально-притягивающих квадратов (36) и (41) и определения фильтрации (38) в [8].

ПРИМЕР 1. Рассмотрим тройку действительных проективных пространств $\mathbb{RP}^{2l-1} \subset \mathbb{RP}^{2l} \subset \mathbb{RP}^{2l+1}$, $2l - 1 \geq 3$. Мы имеем $\pi_1(\mathbb{RP}^k) = \mathbb{Z}/2$ для любого $k \geq 2$. Гомоморфизм ориентации $w: \mathbb{Z}/2 \rightarrow \{\pm 1\}$ тривиален для нечетного k и является изоморфизмом для четного k . Все группы $L_n(1)$, $L_n(\mathbb{Z}/2^+)$ и $L_n(\mathbb{Z}/2^-)$ хорошо известны [3], и имеют место изоморфизмы $LN_*(1 \rightarrow \mathbb{Z}/2^+) \cong L_{*+2}(1)$ и $LN_*(1 \rightarrow \mathbb{Z}/2^-) \cong L_*(1)$. Используя диаграммный поиск в диаграмме (6) для вложений $1 \rightarrow \mathbb{Z}/2^+$ и $1 \rightarrow \mathbb{Z}/2^-$, можно вычислить соответствующие группы препятствий к перестройкам для пар многообразий. Мы получаем

$$\begin{aligned} LP_n(F) &= L_{n+1}(i_-^*) = \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}, \\ LP_n(F^-) &= L_{n+1}(i_+^*) = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2 \end{aligned}$$

для $n = 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть M^m – топологическое многообразие размерности m с тривиальной фундаментальной группой. Пусть $n = m + 2l - 1 \geq 5$. Для тройки многообразий

$$\mathbb{RP}^{2l-1} \times M \subset \mathbb{RP}^{2l} \times M \subset \mathbb{RP}^{2l+1} \times M$$

с $l \geq 2$ группы LT_n изоморфны

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2, \quad \mathbb{Z}/2, \quad \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2, \quad \mathbb{Z}/2$$

для $n = 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ соответственно. Более того, естественные забывающие отображения $LT_n(F) \rightarrow LP_n(F^-)$ и $LT_n(F) \rightarrow LP_{n+1}(F)$ являются эпиморфизмами для всех n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диаграммный поиск в диаграмме (37) дает результат.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим тройку действительных проективных пространств $\mathbb{RP}^{2l} \subset \mathbb{RP}^{2l+1} \subset \mathbb{RP}^{2l+2}$ с $l \geq 1$. Аналогично примеру 1 мы получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть M^m – топологическое многообразие размерности m с тривиальной фундаментальной группой. Пусть $n = m + 2l \geq 5$. Для тройки многообразий

$$\mathbb{RP}^{2l} \times M \subset \mathbb{RP}^{2l+1} \times M \subset \mathbb{RP}^{2l+2} \times M$$

мы имеем изоморфизмы $LT_0^- \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ и $LT_1^- \cong \mathbb{Z}/2$. Группы LT_3^- и LT_2^- входят в следующую точную последовательность:

$$0 \rightarrow LT_3^- \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow LT_2^- \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диаграммный поиск в диаграмме (42) дает результат.

Список литературы

1. *Ranicki A. A.* Exact sequences in the algebraic theory of surgery. Princeton: Princeton Univ. Press, 1981.
2. *Ranicki A. A.* Algebraic L-theory and topological manifolds. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
3. *Wall C. T. C.* Surgery on compact manifolds. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1999.
4. *Ranicki A. A.* The total surgery obstruction // Lecture Notes in Math. 1979. V. 763. P. 275–316.
5. *Ferry S. C., Ranicki A. A., Rosenberg J. (Eds.)* Novikov conjectures, index theorems and rigidity. V. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 226.)
6. *Cavicchioli A., Muranov Yu. V., Repovš D.* Algebraic properties of decorated splitting obstruction groups // Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8). 2001. V. 4. P. 647–675.
7. *Hambleton I.* Projective surgery obstructions on closed manifolds // Lecture Notes in Math. 1982. V. 967. P. 101–131.
8. *Хэмблтон И., Харшиладзе А. Ф.* Спектральная последовательность в теории перестроек // Матем. сб. 1992. Т. 183. №9. С. 3–14.
9. *Муранов Ю. В.* Задача расщепления // Труды МИРАН. 1996. Т. 212. С. 123–146.

10. *Ахметьев П. М., Муранов Ю. В.* Препятствия к расщеплению многообразий с бесконечной фундаментальной группой // Матем. заметки. 1996. Т. 60. С. 163–175.
11. *Муранов Ю. В.* Группы препятствий к расщеплению и квадратичные расширения антиструктур // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. С. 107–132.
12. *Муранов Ю. В., Хэмблтон И.* Проективные группы препятствий к расщеплению вдоль односторонних подмногообразий // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 10. С. 65–86.
13. *Муранов Ю. В., Харшиладзе А. Ф.* Группы Браудера–Ливси абелевых 2-групп // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 8. С. 1061–1098.
14. *Муранов Ю. В., Реповш Д.* Группы препятствий к перестройкам и расщеплениям для пары многообразий // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 3. С. 127–142.
15. *Ranicki A. A.* The L -theory of twisted quadratic extensions // *Canad. J. Math.* 1987. V. 39. P. 345–364.
16. *Ruini B., Spaggiari F.* On the computation of L -groups and natural maps // to appear.
17. *Browder W., Livesay G. R.* Fixed point free involutions on homotopy spheres // *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*. 1967. V. 73. P. 242–245.
18. *Cappell S. E., Shaneson J. L.* Pseudo-free actions // *Lecture Notes in Math.* 1979. V. 763. P. 395–447.
19. *Hambleton I., Pedersen E.* Topological equivalences of linear representations for cyclic groups // MPI Preprint, 1997.
20. *Jimenez R., Muranov Yu. V.* Surgery transfer maps for triples of manifolds // *Publications Preliminales del Instituto de Matematicas-Cuernavaca*. 2002. № 721.
21. *Hambleton I., Ranicki A., Taylor L.* Round L -theory // *J. Pure Appl. Algebra*. 1987. V. 47. P. 131–154.
22. *Малешич Й., Муранов Ю. В., Реповш Д.* Группы препятствий к расщеплению в коразмерности 2 // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 1. С. 52–73.
23. *Lück W., Ranicki A. A.* Surgery transfer // *Lecture Notes in Math.* 1988. V. 1361. P. 167–246.
24. *Lück W., Ranicki A. A.* Surgery obstructions of fiber bundles // *J. Pure Appl. Algebra*. 1992. V. 81. P. 139–189.
25. *Switzer R.* Algebraic topology – homotopy and homology. Berlin: Springer-Verlag, 1975.

Институт современных знаний,

Витебск, Беларусь;

Institute for Mathematics, Physics and Mechanics,

University of Ljubljana, Ljubljana, Slovenia;

Dipartimento di Matematica, Università di Modena e Reggio E.,

Modena, Italy

E-mail: ymuranov@imk.edu.by

dusan.repovs@uni-lj.si

spaggiari@unimo.it

Поступила в редакцию

11.07.2002