Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Псху, Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 4, 111–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7645>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:16:23

УДК 517.926

А. В. Псху

Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка

Сформулирована и решена начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с производными Римана–Лиувилля. Начальные условия задачи обеспечивают ее однозначную разрешимость при произвольном распределении параметров, отвечающих порядку производных, входящих в уравнение (в отличие от задачи Коши), и являются необходимыми для исследуемого уравнения. Задача редуцирована к интегральному уравнению, построено явное представление решения в терминах функции Райта. В качестве следствия из этих результатов получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: производная дробного порядка, задача Коши, дифференциальное уравнение дробного порядка, функция Райта, формула Хилле–Тамаркина.

§ 1. Введение

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i D_{0x}^{\alpha_i} u(x) = f(x), \quad (1)$$

где $\alpha > 0$, $\alpha \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > \alpha_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$, $x \in (0, l)$, D_{0x}^{β} – оператор дробного интегро-дифференцирования порядка β в смысле Римана–Лиувилля (см. [1; § 0.1]) по переменной x , определяемый следующим образом:

$$D_{0x}^{\beta} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int_0^x \varphi(t)(x-t)^{-\beta-1} dt, \quad \text{если } \beta < 0, \quad (2)$$

$$D_{0x}^0 \varphi(x) = \varphi(x), \quad D_{0x}^{\beta} \varphi(x) = \frac{d^p}{dx^p} D_{0x}^{\beta-p} \varphi(x), \quad \text{если } p-1 < \beta \leq p, \quad p \in \mathbb{N}.$$

В работе [2] для уравнения (1) при $m = 1$, $\alpha_1 = 0$, т.е. уравнения

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) - \lambda u(x) = f(x), \quad (3)$$

была решена задача Коши

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha-k} u(x) = A_k, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (4)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-96510).

Для уравнения (1) при $m > 1$, $1 > \alpha > \alpha_i \geq 0$ решение задачи Коши построено в работе [3] (см. также [1; § 3.2]). Отметим также работу [4], в которой исследована задача Коши для уравнения, обобщающего (3). Изложение результатов и библиографию работ, связанных с задачей Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка (и, в частности, для уравнения (1)) можно найти в [5; гл. 3–5].

Особенностью задачи Коши (4) для уравнения (1) является то, что ее разрешимость при $\alpha > 1$ зависит от распределения α_i . Так, например, общее решение уравнения

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) - \lambda D_{0x}^{\beta} u(x) = 0, \quad \alpha \in (1, 2), \quad \beta = \alpha_1 < \alpha, \quad (5)$$

имеет следующий вид:

$$u(x) = C_1 x^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda x^{\alpha-\beta}) + C_2 x^{\alpha-2} E_{\alpha-\beta, \alpha-1}(\lambda x^{\alpha-\beta}), \quad (6)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные,

$$E_{\delta, \mu}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\delta j + \mu)}$$

– функция Миттаг-Леффлера (см., например, [5; § 5.2, следствие 5.3]). Задача Коши

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha-1} u(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha-2} u(x) = B \quad (7)$$

для уравнения (5) в случае $\beta > \alpha - 1$, вообще говоря, некорректна. В этом случае из существования конечного, не равного нулю предела $\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha-2} u(x) = B \neq 0$ следует, что $\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha-1} u(x) = \infty$. Это означает, что для произвольной пары A и B нельзя выбрать константы C_1 и C_2 так, чтобы решение (6) удовлетворяло условиям (7).

Из результатов [5; § 5.2, теорема 5.3] следует, что достаточным условием (относительно параметров α_i) разрешимости задачи (1), (4) является неравенство

$$\alpha - n + 1 > \max\{\alpha_i\}. \quad (8)$$

В настоящей работе ставится задача с начальными условиями, обеспечивающими разрешимость при любых $\alpha_i < \alpha$ (α_i необязательно положительны). Показано, что поставленные начальные условия являются необходимыми для уравнения (1). Задача редуцируется к интегральному уравнению, построено явное представление решения в терминах функции Райта. Следствием доказанных утверждений являются необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши для уравнения (1). В случае, когда выполнено неравенство (8), поставленная задача совпадает с задачей (1), (4) и при этом получают более компактные выражения для ее решения, чем полученные ранее с помощью многократных бесконечных рядов обобщенных функций Миттаг-Леффлера [3] и обобщенных функций Райта (см., например, [5; формула (5.2.66)]).

§ 2. Постановка задачи

Относительно параметров α , α_i и λ_i предположим, что

$$\alpha \in (n-1, n], \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \lambda_i \neq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (9)$$

$$\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m.$$

Обозначим через $M(k) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leq k \leq n$, количество элементов в последовательности $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ таких, что $\alpha_i \geq \alpha - n + k$. Учитывая упорядоченность α_i , имеем

$$M(k) = 0, \quad \text{если } \alpha_i < \alpha - n + k \text{ для всех } i, \\ M(k) = \max\{i : \alpha_i - k \geq \alpha - n\} \quad \text{в противном случае.}$$

Очевидно, что $M(n) = 0$.

Введем следующее обозначение:

$$(\ell^k u)(x) = D_{0x}^{\alpha-k} u(x) - \sum_{i=1}^{M(k)} \lambda_i D_{0x}^{\alpha_i-k} u(x). \quad (10)$$

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x)$ такую, что $u(x) \in L(0, l)$, $D_{0x}^{\alpha-n} u(x) \in C^n(0, l)$, $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1) во всех точках $x \in (0, l)$.

ЗАДАЧА 1. Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ell^k u)(x) = a_k, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (11)$$

Заметим, что если $\alpha_1 < \alpha - n + 1$, то $M(k) = 0$ для всех k , $1 \leq k \leq n$. Отсюда следует, что в этом случае условия (11) переходят в условия (4).

§ 3. Необходимые начальные условия

Покажем, что начальные условия (11) являются необходимыми для уравнения (1).

Предварительно напомним необходимые для дальнейшего изложения свойства операторов дробного интегро-дифференцирования. Имеют место закон композиции, обобщенная формула Ньютона–Лейбница и формула дробного дифференцирования (интегрирования) степенной функции:

$$D_{0x}^\varepsilon D_{0x}^\delta \varphi(x) = D_{0x}^{\varepsilon+\delta} \varphi(x), \quad (12)$$

если $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta \leq 0$ или $\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\delta \in \mathbb{R}$;

$$D_{0x}^\varepsilon D_{0x}^\delta \varphi(x) = D_{0x}^{\varepsilon+\delta} \varphi(x) - \sum_{j=1}^p \frac{x^{-\varepsilon-j}}{\Gamma(1-\varepsilon-j)} [D_{0x}^{\delta-j} \varphi(x)]_{x=0}, \quad (13)$$

где $\delta \in (p-1, p]$, $p \in \mathbb{N}$;

$$D_{0x}^\varepsilon \frac{x^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} = \frac{x^{\delta-\varepsilon-1}}{\Gamma(\delta-\varepsilon)}, \quad (14)$$

если $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ или $\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\delta \in \mathbb{R}$ (см., например, [1; § 1.19], [4], [5; § 2.1]).

ЛЕММА 1. Пусть $\varphi(x) \in C^p(0, l)$, $\psi(x) = D_{0x}^\varepsilon \varphi(x)$, $\varepsilon \leq p$. Тогда $\psi(x) \in C^q(0, l)$, где $q = [p - \varepsilon]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $\varepsilon \in (-1, 0]$. Если $\varepsilon = 0$, то утверждение леммы очевидно. Для $\varepsilon \in (-1, 0)$ выберем произвольные a и x из интервала $(0, l)$, причем $a < x$. Из соотношений

$$\begin{aligned}\Gamma(-\varepsilon)\psi(x) &= \left(\int_0^a + \int_a^x \right) \varphi(t)(x-t)^{-\varepsilon-1} dt \\ &= \int_0^a \varphi(t)(x-t)^{-\varepsilon-1} dt + \int_0^{x-a} \varphi(x-t)t^{-\varepsilon-1} dt\end{aligned}$$

следует, что

$$\begin{aligned}\psi^{(k)}(x) &= \int_0^a \varphi(t) \frac{(x-t)^{-\varepsilon-k-1}}{\Gamma(-\varepsilon-k)} dt + \int_0^{x-a} \frac{t^{-\varepsilon-1}}{\Gamma(-\varepsilon)} \varphi^{(k)}(x-t) dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \varphi^{(k-i)}(a) \frac{(x-a)^{-i-\varepsilon}}{\Gamma(1-i-\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Это означает, что функции $\psi^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, \dots, p$, непрерывны в некоторой окрестности точки x . В силу произвольности выбора a и x , а также открытости интервала $(0, l)$ получаем, что $\psi(x) \in C^q(0, l)$ (в этом случае $p = q$).

Пусть теперь $\varepsilon \in (r-1, r]$, $r \in \mathbb{Z}$, $r \leq p$. Учитывая равенство $\psi(x) = D_{0x}^r D_{0x}^{\varepsilon-r} \varphi(x)$ (см. (12)) и принимая во внимание то, что $\varepsilon - r \in (-1, 0]$, из доказанного выше получаем, что $\psi(x) \in C^q(0, l)$, причем $q = p - r = [p - \varepsilon]$. Лемма 1 доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x) \in C(0, l) \cap L(0, l)$ и выполнены условия (9). Тогда для любого регулярного решения уравнения (1) существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ell^k u)(x) < \infty, \quad 1 \leq k \leq n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x)$ – регулярное решение уравнения (1). Перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(D_{0x}^{\alpha-n} u(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i D_{0x}^{\alpha_i-n} u(x) - D_{0x}^{-n} f(x) \right) = 0.$$

В силу определения регулярного решения и леммы 1 выражение, стоящее в скобках, принадлежит классу $C^n(0, l)$. Поэтому $u(x)$ является решением уравнения

$$D_{0x}^{\alpha-n} u(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i D_{0x}^{\alpha_i-n} u(x) = D_{0x}^{-n} f(x) + \sum_{j=1}^n C_j x^{n-j}, \quad (15)$$

где C_j – постоянные, подлежащие определению. Обозначим $v(x) = D_{0x}^{\alpha-n} u(x)$. Тогда получим, что $v(x)$ является решением интегрального уравнения

$$v(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i D_{0x}^{\alpha_i-\alpha} v(x) = D_{0x}^{-n} f(x) + \sum_{j=1}^n C_j x^{n-j}, \quad (16)$$

которое представляет собой уравнение Вольтерра с непрерывной вплоть до нуля правой частью. Это означает, что $v(x)$ также непрерывна в нуле. Принимая это во внимание и устремляя в (15) x к нулю, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha-n} u(x) = C_n. \quad (17)$$

Далее, в силу определения регулярного решения имеем $D_{0x}^{\alpha-n}u(x) \in C^n(0, l)$. Поэтому в силу леммы 1 функции $D_{0x}^{\alpha_i-n}u(x)$ также принадлежат $C^n(0, l)$. Продифференцируем обе части (15) $n - k$ раз, $1 \leq k \leq n - 1$, и устремим x к нулю. В силу (17), определения $M(k)$ и равенства

$$D_{0x}^{\alpha_i-k}u(x) = D_{0x}^{\alpha_i-k-\alpha+n}D_{0x}^{\alpha_i-n}u(x)$$

имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha_i-k}u(x) = 0 \quad \text{для всех } i > M(k). \quad (18)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\ell^k u)(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sum_{i=M(k)+1}^m \lambda_i D_{0x}^{\alpha_i-k}u(x) + D_{0x}^{-k}f(x) + \sum_{j=1}^k C_j x^{k-j} \frac{(n-j)!}{(k-j)!} \right) \\ &= (n-k)! C_k. \end{aligned} \quad (19)$$

Теорема 1 доказана.

§ 4. Редукция к интегральному уравнению

Покажем, что задача (1), (11) эквивалентно редуцируется к интегральному уравнению

$$u(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i D_{0x}^{\alpha_i-\alpha}u(x) = D_{0x}^{-\alpha}f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{a_j x^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}. \quad (20)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(x) \in C(0, l) \cap L(0, l)$ и выполнены условия (9). Тогда: 1) регулярное решение задачи (1), (11) является решением интегрального уравнения (20); 2) решение интегрального уравнения (20) является регулярным решением уравнения (1) и удовлетворяет начальным условиям (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x)$ – регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (11). Тогда из (11) и (19) следует, что $C_k = a_k/(n-k)!$. С учетом этого, применяя оператор $D_{0x}^{n-\alpha}$ к обеим частям соотношения (15), получаем (20), т.е. регулярное решение задачи (1), (11) является решением интегрального уравнения (20).

Докажем теперь, что решение интегрального уравнения (20) является регулярным решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям (11). Применяя оператор $D_{0x}^{\alpha-n}$ к обеим частям соотношения (20), получаем, что $u(x)$ есть решение уравнения (15). Функция $v(x) = D_{0x}^{\alpha-n}u(x)$ является решением уравнения Вольтерра второго рода (16), правая часть которого принадлежит $C^n(0, l)$. Поэтому $D_{0x}^{\alpha-n}u(x) \in C^n(0, l)$ и, следовательно, все остальные слагаемые в (15) также принадлежат $C^n(0, l)$. Дифференцируя (15) $n - k$ раз, $0 \leq k \leq n$, получаем, что

$$D_{0x}^{\alpha-k}u(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i D_{0x}^{\alpha_i-k}u(x) = D_{0x}^{-k}f(x) + \sum_{j=1}^k \frac{a_j x^{k-j}}{(k-j)!}. \quad (21)$$

Отсюда (в частности, при $k = 0$) следует, что $u(x)$ является решением уравнения (1). Далее, учитывая обозначение (10), перепишем (21) в таком виде:

$$(\ell^k u)(x) = \sum_{i=M(k)+1}^m \lambda_i D_{0x}^{\alpha_i - k} u(x) + D_{0x}^{-k} f(x) + \sum_{j=1}^k \frac{a_j x^{k-j}}{(k-j)!}.$$

Устремляя x к нулю и учитывая (18), получаем (11). Теорема 2 доказана.

Заметим, что из теоремы 2 следует существование и единственность регулярного решения задачи (1), (11).

§ 5. Необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши

Теоремы 1 и 2 позволяют определить необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (1) в терминах параметров α_i . Под однозначной разрешимостью понимается существование для произвольного набора A_k , $1 \leq k \leq n$, единственного регулярного решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (4).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f(x) \in L(0, l) \cap C(0, l)$ и выполнены условия (9). Задача (1), (4) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда

$$\alpha_i \in \{\beta : \beta < \alpha - n + 1\} \cup \{\beta : \alpha - \beta \in \mathbb{N}\}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из теорем 1 и 2, вопрос об однозначной разрешимости задачи (1), (4) равносильен вопросу о существовании параметров a_i , при которых решение уравнения (20) будет удовлетворять условиям (4).

Пусть $u(x)$ – решение уравнения (20) и выполнено включение (22). Так как $M(n) = 0$, то, очевидно,

$$a_n = \lim_{x \rightarrow 0} (\ell^n u)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha - n} u(x) = A_n.$$

В силу (10) и (22) для $1 \leq i \leq M(1) \leq n - 1$ имеем

$$\alpha - \alpha_i = q(i) \in \mathbb{N}, \quad i \leq q(i) \leq n - 1$$

(т.е. для тех i , для которых $\alpha - \alpha_i \in \mathbb{N}$ и $\alpha - \alpha_i \leq n - 1$). Поэтому, вычисляя последовательно для $k = n - 1, n - 2, \dots, 1$ числа

$$a_k = \lim_{x \rightarrow 0} (\ell^k u)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(D_{0x}^{\alpha - k} u(x) - \sum_{i=1}^{M(k)} \lambda_i D_{0x}^{\alpha - k - q(i)} u(x) \right),$$

получаем, что параметры a_k и A_k связаны следующими соотношениями:

$$a_k = A_k - \sum_{i=1}^{M(k)} \lambda_i A_{k+q(i)}, \quad q(i) = \alpha - \alpha_i \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (23)$$

Как нетрудно заметить, эти соотношения обратимы. Отсюда в силу теоремы 2 следует, что решение интегрального уравнения является регулярным решением уравнения (1) и в случае, когда a_k определены равенствами (23), удовлетворяет

условиям (4). Таким образом, выполнение включения (22) обеспечивает однозначную разрешимость задачи (1), (4).

Пусть теперь условие (22) нарушено. Предположим, что задача (1), (4) однозначно разрешима. В данном случае это означает, что для любого заданного набора A_k найдутся постоянные a_k такие, что решение уравнения (20) $u(x)$ будет удовлетворять условиям (4).

Пусть $u(x)$ – решение уравнения (20) (и, следовательно, уравнения (21)), удовлетворяющее условиям (4), причем будем считать, что

$$A_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad A_n \neq 0. \quad (24)$$

Обозначим $v_k(x) = D_{0x}^{\alpha-k} u(x)$. Условия (4) примут следующий вид: $v_k(0) = A_k$. Из формулы (13) в силу (24) имеем

$$D_{0x}^{\alpha_i-k} u(x) = D_{0x}^{\alpha_i-\alpha} v_k(x) + \frac{A_n x^{\alpha-\alpha_i-n+k}}{\Gamma(\alpha-\alpha_i-n+k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Используя это равенство, перепишем (21) в следующем виде:

$$\begin{aligned} v_k(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i D_{0x}^{\alpha_i-\alpha} v_k(x) \\ = D_{0x}^{-k} f(x) + \sum_{i=1}^k \frac{a_j x^{k-j}}{\Gamma(k-j+1)} + \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i A_n x^{\alpha-\alpha_i-n+k}}{\Gamma(\alpha-\alpha_i-n+k+1)}, \end{aligned}$$

$1 \leq k \leq n-1$. Отсюда для этих k получаем, что

$$A_k = \lim_{x \rightarrow 0} v_k(x) = a_k + \lim_{x \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\lambda_i A_n x^{\alpha-\alpha_i-n+k}}{\Gamma(\alpha-\alpha_i-n+k+1)} \right]. \quad (25)$$

Нарушение условия (22) означает, что существуют такие $i^*, k^* \in \mathbb{N}$, $k^* \leq n-1$, что $\alpha-k^* < \alpha_{i^*} < \alpha-k^*+1$ или $k^*-1 < \alpha-\alpha_{i^*} < k^*$. Поэтому правая часть (25) обращается в бесконечность для всех $k \leq n-k^*$, что противоречит (24). Следовательно, предположение о разрешимости задачи (1), (4) неверно.

§ 6. Вспомогательные утверждения

Здесь будут введены функции, в терминах которых далее будет построено решение интегрального уравнения (20) и решение задачи (1), (11) и изучены их свойства.

Рассмотрим функцию

$$S_m^\mu(x; z_1, \dots, z_m; \beta_1, \dots, \beta_m) = (h_1 * h_2 * \dots * h_m)(x), \quad (26)$$

где

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_0^x \varphi(x-t) \psi(t) dt$$

– свертка Лапласа функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$,

$$h_i = h_i(x) \equiv x^{\mu_i-1} \phi(\beta_i, \mu_i; z_i x^{\beta_i}), \quad \phi(\xi, \eta; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j! \Gamma(\xi j + \eta)}, \quad (27)$$

– функция Райта (см. [6]). Далее всегда будем считать, что аргументы и параметры функции (26) удовлетворяют следующим условиям:

$$x > 0, \quad z_i \in \mathbb{R}, \quad \beta_i > 0, \quad \mu_i > 0, \quad \mu = \sum_{i=1}^m \mu_i.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Функция $S_m^\mu(z_1, \dots, z_m; \beta_1, \dots, \beta_m)$ не зависит от распределения чисел $\mu_i > 0$, а зависит лишь от их суммы μ . Действительно, обозначим через S и $\tilde{S}$ две функции S_m^μ , соответствующие наборам $\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ и $\{\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_m\}$, причем

$$\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i = \sum_{i=1}^m \tilde{\mu}_i.$$

Обозначим

$$\nu = \min\{\mu_1, \dots, \mu_m, \tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_m\}, \quad g_i = x^{\nu-1} \phi(\beta_i, \nu; z_i x^{\beta_i}).$$

Получаем

$$\begin{aligned} S &= (D_{0x}^{\nu-\mu_1} g_1) * \dots * (D_{0x}^{\nu-\mu_m} g_m) = D_{0x}^{m\nu-\mu} (g_1 * \dots * g_m) \\ &= (D_{0x}^{\nu-\tilde{\mu}_1} g_1) * \dots * (D_{0x}^{\nu-\tilde{\mu}_m} g_m) = \tilde{S}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями

$$(D_{0x}^{-\varepsilon_1} \varphi_1) * \dots * (D_{0x}^{-\varepsilon_m} \varphi_m) = D_{0x}^{-\varepsilon} (\varphi_1 * \dots * \varphi_m), \quad (28)$$

$$D_{0x}^\delta x^{\eta-1} \phi(\xi, \eta; z x^\xi) = x^{\eta-\delta-1} \phi(\xi, \eta - \delta; z x^\xi), \quad (29)$$

которые справедливы для произвольного набора $\varepsilon_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \varepsilon_i = \varepsilon$, и любых $\varepsilon > 0$, $\xi > 0$, $\eta > 0$ и $z, \delta \in \mathbb{R}$. Первое из этих соотношений следует из свойств ассоциативности и коммутативности свертки и представления оператора дробного интегрирования в виде

$$D_{0x}^{-\varepsilon} \varphi(x) = \varphi * \frac{x^{\varepsilon-1}}{\Gamma(\varepsilon)}, \quad \varepsilon > 0 \quad (30)$$

(см. (2)). Второе равенство доказывается с помощью формулы дробного интегро-дифференцирования степенной функции (14) и возможности почленного применения этой формулы в представлении функции Райта в виде ряда (27).

ЛЕММА 2. Пусть

$$Z = \max\{|z_1|, \dots, |z_m|\}, \quad \rho = \min\{\beta_1, \dots, \beta_m\}, \quad \tau = \max\{\beta_1, \dots, \beta_m\}.$$

Справедливо неравенство

$$|S_m^\mu(x; z_1, \dots, z_m; \beta_1, \dots, \beta_m)| \leq C x^{\mu-1} \exp(\sigma Z^{1/(1+\rho)} x^{\tau/(1+\tau)}), \quad (31)$$

где C и σ – положительные постоянные, не зависящие от x и z_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из асимптотики функции Райта (см. [6]) следует неравенство

$$|\phi(\beta_i, \mu_i; z_i x^{\beta_i})| \leq C_i \exp(\sigma_i [|z_i| x^{\beta_i}]^{1/(1+\beta_i)}),$$

где C_i и σ_i – положительные постоянные, не зависящие от x и z_i . Из этой оценки, учитывая определение (26), получаем

$$|S_m^\mu(x; z_1, \dots, z_m; \beta_1, \dots, \beta_m)| \leq C(x^{\mu_1-1} * x^{\mu_2-1} * \dots * x^{\mu_m-1}) \exp(\sigma Z^{1/(1+\rho)} x^{\tau/(1+\tau)}).$$

Отсюда, учитывая то, что в силу (14) и (30) имеет место соотношение

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^m \Gamma(\mu_i)} (x^{\mu_1-1} * \dots * x^{\mu_m-1}) = D_{0x}^{-\mu_1} \dots D_{0x}^{-\mu_m} 1 = \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}, \quad (32)$$

получаем (31).

ЛЕММА 3. Пусть $\mu > \nu$. Тогда

$$D_{0x}^\nu S_m^\mu(x; z_1, \dots, z_m; \beta_1, \dots, \beta_m) = S_m^{\mu-\nu}(x; z_1, \dots, z_m; \beta_1, \dots, \beta_m). \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\nu < 0$, то равенство (33) в силу (26) следует из (28) и (29):

$$\begin{aligned} D_{0x}^\nu S_m^\mu(x; z_1, \dots, z_m; \beta_1, \dots, \beta_m) &= (D_{0x}^\nu h_1) * (h_2 * \dots * h_m)(x) \\ &= S_m^{\mu-\nu}(x; z_1, \dots, z_m; \beta_1, \dots, \beta_m). \end{aligned}$$

Пусть теперь $\nu \in (q-1, q]$, $q \in \mathbb{N}$. Как следует из замечания 1, параметр μ_1 в представлении (26) может быть выбран таким, что $\mu_1 > \nu$. Поэтому, учитывая равенство

$$\frac{d}{dx}(\varphi * \psi)(x) = (\varphi' * \psi)(x) - \varphi(0)\psi(x),$$

формулы (12), (29) и соотношение

$$[D_{0x}^{\nu-k} h_1(x)]_{x=0} = 0, \quad 1 \leq k \leq q,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} D_{0x}^\nu S_m^\mu(x; z_1, \dots, z_m; \beta_1, \dots, \beta_m) &= \frac{d^q}{dx^q} (D_{0x}^{\nu-q} h_1) * (h_2 * \dots * h_m)(x) \\ &= (D_{0x}^\nu h_1) * (h_2 * \dots * h_m)(x). \end{aligned}$$

Отсюда следует (33).

Далее, обозначим

$$G_m^\mu \equiv G_m^\mu(x; \lambda_1, \dots, \lambda_m; \beta_1, \dots, \beta_m) = \int_0^\infty e^{-t} S_m^\mu(x; \lambda_1 t, \dots, \lambda_m t; \beta_1, \dots, \beta_m) dt. \quad (34)$$

Сходимость интеграла в (34), очевидно, следует из (31).

ЛЕММА 4. Для функции $G_m^\mu = G_m^\mu(x; \lambda_1, \dots, \lambda_m; \beta_1, \dots, \beta_m)$ имеют место следующие соотношения:

$$G_m^\mu = O(x^{\mu-1}) \quad \text{при } x \rightarrow 0, \quad (35)$$

$$D_{0x}^\nu G_m^\mu = G_m^{\mu-\nu}, \quad \text{если } \mu > \nu, \quad (36)$$

$$G_m^\mu - \sum_{i=1}^m \lambda_i D_{0x}^{-\beta_i} G_m^\mu = \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}. \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (31) и (34) следует, что

$$\begin{aligned} |G_m^\mu| &\leq Cx^{\mu-1} \int_0^\infty \exp(-t + \sigma(\lambda t)^{1/(1+\rho)} x^{\tau/(1+\tau)}) dt \\ &\leq Cx^{\mu-1} \exp\left[\sup_{t>0} \left(-\frac{t}{2} + \sigma(\lambda t)^{1/(1+\rho)} x^{\tau/(1+\tau)}\right)\right] \int_0^\infty e^{-t/2} dt, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\rho = \min\{\beta_1, \dots, \beta_m\}, \quad \tau = \max\{\beta_1, \dots, \beta_m\}, \quad \lambda = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_m|\},$$

C и σ – положительные константы, не зависящие от x , λ и t . В силу соотношения

$$\sup_{t>0} (-t + at^\varepsilon) = a^{1/(1-\varepsilon)} \varepsilon^{\varepsilon/(1-\varepsilon)} (1 - \varepsilon)$$

при $a > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ из (38) следует (35).

Соотношение (36) следует из (31), (33) и определения (34).

Докажем (37). Из формулы

$$\frac{d}{dz} \phi(\xi, \eta; z) = \phi(\xi, \eta + \xi; z)$$

(см. [6]) и равенства (29) следует соотношение

$$\frac{d}{dt} x^{\delta-1} \phi(\beta, \delta; \lambda t x^\beta) = \lambda D_{0x}^{-\beta} x^{\delta-1} \phi(\beta, \delta; \lambda t x^\beta), \quad \delta > 0,$$

с помощью которого, учитывая (26), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_m^\mu(x; \lambda_1 t, \dots, \lambda_m t; \beta_1, \dots, \beta_m) &= \sum_{i=1}^m (h_1 * \dots * h_{i-1} * h'_i * h_{i+1} * \dots * h_m) \\ &= \sum_{i=1}^m (h_1 * \dots * h_{i-1} * (\lambda_i D_{0x}^{-\beta_i} h_i) * h_{i+1} * \dots * h_m). \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание замечание 1 и формулу (33), приходим к равенству

$$\frac{d}{dt} S_m^\mu(x; \lambda_1 t, \dots, \lambda_m t; \beta_1, \dots, \beta_m) = \sum_{i=1}^m \lambda_i D_{0x}^{-\beta_i} S_m^\mu(x; \lambda_1 t, \dots, \lambda_m t; \beta_1, \dots, \beta_m). \quad (39)$$

Отсюда в силу (34) следует, что

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i D_{0x}^{-\beta_i} G_m^\mu = \int_0^\infty e^{-t} \frac{d}{dt} S_m^\mu(x; \lambda_1 t, \dots, \lambda_m t; \beta_1, \dots, \beta_m) dt. \quad (40)$$

Сходимость несобственного интеграла (40) и возможность внесения оператора

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i D_{0x}^{-\beta_i}$$

под знак интеграла следует из (31) и (39). Принимая во внимание равенство

$$S_m^\mu(x; \lambda_1 t, \dots, \lambda_m t; \beta_1, \dots, \beta_m)|_{t=0} = \left(\frac{x^{\mu_1-1}}{\Gamma(\mu_1)} * \frac{x^{\mu_2-1}}{\Gamma(\mu_2)} * \dots * \frac{x^{\mu_m-1}}{\Gamma(\mu_m)} \right),$$

соотношения (31), (32) и интегрируя в (40) по частям, получаем (37).

§ 7. Решение интегрального уравнения

Далее построим решение интегрального уравнения

$$w(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i D_{0x}^{-\beta_i} w(x) = F(x), \quad (41)$$

где $\beta_i > 0$, $i = \overline{1, m}$.

ЛЕММА 5. Пусть $F(x) \in L(0, l)$. Решение интегрального уравнения (41) для любого $\mu > 0$ представимо в следующем виде:

$$w(x) = D_{0x}^\mu (F * G_m^\mu)(x). \quad (42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (41) является уравнением Вольтерра с интегрируемой степенной особенностью. Следовательно, при любой правой части $F(x) \in L(0, l)$ оно имеет единственное решение. Пусть $w = w(x)$ – решение уравнения (41). Принимая во внимание (37), получаем

$$\begin{aligned} (F * G_m^\mu)(x) &= \left(w - \sum_{i=1}^m \lambda_i D_{0x}^{-\beta_i} w \right) * G_m^\mu = w * G_m^\mu - \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\frac{x^{\beta_i-1}}{\Gamma(\beta_i)} * w * G_m^\mu \right) \\ &= w * \left(G_m^\mu - \sum_{i=1}^m \lambda_i D_{0x}^{-\beta_i} G_m^\mu \right) = w * \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}, \end{aligned}$$

или, учитывая (30),

$$(F * G_m^\mu)(x) = D_{0x}^{-\mu} w.$$

Действуя на обе части этого равенства оператором D_{0x}^μ , приходим к (42).

Отметим, что формула (42) является обобщением формулы Хилле–Тамаркина (см. [7]) на случай уравнения (41) и, как следует из равенств

$$\begin{aligned} G_1^\mu(x; \lambda; \beta) &= \int_0^\infty e^{-t} x^{\mu-1} \phi(\beta, \mu; \lambda t x^\beta) dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k x^{\beta k + \mu - 1}}{k! \Gamma(\beta k + \mu)} \int_0^\infty e^{-t} t^k dt = x^{\mu-1} E_{\beta, \mu}(\lambda x^\beta), \end{aligned} \quad (43)$$

совпадает с ней при $m = 1$.

§ 8. Представление решения

Применяя формулу (42) для решения уравнения (20), приняв $\mu = \alpha$, $\beta_i = \alpha - \alpha_i$, получаем

$$u(x) = D_{0x}^\alpha \left[(D_{0x}^{-\alpha} f * G_m^\alpha)(x) + \sum_{k=1}^n a_k \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} * G_m^\alpha \right].$$

Из этого представления, формулы (36) и соотношений

$$\begin{aligned} D_{0x}^\alpha (D_{0x}^{-\alpha} f * G_m^\alpha)(x) &= \frac{d^n}{dx^n} (D_{0x}^{-n} f * G_m^\alpha)(x) = (f * G_m^\alpha)(x), \\ D_{0x}^\alpha \left(\frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} * G_m^\alpha \right) &= D_{0x}^\alpha D_{0x}^{-\alpha+k-1} G_m^\alpha = G_m^{\alpha-k+1} \end{aligned}$$

в силу теоремы 2 следует теорема 3.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(x) \in C(0, l) \cap L(0, l)$ и выполнены условия (9). Регулярное решение $u(x)$ задачи (1), (11) существует, единственно и имеет следующий вид:

$$u(x) = \int_0^x f(t) G_m^\alpha(x-t; \lambda_1, \dots, \lambda_m; \alpha - \alpha_1, \dots, \alpha - \alpha_m) dt + \sum_{k=1}^n a_k G_m^{\alpha-k+1}(x; \lambda_1, \dots, \lambda_m; \alpha - \alpha_1, \dots, \alpha - \alpha_m). \quad (44)$$

Из следствия 1 и теоремы 3 получаем такой результат.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f(x) \in C(0, l) \cap L(0, l)$ и выполнены условия (9) и (22). Регулярное решение $u(x)$ задачи (1), (4) существует, единственно и представимо в виде (44), где a_k определены соотношениями (23).

При $m = 1$ и $\alpha_1 = 0$ начальные условия (11) совпадают с условиями Коши (4) и, как следует из (43), формула (44) совпадает с формулой, полученной в работе [2].

Список литературы

- [1] А. М. Нахушев, *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003.
- [2] J. H. Barrett, "Differential equations of non-integer order", *Canadian J. Math.*, **6**:4 (1954), 529–541.
- [3] I. Ozturk, "On the theory of fractional differential equation", *Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. АН*, **3**:1 (1998), 35–39.
- [4] М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсисян, "Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка", *Изв. Акад. Наук Арм. ССР. Сер. матем.*, **3**:1 (1968), 3–29.
- [5] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, "Theory and applications of fractional differential equations", *North-Holland Math. Stud.*, **204**, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [6] E. M. Wright, "On the coefficients of power series having exponential singularities", *J. London Math. Soc.*, **8**:1 (1933), 71–79.
- [7] E. Hille, J. D. Tamarkin, "On the theory of linear integral equations", *Ann. of Math. (2)*, **31**:3 (1930), 479–528.

А. В. Псху (A. V. Pskhu)

Научно-исследовательский институт прикладной
математики и автоматизации Кабардино-Балкарского
научного центра РАН, г. Нальчик
E-mail: pskhu@mail333.com

Поступила в редакцию
29.10.2009