Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Ф. Леликова, Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в области с угловыми точками, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 10, 93–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7646>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:23:09

УДК 517.956

Е. Ф. Леликова

Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в области с угловыми точками

Исследуется асимптотическое поведение решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка в области с угловыми точками для случая, когда малый параметр входит в уравнение только в виде множителя при одной из старших производных, а предельное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением. Несмотря на то, что порядок предельного уравнения тот же самый, что и у исходного уравнения, рассматриваемая задача является сингулярно возмущенной. Асимптотическое поведение решения этой задачи исследуется методом согласования асимптотических разложений.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: малый параметр, асимптотика, угловые точки.

Введение

В работе исследуется поведение решения первой краевой задачи

$$L_\varepsilon u = \varepsilon u_{xx} + u_{yy} + b(x, y)u_y + a(x, y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset R^2, \quad (0.1)$$

$$u(x, y) = h(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (0.2)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ в ограниченной области D с кусочно гладкой границей Γ . Предполагается, что параметр $\varepsilon > 0$, коэффициенты и правая часть уравнения (0.1) – достаточно гладкие функции, граничная функция $h(x, y)$ – кусочно гладкая.

Предполагается также, что существует ограниченное решение $u_\varepsilon(x, y)$ задачи (0.1), (0.2) и для него справедлива следующая оценка:

$$|u_\varepsilon(x, y)| \leq M \left(\sup_{(x, y) \in D} |f(x, y)| + \sup_{(x, y) \in \Gamma} |h(x, y)| \right), \quad (0.3)$$

где постоянная M не зависит от ε . (Это условие выполнено, например, если $a(x, y) \leq \alpha < 0$.)

Задачи для эллиптических уравнений с малым параметром исследовались многими авторами. При этом обычно порядок предельного уравнения был меньше порядка допредельного уравнения (наиболее типичным является переход уравнения второго порядка в уравнение первого порядка). Такие задачи подробно изучены в работах [1]–[5]. Наиболее сложными являются те задачи, в которых коэффициенты стандартного внешнего разложения имеют те или

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00260) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2215.2008.1).

иные особенности в точках некоторых “особых” подмножеств. Подобные задачи рассмотрены в монографиях [4], [5].

Уравнение вида (0.1), где малый параметр ε присутствует при обеих производных u_{xx} и u_{yy} , в подобных ситуациях рассматривалось в работах [6], [7]. “Особыми” подмножествами в этих задачах являлись характеристики предельного уравнения первого порядка, проходящие через угловые точки границы, касающиеся границы области, а также совпадающие с частью границы.

Особенностью исследуемой задачи является то, что малый параметр входит в уравнение в виде множителя только при одной из старших производных, так что порядок предельного уравнения тот же самый, что и исходного уравнения. Тем не менее, также существуют “особые” подмножества. К ним относятся, прежде всего, некоторые прямые, параллельные оси y , вдоль которых интегрируется предельное уравнение, которое в данной задаче является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Это – прямые, проходящие (как и в вышеупомянутых задачах) через угловые точки границы или касающиеся ее. Методика исследования асимптотического поведения решения уравнения (0.1) имеет много общего с методикой, использованной в работах [6], [7], но асимптотика решения задачи (0.1), (0.2) значительно отличается от асимптотик, исследованных в [6], [7].

Для того чтобы описать полученные результаты, обозначим через l_M прямую, проведенную через точку $M(x, y) \in \bar{D}$ параллельно оси y . Зададим на прямой l_M какое-нибудь направление, например, в сторону возрастания переменной y . Через Γ^+ обозначим множество точек границы Γ , в которых эти прямые выходят из области D , не касаясь при этом границы области. Аналогично, через Γ^- обозначим множество точек границы Γ , в которых эти прямые входят в область D , не касаясь границы области. Через Γ^* обозначим часть границы Γ , совпадающую с отрезками прямых, параллельных оси y .

Угловые точки могут быть различных видов. Перечислим возможные варианты.

1. Угловые точки образованы пересечением двух гладких кривых σ_1, σ_2 , принадлежащих одной и той же части границы Γ ; при этом либо обе кривые $\sigma_1, \sigma_2 \subset \Gamma^+$, либо обе кривые $\sigma_1, \sigma_2 \subset \Gamma^-$ и угловая точка $M_0 = \bar{\sigma}_1 \cap \bar{\sigma}_2$.

2. Угловые точки образованы пересечением двух гладких кривых σ_1, σ_2 , которые принадлежат разным участкам границы Γ , например, $\sigma_1 \subset \Gamma^-$, а $\sigma_2 \subset \Gamma^+$ и угловая точка $M_0 = \bar{\sigma}_1 \cap \bar{\sigma}_2$. При этом возможны два следующих случая расположения угловых точек на границе области:

а) отрезок прямой l_{M_0} , проходящей через угловую точку M_0 , в некоторой окрестности этой точки лежит в области D ;

б) отрезок прямой l_{M_0} , проходящей через угловую точку M_0 , в некоторой окрестности этой точки лежит вне области D .

3. Угловые точки образованы пересечением границы Γ^* (т.е. отрезков прямых, параллельных оси y) и гладких кривых $\sigma_1 \in \Gamma^-$ и $\sigma_2 \in \Gamma^+$.

Случай 2, б), т.е. случай угловой точки, для которой отрезок прямой l_{M_0} , проходящей через угловую точку M_0 , в некоторой окрестности этой точки лежит вне области D , рассмотрен в работе [8]. Все остальные перечисленные выше виды угловых точек рассматриваются в настоящей работе.

Заметим, что “особыми” подмножествами для задачи (0.1), (0.2) являются не только описанные выше окрестности угловых точек, но и отрезки прямых l_{M_0} ,

касающихся в точках M_0 границы Γ извне или изнутри области D . Асимптотическое поведение решения $u_\varepsilon(x, y)$ в окрестности “особого” подмножества в случае касания извне исследовано в работе [8], а в случае касания изнутри – в работе [9].

Таким образом, настоящая статья завершает исследование поведения решения задачи (0.1), (0.2) для области D с кусочно гладкой границей Γ общего положения.

§ 1. Угловая точка вида 2, а)

Рассмотрим сначала случай 2, а). Будем считать, что угловая точка совпадает с началом координат $(0, 0)$, а область D в некоторой фиксированной окрестности начала координат $D_\delta = \{(x, y) \in D, -\delta \leq x \leq \delta, \delta > 0\}$ совпадает с внешностью острого угла, лежащего в правой полуплоскости ($x > 0$) и образованного прямыми $\{y = 0, x > 0\}$ и $\{y = -Ax, A > 0, x > 0\}$. Итак, область D_δ (см. рис. 1) ограничена прямыми $\{y = 0, x > 0\} = \sigma_1 \subset \Gamma^-$, $\{y = -Ax, A > 0, x > 0\} = \sigma_2 \subset \Gamma^+$, а также двумя гладкими кривыми $y = \gamma^-(x)$ и $y = \gamma^+(x)$, лежащими для определенности в нижней и верхней полуплоскостях соответственно и принадлежащими частям границы Γ^- , Γ^+ соответственно, и прямыми $x = \pm\delta$.

Рис. 1. Область D_δ для случая угловых точек вида 2, а)

Будем строить асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в этой области D_δ . Без ограничения общности предположим, что граничная функция $h(x, y) \equiv 0$ на участках границы $y = \gamma^\pm(x)$, и перепишем граничное условие (0.2) для области D_δ в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, \gamma^\pm(x)) &= 0, \\ u_\varepsilon(x, 0) &= h_1(x), \quad x > 0, \quad u_\varepsilon(x, -Ax) = h_2(x), \quad x > 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

1.1. Внешнее асимптотическое разложение. Стандартное (внешнее) асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ будем строить в таком виде:

$$U(x, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, y). \quad (1.2)$$

Подставляя ряд (1.2) в уравнение (0.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующие рекуррентные соотношения:

$$L_0 u_0 = f(x, y), \quad L_0 u_k = -\frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial x^2}, \quad k \geq 1, \quad (1.3)$$

где

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + a(x, y).$$

Для прямой l_M , проведенной через внутреннюю точку M области D , вдоль каждого ее отрезка, лежащего в области D , определим функцию $u_k(x, y)$ как решение уравнения (1.3), удовлетворяющее в точках пересечения этого отрезка с ближайшими частями Γ^- , Γ^+ границы Γ таким граничным условием:

$$u_0(x, y) = h(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma^\pm, \quad u_k(x, y) = 0, \quad k > 0, \quad (x, y) \in \Gamma^\pm. \quad (1.4)$$

При $x > 0$ прямая l_M , проведенная через внутреннюю точку области D_δ , пересекает границу области в четырех точках и состоит из двух отрезков, один из которых лежит между кривыми $y = 0$ и $y = \gamma^+(x)$, а второй – между кривыми $\gamma^-(x)$ и $y = -Ax$. В соответствии с (1.1) и (1.4) в области $x > 0$, $0 \leq y \leq \gamma^+(x)$ коэффициенты $u_k(x, y)$ – это решения рекуррентной системы (1.3), удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_0(x, 0) = h_1(x), \quad u_k(x, 0) = 0, \quad k > 0, \quad u_k(x, \gamma^+(x)) = 0, \quad k \geq 0. \quad (1.5)$$

В области $x > 0$, $\gamma^-(x) \leq y \leq -Ax$ коэффициенты $u_k(x, y)$ – это решения рекуррентной системы (1.3), удовлетворяющие таким условиям:

$$u_k(x, \gamma^-(x)) = 0, \quad k \geq 0, \quad u_0(x, -Ax) = h_2(x), \quad u_k(x, -Ax) = 0, \quad k > 0. \quad (1.6)$$

При $x < 0$ прямая l_M , проведенная через внутреннюю точку области D_δ , пересекает границу области в двух точках, одна из которых принадлежит кривой $y = \gamma^-(x)$, а вторая – кривой $y = \gamma^+(x)$, и в соответствии с (1.1) в области $x < 0$, $\gamma^-(x) \leq y \leq \gamma^+(x)$ коэффициенты $u_k(x, y)$ – это решения рекуррентной системы (1.3), удовлетворяющие условиям

$$u_k(x, \gamma^\pm(x)) = 0, \quad k \geq 0. \quad (1.7)$$

Построенное внешнее асимптотическое разложение – это, по существу, три различных асимптотических ряда, коэффициенты которых определяются как решения трех различных задач ((1.3), (1.5); (1.3), (1.6); (1.3), (1.7)) в трех различных областях. Очевидно, что все функции $u_k(x, y)$ бесконечно дифференцируемы по переменным x, y . Очевидно также, что эти функции разрывны на прямой $x = 0$ (оси y), и поэтому внешнее асимптотическое разложение (1.3) непригодно для аппроксимации решения $u_\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ на оси $x = 0$.

1.2. Внутреннее асимптотическое разложение. В окрестности оси $x = 0$ перейдем от переменной x к новой, внутренней переменной $\zeta = x\varepsilon^{-1/2}$ и построим внутреннее асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в таком виде:

$$V(\zeta, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} v_k(\zeta, y). \quad (1.8)$$

Стандартным образом, т.е. переходя в исходном уравнении (0.1) к переменной ζ , разлагая коэффициенты $b(x, y)$, $a(x, y)$ и правую часть $f(x, y)$ в ряды Тейлора в окрестности прямой $x = 0$, заменяя в получившихся разложениях x на $\sqrt{\varepsilon}\zeta$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , приходим к следующей системе рекуррентных соотношений:

$$\begin{cases} L_1 v_0 = f(0, y), \\ L_1 v_k = \frac{\zeta^k}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(0, y) - \sum_{i=1}^k \frac{\zeta^i}{i!} \left[\frac{\partial^i b}{\partial x^i}(0, y) \frac{\partial v_{k-i}}{\partial y} + \frac{\partial^i a}{\partial x^i}(0, y) v_{k-i} \right] \equiv G_k(\zeta, y). \end{cases} \quad (1.9)$$

Здесь

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b(0, y) \frac{\partial}{\partial y} + a(0, y) = \Delta_{\zeta, y} + b(0, y) \frac{\partial}{\partial y} + a(0, y).$$

В переменных ζ , y уравнения границ $y = \gamma^\pm(x)$ принимают вид

$$y = \gamma^\pm(x) = \gamma^\pm(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^\pm \varepsilon^{j/2} \zeta^j,$$

а уравнение прямой $y = -Ax$ принимает вид $y = -A\varepsilon^{1/2}\zeta$ и, таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ окрестность прямой $x = 0$ в переменных ζ , y переходит в бесконечную полосу Ω_1 с разрезом вдоль положительной полуоси ζ ,

$$\Omega_1 = \{\zeta, y : \gamma^-(0) < y < \gamma^+(0), \ 0 < \theta < 2\pi\}, \quad (1.10)$$

где θ – полярный угол на плоскости ζ , y .

Потребовав, чтобы асимптотический ряд (1.8) формально удовлетворял граничному условию (1.1) на верхней стороне угла ($y = 0$), очевидным образом получаем, что

$$v_k(\zeta, +0) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k h_1}{\partial x^k}(0) \zeta^k, \quad \zeta > 0. \quad (1.11)$$

Соответственно, потребовав, чтобы асимптотический ряд (1.8) формально удовлетворял граничному условию (1.1) на нижней стороне угла ($y = -\varepsilon^{1/2}A\zeta$), получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} \frac{\zeta^k}{k!} \frac{\partial^k h_2}{\partial x^k}(0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} v_k(\zeta, -\varepsilon^{1/2}A\zeta) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \varepsilon^{i/2} \frac{\partial^i v_k}{\partial y^i}(\zeta, -0) \varepsilon^{i/2} \zeta^i \right], \quad \zeta > 0. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при степенях ε , получаем на нижней стороне разреза следующие соотношения:

$$\begin{cases} v_0(\zeta, -0) = h_2(0), & v_1(\zeta, -0) = \zeta \frac{\partial h_2}{\partial x}(0) - \frac{\partial v_0}{\partial y}(\zeta, -0)(-A\zeta), \\ v_2(\zeta, -0) = \frac{\zeta^2}{2!} \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}(0) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(\zeta, -0)(-A\zeta) - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}(\zeta, -0)(-A\zeta)^2, \\ \dots \\ v_k(\zeta, -0) = \frac{\zeta^k}{k!} \frac{\partial^k h_2}{\partial x^k}(0) - \sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} \frac{\partial^l v_{k-l}}{\partial y^l}(\zeta, -0)(-A\zeta)^l \equiv g_k(\zeta), \end{cases} \quad \zeta > 0. \quad (1.12)$$

Далее, потребовав, чтобы асимптотический ряд (1.8) формально удовлетворял граничному условию исходной задачи на верхней и нижней границах $y = \pm\gamma(x)$, т.е.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} v_k(\zeta, \gamma^{\pm}(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k\left(\zeta, \gamma^{\pm}(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{\pm} \varepsilon^{j/2} \zeta^j\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m v_k}{\partial y^m}(\zeta, \gamma^{\pm}(0)) \left[\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \zeta^{i/2} \gamma_i^{\pm} \right]^m, \end{aligned}$$

получим граничные условия для коэффициентов $v_k(\zeta, y)$ на прямых $y = \gamma^{\pm}(0)$:

$$\begin{cases} v_0(\zeta, \gamma^{\pm}(0)) = 0, & v_1(\zeta, \gamma^{\pm}(0)) = -\zeta \gamma_1^{\pm} \frac{\partial v_0}{\partial y}(\zeta, \gamma^{\pm}(0)), \\ \dots \\ v_k(\zeta, \gamma^{\pm}(0)) = S_k^{\pm}(\zeta), \end{cases} \quad (1.13)$$

где граничная функция $S_k^{\pm}(\zeta)$ имеет вид

$$S_k^{\pm}(\zeta) = \sum \beta_{lj} s \frac{\partial^l v_{k-j}}{\partial y^l}(\zeta, \gamma^{\pm}(0)) \zeta^s, \quad 1 < j \leq k.$$

Прежде чем перейти к построению коэффициентов $v_k(\zeta, y)$, вернемся к внешнему разложению (1.2). Как было отмечено выше, асимптотическое разложение (1.2) – это три различных асимптотических ряда, каждый из которых определен в соответствующей подобласти области D_{δ} . Коэффициенты $u_k(x, y)$ этих рядов бесконечно дифференцируемы по обоим переменным. Нас будет интересовать асимптотическое поведение этих рядов при $|x| \rightarrow 0$, т.е. в окрестности оси y , на которой коэффициенты $u_k(x, y)$ разрывны.

Заменим функции $u_k(x, y)$ их рядами Тейлора при $x \rightarrow 0$ и перейдем от переменной x к переменной ζ :

$$x = \sqrt{\varepsilon} \zeta.$$

Получим, что

$$U(x, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m u_k}{\partial x^m}(0, y) x^m \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} Q_k(\zeta, y), \quad (1.14)$$

где $Q_k(\zeta, y)$ – полином от ζ степени k с бесконечно дифференцируемыми по y коэффициентами. Заметим, что в представлении (1.14) полином $Q_k(\zeta, y)$ – на самом деле три различных полинома, каждый из которых определен выбором одного из трех рядов (1.2). Чтобы уточнить, какой из полиномов будет рассматриваться в той или иной ситуации, введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} P_k^+(\zeta, y) = Q_k(\zeta, y), & x > 0, \quad 0 < y < \gamma^+(x), \\ P_k^-(\zeta, y) = Q_k(\zeta, y), & x > 0, \quad \gamma^-(x) < y < -Ax, \\ R_k(\zeta, y) = Q_k(\zeta, y), & x < 0, \quad \gamma^-(x) < y < \gamma^+(x). \end{cases} \quad (1.15)$$

Используя эти обозначения, перепишем представление (1.14) в таком виде:

$$U(x, y, \varepsilon) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} P_k^+(\zeta, y), & x \rightarrow +0, \quad y > 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} P_k^-(\zeta, y), & x \rightarrow +0, \quad \gamma^-(x) < y < -Ax, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} R_k(\zeta, y), & x \rightarrow -0, \quad \gamma^-(x) < y < \gamma^+(x). \end{cases} \quad (1.16)$$

Перейдем к рассмотрению функций $v_k(\zeta, y)$ – коэффициентов внутреннего разложения (1.8). Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.1. *Существуют единственные бесконечно дифференцируемые вне окрестности начала координат и ограниченные при $\zeta^2 + y^2 \rightarrow 0$ решения $v_k(\zeta, y)$ задач (1.9), (1.11)–(1.13). Для этих решений при $\zeta \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические представления:*

$$v_k(\zeta, y) = \begin{cases} P_k^+(\zeta, y) + \omega_k^+(\zeta, y), & \zeta \rightarrow +\infty, \quad 0 < y < \gamma^+(0), \\ P_k^-(\zeta, y) + \omega_k^-(\zeta, y), & \zeta \rightarrow +\infty, \quad \gamma^-(0) < y < 0, \\ R_k(\zeta, y) + \omega_k(\zeta, y), & \zeta \rightarrow -\infty, \quad \gamma^-(0) < y < \gamma^+(0). \end{cases} \quad (1.17)$$

Остаточные члены $\omega_k^\pm(\zeta, y)$ при $\zeta \rightarrow +\infty$, $\omega_k(\zeta, y)$ при $\zeta \rightarrow -\infty$ стремятся к нулю быстрее любой степени $|\zeta|^{-1}$. Представления (1.17) допускают почленное дифференцирование любого порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задачи (1.9), (1.11)–(1.13) – это задачи в области с угловой точкой $(0,0)$ – вершиной угла величиной 2π . Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с угловыми точками наиболее полно рассмотрены в работе [10], где, кроме исследования вопросов существования решений в специальных классах функций, были построены асимптотические разложения решений в окрестностях угловых точек. Для эллиптических уравнений второго порядка коэффициенты асимптотических рядов были явно выписаны в работе [11].

Используя построения работ [10], [11], можно выписать асимптотические разложения решений задач (1.9), (1.11)–(1.13) при $r = \sqrt{\zeta^2 + y^2} \rightarrow 0$. Но поскольку в данной теореме нас интересуют лишь вопросы ограниченности решений, то достаточно следить только за главными членами асимптотических представлений функций $v_k(\zeta, y)$ при $r \rightarrow 0$.

Рассмотрим задачу для функции $v_0(\zeta, y)$. Согласно работе [10] существует единственное решение $v_0(\zeta, y)$ задачи (1.9), (1.11)–(1.13), ограниченное при $r \rightarrow 0$, для которого согласно [10], [11] справедливо асимптотическое представление вида:

$$v_0(\zeta, y) = h_1(0) + \frac{h_2(0) - h_1(0)}{2\pi} \theta + Cr^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} + O(r \ln r), \quad (1.18)$$

и это представление допускает почленное дифференцирование любого порядка. (Здесь C – некоторая константа.)

Очевидно, что производные функции $v_0(\zeta, y)$ при $r \rightarrow 0$ имеют особенности, порядок которых растет с ростом порядка дифференцирования. Тем не

менее, нетрудно проверить, что в рекуррентных соотношениях (1.9), (1.12) слагаемые, зависящие от производных функции $v_0(\zeta, y)$ в правых частях $G_k(\zeta, y)$ и граничных функциях $g_k(\zeta, y) = v_k(\zeta, -0)$ остаются ограниченными.

В правые части $G_k(\zeta, y)$ и граничные функции $g_k(\zeta, y)$ входят лишь производные по переменной y , поэтому ограничимся рассмотрением поведения функций $\frac{\partial^l v_0}{\partial y^l}(\zeta, y)$ при $r \rightarrow 0$. Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = r^{-1} \cos \theta$$

и для любого целого k верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^{k/2} \sin \frac{k\theta}{2} \right) &= \frac{k}{2} r^{(k-2)/2} \cos \frac{k-2}{2} \theta, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(r^{k/2} \cos \frac{k\theta}{2} \right) &= -\frac{k}{2} r^{(k-2)/2} \sin \frac{k-2}{2} \theta. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Следовательно, для любого $l > 0$ имеем

$$\frac{\partial^l \theta}{\partial y^l} = \alpha_l r^{-l} \Phi_l(\theta),$$

где $\Phi_l(\theta) = \cos(l\theta)$ при l нечетных, $\Phi_l(\theta) = \sin(l\theta)$ при l четных, так что для $l > 0$ получаем, что

$$\frac{\partial^l \theta}{\partial y^l}(\zeta, -0) = \beta_l \zeta^{-l}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^l \theta}{\partial y^l}(\zeta, -0)(-A\zeta)^l = \beta_l (-A)^l. \quad (1.20)$$

Из соотношений (1.19) следует также, что

$$\frac{\partial^l (r^{1/2} \sin \theta/2)}{\partial y^l}(\zeta, -0)(-A\zeta)^l = A^l \nu_l \zeta^{1/2}. \quad (1.21)$$

Рассмотрим задачу для функции $v_1(\zeta, y)$. Согласно (1.12), (1.18), (1.20), (1.21) имеем

$$\begin{aligned} v_1(\zeta, -0) &= g_1(\zeta) = \zeta \frac{\partial h_2}{\partial x}(0) - \frac{\partial v_0}{\partial y}(\zeta, -0)(-A\zeta) \\ &= \frac{h_2(0) - h_1(0)}{2\pi} A - \frac{AC}{2} \zeta^{1/2} + O(\zeta \ln \zeta), \quad \zeta \rightarrow +0, \end{aligned}$$

т.е. при $\zeta \rightarrow +0$ справедливы оценки

$$\begin{cases} v_1(\zeta, -0) = O(1) & \text{для } h_1(0) \neq h_2(0), \\ v_1(\zeta, -0) = o(1) & \text{для } h_1(0) = h_2(0). \end{cases} \quad (1.22)$$

Согласно (1.9), (1.18), (1.19) для правой части $G_1(\zeta, y)$ при $r \rightarrow 0$ справедливо представление

$$\begin{aligned} G_1(\zeta, y) &= -\frac{h_2(0) - h_1(0)}{2\pi} \left[\frac{\partial b}{\partial x}(0, 0) \cos^2 \theta + \frac{\partial a}{\partial x}(0, 0) \theta \right] \\ &\quad - Cr^{1/2} \left[\frac{\partial b}{\partial x}(0, 0) \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta + \frac{\partial a}{\partial x}(0, 0) \sin \frac{\theta}{2} \right] + O(r \ln r), \end{aligned}$$

т.е. правая часть $G_1(\zeta, y)$ остается ограниченной при $r \rightarrow 0$.

Используя результаты работы [10], нетрудно заключить, что существует единственное решение $v_1(\zeta, y)$ задачи (1.9), (1.11)–(1.13), ограниченное при $r \rightarrow 0$, и для него (см. [11]) при $r \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое представление следующего вида:

$$v_1(\zeta, y) = A \frac{h_2(0) - h_1(0)}{(2\pi)^2} \theta + \frac{CA}{4\pi} r^{1/2} \left[\theta \cos \frac{\theta}{2} + \ln r \sin \frac{\theta}{2} \right] + O(r \ln r),$$

которое допускает почленное дифференцирование любого порядка.

Поступая аналогичным образом, можно показать, что для любого $k > 1$ существует единственное решение $v_k(\zeta, y)$ задачи (1.9), (1.11)–(1.13), ограниченное в окрестности начала координат, для которого при $r \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое представление вида:

$$v_k(\zeta, y) = A^k \alpha_k [h_2(0) - h_1(0)] \theta + CA^k r^{1/2} S_k(\ln r, \theta) + O(r \ln^k r).$$

Здесь α_k – некоторая константа, $\alpha_k \neq 0$, $S_k(\ln r, \theta)$ – полином степени k от $\ln r$, коэффициенты которого являются линейными комбинациями функций вида $\theta^j \sin \frac{n\theta}{2}$, $\theta^q \cos \frac{m\theta}{2}$, где j, q, n, m – целые, $j, q \geq 0$. Таким образом, существование решений задач (1.9), (1.11)–(1.13), ограниченных при $r \rightarrow 0$, доказано.

Справедливость асимптотических представлений (1.17) для этих решений может быть доказана аналогично тому, как это было сделано в похожих ситуациях в монографии [5]. Теорема 1.1 доказана.

Таким образом, построены два асимптотических ряда (внешнее разложение (1.2) и внутреннее разложение (1.8)), каждый из которых является формальным асимптотическим решением исходной задачи (0.1), (0.2) в соответствующей подобласти рассматриваемой области D_δ : вне окрестности оси y и в окрестности оси y соответственно. В силу соотношений (1.17) эти ряды согласованы. Используя частичные суммы этих рядов

$$U_n(x, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k(x, y), \quad V_{2n}(\zeta, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{2n} \varepsilon^{k/2} v_k(\zeta, y), \quad (1.23)$$

где n – достаточно большое натуральное число, стандартным образом (см. [5], [6]) построим составное разложение, которое будет формальным асимптотическим решением задачи (0.1), (0.2) во всей области D_δ . Для этого рассмотрим функцию $\chi(t) \in C^\infty(-\infty, +\infty)$ такую, что $\chi(t) \equiv 1$ при $|t| \leq 1$, $\chi(t) \equiv 0$ при $|t| \geq 2$. Фиксируем некоторое ν такое, что $0 < \nu < 1/2$, и определим функцию $W_n(x, y, \varepsilon)$ так:

$$W_n(x, y, \varepsilon) = V_{2n}(\zeta, y, \varepsilon) \chi(x \varepsilon^{-\nu}) + [1 - \chi(x \varepsilon^{-\nu})] U_n(x, y, \varepsilon). \quad (1.24)$$

ТЕОРЕМА 1.2. Для всех точек области D_δ справедлива следующая оценка:

$$|u_\varepsilon(x, y) - W_n(x, y, \varepsilon)| \leq M \varepsilon^{n\lambda},$$

где постоянная M не зависит от ε , а λ зависит лишь от ν .

Доказательства теорем такого вида для эллиптических уравнений, для которых выполнена оценка вида (0.3), проведено в монографии [5], и в настоящей работе не имеет смысла повторять его.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Был рассмотрен случай, когда угловая точка образована пересечением двух прямых. Почти без изменений такое же исследование можно провести и в случае, когда угловая точка образована пересечением двух гладких кривых $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ при условии, что ни одна из этих кривых в точке пересечения не имеет касательной (односторонней), параллельной оси y . В случае, когда одна из кривых $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$ в точке пересечения имеет касательную, параллельную оси y , асимптотика решения $u_\varepsilon(x, y)$ имеет более сложный вид и может быть исследована аналогично тому, как это было сделано в работе [9].

§ 2. Остальные угловые точки

Исследование асимптотики решения $u_\varepsilon(x, y)$ для угловых точек вида 1 и вида 3 имеет много общего с проведенным выше исследованием для угловой точки вида 2, а), хотя имеются и некоторые отличия. Поэтому дальнейшее изложение будет более конспективным.

2.1. Угловая точка вида 1. Рассмотрим угловые точки, образованные пересечением кривых σ_1 , σ_2 , принадлежащих одной и той же части границы Γ , при этом либо $\sigma_1, \sigma_2 \subset \Gamma^+$, либо $\sigma_1, \sigma_2 \subset \Gamma^-$. Рассмотрим, например, случай, когда $\sigma_1, \sigma_2 \subset \Gamma^-$. Будем считать, что угловая точка совпадает с началом координат $(0, 0)$, а область D в некоторой фиксированной окрестности начала координат $D_\delta = \{(x, y) \in D, -\delta \leq x \leq \delta, \delta > 0\}$ совпадает с внутренностью угла, образованного полупрямой $\{y = 0, x > 0\} = \sigma_1 \subset \Gamma^-$ и какой-либо полупрямой, лежащей в левой полуплоскости ($x < 0$), например, полупрямой $\{y = Bx, B > 0, x < 0\} = \sigma_2 \subset \Gamma^-$. Таким образом, область D_δ (см. рис. 2) ограничена прямыми $\{y = 0, x > 0\}$, $\{y = Bx, B > 0, x < 0\}$, гладкой кривой $y = \gamma^+(x)$, лежащей в верхней полуплоскости ($y > 0$), и прямыми $x = \pm\delta$.

Рис. 2. Область D_δ для случая угловых точек вида 1

Без ограничения общности будем считать, что граничная функция $h(x, y)$ тождественно равна нулю на участке границе $y = \gamma^+(x)$, т.е. граничные условия (0.2) в этом случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, \gamma^+(x)) &= 0, \\ u_\varepsilon(x, 0) &= h_1(x), \quad x > 0, \quad u_\varepsilon(x, Bx) = h_2(x), \quad x < 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Внешнее разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ по-прежнему имеет вид (1.2). При этом функции $u_k(x, y)$ – это решения рекуррентной системы (1.3), удовлетворяющие при $x > 0$ граничным условиям (1.5), т.е.

$$u_0(x, 0) = h_1(x), \quad u_k(x, 0) = 0, \quad k > 0, \quad u_k(x, \gamma^+(x)) = 0, \quad k \geq 0, \quad (2.2)$$

а при $x < 0$ – граничным условиям

$$u_0(x, Bx) = h_2(x), \quad u_k(x, Bx) = 0, \quad k > 0, \quad u_k(x, \gamma^+(x)) = 0, \quad k \geq 0. \quad (2.3)$$

Построенное асимптотическое разложение – это два различных асимптотических ряда, коэффициенты которых определяются как решения двух различных задач, а именно, (1.3), (2.2) и (1.3), (2.3), в двух подобластях ($x > 0$ и $x < 0$) области D_δ . Эти функции бесконечно дифференцируемы при $x \geq 0$ и $x \leq 0$ соответственно, но разрывны на оси $x = 0$, так как $u_k(-0, y) \neq u_k(+0, y)$.

В окрестности оси $x = 0$ введем внутреннюю переменную $\zeta = x\varepsilon^{-1/2}$ и построим внутреннее асимптотическое разложение в виде ряда (1.8). Коэффициенты $v_k(\zeta, y)$ этого ряда по-прежнему удовлетворяют рекуррентной системе (1.9).

В переменных ζ, y уравнения границы $y = \gamma^+(x)$ принимает вид

$$y = \gamma^+(x) = \gamma^+(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^+ \varepsilon^{j/2} \zeta^j,$$

а уравнение прямой $y = Bx, x < 0$, принимает вид $y = B\varepsilon^{1/2}\zeta, \zeta < 0$, и, таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ окрестность прямой $x = 0$ в переменных ζ, y переходит в бесконечную полосу

$$\Omega_2 = \{\zeta, y : 0 < y < \gamma^+(0)\}. \quad (2.4)$$

Граничное условие для функций $v_k(\zeta, y)$ на границе $y = 0, \zeta > 0$ (правой полуоси ζ) по-прежнему имеет вид (1.11), а для того чтобы получить граничные условия для этих функций на границе $y = 0, \zeta < 0$ (левой полуоси ζ), потребуем так же, как и выше, чтобы асимптотический ряд (1.8) формально удовлетворял граничному условию (2.1) на стороне угла $y = \varepsilon^{1/2}B\zeta$. Получаем

$$\begin{cases} v_0(\zeta, 0) = h_2(0), & v_1(\zeta, 0) = \zeta \frac{\partial h_2}{\partial x}(0) - \frac{\partial v_0}{\partial y}(\zeta, 0)(B\zeta), & \zeta < 0, \\ v_2(\zeta, 0) = \frac{\zeta^2}{2!} \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}(0) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(\zeta, 0)(B\zeta) - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}(\zeta, 0)(B\zeta)^2, & \zeta < 0, \\ \dots \\ v_k(\zeta, 0) = \frac{\zeta^k}{k!} \frac{\partial^k h_2}{\partial x^k}(0) - \sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} \frac{\partial^l v_{k-l}}{\partial y^l}(\zeta, 0)(B\zeta)^l, & \zeta < 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Граничное условие для функций $v_k(\zeta, y)$ на верхней границе полосы Ω_2 , т.е. прямой $y = \gamma^+(0)$, по-прежнему имеет вид (1.13).

Таким образом, вместо задач (1.9), (1.11)–(1.13) в бесконечной полосе Ω_1 с разрезом вдоль положительной полуоси ζ (см. (1.10)) получили задачи (1.9), (1.11), (1.13), (2.5) в бесконечной полосе Ω_2 (см. (2.4)) с разрывными граничными функциями на нижней границе этой полосы: $v_k(\zeta, -0) \neq v_k(\zeta, +0)$.

Исследование свойств коэффициентов $v_k(\zeta, y)$ внутреннего разложения в данном случае проводится аналогично тому, как это было сделано в случае угловой точки вида 2, а).

Запишем внешнее разложение $U(x, y, \varepsilon)$ при $x \rightarrow 0$ в виде, аналогичном (1.14)–(1.16). Имеем

$$U(x, y, \varepsilon) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} T_k^+(\zeta, y), & x \rightarrow +0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} T_k^-(\zeta, y), & x \rightarrow -0, \end{cases}$$

где $T_k^{\pm}(\zeta, y)$ – полином от ζ степени k с бесконечно дифференцируемыми по y коэффициентами.

ТЕОРЕМА 2.1. *Существуют единственные бесконечно дифференцируемые вне окрестности начала координат и ограниченные при $\zeta^2 + y^2 \rightarrow 0$ решения $v_k(\zeta, y)$ задач (1.9), (1.11), (1.13), (2.5). Для этих решений при $\zeta \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические представления:*

$$v_k(\zeta, y) = \begin{cases} T_k^+(\zeta, y) + \mu_k^+(\zeta, y), & \zeta \rightarrow +\infty, \quad 0 < y < \gamma^+(0), \\ T_k^-(\zeta, y) + \mu_k^-(\zeta, y), & \zeta \rightarrow -\infty, \quad 0 < y < \gamma^+(0). \end{cases} \quad (2.6)$$

Остаточные члены $\mu_k^{\pm}(\zeta, y)$ при $\zeta \rightarrow \pm\infty$ стремятся к нулю быстрее любой степени $|\zeta|^{-1}$. Представления (2.6) допускают почленное дифференцирование любого порядка.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.1 и основано на использовании асимптотических представлений решений эллиптических уравнений (см. [10]) в окрестности точки разрыва граничных данных.

Для функции $v_0(\zeta, y)$ в данном случае справедливо следующее асимптотическое представление:

$$v_0(\zeta, y) = h_1(0) + \frac{h_2(0) - h_1(0)}{\pi} \theta - b(0, 0) \frac{h_2(0) - h_1(0)}{\pi} r \theta \sin \theta + Cr \sin \theta + O(r^2 \ln r),$$

которое допускает почленное дифференцирование любого порядка.

Дальнейшее доказательство повторяет доказательство теоремы 1.1. Для всех функций $v_k(\zeta, y)$ (решений задач (1.9), (1.11), (1.13), (2.5)) по-прежнему оказываются выполненными соотношения вида (1.22).

Далее, аналогично тому, как это было сделано ранее, используя частичные суммы (1.23) рядов, построенных в разных подобластях рассматриваемой области D_δ , построим составное разложение $W_n(x, y, \varepsilon)$, явное выражение для которого также имеет вид (1.24). Как и в предыдущем случае, это составное разложение является асимптотическим представлением исследуемого решения $u_\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 2.2. *Для всех точек области D_δ имеет место следующая оценка:*

$$|u_\varepsilon(x, y) - W_n(x, y, \varepsilon)| \leq M \varepsilon^{n\lambda},$$

где постоянная M не зависит от ε , а λ зависит лишь от ν .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Для случая угловой точки вида 1 замечание 1.1 остается справедливым.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Такое же исследование с небольшими изменениями можно провести в случае, когда рассматривается не угловая точка вида 1, а точка разрыва граничной функции исходной задачи (0.1), (0.2) на гладкой части границы Γ^+ или Γ^- .

2.2. Угловая точка вида 3. Перейдем к рассмотрению угловых точек, образованных при пересечении части Γ^* границы Γ , т.е. отрезков прямых, параллельных оси y , с гладкими кривыми $\sigma_1 \subset \Gamma^-$, $\sigma_2 \subset \Gamma^+$. Будем считать, что при $0 \leq x \leq \delta$, $\delta > 0$, область D лежит в правой полуплоскости $x > 0$, а ее граница Γ для этих значений переменной x состоит из прямой $\{x = 0, 0 < y < b\} \subset \Gamma^*$, прямой $\{y = A_1x, x > 0, A_1 < 0\} = \sigma_1 \subset \Gamma^-$ и прямой $\{y = b + A_2x, x > 0, b > 0, A_2 > 0\} = \sigma_2 \subset \Gamma^+$. Обозначим $D_\delta = \{(x, y) \in D, 0 \leq x \leq \delta\}$. Итак, область D_δ (см. рис. 3) ограничена частями границы – прямыми $\{x = 0, 0 < y < b\}$, $\{y = b + A_2x, x > 0, A_2 > 0\}$, $\{y = A_1x, x > 0, A_1 < 0\}$, и прямой $\{x = \delta\}$.

Рис. 3. Область D_δ для случая угловых точек вида 3

Исследование асимптотического поведения решения $u_\varepsilon(x, y)$ в данном случае также аналогично исследованию, проведенному ранее для точек вида 2, а).

Запишем граничные условия (0.2) в следующем виде:

$$u_\varepsilon(x, A_1x) = h_1(x), \quad u_\varepsilon(x, b + A_2x) = h_2(x), \quad (2.7)$$

$$u_\varepsilon(0, y) = h_3(y), \quad 0 < y < b. \quad (2.8)$$

Внешнее разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ имеет вид (1.2). Отметим, что коэффициенты $u_k(x, y)$ асимптотического ряда (1.2) – это решения рекуррентной системы (1.3), удовлетворяющие в соответствии с соотношениями (2.7) следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} u_0(x, A_1x) &= h_1(x), & u_k(x, A_1x) &= 0, \quad k \geq 1, \\ u_0(x, b + A_2x) &= h_2(x), & u_k(x, b + A_2x) &= 0, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Функции $u_k(x, y)$ бесконечно дифференцируемы по обоим переменным, но построенное внешнее разложение (1.2) не удовлетворяет граничному условию (2.8) на части границы Γ^* , совпадающей с прямой, параллельной оси y , т.е. при $x = 0$.

В окрестности оси $x = 0$ введем внутреннюю переменную $\zeta = x\varepsilon^{-1/2}$ и будем строить внутреннее асимптотическое разложение в виде ряда (1.8). Коэффициенты $v_k(\zeta, y)$ этого ряда по-прежнему удовлетворяют рекуррентной системе (1.9).

В переменных ζ, y уравнения границ $\{y = A_1x, A_1 < 0\}$, $\{y = b + A_2x, A_2 > 0\}$ принимают вид $\{y = A_1\varepsilon^{1/2}\zeta, \zeta > 0, A_1 < 0\}$, $\{y = b + A_2\varepsilon^{1/2}\zeta, \zeta > 0, A_2 > 0\}$ соответственно, и, таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ окрестность оси $x = 0$ в переменных ζ, y переходит в бесконечную полуполосу

$$\Omega_3 = \{\zeta, y : 0 < y < b, \zeta > 0\}.$$

Для того чтобы получить граничные условия на границах $y = 0$ и $y = b$, потребуем так же, как и выше, чтобы асимптотический ряд (1.8) формально удовлетворял граничным условиям (2.7). Получаем

$$\begin{cases} v_0(\zeta, 0) = h_1(0), & v_k(\zeta, 0) = \frac{\zeta^k}{k!} \frac{\partial^k h_1}{\partial x^k}(0) - \sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} \frac{\partial^l v_{k-l}}{\partial y^l}(\zeta, 0) (A_1 \zeta)^l, \\ v_0(\zeta, b) = h_2(b), & v_k(\zeta, b) = \frac{\zeta^k}{k!} \frac{\partial^k h_2}{\partial x^k}(b) - \sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} \frac{\partial^l v_{k-l}}{\partial y^l}(\zeta, b) (A_2 \zeta)^l. \end{cases} \quad (2.9)$$

На границе $\{\zeta = 0, 0 < y < b\}$ согласно граничному условию (2.8) необходимо потребовать, чтобы

$$v_0(0, y) = h_3(y), \quad 0 < y < b; \quad v_k(0, y) = 0, \quad 0 < y < b, \quad k > 0. \quad (2.10)$$

Исследование свойств коэффициентов $v_k(\zeta, y)$ (решений задач (1.9), (2.9), (2.10) в полуполосе Ω_3) проводится аналогично тому, как это было сделано в теореме 1.1.

Внешнее разложение $U(x, y, \varepsilon)$ при $x \rightarrow +0$ в переменных ζ, y имеет следующий вид:

$$U(x, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} P_k(\zeta, y),$$

где $P_k(\zeta, y)$ – полином от ζ степени k с бесконечно дифференцируемыми по y коэффициентами.

ТЕОРЕМА 2.3. *Существуют единственные бесконечно дифференцируемые вне окрестностей точек $(0, 0)$ и $(0, b)$ и ограниченные при $\zeta^2 + y^2 \rightarrow 0$ и $\zeta^2 + (y - b)^2 \rightarrow 0$ решения $v_k(\zeta, y)$ задач (1.9), (2.9), (2.10). Для этих решений при $\zeta \rightarrow +\infty$ справедливы следующие асимптотические представления:*

$$v_k(\zeta, y) = P_k(\zeta, y) + s_k(\zeta, y), \quad \zeta \rightarrow +\infty, \quad 0 < y < b. \quad (2.11)$$

Остаточные члены $s_k(\zeta, y)$ при $\zeta \rightarrow +\infty$ стремятся к нулю быстрее любой степени ζ^{-1} . Представления (2.11) допускают почленное дифференцирование любого порядка.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.1 и основывается на асимптотических представлениях для функции $v_0(\zeta, y)$ при $\zeta^2 + y^2 \rightarrow 0$ и $\zeta^2 + (y - b)^2 \rightarrow 0$. Ограничимся тем, что приведем это представление для $\zeta^2 + y^2 \rightarrow 0$. Имеем

$$v_0(\zeta, y) = h_1(0) + 2 \frac{h_3(0) - h_1(0)}{\pi} \theta + b(0, 0) \frac{h_3(0) - h_1(0)}{\pi} r \sin \theta \left[\frac{\pi}{2} - \theta \right] + r^2 P(\ln r, \theta) + Cr^2 \sin 2\theta + O(r^3 \ln^2 r).$$

Здесь $P(\ln r, \theta)$ – полином первой степени от $\ln r$, коэффициенты которого являются линейными комбинациями функций вида $\theta^j \sin(n\theta)$, $\theta^q \cos(m\theta)$ (j, q, n, m – целые, $j, q \geq 0$) и зависят от значений граничных функций и коэффициентов уравнения (0.1) в нуле, а именно, от $h_1(0)$, $h_3(0)$, $b(0, 0)$, $b_x(0, 0)$, $b_y(0, 0)$, $a(0, 0)$, а C – некоторая константа. Это представление допускает почленное дифференцирование любого порядка.

Используя частичные суммы (1.23) рядов (1.2) и (1.8), построенных в разных подобластях рассматриваемой области D_δ , построим составное разложение $W_n(x, y, \varepsilon)$ в виде, аналогичном (1.24), но с другой функцией $\chi(t)$, а именно, в качестве функции будем рассматривать бесконечно дифференцируемую на всей оси t функцию такую, что $\chi(t) \equiv 1$ при $t \leq 1$, $\chi(t) \equiv 0$ при $t \geq 2$. Функция $W_n(x, y, \varepsilon)$ по построению является формальным асимптотическим решением исходной задачи (0.1), (0.2) в области D_δ . Справедлива теорема, аналогичная теореме 1.2, в которой утверждается, что так построенное формальное асимптотическое решение на самом деле является асимптотическим разложением решения $u_\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

ТЕОРЕМА 2.4. Для всех точек области D_δ справедлива следующая оценка:

$$|u_\varepsilon(x, y) - W_n(x, y, \varepsilon)| \leq M \varepsilon^{n\lambda},$$

где постоянная M не зависит от ε , а λ зависит лишь от ν .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Был рассмотрен случай, когда кривые $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ совпадают с двумя полупрямыми, лежащими в правой полуплоскости ($x > 0$). Такое же исследование можно провести и в случае, когда $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ – это любые гладкие кривые, лежащие в правой полуплоскости, которые не касаются оси y в точках пересечения с ней. В противном случае асимптотика имеет более сложный характер и может быть исследована аналогично тому, как это было сделано в работе [8].

Список литературы

- [1] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, “Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром”, *УМН*, **12:5** (1957), 3–122.
- [2] В. А. Треногин, “Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника–Вишика”, *УМН*, **25:4** (1970), 123–156; англ. пер.: V. A. Trenogin, “The development and applications of the asymptotic method of Lyusternik and Vishik”, *Russian Math. Surveys*, **25:4** (1970), 119–156.
- [3] А. Найфэ, *Метод возмущений*, Мир, М., 1976; пер. с англ.: A. H. Nayfeh, *Perturbation methods*, Wiley, New York–London–Sydney, 1973.

- [4] М. Ван-Дайк, *Методы возмущений в механике жидкости*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: М. van Dyke, *Perturbation methods in fluid mechanics*, The Parabolic Press, Stanford, CA, 1975.
- [5] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989; англ. пер.: А. М. Il'in, *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Transl. Math. Monogr., **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [6] А. М. Ильин, Е. Ф. Леликова, “Метод сращивания асимптотических разложений для уравнения $\varepsilon \Delta u - a(x, y)u_y = f(x, y)$ в прямоугольнике”, *Матем. сб.*, **96(138)**:4 (1975), 568–583; англ. пер.: А. М. Il'in, E. F. Lelikova, “Method of joining asymptotic expansions for the equation $\varepsilon \Delta u - a(x, y)u_y = f(x, y)$ in a rectangle”, *Math. USSR-Sb.*, **25**:4 (1975), 533–548.
- [7] А. М. Ильин, Ю. П. Горьков, Е. Ф. Леликова, “Асимптотика решения эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных в окрестности особой характеристики предельного уравнения”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **1**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1975, 75–133.
- [8] Е. Ф. Леликова, “Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при одной из старших производных”, *Асимптотические разложения. Теория приближений. Топология*, Тр. ИММ, **9**, №1, 2003, 107–120; англ. пер.: E. F. Lelikova, “On the asymptotics of a solution of a second order elliptic equation with small parameter at a higher derivative”, *Proc. Inst. Math. Mech.*, 2003, Asymptotic expansions, approximation theory, topology, suppl. 1, 129–143.
- [9] Е. Ф. Леликова, “Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром”, *Докл. РАН*, **429**:4 (2009), 447–450; англ. пер.: E. F. Lelikova, “Asymptotic behavior of the solution to an equation with a small parameter”, *Dokl. Math.*, **80**:3 (2009), 852–855.
- [10] В. А. Кондратьев, “Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками”, *Тр. ММО*, **16**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1967, 209–292; англ. пер.: V. A. Kondrat'ev, “Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points”, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, **16** (1967), 227–313.
- [11] Е. Ф. Леликова, “О структуре асимптотики решения эллиптического уравнения второго порядка в окрестности угловой точки”, *Тр. ИММ*, **14**, №1, 2008, 98–111; англ. пер.: E. F. Lelikova, “On the structure of asymptotics of the solution of a second-order elliptic equation in a neighborhood of an angular point”, *Proc. Inst. Math. Mech.*, **261**, suppl. 1 (2008), 138–153.

Е. Ф. Леликова (E. F. Lelikova)

Институт математики и механики УрО РАН,
г. Екатеринбург
E-mail: dar@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
30.10.2009