Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Аносов, Расширение нульмерных гиперболических множеств до локально максимальных, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 7, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7647>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:00:38

УДК 517.938

Д. В. Аносов

Расширение нульмерных гиперболических множеств до локально максимальных

Доказано, что в любой окрестности нульмерного гиперболического множества F (гиперболические множества подразумеваются компактными) имеется локально максимальное множество $F_1 \supset F$. В доказательстве используется несколько уже известных или несложных результатов, формулировки которых выделены как отдельные утверждения. Основная теорема сопоставляется с известными родственными результатами, формулировки которых тоже приводятся. (Так, известно, что при положительной размерности F существование F_1 не гарантировано.)

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: гиперболическое множество, локальная максимальность, нульмерность, отслеживание псевдотраекторий и их семейств.

Пусть T – гомеоморфизм метрического пространства M с метрикой ρ на себя, F – компактное (двусторонне) инвариантное подмножество пространства M , т.е. $TF = F = T^{-1}F$. (Если не оговорено противное, под инвариантным множеством ниже понимается компактное инвариантное множество.) F называется *локально максимальным* инвариантным множеством, если у него имеется такая окрестность U , которая не содержит больших инвариантных множеств. Это равносильно существованию такой окрестности V множества F , что любая траектория $(T^i z; i \in \mathbb{Z})$, целиком содержащаяся в V , лежит в F . Понятие локальной максимальной, как и инвариантности, есть свойство множества F по отношению к T ; если хочется специально отметить это обстоятельство и упомянуть о T , то можно сказать: F локально максимально для T относительно T .

Понятие локальной максимальной было введено примерно одновременно, но с различными целями Ч. Конли (который назвал это свойство инвариантных множеств “изолированностью”) и мной в середине 60-х годов XX в. Я интересовался (и интересуюсь) локальной максимальной в следующих двух случаях. Основной из них тот, когда M – гладкое многообразие (с любой метрикой ρ , согласованной с топологией M , т.е. определяющей эту самую топологию), T – его диффеоморфизм на себя, а инвариантное множество F гиперболично – здесь, стало быть, удобно использовать риманову метрику. (Ниже подразумевается, что гиперболичность включает инвариантность, в частности компактность.) Сверх того я интересовался также локальной максимальной инвариантных множеств топологического автоморфизма (сдвига) Бернулли σ . В этом случае я обычно пишу Ω вместо M . Напомню, что $\Omega = A^{\mathbb{Z}}$, где A – некоторый

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00342).

конечный “алфавит”; можно считать, что $A = \{1, 2, \dots, n\}$ с некоторым n . Множество Ω стандартным образом снабжается топологией (тихоновская топология в произведении дискретных пространств); оно метризуемо и в нем обычно определяют расстояние между $a = (a_i), b = (b_i)$ одним из следующих двух способов:

а) $\rho(a, b) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha^i d(a_i, b_i)$, где α – какое-нибудь число из $(0, 1)$, а $d(p, q)$ для $p, q \in A$ равно 0 при $p = q$ и 1 при $p \neq q$;

б) сначала полагаем

$$n(a, b) = \min\{j \geq 0; a_j \neq b_j \text{ или } a_{-j} \neq b_{-j}\}$$

(при $a = b$ принимаем, что $n(a, b) = \infty$) и после этого определяем $\rho(a, b)$ как $1/(n(a, b) + 1)$; для доказательства неравенства треугольника заметим, что $n(a, b) \geq \min(n(a, c), n(b, c))$.

Элементы Ω принято представлять как последовательности $a = (a_i; i \in \mathbb{Z})$, где все a_i принадлежат A ; в этих терминах последовательность $\sigma a = ((\sigma a)_i; i \in \mathbb{Z})$ определяется так: $(\sigma a)_i = a_{i+1}$ при всех i .

Слова длины k в алфавите A – это упорядоченные наборы $(a_1, \dots, a_k)$ (возможно, с повторениями) k символов из этого алфавита; иначе говоря, это элементы декартова произведения A^k . Небольшой оттенок: когда говорят о словах, принято записывать их без скобок и запятых, т.е. вместо $(a_1, \dots, a_k)$ пишут $a_1 \dots a_k$. (Впрочем, я не всегда этому следую.) Отрезки (слова) длины k , содержащиеся в точке $(a_i; i \in \mathbb{Z})$, – это слова $a_j \dots a_{j+k-1}$ со всевозможными j .

Пусть W (от words) – какое-нибудь множество слов длины $k \geq 2$ в алфавите A . Будем называть слова из W *допустимыми*. *Марковское множество* M_W порядка $k - 1$ – это множество всех тех точек $a = (a_i; i \in \mathbb{Z}) \in \Omega$, у которых все содержащиеся в них слова длины k допустимы (т.е. принадлежат W); *марковский сдвиг* порядка $k - 1$ – это ограничение $\sigma|_{M_W}$. Распространенный синоним последнего термина – *топологическая марковская цепь*, сокращенно ТМЦ. (Вполне может случиться, что $M_W = \emptyset$; формально такая возможность ниже не исключается. Но содержательным, конечно, является случай $M_W \neq \emptyset$.)

В принципе достаточно рассматривать только марковские множества и сдвиги порядка¹ 1. Как хорошо известно, для марковского множества M_W в $\{1, \dots, n\}^k$ порядка > 1 можно указать такие n_1 и $W_1 \subset \{1, \dots, n_1\}^2$, что M_W является гомеоморфным образом множества M_{W_1} при некотором гомеоморфизме $\varphi: M_{W_1} \rightarrow M_W$, который эквивариантен относительно ограничений на M_{W_1} и M_W сдвигов Бернулли σ_1 в $\{1, \dots, n_1\}^{\mathbb{Z}}$ и σ в $\{1, \dots, n\}^{\mathbb{Z}}$ (т.е. $\varphi \circ (\sigma_1|_{M_{W_1}}) = (\sigma|_{M_W}) \circ \varphi$; в подобных случаях я буду говорить об *эквигомеоморфизме*).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. а) *Локально максимальные (для σ) подмножества $\Phi \subset \Omega$ суть в точности те, для которых имеются такие k и $W \subset \{1, \dots, n\}^k$, что $\Phi = M_W$.*

б) *Для любого инвариантного (относительно σ) подмножества $\Phi \subset \Omega$ в любой его окрестности U имеется локально максимальное инвариантное (для σ) множество F_1 , содержащее Φ .*

¹ В связи с этим, говоря о марковских множествах и сдвигах, нередко по умолчанию подразумевают, что они имеют порядок 1. Однако в части наших построений непосредственно фигурируют марковские подмножества и сдвиги порядка > 1 .

Все это было доказано мной и В. М. Алексеевым в 60-е годы (см. его чуть более поздние лекции [1], где можно найти ссылки на предшествующие публикации на эту и родственные темы; почти все они принадлежат Алексееву). Но только недавно я понял, что в предложении 1, б) из всех свойств Ω и σ существенна только нульмерность Ω .

ТЕОРЕМА 1. *Пусть M – нульмерное локально компактное метризуемое пространство, T – его гомеоморфизм на себя, F – инвариантное (относительно T) множество. Тогда в любой окрестности последнего имеется локально максимальное инвариантное множество F_1 , содержащее F .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу локальной компактности M и компактности² F у F имеется компактная окрестность V . В силу нульмерности M у F имеется открыто-замкнутая окрестность U , содержащаяся в V . (Прежде всего, существуют такие открыто-замкнутые множества $U_1, \dots, U_n$ – окрестности некоторых точек F , что $U_i \subset V$, $U_i \cap U_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $F \subset \bigcup U_i$. Это $\bigcup U_i$ и можно принять за U .) Положим $F_1 = \bigcap T^n U$. Ясно, что $TF_1 = F_1$, F_1 компактно (как замкнутое подмножество V) и траектория, целиком лежащая в U , содержится в F_1 . А ведь $U \supset F_1$, так что U , будучи открытым множеством, является такой окрестностью F_1 , в которой нет инвариантного множества, строго большего F_1 .

В 60-е годы XX в. возник вопрос: верно ли, что если F – инвариантное гиперболическое множество диффеоморфизма T гладкого многообразия M , то в любой его окрестности имеется локально максимальное инвариантное множество F_1 , содержащее F ? Он был сформулирован мной (см. [2]) и В. М. Алексеевым (я вновь сошлюсь только на его более позднюю подробную публикацию [1]). Мы были склонны надеяться, что ответ является положительным. Но это оказалось неверным. Еще в 80-е годы А. Фати построил противоречащий пример, к сожалению, оставшийся неопубликованным. Я узнал о нем от М. Шуба и Ч. Пью только в 2006 г., несколько позднее, чем я узнал о примере Фишера (см. ниже). В примере Фати размерность $\dim F$ равна 2. Такой же (как я понимаю) пример был опубликован в 2001 г. С. Кровизье (см. [3]). В 2005 г. появилась статья Т. Фишера [4], где был построен другой противоречащий пример, в котором³ $\dim F = 1$.

Имея k -мерный пример, легко получить пример с любой $\dim F > k$. Поскольку имеются противоречащие примеры любой положительной размерности, остается вопрос: какова ситуация с нульмерными гиперболическими множествами?

ТЕОРЕМА 2. *Нульмерные локально максимальные гиперболические множества F диффеоморфизма T гладкого многообразия M на себя суть в точности те гиперболические множества, которые гомеоморфны некоторым марковским подмножествам Φ сдвига Бернулли σ в $\Omega = \{1, \dots, n\}^{\mathbb{Z}}$ с некоторым n*

² Напомню, что инвариантные множества в этой статье подразумеваются компактными.

³ Теперь, когда мы знаем, что гиперболическое множество F , не являющееся локально максимальным, может как обладать, так и не обладать свойством “в любой окрестности F имеется локально максимальное множество $F' \supset F$ ”, представляется целесообразным ввести специальное название для множеств, обладающих этим свойством (но не локально максимальных). Предлагаю название “локально предмаксимальные” множества. Я не решился использовать это новое название в формулировках, но напоминая о нем в подстрочных примечаниях. Вот пример его использования: Φ в предложении 1, б) и F в теореме 1 либо локально максимальны, либо локально предмаксимальны.

посредством гомеоморфизма $f: \Phi \rightarrow F$, для которого $f \circ (\sigma|_{\Phi}) = (T|_F) \circ f$. (Можно сказать, что F – гомеоморфный образ Φ при некотором эквигомеоморфизме $f: \Phi \rightarrow F$.)

Эта теорема “перекликается” с предложением 1, а). Возможно, она тоже не нова, но я не встречал ее в литературе. А вот следующая теорема, в доказательстве которой используется теорема 2 и которая “перекликается” с предложением 1, б), представляется новой.

ТЕОРЕМА 3. Пусть F – нульмерное гиперболическое множество диффеоморфизма T гладкого многообразия M на себя. Тогда в любой окрестности V множества F имеется локально максимальное инвариантное множество F_1 , содержащее⁴ F .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сказанное привлекает внимание к размерностям гиперболических множеств. Нетрудно доказать (и едва ли ново), что минимальное гиперболическое множество на замкнутой поверхности нульмерно и что инвариантное множество гиперболического автоморфизма двумерного тора либо нульмерно, либо совпадает со всем тором. Однако аналогичные вопросы о гиперболических множествах в фазовых многообразиях большей размерности остаются, насколько я знаю, открытыми.

Доказательства теорем 2 и 3 потребуют некоторой подготовки. В этих доказательствах используется характеристика локально максимальных инвариантных множеств, связанная с отслеживанием δ -траекторий⁵.

Под δ -траекторией гомеоморфизма T метрического пространства M с метрикой ρ понимается такая последовательность точек $(x^i; i \in \mathbb{Z})$, что $\rho(Tx^i, x^{i+1}) < \delta$ при всех i . Используют также название *псевдотраектория*. (Оно не содержит явного указания на δ и в этом отношении является неопределенным. Но говоря о псевдотраекториях, по умолчанию подразумевают уточнение “ δ -траектории со всеми достаточно малыми δ ”). Неопределенность сводится к тому, что не уточнена требуемая малость δ ; такая формальная неточность типична для всех тех разделов математики, которые объединяют под общим названием “анализ”. Бывает удобно вместо отдельных δ -траекторий говорить об их *семействах* – тройках (X, φ, f) , где X – топологическое пространство, φ – его гомеоморфизм на себя, а $f: X \rightarrow M$ – непрерывное отображение, причем $\rho(f\varphi(x), Tf(x)) < \delta$ для всех $x \in X$. Если $f\varphi = Tf$, то это семейство траекторий.)

Говорят, что *траектория* $(T^i x; i \in \mathbb{Z})$ ε -отслеживает последовательность точек y^i , если $\rho(T^i x, y^i) < \varepsilon$ при всех i . В понятном смысле можно говорить также, что одна последовательность точек ε -отслеживает другую. Семейство

⁴То есть F либо локально максимально, либо локально предмаксимально.

⁵Начиная отсюда в формулировках и рассуждениях часто будет явно фигурировать метрика ρ . Но ее конкретный вид безразличен, лишь бы она задавала используемую в фазовом пространстве (или в интересующей нас его части) топологию. Так, метрика привлекается в приводимом далее определении δ -траектории, однако мы будем применять его только к последовательностям (x^i) , которые лежат в некоторой компактной части пространства M , а наши утверждения или рассуждения, упоминающие δ -траектории, будут относиться ко всем достаточно малым $\delta > 0$; поэтому метрику можно заменить на любую другую метрику, индуцирующую ту же топологию.

траекторий (X, φ, h) ε -отслеживает семейство δ -траекторий (X, φ, f) , если $\rho(f(x), h(x)) < \varepsilon$ при всех x , т.е. каждая δ -траектория $(f\varphi^i(x); i \in \mathbb{Z})$ ε -отслеживается траекторией $(h\varphi^i(x))$.

Инвариантное множество F гомеоморфизма T метрического пространства M с метрикой ρ обладает внутренним свойством отслеживания внутренних псевдотраекторий, если для любого $\varepsilon > 0$ имеется такое $\delta > 0$, что любая δ -траектория, лежащая в F , ε -отслеживается некоторой траекторией, тоже лежащей в F .

ТЕОРЕМА 4. Пусть F – инвариантное множество для автоморфизма Бернулли или гиперболическое множество для диффеоморфизма $T: M \rightarrow M$ гладкого многообразия M . Для локальной максимальной F необходимо и достаточно, чтобы F обладало свойством внутреннего отслеживания внутренних псевдотраекторий.

Доказательство опирается на следующее утверждение о таких множествах, как сказано в первой фразе теоремы 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть F – инвариантное множество для автоморфизма Бернулли или гиперболическое множество для диффеоморфизма $T: M \rightarrow M$ гладкого многообразия M . Тогда у F существует окрестность U со следующими двумя свойствами.

а) В U имеет место свойство разделения движений. (Это означает существование такой “константы разделения” $r > 0$, что если две траектории $(T^i x)$ и $(T^i y)$ лежат в U и расстояние $\rho(T^i x, T^i y)$ не больше r при всех i , то $x = y$.)

б) Для любого $\varepsilon > 0$ имеется такое $\delta > 0$, что любая δ -траектория, лежащая в U , ε -отслеживается некоторой траекторией, а семейство δ -траекторий (X, φ, f) , содержащееся в U (это означает, конечно, включение $f(X) \subset U$), ε -отслеживается некоторым семейством траекторий (X, φ, h) .

Предложение 2 хорошо известно с конца 60-х годов (а фактически восходит к более ранним моим работам). Его формулировки в литературе (помимо уже указанных работ можно обратиться к [5], [6] или формально – кроме сведений о семействах – к [7]) подчас внешне отличаются от приведенной выше⁶, но различия несущественны: после небольших изменений доказательств получается доказательство предложения 2 в нужном нам виде. (Сказанное относится и к фигурирующему ниже (см. замечание 2 и его обсуждение) свойству разделения движений на конечном отрезке времени.)

В свете свойства б) предложения 2 необходимость в теореме 4 представляется почти очевидной. Пусть (x^i) – δ -траектория в F . При достаточно малом δ она ε -аппроксимируется некоторой траекторией $(T^i y)$, лежащей в U . Поскольку $\rho(T^i y, x^i) < \varepsilon$ при всех i , то $(T^i y)$ лежит в ε -окрестности $U_\varepsilon(F)$

⁶В том числе имеются формулировки предложения 2, б) несколько более общего характера (см. [2] и [6]). В них говорится об отслеживании псевдотраекторий и семейств таковых траекториями и семействами траекторий не только исходного диффеоморфизма T , но и любого близкого к нему диффеоморфизма. (В предложении 2, а) тоже можно говорить не только о T , но и о близких диффеоморфизмах.) В рамках настоящей работы говорить о диффеоморфизмах, близких к T , не приходится, поэтому формулировка предложения 2, а) приведена не в полной общности.

множества F . При достаточной малости δ можно обеспечить любую требуемую малость ε , а при достаточно малом ε в силу локальной максимальнойности F траектория $(T^i y)$ должна лежать в F . Получилось, что δ -траектория в F ε -аппроксимируется траекторией, тоже лежащей в F , т.е. F действительно обладает свойством внутреннего отслеживания внутренних псевдотраекторий.

Переходя к доказательству достаточности, отметим сначала один простой факт, не связанный (по крайней мере, по своей формулировке) с условиями на F , указанными в первой фразе теоремы 4. Пусть F обладает свойством внутреннего отслеживания внутренних псевдотраекторий. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой δ -траектории (x^i) , лежащей в $U_\delta(F)$, в F существует ε -отслеживающая ее траектория $(T^i z)$. Действительно, в F существует последовательность (y^i) , δ -отслеживающая $(T^i x)$ (поскольку $x^i \in U_\delta(F)$, то в F имеется такая точка y^i , что $\rho(x^i, y^i) < \delta$). При достаточно малом d множество $U_d(F)$ относительно компактно. Тогда для любого $\alpha > 0$ имеется такое $\delta > 0$, что всюду в $U_d(F)$ из $\rho(x, y) < \delta$ следует неравенство $\rho(Tx, Ty) < \alpha/2$. При этом можно считать, что $\delta < d$ и $\delta < \alpha/2$. Тогда последовательность (y^i) в F , δ -отслеживающая лежащую в $U_\delta(F)$ траекторию $(T^i x)$, является α -траекторией, ибо

$$\begin{aligned} \rho(T^i x, y^i) &< \delta, \rho(T^{i+1} x, T y^i) < \frac{\alpha}{2}, \\ \rho(y^{i+1}, T y^i) &\leq \rho(y^{i+1}, T^{i+1} x) + \rho(T^{i+1} x, T y^i) < \delta + \frac{\alpha}{2} < \alpha. \end{aligned}$$

При достаточной малости числа α (которое можно считать меньшим ε ; заметим, что тогда и $\delta < \varepsilon$) α -траектория (y^i) , лежащая в F , ε -отслеживается некоторой траекторией $(T^i z)$ из F . Последняя 2ε -отслеживает исходную траекторию $(T^i x)$:

$$\rho(T^i z, T^i x) < \rho(T^i z, y^i) + \rho(y^i, T^i x) < \varepsilon + \delta < 2\varepsilon.$$

Поскольку ε может быть любым положительным числом, упомянутый нами факт доказан.

Теперь достаточность условия, указанного в теореме 4, для локальной максимальнойности F получается совсем просто. При выполнении этого условия траектория $(T^i x)$, целиком расположенная достаточно близко к F , ε -отслеживается некоторой траекторией $(T^i y)$ из F . Но из а) видно, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ такие две траектории должны совпадать. А поскольку $T^i y \in F$, то получается, что исходная траектория $(T^i x)$, о которой вначале было сказано только то, что она близка к F , должна лежать в F . Это и есть локальная максимальность F .

Теорема 4 позволяет вместо локальной максимальнойности говорить о свойстве внутреннего отслеживания внутренних псевдотраекторий. Очевидно, что это свойство инвариантно относительно эквивогоморфизмов. Сказанное делает очевидной следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. Пусть два гиперболических множества F_1, F_2 (двух диффеоморфизмов двух гладких многообразий) гомеоморфны посредством эквивариантного гомеоморфизма $F_1 \rightarrow F_2$, и пусть одно из них локально максимально. Тогда другое множество тоже локально максимально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Здесь мы тоже привлекаем теорему 4. Заметим, что марковское подмножество $\Phi \subset \Omega$ обладает свойством внутреннего отслеживания внутренних псевдотраекторий. Последнее легко доказать непосредственно, а формально короче вывести из предложений 1, а) и 2, б). Пусть (x^i) – δ -траектория, лежащая в Φ . Предложение 2, б) гарантирует, что при достаточной малости δ эта δ -траектория ε -отслеживается некоторой траекторией $(T^i y)$, которая лежит в $U_\varepsilon(\Phi)$, поскольку все ее точки отстоят не более чем на ε от некоторых точек из Φ . В силу локальной максимальнойности Φ при малых ε такая траектория содержится в Φ , доставляя, тем самым, внутреннее отслеживание внутренней псевдотраектории (x^i) . Значит, эквивогомеоморфный образ F марковского подмножества тоже обладает свойством внутреннего отслеживания внутренних псевдотраекторий, а если при этом множество F гиперболично, то по теореме 4 оно локально максимально. Ясно также, что такое F нульмерно.

Доказывая обратное утверждение (нульмерное локально максимальное F эквивогомеоморфно некоторому M_W), мы непосредственно будем использовать следующие свойства F :

F – инвариантное множество (что в данной статье включает компактность);

F нульмерно;

F обладает свойством внутреннего отслеживания внутренних псевдотраекторий (пусть числа ε, δ таковы, что δ -траектории ε -отслеживаются);

в F имеет место разделение движений с константой разделения r .

В силу нульмерности и компактности множества F у него имеются такие открыто-замкнутые в относительной топологии подмножества $U_1, \dots, U_n$, что

$$\bigcup U_i = F, \quad U_i \cap U_j = \emptyset \quad \text{при } i \neq j, \quad \text{diam } U_i < r. \quad (1)$$

(В нульмерном пространстве каждая точка имеет базу открыто-замкнутых окрестностей. В силу компактности F отсюда вытекает существование таких открыто-замкнутых подмножеств $W_1, \dots, W_n$, что $\bigcup W_i = F$ и $\text{diam } W_i < r$. Полагая $U_1 = W_1$, $U_i = W_i \setminus (W_1 \cup \dots \cup W_{i-1})$ при $i = 2, \dots, n$.)

Определим следующее отображение $g: F \rightarrow \Omega$ (где $\Omega = \{1, \dots, n\}^{\mathbb{Z}}$): образом точки $x \in F$ служит такая последовательность $\omega = (\omega_i)$, что $T^i x \in U_{\omega_i}$. Ясно, что $\sigma g(x) = g(Tx)$. Убедимся в непрерывности g . Для этого мы покажем следующее: для любого натурального N у x в F имеется такая окрестность V , что когда $y \in V$, все члены $g(y)_i$ и $g(x)_i$ последовательностей $g(y)$ и $g(x)$ при $|i| \leq N$ совпадают. Можно взять $V = \bigcap_{i=-N}^N T^{-i} U_{\omega_i}$ (это суть относительно открытые подмножества F , содержащие x) и $T^i V \subset U_{\omega_i}$ при $|i| \leq N$.

Убедимся, далее, в инъективности g . Равенство $g(x) = g(y)$ означает, что при каждом i две точки $T^i x$ и $T^i y$ принадлежат одному и тому же множеству U_{ω_i} . Тогда $\rho(T^i x, T^i y)$ меньше константы разделения r и, следовательно, $x = y$.

Инъективное непрерывное отображение компакта F является гомеоморфизмом F на его образ $g(F)$. Естественно, мы принимаем g^{-1} за f и $g(F)$ за Φ . Эквивариантность гомеоморфизма f следует из эквивариантности g . Действительно, если $\omega \in g(F)$, то $\omega = g(x)$ с некоторым $x \in F$, и

$$f\sigma\omega = g^{-1}\sigma g(x) = g^{-1}g(Tx) = Tx = Tf\omega.$$

Остается доказать, что Φ – марковское подмножество Ω . Будучи эквивалентным образом множества F , обладающего свойством внутреннего отслеживания псевдотраекторий, Φ тоже обладает этим свойством и по теореме 4 является локально максимальным множеством для сдвига Бернулли σ . А тогда предложение 1, а) гарантирует, что Φ является марковским подмножеством Ω .

Доказательству теоремы 3 предположим следующее замечание, связанное со свойством разделения движений.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть инвариантное множество F обладает свойством разделения движений с константой разделения r . Тогда для любого $\beta > 0$ существует такое натуральное $l = l(\beta)$, что всякий раз, когда для каких-нибудь $x, y \in F$ выполняются неравенства

$$\rho(T^i x, T^i y) \leq r \quad \text{при всех } i, \quad |i| \leq l, \quad (2)$$

справедливо $\rho(x, y) \leq \beta$. (При умеренной близости друг к другу длинных – в обе стороны по времени – “отрезков” траекторий двух точек последние должны быть очень близки.)

Это можно назвать “свойством разделения движений на конечном отрезке времени”; утверждение, что гиперболические множества им обладают, является аналогом предложения 2, а)⁷. В литературе либо приводят доказательство предложения 2, а), фактически одновременно доказывающее (для гиперболических же множеств) и данный аналог, либо даже сначала доказывают последний и уже затем из него выводят предложение 2, а) (см. [7])⁸. Но все же свойство разделения движений на конечном отрезке времени для гиперболических множеств менее известно, нежели предложение 2, а), и читатель вполне мог познакомиться с доказательством этого предложения, не сопровождавшимся явным упоминанием о попутном доказательстве его аналога, относящегося к конечному отрезку времени (и тем более не опирающимся на этот аналог). Можно было бы пересмотреть с этой точки зрения такое доказательство и “выделить” неявно содержащееся в нем доказательство указанного аналога, но легче получить последний, доказав замечание 2 и затем сославшись на предложение 2, а).

Допустим, что замечание 2 неверно. Тогда существовало бы $\beta > 0$ со следующим свойством: для любого l имеются такие $x_l, y_l \in F$, что для них выполняется (2) и в то же время $\rho(x_l, y_l) > \beta$. Существует такая подпоследовательность l_k , что x_{l_k} и y_{l_k} сходятся к некоторым $u, v \in F$. Тогда при любом i

$$\rho(T^i u, T^i v) = \lim_k \rho(T^i x_{l_k}, T^i y_{l_k}) \leq r,$$

и так как r – константа разделения, то $u = v$. С другой стороны,

$$\rho(u, v) = \lim_k \rho(x_{l_k}, y_{l_k}) \geq \beta.$$

⁷ О разделении движений на конечном отрезке времени мы говорим применительно к точкам F , тогда как о разделении движений на бесконечном отрезке времени мы говорили применительно к точкам, близким к F . О первом свойстве тоже можно было бы говорить применительно к точкам, близким к F , но это нам не потребуется.

⁸ Если нужно получить предложение 2, а) в приведенном выше виде (для точек, близких к F), то, естественно, его аналог для конечного отрезка времени тоже нужно доказывать для точек, близких к F .

Переходим непосредственно к доказательству теоремы 3. Сначала уточним выбор фигурирующих в нем чисел $r, \varepsilon, \delta, k$, а также других объектов (множеств U, U_i и функции $l(\cdot)$). Окрестность U множества F и число r должны быть такими же, как в предложении 2. Число $\varepsilon > 0$ должно удовлетворять двум условиям малости. Во-первых, $\varepsilon < r/4$. Во-вторых, в теореме 3 локально максимальное множество F_1 , содержащее множество F , должно лежать в некоторой наперед заданной окрестности V последнего. У нас F_1 получится лежащим в $U_\varepsilon(F)$, поэтому потребуем, чтобы было $U_\varepsilon(F) \subset V$. Предложение 2, б) сопоставляет этому ε некоторое $\delta > 0$ (ε -аппроксимация δ -траекторий). Уменьшив, если потребуется, это δ , будем считать, что $\delta \leq \varepsilon$. Далее, фиксируем какую-нибудь систему $U_1, \dots, U_n$ относительно открыто-замкнутых подмножеств множества F , для которой

$$\bigcup U_i = F, \quad U_i \cap U_j = \emptyset \quad \text{при } i \neq j, \quad \text{diam } U_i < \delta.$$

В силу компактности непересекающихся множеств U_i они находятся на положительном расстоянии друг от друга, и мы берем какое-нибудь

$$\alpha \in \left(0, \min_{i \neq j} \rho(U_i, U_j)\right),$$

где расстояние между двумя множествами понимается как нижняя грань (в данном случае – минимум) расстояний между их точками. Напомним, что в замечании 2 каждому $\beta > 0$ сопоставлено некоторое $l(\beta)$. В некоторый момент нам понадобится, чтобы фигурирующее в рассуждениях число k было $\geq l(\alpha)$.

В доказательстве теоремы 2 было введено отображение

$$g: F \rightarrow \Omega = \{1, \dots, n\}^{\mathbb{Z}}, \quad g(x) = (\omega_i) \iff \forall i \quad T^i x \in U_{\omega_i},$$

которое, как там показано, является эквигомеоморфизмом⁹. Пользуясь этим отображением, определим множество допустимых слов $W_k \subset \{1, \dots, n\}^{2k+1}$ (число $k \geq 1$ пока может быть любым, но впоследствии будет подчинено требованию, что $k \geq l(\alpha)$) как множество всевозможных слов длины $2k+1$, содержащихся в последовательностях $(\omega_i) = g(x)$ со всевозможными $x \in F$. Заметим сразу, что достаточно брать слова вида $(\omega_{-k}, \dots, \omega_k)$: слово $(\omega_{j-k}, \dots, \omega_j, \dots, \omega_{j+k})$, содержащееся в последовательности $\omega = (\omega_i) = g(y)$ с каким-нибудь $y \in F$, совпадает со словом $(\omega'_{-k}, \dots, \omega'_0, \dots, \omega'_k)$ последовательности $\omega' = (\omega'_i) = \sigma^{-j}\omega = g(T^{-j}y)$. Вот другое определение W_k :

$$W_k = \left\{ (\omega_{-k}, \dots, \omega_k); \bigcap_{-k}^k T^{-j} U_{\omega_j} \neq \emptyset \right\}.$$

Действительно, если слово $(\omega_{-k}, \dots, \omega_k)$ содержится в последовательности $g(x) = (\omega_i)$, то $T^j x \in U_{\omega_j}$ при всех j , в том числе при $|j| \leq k$, так что $x \in T^{-j} U_{\omega_j}$, и пересечение, фигурирующее в новом определении, непусто. Обратно, если оно непусто, то в нем содержится некоторая точка x . Это точка из F (ведь $U_j \subset F$), и для нее

$$T^j x \in U_{\omega_j} \quad \text{при } |j| \leq k.$$

⁹В соответствующей части теоремы 2 говорится о локально максимальном F , но при доказательстве указанного свойства g локальная максимальность F не используется.

Значит, элементы последовательности $g(x)$ с номерами от $-k$ до k – это как раз $\omega_{-k}, \dots, \omega_k$. Понятно, что $g(F) \subset M_{W_k}$ при любом k . Отнюдь не утверждается, будто каждая точка $\omega \in M_{W_k}$ совпадает с $g(x)$ для некоторого $x \in F$, но при большом k марковское множество M_{W_k} близко к множеству $g(F)$ (содержится в его малой окрестности). В Ω у каждой точки $\omega = (\omega_i)$ база (одна из баз) окрестностей состоит из множеств

$$V_m(\omega) = \{\omega' = (\omega'_i); \omega'_i = \omega_i \text{ при } |i| \leq m\},$$

а база окрестностей компактного подмножества $K \subset \Omega$ состоит из множеств

$$V_m(K) = \bigcup_{\omega \in K} V_m(\omega).$$

Очевидно, $M_{W_k} \subset V_k(g(F))$.

Близость M_{W_k} к $g(F)$ наводит на мысль попытаться эквивариантно “вложить” M_{W_k} в малую окрестность множества F (так, чтобы на $g(F)$ это вложение совпадало с g^{-1}), что и будет сделано.

Сначала определим отображение $\psi: W_k \rightarrow F$, сопоставляющее слову $(\omega_{-k}, \dots, \omega_k) \in W_k$ какую-нибудь (безразлично, какую именно) точку из непустого множества $\bigcap_{-k}^k T^{-j} U_{\omega_j}$. Пусть в некотором слове длины $2k+1$ буквы пронумерованы не от $-k$ до k , а от $i-k$ до $i+k$. Определяя $\psi(\omega_{i-k}, \dots, \omega_{i+k})$, мы, как всегда, считаем соответствующие буквы пронумерованными от $-k$ до k , т.е. за номер буквы ω_{i+j} принимается j . Поэтому

$$\psi(\omega_{i-k}, \dots, \omega_{i+k}) \in \bigcap_{-k}^k T^{-j} U_{\omega_{i+j}}.$$

Теперь определим отображение $f_k: M_{W_k} \rightarrow F$, положив для $\omega = (\omega_i) \in M_{W_k}$

$$f_k(\omega) = \psi(\omega_{-k}, \dots, \omega_k).$$

Заметим сразу, что

$$f_k(\sigma^i \omega) = \psi(\omega_{i-k}, \dots, \omega_{i+k}),$$

ибо j -й буквой в последовательности $(\sigma^i \omega)$ служит ω_{i+j} . Проверим, что тройка $(M_{W_k}, \sigma|_{M_{W_k}}, f_k)$ является семейством δ -траекторий. В проверке нуждается непрерывность f_k и то, что при всех $\omega \in M_{W_k}$

$$\rho(f_k(\sigma\omega), T f_k(\omega)) < \delta. \quad (3)$$

Непрерывность имеет место “с большим запасом” – отображение f_k является “локально постоянным”. А именно, если $\omega' = (\omega'_i) \in V_k(\omega)$, то $\omega'_i = \omega_i$ при $|i| \leq k$, а потому и $\psi(\omega_{-k}, \dots, \omega_k) = \psi(\omega'_{-k}, \dots, \omega'_k)$, так что $f_k(\omega)$ и $f_k(\omega')$ не только близки, но и совпадают.

Займемся проверкой (3). Если $\omega = (\omega_i)$, то в последовательности $\sigma\omega = ((\sigma\omega)_i)$ номер i имеет ω_{i+1} . Поэтому

$$f_k(\sigma\omega) = \psi((\sigma\omega)_{-k}, \dots, (\sigma\omega)_k) = \psi(\omega_{-k+1}, \dots, \omega_{k+1}) \in \bigcap_{-k}^k T^{-j} U_{\omega_{i+j}}.$$

Среди различных $j = -k, \dots, k$ имеется $j = 0$, поэтому $f_k(\sigma\omega) \in U_{\omega_i}$, а

$$Tf_k(\omega) = T\psi(\omega_{-k}, \dots, \omega_k) \in T \bigcap_{-k}^k T^{-j}U_{\omega_j} = \bigcap_{-k}^k T^{1-j}U_{\omega_j}.$$

Среди различных $j = -k, \dots, k$ имеется $j = 1$, поэтому $Tf_k(\omega) \in T^{1-1}U_{\omega_1} = U_{\omega_1}$. Поскольку $f_k(\sigma\omega)$ и $Tf_k(\omega)$ содержатся в одном и том же U_{ω_1} , то расстояние между ними меньше δ .

Предложение 2, б) гарантирует существование семейства траекторий $(M_{W_k}, \sigma | M_{W_k}, h_k)$, ε -отслеживающего семейство δ -траекторий $(M_{W_k}, \sigma | M_{W_k}, f_k)$. Мы докажем, что множество $F_1 = h_k(M_{W_k})$ обладает требуемыми свойствами. Оно компактно (как непрерывный образ компакта) и инвариантно (в силу эквивариантности h_k). Выполнение условия близости F_1 к F тривиально: поскольку $f_k(M_{W_k}) \subset F$, то $F_1 = h_k(M_{W_k}) \subset U_\varepsilon(F)$. Локальная максимальность F_1 будет установлена, если убедиться в инъективности h_k . Наконец, надо показать, что $F_1 \supset F$.

Докажем инъективность h_k . Допустим, что

$$\omega, \omega' \in M_{W_k}, \quad \omega = (\omega_i), \quad \omega' = (\omega'_i), \quad \omega \neq \omega', \quad h_k(\omega) = h_k(\omega').$$

Заменив, если потребуется, ω и ω' на $\sigma^i\omega$ и $\sigma^i\omega'$ соответственно с подходящим i (при этом $h_k(\sigma^i\omega) = T^i h_k(\omega) = T^i h_k(\omega') = h_k(\sigma^i\omega')$), можно считать, что $\omega_0 \neq \omega'_0$, а значит,

$$\rho(U_{\omega_0}, U_{\omega'_0}) > \alpha.$$

С другой стороны, мы докажем, что

$$f_k(\omega) \in U_{\omega_0}, \quad f_k(\omega') \in U_{\omega'_0}, \quad \rho(f_k(\omega), f_k(\omega')) < \alpha, \quad (4)$$

и придем, тем самым, к противоречию. Заметим сразу, что первые два утверждения в (4) очевидны:

$$f_k(\omega) = \psi_k(\omega_{-k}, \dots, \omega_k) \in \bigcap_{-k}^k T^{-j}U_{\omega_j} \subset U_{\omega_0}$$

и аналогично $f_k(\omega') \in U_{\omega'_0}$.

При всех i

$$\rho(f_k(\sigma^i\omega), T^i h_k(\omega)) = \rho(f_k(\sigma^i\omega), h_k(\sigma^i\omega)) < \varepsilon$$

и точно так же $\rho(f_k(\sigma^i\omega'), T^i h_k(\omega')) < \varepsilon$, откуда в силу совпадения $h_k(\omega)$ с $h_k(\omega')$ следует, что

$$\rho(f_k(\sigma^i\omega), f_k(\sigma^i\omega')) < 2\varepsilon \quad \text{при всех } i. \quad (5)$$

Далее,

$$\begin{aligned} f_k(\sigma^i\omega) &= \psi_k(\omega_{i-k}, \dots, \omega_{i+k}) \in \bigcap_{-k}^k T^{-j}U_{\omega_{i+j}} \subset U_{\omega_i}, \\ T^i f_k(\omega) &= T^i \psi_k(\omega_{-k}, \dots, \omega_k) \in \bigcap_{h=-k}^k T^{i-h}U_{\omega_h} = \bigcap_{j=-k-i}^{k-i} T^{-j}U_{\omega_{i+j}} \end{aligned}$$

(мы сначала переобозначили j в $\bigcap_{j=-k}^k$ через h , а затем перешли к новому $j = h - i$). Если среди целых чисел из $[-k - i, k - i]$ содержится 0, то

$T^i f_k(\omega) \in U_{\omega_i}$. А $0 \in [-k-i, k-i]$ тогда и только тогда, когда $-k-i \leq 0 \leq k-i$, т.е. $|i| \leq k$. Итак, если $|i| \leq k$, то не только $f_k(\sigma^i \omega) \in U_{\omega_i}$, но и $T^i f_k(\omega) \in U_{\omega_i}$, откуда $\rho(f_k(\sigma^i \omega), T^i f_k(\omega)) < \delta$. Аналогично и $\rho(f_k(\sigma^i \omega'), T^i f_k(\omega')) < \delta$ при тех же i . С учетом (5) это дает

$$\rho(T^i f_k(\omega), T^i f_k(\omega')) < 2\varepsilon + 2\delta \leq 4\varepsilon < r \quad \text{при } |i| \leq k.$$

Согласно предложению 2, б) при $k \geq k(\alpha)$ это влечет за собой третье из утверждений в (4).

Остается убедиться, что $F \subset F_1$, т.е. $F \subset h_k(M_{W_K})$. Мы докажем, что если $x \in F$, то $x = h_k(g(x))$. Говоря подробнее, если

$$x \in F, \quad g(x) = \omega = (\omega_i), \quad h_k(\omega) = y,$$

то $x = y$.

Мы уже говорили, что в последовательности $\sigma^i \omega$ номер j имеет ω_{i+j} и что поэтому

$$f_k(\sigma^i \omega) = \psi_k((\sigma^i \omega)_{-k}, \dots, (\sigma^i \omega)_k) = \psi_k(\omega_{i-k}, \dots, \omega_{i+k}) \in U_{\omega_i}.$$

С другой стороны, $T^i x \in U_{\omega_i}$ (по самому определению g). Поскольку и $T^i x$, и $f_k(\sigma^i \omega)$ принадлежат U_{ω_i} , то $\rho(T^i x, f_k(\sigma^i \omega)) < \delta$ при всех i . Но ведь траектория $(T^i y; i \in \mathbb{Z}) = (T^i h_k(\omega))$ ε -отслеживает δ -траекторию $(f_k(\sigma^i \omega))$, т.е. $\rho(T^i y, f_k(\sigma^i \omega)) < \varepsilon$ при всех i . Стало быть, $\rho(T^i x, T^i y) < \delta + \varepsilon < r$ при всех i , а тогда по предложению 2, а) $x = y$.

Благодарю Ч. Пью, М. Шуба и Т. Фишера за обсуждение вопросов, связанных с локальной максимальной гиперболических множеств. При подготовке рукописи к печати мне очень помог А. А. Лосев.

Список литературы

- [1] В. М. Алексеев, “Символическая динамика”, *Одиннадцатая математическая школа*, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1976, 5–210.
- [2] Д. В. Аносов, “Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем”, *Труды V международной конференции по нелинейным колебаниям*, т. 2, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1970, 39–45.
- [3] S. Crovisier, “Une remarque sur les ensembles hyperboliques localement maximaux”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **334**:5 (2001), 401–404.
- [4] T. Fisher, “Hyperbolic sets that are not locally maximal”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **26**:5 (2006), 1491–1509.
- [5] M. Shub, *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Astérisque, **56**, Soc. Math. de France, Paris, 1978.
- [6] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999; пер. с англ.: A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia Math. Appl., **54**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [7] Р. Боуэн, *Методы символической динамики*, Сб. статей, Новое в зарубежной науке. Математика, **13**, Мир, М., 1979.

Д. В. Аносов (D. V. Anosov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: anosov@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

02.11.2009