Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Горбачев, А. М. Степин, О структуре инвариантных мер многозначных отображений, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 9, 35–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7649>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 12:57:39

УДК 517.98

А. Н. Горбачев, А. М. Степин

О структуре инвариантных мер многозначных отображений

Изучаются свойства мер, инвариантных относительно многозначных отображений. Показано, что абсолютно непрерывная инвариантная мера для многозначного отображения может быть не единственной, а множество всех инвариантных мер может не быть симплексом Шоке. Исследован вопрос существования инвариантных мер относительно многозначных отображений, параметризованных однозначными и многозначными отображениями окружности различных классов гладкости.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: многозначные отображения, инвариантная мера, симплекс Шоке.

Введение

В работе обсуждается понятие инвариантной меры многозначного отображения (отношения); отмечена связь таких мер с полиморфизмами. Рассматриваются вопрос о существовании инвариантных мер у многозначных отображений и родственные ему задачи. Получено алгебраическое достаточное условие существования инвариантных мер, приводящее к их описанию как пределов средних по множествам Фёльнера в полугруппе, порожденной “параметризаторами” r_1, r_2 отношения $r_2 \circ r_1^{-1}$. Выписаны уравнения (типа Перрона–Фробениуса) для плотностей абсолютно непрерывных инвариантных мер многозначных отображений и показано, что суммируемость решений таких уравнений зависит от класса гладкости отображения. Установлено, что множество всех инвариантных мер многозначного отображения может не быть симплексом. В связи с известной задачей Фюрстенберга рассматриваются меры, инвариантные относительно “линейных” многозначных отображений окружности.

§ 1. Меры, инвариантные относительно многозначных отображений

1.1. Многозначное отображение R множества Ω_1 в Ω_2 сопоставляет каждой точке $\omega_1 \in \Omega_1$ подмножество $R(\omega_1) \subset \Omega_2$. График Γ_R такого отображения определяется равенством $\Gamma_R = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in R(\omega_1)\} \subset \Omega_1 \times \Omega_2$.

Предполагается, что множества Ω_1 и Ω_2 суть измеримые пространства (т.е. снабжены σ -алгебрами измеримых подмножеств) и рассматриваемые отображения Ω_1 в Ω_2 измеримы (в том смысле, что измеримы их графики).

Работа выполнена в рамках Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-8508.2010.1).

Напомним, что образ $T_*\eta$ меры η на Ω_1 относительно измеримого однозначного отображения $T: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ – это мера на Ω_2 , удовлетворяющая условию $T_*\eta(A) = \eta(T^{-1}A)$ для любого измеримого множества $A \subset \Omega_2$.

Пусть $\pi_1, \pi_2: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ – координатные проекции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мера μ на $\Omega \times \Omega$ *инвариантна* относительно многозначного измеримого отображения R пространства Ω в себя, если:

- 1) $\mu(\Omega \times \Omega \setminus \Gamma_R) = 0$;
- 2) $\pi_{1*}\mu = \pi_{2*}\mu$.

Отметим связь этого определения с понятием полиморфизма $\Pi(\mu)$, понимаемого как диаграмма

$$\Pi: (\Omega, \lambda) \xleftarrow{\pi_1} (\Omega \times \Omega, \mu) \xrightarrow{\pi_2} (\Omega, \lambda),$$

где μ – мера на $\Omega \times \Omega$, а $\lambda = \pi_{1*}\mu = \pi_{2*}\mu$ (см. [1]).

Ясно, что каждое многозначное отображение R пространства Ω в себя, обладающее инвариантной мерой μ , задает полиморфизм $\Pi(\mu)$ на Ω .

С различных точек зрения представляет интерес случай, когда в (операторном или полугрупповом) централизаторе динамической системы $\{T_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ (группы преобразований $\{T_g\}_{g \in G}$) с инвариантной мерой λ существует нетривиальный (т.е. отличный от $\lambda \times \lambda$) полиморфизм; таковым может быть слабая предельная точка преобразований T_s (или T_g) при $s \rightarrow \infty$ (при $g \rightarrow \infty$). С этим связана типичность дизъюнктивности сверточных степеней спектральной меры (в $1^\perp$) эргодических динамических систем и другие случаи необычного динамического или спектрального поведения (связанные, например, с вопросом о возможных значениях функции кратности спектра).

Многозначные отображения с инвариантной мерой возникают также в теории дифференциальных уравнений (например, в задаче о разрушении адиабатических инвариантов) и в связи с задачей Ньютона об аэродинамическом сопротивлении.

1.2. Для предварительного рассмотрения вопроса о существовании инвариантной меры ограничимся случаем многозначного отображения (отношения) R пространства Ω в себя, которое *параметризовано* измеримыми однозначными отображениями $r_1, r_2: \Omega \rightarrow \Omega$, т.е. имеет место биекция между Ω и Γ_R , сопоставляющая точке $t \in \Omega$ пару $(r_1(t), r_2(t))$. В частности, R может быть и однозначным с параметризацией $r_1(t) = t$, $r_2(t) = R(t)$. Справедливо следующее утверждение.

Для отношения $R = r_2 \circ r_1^{-1}$ из Ω в себя, параметризованного отображениями r_1 и r_2 , инвариантная мера существует тогда и только тогда, когда найдется мера η на Ω , удовлетворяющая условию

$$r_{1*}\eta = r_{2*}\eta. \quad (1)$$

Такую меру η будем называть (r_1, r_2) -*инвариантной* относительно многозначного отображения R . Пусть η есть решение уравнения (1). Рассмотрим отображение $\tilde{R}: \Omega \rightarrow \Gamma_R$, $\tilde{R}(t) = (r_1(t), r_2(t))$, и заметим, что мера $\mu = \tilde{R}_*\eta$ на $\Omega \times \Omega$ инвариантна относительно R . Обратно, из инвариантности меры μ на $\Omega \times \Omega$ относительно R следует, что $\eta = \tilde{R}_*^{-1}\mu$ на Ω удовлетворяет уравнению (1).

Назовем многозначное отображение R из Ω в себя (k, l) -отображением, если каждая точка $t \in \Omega$ имеет ровно k образов и l прообразов.

Пусть k и l взаимно просты. *Линейное (k, l) -отображение* окружности $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ в себя – это многозначное отображение $R_{(k,l)}$ на S^1 с параметризацией $r_1(t) = kt \pmod{1}$, $r_2(t) = lt \pmod{1}$.

Напомним, что мера η на Ω называется *абсолютно непрерывной* относительно ν , если существует функция ρ такая, что для любого измеримого $A \subset \Omega$ имеем $\eta(A) = \int_A \rho d\nu$. Функция ρ при этом называется *плотностью меры* η относительно ν .

В дальнейшем если в пространстве Ω задана мера Лебега m , то абсолютная непрерывность понимается относительно этой меры.

Легко видеть, что мера m на графике линейного (k, l) -отображения окружности инвариантна. Покажем, что в этом случае существуют также и другие абсолютно непрерывные инвариантные меры.

ПРИМЕР 1. Без ограничения общности предположим, что $k < l$. На $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ зададим преобразование $T: t \mapsto \frac{l}{k}t \pmod{1}$. По теореме о существовании абсолютно непрерывной инвариантной меры для кусочно монотонного отображения отрезка в себя (см. [2], [3]) найдется T -инвариантная абсолютно непрерывная мера η . Вводя отображение $\hat{T}: S^1 \rightarrow \Gamma_T$, $\hat{T}(t) = (t, T(t))$, заметим, что мера $\hat{T}_*\eta$ инвариантна относительно $R_{(k,l)}$. Действительно, из включения $\Gamma_T \subset \Gamma_{R_{(k,l)}}$ имеем

$$\hat{T}_*\eta(S^1 \times S^1 \setminus \Gamma_{R_{(k,l)}}) = 0,$$

а из T -инвариантности η получаем равенство

$$\pi_{1*}(\hat{T}_*\eta) = \eta = T_*\eta = \pi_{2*}(\hat{T}_*\eta).$$

Наконец, $\hat{T}_*\eta$ не совпадает с m , так как $\Gamma_T \neq \Gamma_{R_{(k,l)}}$.

1.3. Для конечных зарядов свойство инвариантности относительно многозначных отображений определяется сведением к инвариантности мер, являющихся компонентами его (заряда) разложения Жордана.

Отметим сначала следующий факт.

Пусть T – однозначное отображение Ω в себя. Компоненты Φ_+ и Φ_- разложения Жордана конечного T -инвариантного заряда Φ суть инвариантные меры относительно T .

Любое измеримое множество $A \subset \Omega$ есть дизъюнктное объединение положительного (A^+) и отрицательного (A^-) относительно Φ подмножеств. Из инвариантности Φ относительно T следует $\Phi(T^{-1}\Omega^+) = \Phi(\Omega^+)$ и $\Phi(T^{-1}\Omega^-) = \Phi(\Omega^-)$, откуда $T^{-1}\Omega^+ = \Omega^+ \pmod{0}$ и $T^{-1}\Omega^- = \Omega^- \pmod{0}$. Тогда для любого измеримого $B \subset \Omega$ получаем $T^{-1}B^+ \subset \Omega^+ \pmod{0}$ и $T^{-1}B^- \subset \Omega^- \pmod{0}$.

Тем самым, имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} \Phi_+(T^{-1}B) &= \Phi_+(T^{-1}(B^+ \sqcup B^-)) = \Phi_+(T^{-1}B^+ \sqcup T^{-1}B^-) \\ &= \Phi_+(T^{-1}B^+) = \Phi(T^{-1}B^+) = \Phi(B^+) = \Phi_+(B), \end{aligned}$$

значит, мера Φ_+ инвариантна относительно отображения T . Для меры Φ_- доказательство аналогично.

Таким образом, естественно говорить, что заряд Φ инвариантен относительно многозначного отображения R , если компоненты разложения Жордана Φ_+ и Φ_- суть R -инвариантные меры.

Ясно, что вертикальная и горизонтальная проекции R -инвариантного заряда совпадают. Обратное, вообще говоря, неверно, как показывает следующий

ПРИМЕР 2. Отображения $T_1, T_2: S^1 \rightarrow S^1$ определим формулами

$$T_1(t) = 2t \pmod{1}, \quad T_2(t) = 2t + \frac{1}{3} \pmod{1}.$$

Пусть R – многозначное отображение, имеющее график $\Gamma_R = \Gamma_{T_1} \cup \Gamma_{T_2}$. Точки

$$A_1(0,0), \quad A_2\left(0, \frac{1}{3}\right), \quad A_3\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad A_4\left(\frac{1}{3}, 0\right), \quad A_5\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad A_6\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

лежат в Γ_R . Рассмотрим заряд Φ , сосредоточенный на $\bigcup_{i=1}^6 (U_{1/10}(A_i) \cap \Gamma_R)$, где $U(\cdot)$ – окрестность радиуса $\frac{1}{10}$ на торе; потребуем выполнения равенств $\Phi(U_{1/10}(A_i) \cap \Gamma_R) = (-1)^n$, $i = 1, \dots, 6$, и равномерной распределенности Φ на каждом из множеств $U_{1/10}(A_i) \cap \Gamma_R$. Горизонтальная и вертикальная проекции $\pi_{1*}\Phi$ и $\pi_{2*}\Phi$ суть нули, однако положительная компонента Φ_+ не инвариантна относительно R , поскольку $\pi_{1*}\Phi_+$ и $\pi_{2*}\Phi_+$ сосредоточены на различных подмножествах S^1 .

1.4. Одним из источников многозначных отображений служит операция факторизации по разбиению, применяемая в эргодической теории. Напомним, что для однозначного отображения T множества Ω в себя и разбиения ξ этого множества таких, что разбиение $T^{-1}\xi$ мельче ξ , определено однозначное факторотображение T/ξ факторпространства Ω/ξ , действующее по правилу: элемент C_ξ разбиения ξ переходит в элемент C'_ξ , однозначно определенный условием $C'_\xi \subset TC_\xi$.

В общем случае теоретико-множественное факторотображение T/ξ определяется так:

$$T/\xi(C_\xi) = \{C'_\xi : C'_\xi \cap TC_\xi \neq \emptyset\}.$$

Пусть $\bar{\xi} = \xi^{\times 2}$ (декартов квадрат ξ). Если мера η инвариантна относительно отображения T , то мера $\bar{\eta} = \eta/\bar{\xi}$ является инвариантной относительно многозначного отображения T/ξ . Действительно, с одной стороны, она сосредоточена на графике T/ξ , с другой – если $\bar{\pi}_1$ и $\bar{\pi}_2$ суть проекции $\Omega/\xi \times \Omega/\xi$ на горизонтальную и вертикальную оси соответственно, то для любого измеримого $A \in \Omega/\xi$

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_{1*}\eta(A) &= \bar{\eta}(\bar{\pi}_1^{-1}A) = \eta/\bar{\xi}(\bar{\pi}_1^{-1}A) = \eta/\bar{\xi}(\{(C_x, C_y) : C_x \in A\}) \\ &= \eta(\{(s, t) : s \in \pi^{-1}A\}) = \pi_{1*}\eta(\pi^{-1}A) = \pi_*\pi_{1*}\eta(A) = (\pi_{1*}\eta)/\xi(A). \end{aligned}$$

Отображение π – естественная проекция Ω на Ω/ξ .

Аналогично, $\bar{\pi}_{2*}\eta(A) = (\pi_{2*}\eta)/\xi(A)$. Следовательно, $\bar{\pi}_{1*}\eta = \bar{\pi}_{2*}\eta$.

Для полиморфизмов конструкция факторизации введена в [1].

Построим теперь естественное расширение (ср. [4]) для многозначного отображения R на пространстве Ω с инвариантной мерой μ ($\pi_{1*}\mu = \pi_{2*}\mu = m$), т.е. динамическую систему с инвариантной мерой, фактором которой служит (R, μ) .

Пусть $\tilde{\Omega}$ – пространство таких последовательностей $(x_0, x_1, \dots)$, что для любого натурального i точка (x_{i-1}, x_i) лежит в Γ_R . Рассмотрим отображение $T: \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$, задаваемое соотношением $T(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$, и разбиение ξ пространства $\tilde{\Omega}$, определяемое условием: последовательности $(x_0, x_1, \dots)$ и $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots)$ принадлежат одному элементу разбиения, если $x_0 = \bar{x}_0$.

Введем обозначение $\tilde{A}_{k_1 \dots k_m} = \{(x_0, x_1, \dots) \in \tilde{\Omega} : x_{k_1} \in A_{k_1}, \dots, x_{k_m} \in A_{k_m}\}$.

Определим меру λ на цилиндрических подмножествах $\tilde{\Omega}$ следующим образом:

$$\lambda(\tilde{A}_0) = \lambda_0(\tilde{A}_0) = m(A_0);$$

$$\lambda(\tilde{A}_{0 \dots n}) = \lambda_n(\tilde{A}_{0 \dots n}) = \int_{\tilde{A}_{0 \dots n}} \mu^{x_{n-1}}(A_n) d\lambda_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\mu^{x_{n-1}}(A_n)$ – условная мера множества A_n , принадлежащая канонической системе условных мер, ассоциированных с μ при разбиении Ω на точки.

Справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Имеет место следующее:*

- 1) $\tilde{\Omega}/\xi \simeq \Omega$;
- 2) $T/\xi \simeq R$;
- 3) мера λ инвариантна относительно T ;
- 4) $\eta/\xi^{\times 2} = \mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Естественное отождествление в п. 1) следует из выбора разбиения ξ .

2) Заметим, что элемент $C_{x_0} \in \xi$ переходит в множество таких элементов $C_{x_1} \in \xi$, что $(x_0, x_1) \in \Gamma_R$. Следовательно, образ $T/\xi(x_0)$ произвольной точки $x_0 \in \Omega$ совпадает с $R(x_0)$.

3) Докажем данное утверждение индукцией по длине цилиндрического множества. Прообраз $T^{-1}\tilde{A}_0$ есть $\{(x_0, x_1, \dots) \in \tilde{\Omega} : x_1 \in A_0\}$, откуда

$$\lambda_1(T^{-1}\tilde{A}_0) = \int_{\tilde{\Omega}} \mu^{x_0}(A_0) d\lambda_0 = \int_{\Omega} \mu^x(A_0) dm = m(A_0) = \lambda_0(\tilde{A}_0).$$

Предпоследнее равенство следует из инвариантности меры μ . Итак,

$$\lambda(T^{-1}\tilde{A}_0) = \lambda(\tilde{A}_0).$$

Если $\lambda_{n-1} = T_*\lambda_n$, то имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} \lambda(T^{-1}\tilde{A}_{0 \dots n}) &= \lambda_{n+1}(T^{-1}\tilde{A}_{0 \dots n}) = \int_{T^{-1}\tilde{A}_{0 \dots n-1}} \mu^{x_n}(A_n) d\lambda_n \\ &= \int_{\tilde{A}_{0 \dots n-1}} \mu^{x_{n-1}}(A_n) d(T_*\lambda_n) = \int_{\tilde{A}_{0 \dots n-1}} \mu^{x_{n-1}}(A_n) d\lambda_{n-1} = \lambda_n(\tilde{A}_{0 \dots n}). \end{aligned}$$

Тем самым, $\lambda_n = T_*\lambda_{n+1}$ для любого n , следовательно, λ инвариантна относительно T .

4) Для любого измеримого множества $A \subset \Gamma_R$ имеем

$$\begin{aligned} \eta/\xi^{\times 2}(A) &= \eta\left(\bigcup_{(x_0, x_1) \in A} (C_{x_0} \cap C_{x_1})\right) \\ &= \eta(\{((x_0, x_1, \dots), (x_1, x_2, \dots)) : (x_0, x_1) \in A\}) = \mu(A). \end{aligned}$$

§ 2. Инвариантные меры для многозначных отображений и аменабельность

2.1. Пусть $r_1, \dots, r_n$ – однозначные преобразования пространства Ω с заданной на нем σ -алгеброй измеримых множеств. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i r_{i*} \eta = 0, \quad (2)$$

где $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, η – вероятностная мера на Ω . В том случае, когда $n = 2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, любое решение уравнения (2) по определению есть (r_1, r_2) -инвариантная мера относительно многозначного отображения, параметризованного отображениями r_1 и r_2 .

Напомним, что мера μ на Ω называется *инвариантной относительно действия полугруппы S однозначных преобразований*, если для любого элемента $s \in S$ выполняется равенство $s_* \mu = \mu$.

Если $r_1, \dots, r_n$ – непрерывные преобразования компактного топологического пространства, а полугруппа S с образующими $r_1, \dots, r_n$ правоаменабельна, то существует S -инвариантная мера (см. [5]), которая и является решением уравнения (2). Отметим, что подход Боголюбова–Крылова был впервые применен к марковским процессам в работе М. В. Бебутова [6].

При этом не все меры, удовлетворяющие уравнению (2), S -инвариантны, как показывает следующий

ПРИМЕР 3. Пусть $\Omega = S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $r_1(t) = 2t \pmod{1}$, $r_2(t) = 3t \pmod{1}$. Так как преобразования r_1 и r_2 коммутируют, то полугруппа с образующими r_1 и r_2 аменабельна (см. [7]). Пусть абсолютно непрерывная мера η инвариантна относительно отображения $T_{3/2}: S^1 \rightarrow S^1$, $T_{3/2}(t) = \frac{3}{2}t \pmod{1}$ (см. [3]). Из равенства $r_1 \circ T_{3/2} = r_2$ получаем

$$r_{2*} \eta = (r_1 T_{3/2})_* \eta = r_{1*} T_{3/2*} \eta = r_{1*} \eta;$$

следовательно, мера η является (r_1, r_2) -инвариантной.

С другой стороны, преобразования r_1 и r_2 эргодичны относительно меры Лебега на окружности. Поэтому либо мера η совпадает с мерой Лебега, либо η не инвариантна относительно r_1 и r_2 . Первое невозможно в силу того, что мера Лебега не инвариантна относительно отображения $T_{3/2}$. Итак, мы получили (r_1, r_2) -инвариантную меру η , не инвариантную относительно r_1 и r_2 .

Опишем теперь все (r_1, r_2) -инвариантные меры в том случае, когда непрерывные отображения r_1 и r_2 компактного топологического пространства Ω образуют правоаменабельную полугруппу с сокращением.

В полугруппе S выполнен *закон сокращения*, если любое из соотношений $sa = cb$ или $ac = bc$ влечет за собой равенство $a = b$, $a, b, c \in S$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть r_1, r_2 – непрерывные отображения компактного пространства Ω в себя с σ -алгеброй борелевских множеств на нем, полугруппа $S = \langle r_1, r_2 \rangle$ правоаменабельна и в S выполнен закон сокращения. Существует последовательность элементов групповой алгебры $\mathcal{A} = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i, s_i \in S\}$ над S такая, что ее действие на произвольную конечную меру на Ω имеет предельную точку – (r_1, r_2) -инвариантную меру.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, полугруппа S правоаменабельна, значит, для нее выполняется правое условие Оре (для любых $a, b \in S$ пересечение $Sa \cap Sb$ не пусто). Из условия Оре в полугруппе S с сокращением следует, что S обладает группой левых частных $G = S^{-1}S$ (для всех $g \in G$ имеет место равенство $g = a^{-1}b$, $a, b \in S$). Кроме того, G “локально задвигается” в S правым сдвигом, т.е. для любого конечного множества $M \subset G$ существует $g \in G$ такое, что $Mg \subset S$ (см. [8]).

Пусть ν – произвольная конечная мера на Ω . Выберем последовательность $\gamma_n \subset G$, $\gamma_n = (r_1^{-1}r_2)^n$, и элемент $g_N \in G$, переводящий множество $\{\gamma_0, \dots, \gamma_N\}$ в S правым сдвигом.

Пространство нормированных мер на компактном пространстве слабо компактно, следовательно, из последовательности $\nu_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N (\gamma_k g_N)_* \nu$ можно выделить подпоследовательность ν_{N_i} , слабо сходящуюся к некоторой нормированной мере $\tilde{\nu}$. Кроме того, с учетом тождества $r_1 \gamma_{k+1} = r_2 \gamma_k$ для всех $k = 0, \dots, N-1$ получаем

$$\begin{aligned} r_{1*} \nu_N - r_{2*} \nu_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N ((r_1 \gamma_k g_N)_* \nu - (r_2 \gamma_k g_N)_* \nu) \\ &= \frac{1}{N} ((r_2 g_N)_* \nu - (r_2 \gamma_N g_N)_* \nu) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$. Переходя к пределу по N_i , получаем $r_{1*} \tilde{\nu} = r_{2*} \tilde{\nu}$. Искомая мера получена.

Ясно, что все (r_1, r_2) -инвариантные меры могут быть получены таким способом.

Примеры показывают, что отношение $R = r_2 \circ r_1^{-1}$ может иметь инвариантную меру и в том случае, когда полугруппа $\langle r_1, r_2 \rangle$ неаменабельна. С другой стороны, аменабельность этой полугруппы без предположения непрерывности r_1 и r_2 не гарантирует существование инвариантной меры для R .

2.2. Опишем все решения системы уравнений

$$r_{1*} \nu = r_{2*} \nu = \dots = r_{n*} \nu. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $r_1, \dots, r_n$ – непрерывные отображения компактного пространства Ω в себя с σ -алгеброй борелевских множеств на нем, полугруппа $S = \langle r_1, \dots, r_n \rangle$ правоаменабельна и в S выполнен закон сокращения. Существует последовательность элементов групповой алгебры $\mathcal{A} = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i, s_i \in S\}$ над S такая, что ее действие на произвольную конечную меру на Ω имеет предельную точку – решение системы (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве утверждения 2 получаем, что S обладает группой левых частных $G = S^{-1}S$, которая “локально задвигается” в S правым сдвигом.

Поскольку полугруппа S правоаменабельна, то группа G также правоаменабельна (см. [8]). Воспользуемся комбинаторным критерием аменабельности Фельнера–Намиоки (см. [9]) относительно множества $K = \{r_1^{-1}r_2, \dots, r_1^{-1}r_n\} \subset G$: для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое непустое конечное множество $F_{\varepsilon, K} \subset G$, что для всех $k \in K$ выполнено неравенство

$$|F_{\varepsilon, K} \Delta k F_{\varepsilon, K}| < \varepsilon |F_{\varepsilon, K}|;$$

здесь и ниже $|A|$ обозначает число элементов в A .

Пусть ν – произвольная конечная мера на Ω . Построим последовательность

$$\nu_N = \frac{1}{|F_{1/N,K}|} \sum_{x \in F_{1/N,K}} (xg_N)_* \nu,$$

где g_N “задвигает” $F_{1/N,K}$ в S . Из последовательности ν_N можно выделить подпоследовательность ν_{N_i} , слабо сходящуюся к некоторой нормированной мере $\tilde{\nu}$. При этом для любого $j = 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \|r_{1*}\nu_N - r_{j*}\nu_N\| &= \frac{1}{|F_{1/N,K}|} \left\| \sum_{x \in F_{1/N,K}} (r_{1*}(xg_N)_*\nu - r_{j*}(xg_N)_*\nu) \right\| \\ &\leq \frac{1}{|F_{1/N,K}|} \sum_{y \in G_{1/N,K}} \|y_*\nu\|, \end{aligned}$$

где $G_{1/N,K} = r_1 F_{1/N,K} g_N \Delta r_j F_{1/N,K} g_N$. Для множества $G_{1/N,K}$ имеем

$$\begin{aligned} |G_{1/N,K}| &= |r_1 F_{1/N,K} g_N \Delta r_j F_{1/N,K} g_N| = |F_{1/N,K} g_N \Delta r_1^{-1} r_j F_{1/N,K} g_N| \\ &< \frac{1}{N} |F_{1/N,K}|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{1}{|F_{1/N,K}|} \sum_{y \in G_{1/N,K}} y_* \nu \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Переходя к пределу по N_i , получаем $r_{1*}\tilde{\nu} = r_{j*}\tilde{\nu}$ для любого $j = 2, \dots, n$. Тем самым, $\tilde{\nu}$ – решение системы (3). Теорема доказана.

Приведем пример таких отображений $r_1, \dots, r_n$ с полугруппой $S = \langle r_1 \dots r_n \rangle$, что существует решение системы (3), не являющееся S -инвариантной мерой.

ПРИМЕР 4. На $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ рассмотрим отображения

$$r_i(t) = 2^{n-i} 3^i t \pmod{1}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Пусть мера η такая же, как в примере 1, в случае отображений $T_2: t \rightarrow 2t$ и $T_3: t \rightarrow 3t$. Заметим, что

$$r_{i*}\eta = (\tilde{r}_i T_2)_*\eta = \tilde{r}_{i*} T_{2*}\eta = \tilde{r}_{i*} T_{3*}\eta = (\tilde{r}_i T_3)_*\eta = r_{i+1*}\eta,$$

где $\tilde{r}_i(t) = 2^{n-i-1} 3^i t \pmod{1}$. Тем самым, η удовлетворяет системе уравнений (3). Так как η абсолютно непрерывна и не совпадает с мерой Лебега, то $r_{i*}\eta \neq \eta$ для всех $i = 1, \dots, n$, следовательно, η не является S -инвариантной.

§ 3. Уравнения на плотность абсолютно непрерывных инвариантных мер

3.1. Выпишем уравнения типа Перрона–Фробениуса, которым должны удовлетворять плотности абсолютно непрерывной инвариантной (или (r_1, r_2) -инвариантной) меры многозначного отображения.

Пусть Ω – пространство с σ -алгеброй измеримых подмножеств, R – многозначное отображение на Ω с графиком Γ_R , Λ – мера на Γ_R с проекциями

$\pi_{1*}\Lambda = \lambda_1$ и $\pi_{2*}\Lambda = \lambda_2$. Пусть отображение R таково, что $\Omega = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega^k$, Ω^k измеримы и разбиения

$$\pi_1^{-1}\Omega^k \cap \Gamma_R = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^k, \quad \pi_2^{-1}\Omega^k \cap \Gamma_R = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} B_j^k$$

таковы, что отображения

$$\pi_{1i}^k: A_i^k \rightarrow \Omega^k, \quad \pi_{1i}^k(t) = \pi_1(t), \quad \pi_{2j}^k: B_j^k \rightarrow \Omega^k, \quad \pi_{2j}^k(t) = \pi_2(t),$$

взаимно однозначны и измеримы вместе со своими обратными. Через λ_1^k и λ_2^k обозначим ограничения соответственно λ_1 и λ_2 на множество Ω^k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Абсолютно непрерывная относительно Λ мера μ на Γ_R инвариантна относительно R тогда и только тогда, когда для почти всех $x \in \Omega$

$$\frac{d\lambda_1}{d\lambda}(x) \sum_{\pi_1(t_i)=x} \rho(t_i) \frac{d\Lambda}{d(\pi_{1i}^k)^{-1}\lambda_1^k}(t_i) = \frac{d\lambda_2}{d\lambda}(x) \sum_{\pi_2(u_j)=x} \rho(u_j) \frac{d\Lambda}{d(\pi_{2j}^k)^{-1}\lambda_2^k}(u_j), \quad (4)$$

где $\rho = \frac{d\mu}{d\Lambda}$ – плотность меры μ относительно Λ , а $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Пусть теперь (Ω, λ) – пространство с мерой, а многозначное отображение R параметризовано измеримыми отображениями r_1 и r_2 так, что λ абсолютно непрерывна относительно $r_{1*}^{-1}\lambda$ и $r_{2*}^{-1}\lambda$. Кроме того, предполагается, что пространство Ω представляется в виде объединения непересекающихся подмножеств: $\Omega = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega^k$, таким образом, что Ω^k -измеримы и при этом разбиения

$$r_1^{-1}\Omega^k \cap \Gamma_R = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^k, \quad r_2^{-1}\Omega^k \cap \Gamma_R = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} B_j^k$$

таковы, что отображения $r_{1i}^k: A_i^k \rightarrow \Omega^k$, $r_{1i}^k(t) = r_1(t)$, и $r_{2j}^k: B_j^k \rightarrow \Omega^k$, $r_{2j}^k(t) = r_2(t)$, взаимно однозначны и измеримы вместе со своими обратными. Через λ^k обозначим ограничение λ на множество Ω^k . Тогда имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Абсолютно непрерывная относительно λ мера η на Ω является (r_1, r_2) -инвариантной относительно R тогда и только тогда, когда для почти всех $x \in \Omega$

$$\sum_{r_1(t_i)=x} \rho(t_i) \frac{d\lambda}{d(r_{1i}^k)^{-1}\lambda^k}(t_i) = \sum_{r_2(u_j)=x} \rho(u_j) \frac{d\lambda}{d(r_{2j}^k)^{-1}\lambda^k}(u_j), \quad (5)$$

где $\rho = \frac{d\eta}{d\lambda}$ – плотность меры η относительно λ .

Рассмотрим специальный случай, когда многозначное отображение R на S^1 параметризовано дифференцируемыми отображениями r_1 и r_2 . При этих условиях уравнение (5) для плотности (r_1, r_2) -инвариантной меры имеет вид

$$\sum_{r_1(t_i)=t} \frac{\rho(t_i)}{r_1'(t_i)} = \sum_{r_2(u_j)=t} \frac{\rho(u_j)}{r_2'(u_j)}. \quad (5')$$

Существованию решений уравнения (5') в случае растягивающих (см. ниже) многозначных отображений посвящена дипломная работа М. Боннэ (не опубликована).

3.2. Для функций плотности, удовлетворяющих уравнению (5') (в случае несжимающих многозначных отображений), можно показать (ср. [10]), что их суммируемость зависит от класса гладкости отображения.

Пусть R – многозначное отображение окружности в себя с графиком Γ_R . Назовем многозначное отображение R *кусочно непрерывным* (*кусочно дифференцируемым*, *кусочно класса C^α*), если имеет место разбиение

$$\Gamma_R = \Gamma_{\varphi_1} \cup \dots \cup \Gamma_{\varphi_n},$$

где $\Gamma_{\varphi_1}, \dots, \Gamma_{\varphi_n}$ – графики некоторых однозначных кусочно непрерывных (кусочно дифференцируемых, класса C^α) отображений $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – однозначных ветвей отображения R . Скажем, что кусочно гладкое многозначное отображение R *растягивает* (не *сжимает*) в точке $x_0 \in \Gamma_R$, если существует такое разбиение $\Gamma_R = \Gamma_{\varphi_1} \cup \dots \cup \Gamma_{\varphi_n}$, что для всех $i = 1, \dots, n$ из $x_0 \in \Gamma_{\varphi_i}$ следует

$$\varphi_i'(\pi_1(x_0)) > 1 \quad (\varphi_i'(\pi_1(x_0)) = 1).$$

Рассмотрим многозначное отображение R из S^1 в себя, растягивающее во всех точках непрерывности, кроме одной точки x_0 , в которой R не сжимает. Без ограничения общности можно считать, что R не сжимает в точке $(0, 0)$ (здесь и далее мы отождествляем S^1 с $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq [0, 1)$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если несжимающее в $(0, 0)$ многозначное отображение R из S^1 в себя класса гладкости C^2 растягивает во всех других точках непрерывности, то для R существует не суммируемое решение уравнения (5'). Если при этом R не менее чем двузначно в окрестности нуля, то для R одновременно существует интегрируемое решение того же уравнения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения гладкости многозначного отображения R вытекает существование такой его однозначной ветви $\varphi \in C^2(S^1)$, что $\varphi(0) = 0$, φ не сжимает в 0 и растягивает всюду, кроме 0.

В работе [10] показано, что существует инвариантная относительно φ абсолютно непрерывная бесконечная мера η . Рассмотрим отображение $\hat{\varphi}: S^1 \rightarrow \Gamma_\varphi$, $\hat{\varphi}(t) = (t, \varphi(t))$. Мера $\hat{\varphi}_*\eta$ является инвариантной относительно R . Действительно, из $\Gamma_\varphi \subset \Gamma_R$ имеем $\hat{\varphi}_*\eta(S^1 \times S^1 \setminus \Gamma_R) = 0$, а из инвариантности η относительно φ получаем $\pi_{1*}(\hat{\varphi}_*\eta) = \eta = \varphi_*\eta = \pi_{2*}(\hat{\varphi}_*\eta)$. Итак, для R существует бесконечная абсолютно непрерывная инвариантная мера.

Пусть теперь R не менее чем двузначно в окрестности нуля, т.е. найдется такая точка $t_0 \neq 0$, что $t_0 \in R(0)$. Тогда существует однозначная ветвь ψ отображения R такая, что $\psi(0) = t_0$ и ψ есть растягивающее отображение класса C^2 . Следовательно, существует инвариантная относительно ψ конечная абсолютно непрерывная мера ν на S^1 . Рассмотрим теперь меру $\hat{\psi}_*\nu$, где $\hat{\psi}: S^1 \rightarrow \Gamma_\psi$, $\hat{\psi}(t) = (t, \psi(t))$. Так же, как и $\hat{\varphi}_*\eta$, она инвариантна для отображения R . При этом мера $\hat{\psi}_*\nu$ абсолютно непрерывна и конечна, что и требовалось.

Рассмотрим класс абсолютно непрерывных мер, имеющих не более одной особенности. Тогда в этом классе ограничение на гладкость в последнем предложении существенно, как показывает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любого $\alpha \in (1, 2)$ найдется такое несжимающее в $\{(0, 0)\}$ многозначное отображение из S^1 в себя класса гладкости C^α , что все решения уравнения (5') для него с единственной возможной особенностью в точке $(0, 0)$ суммируемы.

§ 4. Структура множества инвариантных мер многозначного отображения

4.1. Пусть P – непустое компактное подмножество локально выпуклого пространства E , μ – вероятностная мера на P . Говорят, что точка $p \in E$ *представлена посредством меры μ* , если $f(p) = \int_P f d\mu$ для любого непрерывного линейного функционала f на E . *Крайней точкой* множества P называется точка, которая не представляется в виде нетривиальной выпуклой линейной комбинации других элементов P . Множество крайних точек P обозначим через $ex P$. Отображение F из Ω в себя называется *существенно многозначным*, если существуют такие $a, b \in \Omega$, что множества $F(a)$ и $F^{-1}(b)$ содержат не менее двух элементов множества Ω .

ТЕОРЕМА 2. 1) *Для растягивающего многозначного отображения R с кусочно гладкими параметризующими отображениями r_1 и r_2 существует бесконечно много аффинно независимых абсолютно непрерывных инвариантных мер.*

2) *Существуют такое многозначное отображение F , элемент $\hat{m}$, принадлежащий множеству M инвариантных относительно F мер, и две различные меры, представляющие $\hat{m}$ и сосредоточенные на $ex M$.*

3) *Существует такое существенно многозначное отображение R с множеством инвариантных мер Y таким, что для любого $y \in Y$ существует единственная мера μ , представляющая y и сосредоточенная на $ex Y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь мы отождествляем окружность с $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, а арифметические операции берем по модулю 1.

1) Заметим, что условие растяжения параметризованного многозначного отображения окружности эквивалентно следующему утверждению: для всех $t \in S^1$ выполняются неравенства $r'_2(t) > r'_1(t) > 1$. Существует такая точка $t_0 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, что $r_1(t_0) = 1$ и $r_1(t) < 1$ при $t \in [0, t_0]$. Для любой точки $s \in [t, t_0]$ найдется точка $\bar{s} \neq s$, для которой $r_1(\bar{s}) = r_1(s)$. Существует такая точка $\bar{s}_0$, для которой $r_1([\bar{s}, \bar{s}_0]) = [r_1(\bar{s}), 1]$. Множество $\Gamma_s = \{(r_1(t), r_2(t)), t \in [0, s] \cup [\bar{s}, \bar{s}_0]\}$ есть график некоторого растягивающего кусочно гладкого отображения f_s с конечным числом точек разрыва. Тогда найдется абсолютно непрерывная инвариантная относительно f_s мера μ_s на Γ_s , которая инвариантна и относительно многозначного отображения R , так как ее проекции на горизонтальную и вертикальную ось совпадают. Все построенные меры аффинно независимы, поскольку сосредоточены на попарно различных носителях.

2) Пусть F – линейное (2, 3)-отображение (с графиком Γ_F) на окружности. В качестве точки $\hat{m}$ рассмотрим меру с постоянной плотностью на Γ_F .

Пусть $\{\alpha_s\}_{s \in S^1}$ и $\{\tilde{\alpha}_u\}_{u \in S^1}$ – совокупности однозначных отображений S^1 в себя, графики которых являются подмножествами Γ_F и задаются следующим образом:

$$\alpha_s: r_1(t) = 2(t + s), \quad r_2(t) = 3(t + s), \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right);$$

$$\tilde{\alpha}_u: r_1(t) = 2(t + u), \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right);$$

$$r_2(t) = \begin{cases} 3(t+u), & t \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \\ 3(t+u) + \frac{1}{2}, & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]. \end{cases}$$

Здесь и ниже мы отождествляем окружность и график линейного $(2, 3)$ -отображения $(t \leftrightarrow (2t, 3t))$, а все арифметические операции берем по модулю 1.

Для каждого $s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ отображения α_s и $\tilde{\alpha}_u$ суть растягивающие гладкие с конечным числом точек разрыва. Следовательно, существуют инвариантные относительно α_s и $\tilde{\alpha}_u$ меры μ_s и $\tilde{\mu}_u$ соответственно (на их графиках). При этом меры μ_s и $\tilde{\mu}_u$ инвариантны относительно F и эргодичны относительно α_s и $\tilde{\alpha}_u$ соответственно и, значит, являются крайними точками множества инвариантных мер для F . Кроме того, меры μ_s и $\tilde{\mu}_u$ попарно различны, так как у них различные носители.

Для любых $s_0, s \in S^1$ отображение α_{s_0+s} есть сдвиг α_{s_0} по Γ_F на s , значит, для всех измеримых множеств $A \subset \Gamma_F$ выполняется равенство $\mu_{s_0+s}(A) = \mu_{s_0}(A - s)$, где $A - s = \{x \in \Gamma_F : x + (2s, 3s) \in A\}$. Аналогично, $\tilde{\mu}_{u_0+u}(A) = \tilde{\mu}_{u_0}(A - u)$.

Докажем, что меры $\int_0^1 \mu_s ds$ и $\int_0^1 \tilde{\mu}_u du$, где

$$\left(\int_0^1 \mu_s ds\right)(A) = \int_0^1 \mu_s(A) ds, \quad \left(\int_0^1 \tilde{\mu}_u du\right)(A) = \int_0^1 \tilde{\mu}_u(A) du,$$

имеют постоянную плотность на Γ_F . Действительно, для любого измеримого подмножества $A \subset \Gamma_F$ и $a \in [0, 1)$

$$\left(\int_0^1 \mu_s ds\right)(A - a) = \left(\int_0^1 \mu_{s+a} ds\right)(A) = \left(\int_0^1 \mu_s ds\right)(A);$$

аналогично – и для $\tilde{\mu}_u$. Значит, мера произвольного множества $A \subset \Gamma_F$ под действием сдвига не меняется, откуда $\int_0^1 \mu_s ds$ и $\int_0^1 \tilde{\mu}_u du$ – меры с постоянной плотностью. Тем самым, получены два представления точки $\hat{m}$ мерами, сосредоточенными на различных подмножествах $\text{ex } M$.

3) Рассмотрим многозначное отображение R отрезка $[0, 1]$ в себя, параметризованное следующими функциями:

$$r_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - t, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ 2t - 1, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases} \quad r_2(t) = \begin{cases} 1 - 2t, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ t - \frac{1}{2}, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

График R симметричен относительно диагонали $\{(t, t), t \in [0, 1]\}$, следовательно, борелевская мера на Γ_R является R -инвариантной тогда и только тогда, когда она симметрична относительно диагонали. Отсюда видно, что каждая R -инвариантная мера μ задается некоторой борелевской мерой ν на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ следующим образом:

$$\mu(A) = \frac{1}{2} \left(\nu \left(A \cap \left[0, \frac{1}{2}\right] \right) + \nu \left((1 - A) \cap \left[0, \frac{1}{2}\right] \right) \right).$$

Заметим также, что $\text{ex } Y = \{\mu_t, t \in [0, \frac{1}{2}]\}$, где μ_t – мера, сосредоточенная в точке t .

Для произвольного множества $A \subset [0, \frac{1}{2}]$ обозначим через $\tilde{A}$ множество $\{\mu_t, t \in A\}$. По заданной точке $y \in Y$ определим меру μ на $\text{ex } Y$ следующим образом: для любого измеримого множества $A \subset [0, \frac{1}{2}]$ мера $\mu(\tilde{A})$ равна $y(A)$. Тогда имеет место представление

$$y(A) = \int_{[0, 1/2]} \mu_t(A) dy = \int_{\text{ex } Y} \mu_t(A) d\mu.$$

Заметим, что такое представление единственно. Действительно, если существует мера μ_1 , представляющая y , то для любого измеримого A имеет место равенство $\mu_1(\tilde{A}) = y(A)$, значит, μ и μ_1 совпадают.

4.2. Сформулируем теперь геометрическое приложение теоремы 2.

Сначала приведем необходимые определения. Непустое выпуклое множество B в действительном векторном пространстве X называется *симплексом* (Шоке), если для любых действительных $\alpha, \beta \geq 0$ и $x, y \in X$ множество

$$x + \alpha B \cap y + \beta B$$

либо пусто, либо имеет вид $z + \gamma B$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $z \in X$.

Пусть минимальное аффинное растяжение $\{\alpha b + (1 - \alpha)b' : \alpha \in \mathbb{R}, b, b' \in B\}$ множества B не содержит нулевой вектор. Тогда $C = \{\alpha b : \alpha \geq 0, b \in B\}$ есть положительный выпуклый конус.

Конус $C \subset X$ индуцирует частичную упорядоченность на X :

$$x \geq y \iff x - y \in C.$$

Элемент $z \in X$ называется *верхней гранью* x и y , если $z \geq x$ и $z \geq y$. Соответственно $z \in X$ есть *точная верхняя грань* x и y , если $z \leq w$, как только $x \leq w$ и $y \leq w$. Пространство X называется *векторной структурой* (или *решеткой*), если любая пара элементов $x, y \in X$ имеет точную верхнюю грань в X . Множество $B \subset X$ называется *линейно компактным*, если каждый B -сегмент $\{\alpha b + (1 - \alpha)b' : 0 \leq \alpha \leq 1, b, b' \in B\}$ содержится в максимальном B -сегменте.

Теперь все готово для формулировки необходимого и достаточного свойства симплекса.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – действительное векторное пространство, $B \subset X$ – непустое выпуклое линейно компактное множество, минимальное аффинное растяжение которого не содержит 0. Пусть C – положительный выпуклый конус $C = \{\alpha b : \alpha \geq 0, b \in B\}$ с базой B и $X = C - C$. Тогда пространство X , частично упорядоченное при помощи C , является векторной решеткой тогда и только тогда, когда B – симплекс (см. [11]).

Иногда формулировку данной теоремы принимают за определение симплекса.

Пусть P – компактное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства E , λ и μ – неотрицательные борелевские меры на P . Будем писать $\lambda \succ \mu$, если $\lambda(f) \geq \mu(f)$ для любой функции f из $C(P)$. Будем рассматривать меры, максимальные относительно данного упорядочения. По теореме

Шоке–Мейе (см. [12]) P является симплексом Шоке (понимаемым как база векторной решетки) тогда и только тогда, когда для любого p из P существует единственная максимальная мера μ_p , представляющая p . Учитывая то, что мера, сосредоточенная на $\text{ex } P$, максимальна (см. [12]), получаем следствие из теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ. 1) Существует многозначное отображение на S^1 , множество инвариантных мер которого не является симплексом Шоке.

2) Существует многозначное отображение на S^1 , множество инвариантных мер которого является симплексом Шоке.

§ 5. Инвариантные меры относительно линейного (2, 3)-отображения и уравнение на функцию распределения. Линеаризация

5.1. Помимо абсолютно непрерывной инвариантной меры относительно линейного (2, 3)-отображения можно построить также атомическую и сингулярную меры, инвариантные относительно этого отображения. Как и раньше, окружность отождествляется с $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq [0, 1)$, а арифметические операции рассматриваются по модулю 1.

ПРИМЕР 5 (атомическая мера). На окружности рассмотрим равномерно распределенную в n точках $0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ меру. Если n не делится на 2 и на 3, то эта мера инвариантна относительно отображений $T_2: t \rightarrow 2t$ и $T_3: t \rightarrow 3t$, следовательно, она (T_2, T_3) -инвариантна и относительно линейного (2, 3)-отображения.

ПРИМЕР 6 (сингулярная мера). Пусть $T_{3/2}$ – отображение окружности в себя, определяемое условием $T_{3/2}(t) = \frac{3}{2}t$. Тогда квадрат этого отображения есть отображение $T_{9/4}: t \rightarrow \frac{9}{4}t$.

Построим сингулярную меру ν на S^1 , инвариантную относительно $T_{9/4}$.

Для промежутка $K^1 = [0, \frac{4}{5})$ положим $\nu K^1 = 1$. Множество $T_{9/4}^{-1}K^1$ состоит из двух непересекающихся промежутков K_1^2 и K_2^2 , причем $K_1^2 \cup K_2^2 \subset K^1$. Положим $\nu K_1^2 = \nu K_2^2 = \frac{1}{2}$. Далее, $T_{9/4}^{-1}(K_1^2 \cup K_2^2)$ состоит из четырех непересекающихся промежутков, меру каждого из которых примем за $\frac{1}{4}$, и т.д. Получившаяся как лебегово продолжение построенной, мера сингулярна, так как ее носитель есть множество Кантора. С другой стороны, она инвариантна относительно $T_{9/4}$, поскольку на промежутках мера сохраняется: $\nu(T_{9/4}^{-1}K_j^i) = \nu(K_j^i)$ по построению.

Мера $\eta = \nu + T_{3/2*}\nu$ инвариантна относительно отображения $T_{3/2}$, так как

$$(\nu + T_{3/2*}\nu)(T_{3/2}^{-1}A) = \nu(T_{3/2}^{-1}A) + \nu(T_{9/4}^{-1}A) = (\nu + T_{3/2*}\nu)(A)$$

для любого измеримого A , следовательно, мера η является (T_2, T_3) -инвариантной.

Сходная задача была поставлена Фюрстенбергом: существует ли конечная сингулярная мера на окружности, инвариантная относительно отображений T_2 и T_3 ?

Свойство инвариантности зарядов относительно многозначных отображений отрезка (или окружности) в себя удобно записывать, используя функцию распределения. Пусть ϕ – некоторый заряд на S^1 , F – его функция распределения:

$F(t) = \phi[0, t]$. Для растягивающего многозначного отображения R окружности в себя с “параметризаторами” r_1 и r_2 функция распределения заряда $r_{j*}\phi$ равна

$$\Pi\Phi_{r_j}F(t) := \sum_{\substack{r_j(u_i)=x \\ r_j(\bar{u}_i)=0}} (F(u_i) - F(\bar{u}_i)), \quad j = 1, 2.$$

Тем самым, для того чтобы заряд ϕ являлся инвариантным относительно R , необходимо и достаточно выполнение условия

$$\Pi\Phi_{r_1}F(t) = \Pi\Phi_{r_2}F(t) \quad \text{для всех } t \in S^1.$$

В частности, для линейного $(2, 3)$ -отображения, параметризованного функциями $T_2: t \rightarrow 2t$, $T_3: t \rightarrow 3t$,

$$\begin{aligned} \Pi\Phi_{T_2}F(t) &= F\left(\frac{t}{2}\right) + F\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= F\left(\frac{t}{3}\right) + F\left(\frac{t}{3} + \frac{1}{3}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) + F\left(\frac{t}{3} + \frac{2}{3}\right) - F\left(\frac{2}{3}\right) = \Pi\Phi_{T_3}F(t). \end{aligned}$$

Вопрос Фюрстенберга можно переформулировать в терминах функции распределения: существует ли непрерывная, но не абсолютно непрерывная функция F ограниченной вариации такая, что

$$\Pi\Phi_{T_2}F(t) = \Pi\Phi_{T_3}F(t) = F(t)?$$

Как было показано в утверждении из п. 1.3, существование инвариантного заряда однозначного отображения влечет существование инвариантной меры.

В силу непрерывности F имеет место разложение в ряд по экспонентам

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n t}.$$

Тогда условие $F(t) = \Pi\Phi_{T_2}F(t) = \Pi\Phi_{T_3}F(t)$ эквивалентно следующим условиям:

$$\text{для любого целого } k \neq 0 \quad c_k = 2c_{2k} = 3c_{3k}; \quad (6)$$

$$c_0 = 2c_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{|k|} c_{k+1} = 3c_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-2c_{3k} + c_{3k+1} + c_{3k+2}). \quad (7)$$

Из (6) находим общий вид коэффициента c_k :

$$c_k = \frac{c_p}{2^m 3^n}, \quad \text{где } k = 2^m 3^n p, \quad p \text{ взаимно просто с 2 и 3.} \quad (8)$$

По теореме Винера (см. [13]) функция ограниченной вариации непрерывна тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_1| + 2|c_2| + \dots + n|c_n|}{n} = 0. \quad (9)$$

Наконец, отметим, что единственная абсолютно непрерывная мера, инвариантная относительно преобразований T_2 и T_3 , есть мера Лебега с функцией распределения $F(t) = t$.

Итак, задача Фюрстенберга эквивалентна следующему вопросу: существует ли функция ограниченной вариации из $L^2[0, 2\pi]$, не равная тождественной и такая, что коэффициенты ее ряда Фурье удовлетворяют условиям (7)–(9)?

5.2. Имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть p_m – m -е по счету натуральное число, взаимно простое с 2 и 3. Тогда функция

$$f(t) = \sum_{m=1}^M c_{p_m} \sum_{\substack{n=3^k 2^l \\ k,l=0,1,\dots}} \frac{1}{p_m n} \sin p_m n t$$

не дифференцируема почти всюду на $(0, 2\pi)$.

Пусть E_L – множество точек на $\mathbb{R}$, где существует производная функции $f(2^L t)$. Если $t \in E_L \cap E_0$ для некоторого натурального L , то в точке t существует производная функции

$$g_L(t) = f(t) - \frac{1}{2^L} f(2^L t) = \sum_{m=1}^M c_{p_m} \sum_{\substack{n=3^k 2^l \\ l=0,1,\dots,L-1 \\ k=0,1,\dots}} \frac{1}{p_m n} \sin p_m n t.$$

Покажем, что мера множества точек, где функция g_L имеет производную, равна нулю, с помощью следующего утверждения.

ЛЕММА. Если $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, которую можно представить в виде объединения конечного числа лакунарных по Адамару последовательностей и

$$h(t) = \sum_{k=1}^\infty \frac{c_k}{n_k} \sin n_k t,$$

где $|c_k| \geq c > 0$, то мера множества точек, в которых существует производная $h(t)$, равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема Зигмунда утверждает следующее: если ряд $\sum_{k=1}^\infty a_{n_k} \cos n_k t$ суммируем некоторым регулярным методом (метод суммирования называется *регулярным*, если из сходимости ряда следует сходимость сумм) на множестве конечной меры и $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, которую можно представить в виде конечного числа лакунарных по Адамару последовательностей, то $\sum_{k=1}^\infty a_{n_k}^2 < \infty$. С другой стороны, если интегрируемая на $(0, 2\pi)$ функция $f(t) = \sum_{n=1}^\infty a_n \sin nt$ дифференцируема на множестве E , то формально продифференцированный ряд $\sum_{n=1}^\infty n a_n \cos nt$ является $(C, 1)$ -суммируемым к $f'(t)$ почти всюду на E ; ряд $\sum_{n=1}^\infty b_n$ называется $(C, 1)$ -суммируемым, если сходится последовательность $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N B_n$, где B_n – n -я частичная сумма этого ряда.

Итак, получаем, что формально продифференцированный ряд для $h'(t)$ есть $\sum_{k=1}^\infty c_k \cos n_k t$, а так как $|c_k| \geq c > 0$, то $\sum_{k=1}^\infty c_k = \infty$, значит, h дифференцируема на множестве меры 0. Лемма доказана.

Теперь заметим, что тригонометрический ряд для $g_L(t)$ удовлетворяет условиям леммы. Действительно, последовательность номеров ненулевых коэффициентов разлагается в объединение лакунарных последовательностей вида $\{p_m 2^l 3^k, k = 0, 1, \dots\}$; l – фиксированное число от 0 до $L - 1$.

Таким образом, для любого $L = 0, 1, \dots$ имеет место $m(E_L \cap E_0) = 0$. Поэтому при всех $0 \leq L_1 < L_2$ выполняется $m(E_{L_1} \cap E_{L_2}) = 0$, так как из $x \in E_{L_1} \cap E_{L_2}$ следует $2^{L_1}x \in E_{L_2-L_1} \cap E_0$. Значит,

$$m\left(\bigcup_{L=1}^{\infty} E_L \cap (0, 2\pi)\right) = \sum_{L=1}^{\infty} m(E_L \cap (0, 2\pi)).$$

Наконец, из того, что для любого натурального L

$$m(E_L \cap (0, 2\pi)) = m(E_0 \cap (0, 2\pi)),$$

получаем $m(E_0 \cap (0, 2\pi)) = 0$.

5.3. Отметим, что схожие условия на коэффициенты Фурье можно выписывать для линейных многозначных отображений окружности, а также для линеаризуемых отображений (т.е. таких отображений, которые можно сделать линейными с помощью монотонной замены переменных).

Как известно, всякое растягивающее однозначное отображение может быть линеаризовано. Для многозначных отображений это не так.

В качестве примера рассмотрим $(2, 3)$ -отображение на $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, параметризованное функциями

$$r_1(t) = 3t, \quad r_2(t) = \begin{cases} 5t, & t \in \left[0, \frac{1}{3}\right), \\ 4t + \frac{1}{3}, & t \in \left[\frac{1}{3}, 1\right). \end{cases}$$

Если существует линеаризующее отображение τ , то, с одной стороны, τ монотонно возрастает, а с другой – имеем $\tau\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3} > \tau\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$. Значит, построенное отображение не может быть линеаризовано.

Список литературы

- [1] А. М. Вершик, “Многозначные отображения с инвариантной мерой (полиморфизмы) и марковские операторы”, *Проблемы теории вероятностных распределений*, т. IV, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **72**, Наука, Л., 1977, 26–61; англ. пер.: А. М. Vershik, “Polymorphisms, Markov processes, and quasi-similarity”, *J. Soviet Math.*, **23**:3 (1983), 2243–2266.
- [2] A. Lasota, J. A. Yorke, “On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **186** (1973), 481–488.
- [3] A. Rényi, “Representations for real numbers and their ergodic properties”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **8**:3–4 (1957), 477–493.
- [4] В. А. Рохлин, “Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой”, *УМН*, **22**:5 (1967), 3–56; англ. пер.: V. A. Rokhlin, “Lectures on the entropy theory of measure-preserving transformations”, *Russian Math. Surveys*, **22**:5 (1967), 1–52.
- [5] Н. Н. Боголюбов, *Избранные труды*, т. 1, Наукова думка, Киев, 1969; англ. пер.: N. N. Bogolubov, *Selected works*, v. I, Classics Soviet Math., **2**, Gordon and Breach, New York, 1990.
- [6] M. Beboutoff, “Markoff chains with a compact state space”, *Матем. сб.*, **10**(52):3 (1942), 213–238.

- [7] Ф. Гринлиф, *Инвариантные средние на топологических группах и их приложения*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: F. P. Greenleaf, *Invariant means on topological groups and their applications*, Van Nostrand, London, 1969.
- [8] Р. И. Григорчук, А. М. Степин, “Об аменабельности полугрупп с сокращением”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1998, № 3, 12–16; англ. пер.: R. I. Grigorchuk, A. M. Stepin, “On amenability of semigroups with cancellation”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **53**:3 (1998), 7–11.
- [9] I. Namioka, “Folner’s conditions for amenable semi-groups”, *Math. Scand.*, **15** (1964), 18–28.
- [10] Ш. И. Ахалая, А. М. Степин, “Об абсолютно непрерывных инвариантных мерах несжимающих преобразований окружности”, *Динамические системы и смежные вопросы геометрии*, Тр. МИАН, **244**, Наука, М., 2004, 23–34; англ. пер.: Sh. I. Akhalaya, A. M. Stepin, “On absolutely continuous invariant measures of noncontracting transformations of a circle”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **244** (2004), 18–28.
- [11] D. G. Kendall, “Simplexes and vector lattices”, *J. London Math. Soc.*, **37**:3 (1962), 365–371.
- [12] Р. Фелпс, *Лекции о теоремах Шоке*, Мир, М., 1968; пер. с англ.: R. R. Phelps, *Lectures on Choquet’s theorem*, Van Nostrand, Princeton, NJ–Toronto, ON–London, 1966.
- [13] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961; англ. пер.: N. K. Bary, *A treatise on trigonometric series*, Macmillan, New York, 1964.

А. Н. Горбачев (A. N. Gorbachev)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: alnigor@yahoo.com

Поступила в редакцию

01.06.2010 и 23.05.2011

А. М. Степин (A. M. Stepin)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ivan07@mech.math.msu.su