Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Вишик, В. В. Чепыжов, Аппроксимация траекторий, лежащих на глобальном аттракторе гиперболического уравнения с быстро осциллирующей по времени внешней силой, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 9, 3–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm765>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 14:38:40

УДК 517.9

М. И. Вишик, В. В. Чепыжов

Аппроксимация траекторий, лежащих на глобальном аттракторе гиперболического уравнения с быстро осциллирующей по времени внешней силой

Рассматривается квазилинейное диссипативное волновое уравнение при периодических граничных условиях с внешней силой $g(x, t/\varepsilon)$, быстро осциллирующей по t . Кроме того, предполагается, что при $\varepsilon \rightarrow 0+$ функция $g(x, t/\varepsilon)$ в слабом смысле (в $L_{2,w}^{\text{loc}}(\mathbb{R}, L_2(\mathbb{T}^n))$) стремится к функции $\bar{g}(x)$, а усредненное волновое уравнение (с внешней силой $\bar{g}(x)$) имеет лишь конечное число стационарных точек $\{z_i(x), i = 1, \dots, N\}$, каждая из которых является гиперболической. Доказано, что глобальный аттрактор $\mathcal{A}_\varepsilon$ исходного уравнения отклоняется в энергетической норме от глобального аттрактора $\mathcal{A}_0$ усредненного уравнения на величину $C\varepsilon^\rho$, причем для ρ дается явная формула. Кроме того, доказано, что любой кусок траектории $u^\varepsilon(t)$ исходного уравнения, лежащей на $\mathcal{A}_\varepsilon$ и временной длины $C \log(1/\varepsilon)$, допускает аппроксимацию порядка $C_1\varepsilon^{\rho_1}$ с помощью конечного числа кусков траекторий, лежащих на неустойчивых многообразиях $M^u(z_i)$ усредненного уравнения. Для ρ_1 дается явное выражение.

Библиография: 14 названий.

Рассматривается следующее модельное неавтономное диссипативное гиперболическое уравнение:

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u = \Delta u - \delta^2 u - f(u) + g\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) \quad (0.1)$$

при периодических граничных условиях: $x \in \mathbb{T}^n$. Здесь $\delta^2 > 0$, $\gamma > 0$, $|f(u)| \leq C(|u|^{\rho+1} + 1)$, где $\rho < 2/(n-2)$ при $n \geq 3$ и ρ — любое число при $n = 1, 2$. Кроме того, $f(u)$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, которые сформулированы в §2. Функция $g(x, z)$ — трансляционно компактная (тр.к.) в пространстве $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$, $H = L_2(\mathbb{T}^n)$. Это означает, что множество сдвигов $\{g(x, z+h), h \in \mathbb{R}\}$ образует предкомпактное множество в $L_2([-T, T], H)$ при любом фиксированном $T \in \mathbb{R}_+$. Отметим, что тр.к. являются функции $g(x, z)$, периодические по z со значениями в H , квазипериодические и почти периодические функции $g(x, z)$ по z со значениями в H . Однако класс тр.к. функций $g(x, z)$ является значительно более широким (см. [1]).

Уравнения вида (0.1) встречаются в релятивистской квантовой механике (см., например, [2] и приведенную там литературу).

Предполагается, что при $\varepsilon \rightarrow 0+$ функция $g(x, t/\varepsilon) \rightarrow \bar{g}(x)$ в $L_{2,w}^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$ (см. §2). Функция $\bar{g}(x)$ называется *усреднением функции* $g(x, t/\varepsilon)$.

Наряду с уравнением (0.1) рассматривается усредненное уравнение

$$\partial_t^2 \bar{u} + \gamma \partial_t \bar{u} = \Delta \bar{u} - \delta^2 \bar{u} - f(\bar{u}) + \bar{g}(x), \quad x \in \mathbb{T}^n. \quad (0.2)$$

Уравнение (0.2) обладает глобальной функцией Ляпунова:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\bar{u}) &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\partial_t \bar{u}(\cdot, t)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \bar{u}(\cdot, t)|^2 + \frac{\delta^2}{2} |\bar{u}|^2 + F(\bar{u}) - \bar{g}(\cdot) \bar{u}(\cdot, t) \right) dx, \\ F(\bar{u}) &= \int_0^{\bar{u}} f(v) dv.\end{aligned}\tag{0.3}$$

Предполагается, что уравнение (0.2) имеет конечное число стационарных точек $\{z_i(x), i = 1, \dots, N\}$:

$$\Delta z_i - \delta^2 z_i - f(z_i) + \bar{g}(x) = 0, \quad x \in \mathbb{T}^n,$$

и притом каждая из них является гиперболической (см. [3]–[5]). Тогда, как показано, например, в [3], [4], глобальный аттрактор $\overline{\mathcal{A}}$ уравнения (0.2) имеет следующую структуру:

$$\overline{\mathcal{A}} = \bigcup_{i=1}^N M^u(z_i),$$

где $M^u(z_i)$ – полное неустойчивое многообразие, проходящее через точку z_i .

Через H_s , $s \in \mathbb{R}$, как обычно, обозначается шкала пространств Соболева, где $H_0 = H = L_2(\mathbb{T}^n)$, $H_1 = H_1(\mathbb{T}^n)$.

Сформулируем основной результат, полученный в настоящей статье. Пусть $\{u^\varepsilon(x, t), t \in \mathbb{R}\}$ – любая полная траектория уравнения (0.1), ограниченная в энергетическом пространстве $E := H_1 \times H$. Рассмотрим кусок этой траектории временной длины $r_\varkappa(\varepsilon) = (\varkappa / ((\rho + \nu)2(2 + \varkappa))) \log(1/\varepsilon)$, $0 < \varkappa < +\infty$: $\{u^\varepsilon(x, t), \theta \leq t \leq \theta + r_\varkappa(\varepsilon)\}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Здесь ν – коэффициент экспоненциального притяжения траекторий $\bar{u}(x, t)$ уравнения (0.2) его глобальным аттрактором $\overline{\mathcal{A}}$. Число ρ – коэффициент экспоненциального расхождения траекторий уравнения (0.2) от траекторий уравнения (0.1) при одинаковых начальных условиях (см. § 3). Число $\varkappa$ – любое фиксированное положительное число. Тогда найдется такая конечномерная составная траектория $\tilde{u}^0 \in \bigcup_{i=1}^N M^u(z_i)$ (см. § 4), что

$$\begin{aligned}\| (u^\varepsilon(\cdot, t), \partial_t u^\varepsilon(\cdot, t)) - (\tilde{u}^0(\cdot, t), \partial_t \tilde{u}^0(\cdot, t)) \|_E &\leq C \varepsilon^{\alpha_\varkappa}, \\ \alpha_\varkappa &= \frac{\nu}{(2 + \varkappa)(\rho + \nu)}, \quad \theta \leq t \leq \theta + r_\varkappa(\varepsilon),\end{aligned}\tag{0.4}$$

причем C не зависит от u^ε и θ . Таким образом, грубо говоря, куски полных траекторий $u^\varepsilon(x, t)$ уравнения (0.1), имеющие временную длину, пропорциональную $\log(1/\varepsilon)$, могут быть аппроксимированы с помощью нескольких кусков траекторий усредненного уравнения (0.2), лежащих на $\bigcup_{i=1}^N M^u(z_i)$. При этом (0.4) дает равномерную оценку сверху их отклонений в метрике E .

Для доказательства этого результата в первых параграфах приводятся необходимые сведения и результаты. В § 1 дается определение глобального аттрактора $\mathcal{A}$ неавтономного эволюционного уравнения

$$\partial_t u = L(u, t).\tag{0.5}$$

Кроме того, приводится определение ядра $\mathcal{K}$ этого уравнения: $\mathcal{K}$ является объединением всех ограниченных полных траекторий уравнения (0.5). Для уравнения

$$\partial_t u = L(u) + g_0(x, t) \quad (0.6)$$

с тр.к. функцией $g_0(x, t) \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$ приводится формула, описывающая структуру глобального аттрактора $\mathcal{A}$ уравнения (0.6).

В §2 изучается уравнение (0.1) с быстро осциллирующей внешней силой $g(x, t/\varepsilon)$, причем $g(\cdot, z)$ – тр.к. функция в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H_{\sigma_2})$, а $g'_{x_i}(\cdot, z)$, $i = 1, \dots, N$, – тр.к. функция в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H_{\sigma_2-1})$, где $\sigma_2 = 1 - 2\rho/(n-2)$ (напомним, что $(\rho+1)$ – порядок роста $f(u)$ по u) (см. §2). При выполнении этих условий доказывается, что уравнение (0.1) обладает равномерным глобальным аттрактором $\mathcal{A}_\varepsilon$ в энергетическом пространстве E .

В §3 исследуется отклонение $w = u^\varepsilon - u^0$, где u^ε – решение уравнения (0.1), u^0 – решение уравнения (0.2), удовлетворяющие одинаковым начальным условиям. При этом налагается дополнительное условие на разность $g(x, t/\varepsilon) - \bar{g}(x) := \tilde{g}(x, t/\varepsilon)$. Предполагается, что существует первообразная $\tilde{G}(\cdot, z)$ функции $\tilde{g}(x, z)$ по z , удовлетворяющая следующему условию:

$$\|\tilde{G}(\cdot, z)\|_{H_1} \leq M \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad \partial_z \tilde{G}(x, z) = \tilde{g}(x, z).$$

Отметим, что в случае квазипериодической по z функции $\tilde{g}(x, z)$ это условие сводится к выполнению диофантова условия частотами функции $\tilde{g}(x, z)$.

При выполнении этого условия доказана следующая оценка:

$$\|(w, \partial_t w)\|_E := (\|w(\cdot, \tau + t)\|_{H_1}^2 + \|\partial_t w(\cdot, \tau + t)\|_H^2)^{1/2} \leq C\varepsilon^{1/2} e^{\rho t} \quad (0.7)$$

$$\forall t \geq 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Из указанных выше фактов в §4 выводится аппроксимация (0.4) траекторий $u^\varepsilon(x, t)$ с помощью траекторий $\tilde{u}^0(x, t) \in \bigcup_{i=1}^N M^u(z_i)$.

В §4 дается также оценка отклонения глобальных аттракторов $\mathcal{A}_\varepsilon$ от аттрактора $\mathcal{A}_0 = \overline{\mathcal{A}}$:

$$\text{dist}_E(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}_0) \leq C\varepsilon^{\nu/(2(\rho+\nu))}. \quad (0.8)$$

Для неавтономных уравнений типа сайн-Гордона оценка вида (0.8) получена в [6].

Для гиперболических уравнений с коэффициентами, быстро осциллирующими по x (например, $g = g(x, x/\varepsilon)$), оценки вида (0.8) получены в [7]. Для более общих, чем (0.1), гиперболических уравнений с быстро осциллирующими по x членами доказана лишь сходимость $\mathcal{A}_\varepsilon$ к $\mathcal{A}_0$ в соответствующих функциональных пространствах [1], [8], [9].

§ 1. Глобальный аттрактор неавтономного эволюционного уравнения

1.1. Рассматривается неавтономное эволюционное уравнение вида:

$$\partial_t u = L(u, t), \quad t \geq \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Здесь $L(u, t)$ – нелинейный оператор $L(\cdot, t): E_1 \rightarrow E_0$ для любого $t \in \mathbb{R}$, где E_1 и E_0 – банаховы пространства такие, что $E_1 \subseteq E_0$. Изучаются решения $u(t)$ уравнения (1.1), определенные при $t \geq \tau$. При $t = \tau$ задается начальное условие:

$$u|_{t=\tau} = u(\tau) := u_\tau, \quad u_\tau \in E, \quad (1.2)$$

где E – банахово пространство такое, что $E_1 \subseteq E \subseteq E_0$. Предполагается, что для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и для любого $u_\tau \in E$ задача Коши (1.1), (1.2) имеет, и притом единственное, решение $u(t)$ такое, что $u(t) \in E$ для любых $t \geq \tau$. При этом в каждом конкретном случае объясняется, в каком смысле $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1).

Пусть $\{U(t, \tau)\}$, $t \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, следующее двупараметрическое семейство операторов, порожденное задачей (1.1), (1.2), действующих в пространстве E по формуле

$$U(t, \tau)u_\tau = u(t), \quad t \geq \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

где $u(t)$ – решение задачи (1.1), (1.2). Семейство операторов $\{U(t, \tau)\}$ обладает следующими свойствами:

- 1) $U(\tau, \tau) = \text{Id}$ для любого $\tau \in \mathbb{R}$;
- 2) $U(t, s) \circ U(s, \tau) = U(t, \tau)$ для любых $t \geq s \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Семейство операторов $\{U(t, \tau)\}$ называется *процессом, порожденным задачей* (1.1), (1.2).

Для определения глобального аттрактора $\mathcal{A}$ процесса $\{U(t, \tau)\}$ введем сначала некоторые необходимые для этого понятия. Через $\mathcal{B}(E)$ обозначается семейство всех ограниченных множеств в E . Множество B_0 называется *поглощающим*, если для любого $B \in \mathcal{B}(E)$ существует число $h = h(B)$ такое, что

$$U(t, \tau)B \subset B_0 \quad \forall t, \tau, \quad t - \tau \geq h. \quad (1.4)$$

Множество $P \subset E$ называется *притягивающим* для процесса $\{U(t, \tau)\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\mathcal{O}_\varepsilon(P)$ является поглощающим для этого процесса. (Здесь и ниже через $\mathcal{O}_\varepsilon(M)$ обозначается ε -окрестность множества M в пространстве E .) Очевидно, множество P является притягивающим тогда и только тогда, когда для любого $B \in \mathcal{B}(E)$

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \text{dist}_E(U(\tau + h, \tau)B, P) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow +\infty. \quad (1.5)$$

Здесь $\text{dist}_E(X, Y)$ понимается в смысле Хаусдорфа:

$$\text{dist}_E(X, Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|_E.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Множество $\mathcal{A} \subset E$ является *глобальным аттрактором* процесса $\{U(t, \tau)\}$, если оно замкнутое притягивающее множество этого процесса и обладает следующим свойством минимальности: оно принадлежит любому замкнутому притягивающему множеству $\mathcal{A}'$ процесса $U(t, \tau)$: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$.

Это понятие глобального аттрактора $\mathcal{A}$ процесса $\{U(t, \tau)\}$ было введено в [10], [11], [1]. Процесс $\{U(t, \tau)\}$, обладающий компактным поглощающим множеством, называется *компактным процессом*. Процесс $\{U(t, \tau)\}$, обладающий замкнутым притягивающим множеством, называется *асимптотически компактным процессом*.

ТЕОРЕМА 1.1. Если процесс $\{U(t, \tau)\}$ является асимптотически компактным, то он обладает компактным в E глобальным аттрактором $\mathcal{A}$.

Доказательство этой теоремы дано в [1]. Там же приведена следующая формула для указанного в теореме 1.1 глобального аттрактора:

$$\mathcal{A} = \omega(P) := \bigcap_{h \geq 0} \left[\bigcup_{t-\tau \geq h} U(t, \tau)P \right]_E, \quad (1.6)$$

где P является любым притягивающим множеством процесса $\{U(t, \tau)\}$, $[B]_E$ — замыкание множества B в E .

1.2. Введем теперь понятие *ядра* процесса $\{U(t, \tau)\}$.

Функция $u(s)$, $s \in \mathbb{R}$, со значениями в E называется *полной траекторией* процесса $U(t, \tau)$, если

$$U(t, \tau)u(\tau) = u(t) \quad \forall t \geq \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Полная траектория называется *ограниченной*, если множество $\{u(s), s \in \mathbb{R}\}$ ограничено в E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Множество всех ограниченных полных траекторий $\{u(t), t \in \mathbb{R}\}$ процесса $\{U(t, \tau)\}$ называется его *ядром* и обозначается буквой $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} = \{u(\cdot) \mid u(t), t \in \mathbb{R}, \text{ удовлетворяет (1.7) и } \|u(s)\|_E \leq C_u \quad \forall s \in \mathbb{R}\}.$$

Множество

$$\mathcal{K}(t) = \{u(t) \mid u(\cdot) \in \mathcal{K}\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

называется *сечением ядра в момент t* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Если процесс $\{U(t, \tau)\}$ обладает глобальным аттрактором $\mathcal{A}$, то

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{K}(t) \subseteq \mathcal{A}. \quad (1.8)$$

(см. [1]).

Отметим, что, как правило, включение в (1.8) является строгим, т.е. существуют точки глобального аттрактора $\mathcal{A}$, которые не являются значениями полных, ограниченных траекторий данного процесса $\{U(t, \tau)\}$. Ниже на конкретных примерах будет показано на каких полных траекториях “близких процессов” такие точки лежат. В весьма общем случае процессов уравнений вида (1.1) эта проблема

изучена в [1]. Ниже мы ограничимся выяснением этого вопроса для неавтономного эволюционного уравнения вида

$$\partial_t u - L(u) = g_0(x, t) \quad (1.9)$$

и соответствующего ему процесса $\{U(t, \tau)\}$. В дальнейшем изучаются лишь уравнения вида (1.9), причем $g_0(x, t) \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$ (или $g_0(x, t) \in C^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$ или другому аналогичного типа пространству). Здесь H обозначает гильбертово или банахово пространство.

Напомним, что $g_0(x, t) \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$, если $g_0(x, t) \in L_2([-T, T], H)$ для любого $T > 0$. Последовательность $\{g_0(x, t + h_n)\}$, $h_n \in \mathbb{R}$, сходится при $n \rightarrow +\infty$ к функции $g(x, t)$ в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$, если она сходится к $g(x, t)$ в $L_2([-T, T], H)$ для любого $T > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Множество

$$\mathcal{H}(g_0) = [\{g_0(x, t + h), h \in \mathbb{R}\}]_{L_2^{\text{loc}}} \quad (1.10)$$

называется *оболочкой функции* $g_0(x, t)$ в L_2^{loc} . В (1.10) $[\cdot]_{L_2^{\text{loc}}}$ означает замыкание в топологическом пространстве $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H) := L_2^{\text{loc}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Функция $g_0(x, t)$ называется *трансляционно компактной* (тр.к.), если ее оболочка $\mathcal{H}(g_0)$ является компактным множеством в L_2^{loc} .

Аналогично определяется оболочка $\mathcal{H}(g_0)$ и тр.к. функция $g_0(x, t)$ в $C(\mathbb{R}, H)$. Рассмотрим некоторые примеры тр.к. функций.

ПРИМЕР 1. Пространство $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$ состоит из функций $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, со значениями в H , квадрат нормы которых локально интегрируем в смысле Бохнера:

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\xi(t)\|_H^2 dt < +\infty \quad \forall [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}.$$

Последовательность $\{\xi_n(t)\}$ сходится к $\xi(t)$, $n \rightarrow +\infty$, в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$, если

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\xi_n(t) - \xi(t)\|_H^2 dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

для любого интервала $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$. Приведем критерий тр.к. функции $g_0(x, t) \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$ (см., например, [1]).

Функция $g_0(t)$ со значениями в H тр.к. в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$ тогда и только тогда, когда:

- 1) для любого $h \geq 0$ $\left\{ \int_t^{t+h} g_0(s) ds, t \in \mathbb{R} \right\}$ — предкомпактное множество в H ;
- 2) существует положительная функция $\beta(s) > 0$, $\beta(s) \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0+$, такая, что

$$\int_t^{t+1} \|g_0(s) - g_0(s + l)\|_H^2 ds \leq \beta(|l|) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что для любой тр.к. функции g_0 в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|g_0(s)\|_H^2 ds < +\infty \quad (1.11)$$

(см. [1]).

ПРИМЕР 2. Аналогично определяется тр.к. функция в пространстве $C(\mathbb{R}, H)$. Критерий тр.к. функции $g_0 \in C(\mathbb{R}, H)$ аналогичен (с очевидными изменениями) критерию, приведенному в примере 1 (см. [1]).

ПРИМЕР 3. Почти периодическая (п.п.) функция $g_0(t)$ со значениями в H является тр.к. функцией в $C_b(\mathbb{R}, H)$. Отметим, что в доказательстве этого факта используется критерий Бохнера–Амерно п.п. функции в $C_b(\mathbb{R}, H)$ (см. [1], [12]). Подклассом п.п. функции являются квазипериодические функции. Функция $g_0(t) \in C_b(\mathbb{R}, H)$ является квазипериодической (к.п.), если она представима в виде

$$g_0(t) = \Phi(\alpha_1 t, \dots, \alpha_k t) = \Phi(\bar{\alpha} t), \quad \bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (1.12)$$

причем функция $\Phi(\bar{\omega}) = \Phi(\omega_1, \dots, \omega_k)$ непрерывная и 2π -периодическая по $\omega_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$:

$$\Phi(\omega_1, \dots, \omega_i + 2\pi, \dots, \omega_k) = \Phi(\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_k), \quad i = 1, \dots, k.$$

Через $\mathbb{T}^k = [\mathbb{R} \bmod 2\pi]^k$ обозначим k -мерный тор. Тогда $\Phi \in C(\mathbb{T}^k, H)$. Предполагается, что числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ в (1.12) рационально независимы. Легко доказать, что оболочка $\mathcal{H}(g_0)$ к.п. функции $g_0(t)$ в $C_b(\mathbb{R}, H)$ совпадает со следующим множеством функций:

$$\{g_0(\bar{\alpha} t + \bar{\omega}_0) \mid \bar{\omega}_0 \in \mathbb{T}^k\} = \mathcal{H}(g_0). \quad (1.13)$$

Следовательно, $\mathcal{H}(g_0)$ является непрерывным образом k -мерного тора $\mathbb{T}^k$.

В [1] приведены и другие примеры тр.к. функций.

1.3. Рассмотрим теперь семейство уравнений вида

$$\partial_t u = L(u) + g(x, t), \quad (1.14)$$

где $g(x, t)$ — любая функция из оболочки $\mathcal{H}(g_0(x, t))$ в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$. Предполагается, что $g_0(x, t)$ — тр.к. функция в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$ (или $C(\mathbb{R}, H)$). Пусть задача Коши (1.14), (1.2) имеет, и притом единственное, решение при любых $\tau \in \mathbb{R}$ и $u_\tau \in E$, причем $u(t) \in E$ при всех $t \geq \tau$. Следовательно, определено семейство процессов $\{U_g(t, \tau), g \in \mathcal{H}(g_0)\}$, действующих в E и соответствующих задаче (1.14), (1.2). Аналогично определению 1.1 дается определение равномерного (по $g \in \mathcal{H}(g_0)$) глобального аттрактора семейства процессов $\{U_g(t, \tau), g \in \mathcal{H}(g_0)\}$.

ТЕОРЕМА 1.2. *Предположим, что функция $g_0(x, t)$ – тр.к. в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$. Пусть процесс $\{U_{g_0}(t, \tau)\}$ асимптотически компактен в E , и пусть семейство процессов $\{U_g(t, \tau), g \in \mathcal{H}(g_0)\}$ непрерывно в $E \times \mathcal{H}(g_0)$, т.е. $U_g(t, \tau)u_\tau$ непрерывно по (u_τ, g) , принимая значения в E .*

Тогда существует равномерный (относительно $g \in \mathcal{H}(g_0)$) глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ семейства процессов $\{U_g(t, \tau)\}$. Аттрактор $\mathcal{A}$ допускает следующее представление:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{g \in \mathcal{H}(g_0)} \mathcal{K}_g(0) = \bigcup_{g \in \mathcal{H}(g_0)} \mathcal{K}_g(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.15)$$

где $\mathcal{K}_g$ – ядро процесса $U_g(t, \tau)$. Здесь $t \in \mathbb{R}$ – фиксированное число. Ядро $\mathcal{K}_g$ является непустым множеством при любом $g \in \mathcal{H}(g_0)$.

Доказательство теоремы 1.2 дано в [1] и [11].

Предположим, что множество $\mathcal{P}$, $[\mathcal{P}]_H \subseteq H$, является равномерно (по $g \in \mathcal{H}(g_0)$) притягивающим множеством семейства процессов $\{U_g(t, \tau), g \in \mathcal{H}(g_0)\}$. Как и выше, предполагается, что $\{U_g(t, \tau)\}u_\tau$ непрерывно по $(u_\tau, g) \in E \times \mathcal{H}(g_0)$, принимая значения в E . Тогда для равномерного аттрактора $\mathcal{A}$ семейства процессов $\{U_g(t, \tau), g \in \mathcal{H}(g_0)\}$ имеет место формула

$$\mathcal{A} = \bigcap_{h \geq 0} \left[\bigcup_{t-\tau \geq h} U_{g_0}(t, \tau) \mathcal{P} \right]_E. \quad (1.16)$$

§ 2. Диссипативное гиперболическое уравнение с быстро осциллирующей по t внешней силой и его глобальный аттрактор

Рассматривается диссипативное гиперболическое уравнение вида

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u = \Delta u - \delta^2 u - f(u) + g\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{T}^n, \quad (2.1)$$

где $\gamma > 0$, $\delta^2 > 0$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, при периодических граничных условиях: $x \in \mathbb{T}^n$. Как известно, уравнению (2.1) можно придать вид (1.9) эволюционного уравнения:

$$\begin{cases} \partial_t u = p; \\ \partial_t p = -\gamma p + \Delta u - \delta^2 u - f(u) + g\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right). \end{cases} \quad (2.1')$$

Обозначив $(u, p) = y$, эту систему можно записать в виде (1.9):

$$\partial_t y = L(y) + G\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad G = (0, g), \quad x \in \mathbb{T}^n. \quad (2.2)$$

Однако ниже в основном используется уравнение (2.1). Предполагается, что функция $g(x, z)$, $z \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{T}^n$, – тр.к. по z в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$ ($H = L_2(\mathbb{T}^n)$), т.е.

$$\begin{aligned} \{g(\cdot, z + h), h \in \mathbb{R}\} &\text{ – предкомпактное множество в } L_2([z_1, z_2], H) \\ &\text{ при любых } z_1, z_2 \in \mathbb{R}, \quad z_1 < z_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отсюда следует, что

$$\|g(\cdot, \cdot)\|_{L_2^b}^2 := \sup_{z \in \mathbb{R}} \int_z^{z+1} |g(\cdot, \xi)|^2 d\xi \leq \frac{1}{2}M < +\infty, \quad (2.4)$$

здесь и далее $|\cdot| = \|\cdot\|_H$ (см. [1], [11]). Кроме того,

$$\begin{aligned} \left\| g\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L_2^b} &:= \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \left| g\left(\cdot, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right|^2 d\tau \\ &= \varepsilon \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{t/\varepsilon}^{(t+1)/\varepsilon} |g(\cdot, z)|^2 dz \leq M, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (2.4')$$

Относительно функции взаимодействия $f(v)$ предполагается, что

$$\begin{aligned} f(v) &\in C^1(\mathbb{R}), \quad |f'(v)| \leq C_0(|v|^\rho + 1), \\ 0 \leq \rho &< \frac{2}{n-2}, \quad n \geq 3; \quad n = 1, 2, \quad \rho - \text{любое число}, \quad \rho \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} F(v) &\geq -mv^2 - C_m, \quad F(v) = \int_0^v f(w)dw, \\ f(v)v - \gamma_1 F(v) + mv^2 &\geq -C_m, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $m > 0, \gamma_1 > 0, m$ достаточно мало.

Предполагается, что внешняя сила $g(x, t/\varepsilon)$ обладает равномерным усреднением $\bar{g}(x)$ в $L_{2,w}^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$ при $\varepsilon \searrow 0$. Это означает, что для любой функции $\varphi(x, t)$, принадлежащей $L_2([-T, T], H)$, где $T > 0$ — любое число из $\mathbb{R}_+$,

$$\int_{-T}^{+T} \left\langle g\left(\cdot, \frac{t+h}{\varepsilon}\right), \varphi(\cdot, t) \right\rangle_H dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-T}^{+T} \langle \bar{g}(\cdot), \varphi(\cdot, t) \rangle_H dt \quad (2.7)$$

равномерно по $h \in \mathbb{R}$ (см. [9]). Сформулируем достаточное условие, при котором (2.7) выполняется:

$$\frac{1}{\lambda} \int_h^{h+\lambda} g(x, z_1) dz_1 \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \bar{g}(x) \quad \text{в } H, \quad (2.8)$$

причем эта сходимость равномерная по $h \in \mathbb{R}$.

Отметим, что условие (2.8) выполняется для любой п.п. по z функции $g(x, z)$ со значениями в H (см. [12]).

Пусть $\mathcal{H}(g(x, z))$ — оболочка функции $g(x, z)$ в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$ и $\mathcal{H}(g(x, t/\varepsilon))$ — оболочка функции $g(x, t/\varepsilon)$ в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$ (при фиксированном $\varepsilon, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$). Так как $g(x, z)$ — тр.к. в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$ (см. (2.3)), то $\hat{g}(x, t/\varepsilon) \in \mathcal{H}(g(x, t/\varepsilon))$, если существует последовательность $\{h_n\}, h_n \in \mathbb{R}$, такая, что

$$g\left(\cdot, \frac{t+h_n}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \hat{g}\left(\cdot, \frac{t}{\varepsilon}\right) \quad \text{в } L_2^{\text{loc}}([-T, T], H) \quad \forall T > 0. \quad (2.9)$$

Обозначим для краткости $\widehat{g}(x, t/\varepsilon) := \widehat{g}^\varepsilon(t) := \widehat{g}(t)$, $g(x, t/\varepsilon) := g^\varepsilon(t) := g(t)$.

Имеют место равномерные оценки

$$\|\widehat{g}^\varepsilon\|_{L_2^b}^2 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\widehat{g}^\varepsilon(\cdot, t_1)|^2 dt_1 \leq \|g^\varepsilon\|_{L_2^b} \leq M, \quad (2.10)$$

где M – такое же, как в (2.4'). Из (2.7) следует, что функция $\widehat{g}(x, t/\varepsilon)$ обладает при $\varepsilon \rightarrow 0+$ таким же равномерным усреднением $\overline{g}(x)$ в $L_{2,w}^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$, как и функция $g(x, t/\varepsilon)$:

$$\widehat{g}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \overline{g}(x) \quad \text{в } L_{2,w}^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$$

(см. [9]).

Кроме того, предполагается, что функция $g(x, z)$ тр.к. по z в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H_{\sigma_2})$, где $\sigma_2 = 1 - \rho(n-2)/2$, $n \geq 3$, ρ – такое же, как в (2.5). Отсюда следует, что $\partial_{x_i} g(x, z)$, $i = 1, \dots, n$, тр.к. по z в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H_{\sigma_2-1})$. Следовательно, для $\widehat{g} \in \mathcal{H}(g)$ имеем

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \left\| \widehat{g}_{x_i}\left(\cdot, \frac{t_1}{\varepsilon}\right) \right\|_{H_{\sigma_2-1}}^2 dt_1 &\leq M_1 < +\infty \\ \forall \widehat{g} \in \mathcal{H}(g), \quad i = 1, \dots, n, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Отметим, что M_1 не зависит от ε (см. (2.4), (2.4')) и от $\widehat{g} \in \mathcal{H}(g)$.

Зададим при $t = \tau$ начальные условия:

$$u|_{t=\tau} = u_0(x), \quad \partial_t u|_{t=\tau} = u_1(x), \quad (u_0, u_1) := y(\tau) \in H_1 \times H := E. \quad (2.12)$$

Наряду с уравнением (2.1) рассмотрим усредненное уравнение

$$\partial_t^2 \overline{u} + \gamma \partial_t \overline{u} = \Delta \overline{u} - \delta^2 \overline{u} - f(\overline{u}) + \overline{g}(x), \quad x \in \mathbb{T}^n, \quad (2.13)$$

где $\overline{g}(x)$ – усреднение функции $g(x, t/\varepsilon)$ в $L_{2,w}^{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Задача (2.1), (2.12) и задача (2.13), (2.12) имеют, и притом единственное, решение

$$\begin{aligned} y_g(t) &:= y(t) = (u(t), \partial_t u(t)) = U_g(t, \tau) y(\tau), \quad y(\tau) = (u_0, u_1), \\ y_{\overline{g}}(t) &:= (\overline{u}(t), \partial_t \overline{u}(t)) = U_{\overline{g}}(t, \tau) y(\tau). \end{aligned}$$

Так как уравнение (2.13) автономно, то $U_{\overline{g}}(t, \tau) y(\tau) = S(t - \tau) y(\tau)$, где $\{S(t_1), t_1 \geq 0\}$ – полугруппа, порожденная (2.13). Доказательство этих фактов стандартно (см., например, [2], [4]). Аналогично, если в (2.1) $g = \widehat{g}$, $\widehat{g} \in \mathcal{H}(g)$, то соответствующая задача Коши (2.1), (2.12) имеет, и притом единственное, решение $y_{\widehat{g}}(t) = U_{\widehat{g}}(t, \tau) y_{\widehat{g}}(\tau)$.

Ниже изучается семейство процессов $\{U_{\widehat{g}}(t, \tau), \widehat{g} \in \mathcal{H}(g)\}$, порожденное уравнениями вида (2.1), где g заменено на $\widehat{g}$. Сначала устанавливается существование равномерно притягивающего множества $\mathcal{P}$ для этого семейства процессов.

ТЕОРЕМА 2.1. *При выполнении указанных выше условий при любом фиксированном ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, семейство процессов*

$$\left\{ U_{\widehat{g}}(t, \tau), \widehat{g}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) := \widehat{g} \in \mathcal{H}\left(g\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right)\right) \right\} \cup \{U_{\overline{g}}(t, \tau)\} \quad (2.14)$$

обладает равномерно (по $\widehat{g}$ и по $\overline{g}$) притягивающим множеством $\mathcal{P}$, компактным в E . Множество $\mathcal{P}$ не зависит от ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривается задача Коши

$$\partial_t^2 \hat{u} + \gamma \partial_t \hat{u} = \Delta \hat{u} - \gamma^2 \hat{u} - f(\hat{u}) + \hat{g}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{T}^n, \quad (2.15)$$

$$\hat{u}|_{t=\tau} = u_0(x), \quad \partial_t \hat{u}|_{t=\tau} = u_1(x), \quad (u_0(x), u_1(x)) := y_\tau(x) \in E. \quad (2.16)$$

Здесь $\hat{g}(x, t/\varepsilon) \in \mathcal{H}(g(x, t/\varepsilon))$. Решение $\hat{u}_{\hat{g}}(x, t)$ задачи (2.15), (2.16) можно представить в виде

$$y_{\hat{g}}(t) := \hat{y} = \Sigma(t - \tau)y_\tau + \tilde{U}_{\hat{g}}(t, \tau)y_\tau. \quad (2.17)$$

Здесь

$$\Sigma(t - \tau)y_\tau = (u_2(t), \partial_t u_2(t)) := y_2(t), \quad (2.18)$$

где $u_2(t)$ – решение следующей линейной задачи:

$$\partial_t^2 u_2 + \gamma \partial_t u_2 + A u_2 = 0, \quad A v(x) := -\Delta v(x) + \delta^2 v(x), \quad x \in \mathbb{T}^n, \quad (2.19)$$

$$u_2|_{t=\tau} = u_0(x), \quad \partial_t u_2|_{t=\tau} = u_1(x). \quad (2.20)$$

Как известно (см. [1], [2]), решение $(u_2(t), \partial_t u_2(t)) := y_2(t)$ задачи (2.19), (2.20) экспоненциально убывает по $(t - \tau)$:

$$\|y_2(t)\|_E \leq \|y_\tau\|_E e^{-\alpha_1(t-\tau)}, \quad \alpha_1 > 0, \quad t \geq \tau. \quad (2.21)$$

Определим второе слагаемое в (2.17):

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &:= (\tilde{u}(t), \partial_t \tilde{u}(t)) := \tilde{U}_{\hat{g}}(t, \tau)y_\tau, \\ y_\tau &= (u_0(x), u_1(x)) = (\hat{u}|_{t=\tau}, \partial_t \hat{u}|_{t=\tau}), \end{aligned} \quad (2.22)$$

причем функция $\tilde{u}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t^2 \tilde{u} + \gamma \partial_t \tilde{u} + A \tilde{u} = \hat{g}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) - f(\hat{u}(t)), \quad x \in \mathbb{T}^n, \quad (2.23)$$

$$\tilde{u}|_{t=\tau} = 0, \quad \partial_t \tilde{u}|_{t=\tau} = 0 \quad (\text{или } \tilde{y}|_{t=\tau} = \tilde{y}_\tau = 0). \quad (2.24)$$

Отметим, что $\tilde{y}(t)$ однозначно определяется через $y_\tau = (u_0(x), u_1(x))$, так как $\tilde{u}(t)$ однозначно определяется через y_τ (см. (2.15), (2.16)). Действительно, через $\hat{u}(t)$ выражается правая часть (2.23). Зная правую часть (2.23), мы однозначно находим $(\tilde{u}(t), \partial_t \tilde{u}(t)) = \tilde{y}(t)$ – решение задачи Коши для (2.23), (2.24). Заметим, что семейство операторов $\{\tilde{U}_{\hat{g}}(t, \tau)\}$ не является процессом.

Докажем сначала следующую лемму.

ЛЕММА 2.1. Семейство процессов $\{U_{\hat{g}}(t, \tau), \hat{g} = \hat{g}(x, t/\varepsilon) \in \mathcal{H}(g(x, t/\varepsilon))\}$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, обладает равномерным (по $\hat{g}$) поглощающим множеством B_0 , ограниченным в E . Множество B_0 не зависит от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение задачи (2.15), (2.16) $(\hat{u}(t), \partial_t \hat{u}(t)) := \hat{y}(t) \in C_b(\mathbb{R}_\tau, E)$ (см. [1]) удовлетворяет следующей оценке:

$$\begin{aligned} \|\hat{y}(t)\|_E^2 &:= \|\hat{u}(t)\|_{H_1}^2 + \|\partial_t \hat{u}(t)\|_H^2 := \|\hat{u}(t)\|_1^2 + |\partial_t \hat{u}(t)|^2 \\ &\leq C_4(\|y(\tau)\|_E^{\rho+2} + 1)e^{-\beta(t-\tau)} + \int_\tau^t (C' + C'_1|\hat{g}(\tau_1)|_H^2)e^{-\beta(t-\tau_1)} d\tau_1, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$H = H(\mathbb{T}^n), \quad H_1 = H_1(\mathbb{T}^n), \quad \beta > 0.$$

Здесь C_4, C', C'_1 — константы, не зависящие от $\hat{y}(\tau) = y_\tau \in E, \hat{g} \in \mathcal{H}(g)$. Ниже приводится идея доказательства (2.25).

Сначала заметим, что последний интеграл в (2.25) допускает следующую оценку:

$$\begin{aligned} &\int_\tau^t (C' + C'_1|\hat{g}(\tau_1)|^2)e^{-\beta(t-\tau_1)} d\tau_1 \\ &\leq C'_2 + C'_3 \left(\int_{t-1}^t |\hat{g}(\tau_1)|^2 e^{-\beta(t-\tau_1)} d\tau_1 + \int_{t-2}^{t-1} |\hat{g}(\tau_1)|^2 e^{-\beta(t-\tau_1)} d\tau_1 + \dots \right) \\ &\leq C'_2 + C'_3 \left(\int_{t-1}^t |\hat{g}(\tau_1)|^2 d\tau_1 + e^{-\beta} \int_{t-2}^{t-1} |\hat{g}(\tau_1)|^2 d\tau_1 + e^{-2\beta} \int_{t-3}^{t-2} |\hat{g}(\tau_1)|^2 d\tau_1 + \dots \right) \\ &\leq C'_2 + C'_3(1 - e^{-\beta})^{-1} \|\hat{g}\|_{L_2^b}^2 \leq C_3(M), \end{aligned} \quad (2.25')$$

где $\|\hat{g}\|_{L_2^b}^2 \leq M$ (см. (2.10)).

Отсюда и из (2.25) следует, что

$$\|\hat{y}(t)\|_E^2 \leq C_4(\|\hat{y}(\tau)\|_E^{\rho+2} + 1)e^{-\beta(t-\tau)} + C_3(M). \quad (2.26)$$

Доказательство оценки (2.25) дано в [1; гл. VI, лемма 4.1]. Приведем лишь основную идею этого доказательства. Введем функцию

$$z(t) = \int_{\mathbb{T}^n} (|\nabla \hat{u}(x, t)|^2 + \delta^2 |\hat{u}(x, t)|^2 + |\partial_t \hat{u}(x, t) + \alpha \hat{u}(x, t)|^2 - 2F(\hat{u}(x, t))) dx, \quad (2.27)$$

где $\alpha > 0$ и достаточно мало, $\hat{u}(x, t)$ — решение задачи (2.15), (2.16), $F(u) = \int_0^u f(v) dv$. Используя условия (2.3)–(2.6), из (2.27) выводится следующее дифференциальное неравенство:

$$d_t z(t) + \beta z(t) \leq C + C_1 |\hat{g}(t)|^2, \quad \beta > 0.$$

Отсюда, по неравенству Гронуола следует, что

$$z(t) \leq z(\tau)e^{-\beta(t-\tau)} + \int_\tau^t (C + C_1 |\hat{g}(\tau_1)|^2)e^{-\beta(t-\tau_1)} d\tau_1. \quad (2.28)$$

Учитывая (2.25') и степенной рост функции $F(u)$, из (2.28) выводится (2.25) (см. [1; гл. VI, лемма 4.1]).

Из неравенства (2.26) следует, что множество

$$B_0 = \{y \subset E \mid \|y\|_E^2 \leq 2C_3(M)\} \quad (2.29)$$

является равномерно (по $\widehat{g} = \widehat{g}(x, t/\varepsilon) \in \mathcal{H}(g)$, $\tau \in \mathbb{R}$ и ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$) поглощающим множеством для семейства процессов $\{U_{\widehat{g}}(t, \tau), t \geq \tau, \tau \in \mathbb{R}, \widehat{g} \in \mathcal{H}(g)\}$ при любом фиксированном ε .

Заметим, что B_0 не зависит от ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, так как $C_3 = C_3(M)$, а M не зависит от ε (см. (2.4), (2.4')).

Кроме того, из (2.26) следует, что для любого ограниченного множества $B_1 \in \mathcal{B}(E)$

$$U_{\widehat{g}}(\tau + h, \tau)B_1 \subset B_0, \quad t \geq h(B_1), \quad (2.30)$$

где $h(B_1)$ не зависит от $\widehat{g} \in \mathcal{H}(g)$, а также от $\tau \in \mathbb{R}$ и от ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Таким образом, без ограничения общности (как будет доказано ниже) можно считать, что $y_\tau = \widehat{y}(\tau) \in B_0$.

Продолжим теперь доказательство теоремы 2.1.

Применим оценку (2.25) к уравнению (2.23), считая, что член $\widehat{g}(x, t/\varepsilon) + f(\widehat{u}(t))$ является известной правой частью, а начальное условие $\widehat{y}|_{t=\tau} = (\widehat{u}(\tau), \partial_t \widehat{u}(\tau)) = 0$ (согласно (2.24)). Учитывая (2.23), (2.24) и тот факт, что в левой части (2.23) отсутствует нелинейный член, мы получаем

$$\begin{aligned} \|\widehat{y}(t)\|_E^2 &:= \|\widehat{u}(t)\|_1^2 + |\partial_t \widehat{u}(t)|^2 \\ &\leq C \int_\tau^t (|\widehat{g}(t_1)|^2 + |f(\widehat{u}(t_1))|^2) e^{-\alpha_1(t-t_1)} dt_1 \\ &\leq C_5 + C_6 \|\widehat{g}\|_{L_2^b}^2 + C_7 \int_\tau^t (\|\widehat{y}(t_1)\|_E^{2(\rho+1)} + 1) e^{-\alpha_1(t-t_1)} dt_1 \\ &\leq C(M, \|B_0\|_E), \quad \alpha_1 > 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

(см. [1], [2]). При этом мы воспользовались тем, что $\widehat{y}(\tau) \in B_0$, оценками (2.25), (2.25') и тем, что $\|\widehat{g}\|_{L_2^b}^2 \leq M$. Отметим, что оценка (2.31) не зависит от ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Дифференцируя (2.23) и (2.24) по x_i , получаем

$$\partial_t^2(\partial_{x_i} \widehat{u}) + \gamma \partial_t(\partial_{x_i} \widehat{u}) - \Delta(\partial_{x_i} \widehat{u}) + \delta^2 \partial_{x_i} \widehat{u} = f'_u(\widehat{u}) \partial_{x_i} \widehat{u} + \widehat{g}_{x_i} \left(x, \frac{t}{\varepsilon} \right), \quad (2.32)$$

$$\partial_{x_i} \widehat{u}|_{t=\tau} = 0, \quad \partial_t(\partial_{x_i} \widehat{u})|_{t=\tau} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.33)$$

Обозначив в (2.32) и (2.33) $\partial_{x_i} \widehat{u} := v$, получим

$$\partial_t^2 v + \gamma \partial_t v + Av = -f'_u(\widehat{u}) \partial_{x_i} \widehat{u} + \widehat{g}'_{x_i} \left(x, \frac{t}{\varepsilon} \right), \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} Av &= -\Delta v + \delta^2 v, \\ v|_{t=\tau} &= 0, \quad \partial_t v|_{t=\tau} = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Пусть $\sigma_2 = 1 - \rho(n-2)/2$, $n \geq 3$, где ρ – такое же, как в (2.5). Очевидно $\sigma_2 > 0$. (Случай $n = 1, 2$ трактуется аналогично.)

Для $\theta(x) \in L_2(\mathbb{T}^n) := H$ и $\nu(x) \in H_1(\mathbb{T}^n)$ имеет место неравенство

$$\|f'(\nu)\theta\|_{H_{\sigma_2-1}} \leq C'_2 C'_3 (\|\nu\|_1) |\theta|, \quad (2.36)$$

где $C'_3(s)$ – возрастающая степенная функция (степень которой определяется с помощью теоремы вложения Соболева). Доказательство (2.36) дано в [2; гл. IV, лемма 3.3]. Применяя оператор $A^{(\sigma_2-1)/2}$ к обеим частям (2.34) и (2.35), получаем

$$\begin{aligned} & \partial_t^2(A^{(\sigma_2-1)/2}v) + \gamma \partial_t(A^{(\sigma_2-1)/2}v) + A(A^{(\sigma_2-1)/2}v) \\ &= -A^{(\sigma_2-1)/2}(f'_u(\hat{u})\partial_{x_i}\hat{u}) + A^{(\sigma_2-1)/2}\hat{g}'_{x_i}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$A^{(\sigma_2-1)/2}v|_{t=\tau} = 0, \quad \partial_t A^{(\sigma_2-1)/2}v|_{t=\tau} = 0. \quad (2.38)$$

Отметим, что из (2.36) следует

$$\begin{aligned} |A^{(\sigma_2-1)/2}(f'(\hat{u}(t))\partial_{x_i}\hat{u})| &\leq C \|f'(\hat{u})\partial_{x_i}\hat{u}\|_{H_{\sigma_2-1}} \\ &\leq C C'_2 C'_3 (\|\hat{u}(t)\|_1) |\partial_{x_i}\hat{u}(t)| \\ &\leq C_0 (\|B_0\|_E, M). \end{aligned} \quad (2.39)$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $(\hat{u}(\tau), \partial_t \hat{u}(\tau)) = \hat{y}(\tau) \in B_0$ и оценкой (2.25), согласно которой

$$\|\hat{y}(t)\|_E^2 = \|(\hat{u}, \partial_t \hat{u}(t))\|_E^2 \leq C_4 (\|B_0\|_E, M) \quad \forall t \geq \tau.$$

Уравнение (2.37) относительно $(A^{(\sigma_2-1)/2}v) := w$ является неоднородным линейным гиперболическим уравнением с правой частью

$$-A^{(\sigma_2-1)/2}(f'_u(\hat{u}(t))\partial_{x_i}\hat{u}(t)) + A^{(\sigma_2-1)/2}\left(\hat{g}'_{x_i}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) := \varphi(t).$$

Таким образом, имеем

$$\partial_t^2 w + \gamma \partial_t w + Aw = \varphi(t), \quad w|_{t=\tau} = 0, \quad \partial_t w|_{t=\tau} = 0.$$

Как известно, для $w(t)$ имеет место оценка

$$\|w(t)\|_1^2 + |\partial_t w(t)|^2 \leq C_1 \int_{\tau}^t |\varphi(\tau_1)|^2 e^{-\alpha_1(t-\tau_1)} d\tau_1,$$

где $\alpha_1 > 0$.

Отсюда, подставляя вместо $w(t)$ и $\varphi(t)$ их выражения, получаем

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_{\sigma_2}}^2 + \|\partial_t v\|_{H_{\sigma_2-1}}^2 &\leq C_2 (\|A^{(\sigma_2-1)/2}v(t)\|_1^2 + |\partial_t A^{(\sigma_2-1)/2}v(t)|^2) \\ &\leq C_3 \int_{\tau}^t \left(|A^{(\sigma_2-1)/2}(f'(\hat{u}(\tau_1))\partial_{x_i}\hat{u}(\tau_1))|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| A^{(\sigma_2-1)/2}\hat{g}'_{x_i}\left(\cdot, \frac{\tau_1}{\varepsilon}\right) \right|^2 \right) e^{-\alpha_1(t-\tau_1)} d\tau_1. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Учитывая оценки (2.39) и (2.11), из (2.40) выводим

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_{\sigma_2}}^2 + \|\partial_t v\|_{H_{\sigma_2-1}}^2 &\leq C_5(\|B_0\|_E, M) + C_6(\|\widehat{g}_{x_i}\|_{L_2^b(H_{\sigma_2-1})}) \\ &\leq C_7(\|B_0\|_E, M, M_1), \end{aligned} \quad (2.41)$$

где M_1 выражается по формуле (2.11). Отметим, что при оценке последнего слагаемого в (2.40) мы использовали (2.25'). Так как $v = \partial_{x_i} \tilde{u}$, $i = 1, \dots, n$, то из (2.41) следует

$$\sum_{i=1}^n (\|\partial_{x_i} \tilde{u}(t)\|_{H_{\sigma_2}} + \|\partial_t(\partial_{x_i} \tilde{u}(t))\|_{H_{\sigma_2-1}}) \leq C_8(\|B_0\|_E, M, M_1), \quad t \geq \tau. \quad (2.42)$$

Согласно оценке (2.31)

$$\|\tilde{y}(t)\|_E^2 = \|\tilde{u}(t)\|_1^2 + |\partial_t \tilde{u}(t)|^2 \leq C(\|B_0\|_E, M).$$

Отсюда и из (2.42) следует

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}(t)\|_{E_{\sigma_2}} &:= (\|\tilde{u}(t)\|_{H_{\sigma_2+1}}^2 + \|\partial_t u(t)\|_{H_{\sigma_2}}^2)^{1/2} \\ &\leq C_9(\|B_0\|_E, M, M_1), \quad t \geq \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \sigma_2 > 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Так как $\sigma_2 > 0$, то в силу (2.43) множество $\mathcal{P} = \bigcup_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0} \{\tilde{y}(t), t \geq \tau, \tau \in \mathbb{R} \mid \tilde{y}(t) \text{ — решение задачи Коши (2.23), (2.24), } \widehat{g} \in \mathcal{H}(g) \text{ и } \tilde{u} \text{ — решение задачи Коши (2.15), (2.16) с } y_\tau = (u_0(x), u_1(x)) \in B_0\}$ предкомпактно в E . Покажем теперь, что $\mathcal{P}$ является равномерно притягивающим множеством для семейства процессов $\{U_{\widehat{g}}(t, \tau), \widehat{g} \in \mathcal{H}(g), \widehat{g} = \widehat{g}(x, t/\varepsilon)\}$ и притом в силу (2.43) $\mathcal{P}$ предкомпактно в E .

Действительно, пусть $B_1 \in \mathcal{B}(E)$ — любое ограниченное множество в E .

Так как B_0 — равномерно поглощающее множество для семейства процессов $\{U_{\widehat{g}}(t, \tau), \widehat{g} \in \mathcal{H}(g), \widehat{g} = \widehat{g}(x, t/\varepsilon)\}$, то найдется такое $h = h(B_1)$, что $\forall \tau_1 \geq \tau + h(B_1) := \tau_0(\tau, B_1) := \tau_0$

$$U_{\widehat{g}}(t_1, \tau)B_1 \subset B_0.$$

Поэтому при $t \geq \tau_0$ в силу (2.17)

$$U_{\widehat{g}}(t, \tau_0)B_0 = \Sigma(t - \tau_0)B_0 + \tilde{U}(t, \tau_0)B_0 \subset \Sigma(t - \tau_0)B_0 + \mathcal{P}.$$

Так как $\Sigma(t - \tau_0)$ экспоненциально убывает, то для любого $\eta > 0$

$$U_{\widehat{g}}(t, \tau_0)B_0 \subset \mathcal{O}_\eta(\mathcal{P}), \quad t - \tau_0 \geq \tau_1(\eta).$$

Следовательно,

$$U_{\widehat{g}}(t, \tau)B_1 \subset U_{\widehat{g}}(t, \tau_0)U(\tau_0, \tau)B_1 \subset U_{\widehat{g}}(t, \tau_0)B_0 \subset \mathcal{O}_\eta(\mathcal{P}), \quad t > \tau + h(B_1) + \tau_1(\eta).$$

Таким образом, $\mathcal{P}$ является равномерно по $\widehat{g}^\varepsilon = \widehat{g}(x, t/\varepsilon) \in \mathcal{H}(g(x, t/\varepsilon)) := \mathcal{H}(g^\varepsilon)$ притягивающим множеством процессов $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\}$ при фиксированном ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. При этом $\mathcal{P}$ не зависит от ε . Очевидно, что аналогичный факт имеет место и для $U_{\overline{g}}(t, \tau) = S(t - \tau)$.

Для доказательства существования равномерного (по $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$) аттрактора $\mathcal{A}_\varepsilon$ семейства процессов $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\}$ необходимо еще установить справедливость следующего предложения (см. [1; р. 127–128]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Семейство процессов $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t, \tau)y(\tau)\}$ при любом фиксированном ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, является $((E, \mathcal{H}(g^\varepsilon)), E)$ непрерывным (т.е. если $(y_n(\tau), \widehat{g}_n^\varepsilon) \rightarrow (y(\tau), \widehat{g}^\varepsilon)$ в $(E, \mathcal{H}(g^\varepsilon))$, то $U_{\widehat{g}_n^\varepsilon}(t, \tau)y_n(\tau) \rightarrow U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t, \tau)y(\tau)$) в E .

Доказательство этого предложения проводится стандартно. Оно приведено в [1; с. 127–128].

Из теоремы 2.1 и предложения 2.1 следует, что семейство процессов $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\}$ обладает компактным в E равномерным (по $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$) глобальным аттрактором $\mathcal{A}_\varepsilon$.

Для $\mathcal{A}_\varepsilon$ имеет место следующая формула, аналогичная (1.16):

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \bigcap_{h \geq 0} \left[\bigcup_{t-\tau \geq h} U_{g^\varepsilon}(t, \tau) \mathcal{P} \right]_E.$$

Отсюда и из указанных выше свойств равномерного притягивающего множества $\mathcal{P}$, $[\mathcal{P}] \in E$, следует, что

$$\mathcal{A}_\varepsilon \subset [\mathcal{P}], \quad (2.44)$$

причем $[\mathcal{P}]$ – фиксированное, компактное в E множество.

Кроме того,

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \bigcup_{\widehat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)} \mathcal{K}_{\widehat{g}^\varepsilon}(0) = \bigcup_{\widehat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)} \mathcal{K}_{\widehat{g}^\varepsilon}(t) \quad (2.45)$$

для любого фиксированного $t \in \mathbb{R}$. Здесь $\mathcal{K}_{\widehat{g}^\varepsilon}$ – ядро процесса $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\widehat{g}^\varepsilon} &= \{u^\varepsilon(t), t \in \mathbb{R} \mid u^\varepsilon(t) \text{ – решение (2.1) при } t \in \mathbb{R}, \\ &\quad \|(u^\varepsilon(t), \partial_t u^\varepsilon(t))\|_E \leq M_{u^\varepsilon} \ \forall t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

§3. Оценка отклонения траекторий

Пусть $u^\varepsilon(x, t) := u_{\widehat{g}^\varepsilon}(x, t) := u_{\widehat{g}}(x, t)$, $\widehat{g}^\varepsilon = \widehat{g}(x, t/\varepsilon) \in \mathcal{H}(g^\varepsilon) = \mathcal{H}(g(x, t/\varepsilon))$, является решением уравнения

$$\partial_t^2 u^\varepsilon + \gamma \partial_t u^\varepsilon = \Delta u^\varepsilon - \delta^2 u^\varepsilon - f(u^\varepsilon) + \widehat{g}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad (3.1)$$

$x \in \mathbb{T}^n$, при начальных условиях

$$u^\varepsilon|_{t=\tau} = u_0(x), \quad \partial_t u^\varepsilon|_{t=\tau} = u_1(x), \quad (3.2)$$

$(u_0, u_1) := y \in E$. Предполагается, что $\widehat{g}^\varepsilon$ и $f(v)$ обладают свойствами, сформулированными в §2. Пусть $\overline{u}(x, t) := u^0(x, t) := u^0$ – решение усредненного уравнения (2.13) с внешней силой $g^0(x) = \overline{g}(x)$, удовлетворяющее тем же начальным условиям, что и u^ε :

$$u^0|_{t=\tau} = u_0(x), \quad \partial_t u^0|_{t=\tau} = u_1(x). \quad (3.2')$$

Предполагается, что

$$\|u_0\|_1^2 + |u_1|^2 := \|y\|_E^2 \leq R^2, \quad (3.3)$$

где $R > 0$ фиксированно. Разность $w(x, t) = u^\varepsilon(x, t) - u^0(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t^2 w + \gamma \partial_t w = \Delta w - \delta^2 w - (f(u^\varepsilon) - f(u^0)) + \tilde{g}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad (3.4)$$

где $\tilde{g}(x, t/\varepsilon) = \widehat{g} - \overline{g} = \widehat{g} - g^0 = \widehat{g}(x, t/\varepsilon) - g^0(x)$, и начальным условиям

$$w|_{t=\tau} = 0, \quad \partial_t w|_{t=\tau} = 0. \quad (3.5)$$

Обозначим

$$f(u^\varepsilon) - f(u^0) = \int_0^1 f'_u(u^0 + s(u^\varepsilon - u^0)) ds (u^\varepsilon - u^0) := f'_u w. \quad (3.6)$$

Умножим скалярно уравнение (3.4) на $\partial_t w$. Учитывая (3.6), после стандартных преобразований, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t |\partial_t w|^2 + \frac{1}{2} (\partial_t |\nabla w|^2 + \delta^2 |w|^2) + \gamma |\partial_t w|^2 + \langle f'_u w, \partial_t w \rangle \\ & = \langle \widehat{g} - g^0, w \rangle := \langle \tilde{g}, w \rangle, \quad \widehat{g} - g^0 := \tilde{g}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Предположим дополнительно, что существует первообразная $\tilde{G}(x, z)$ функции $\tilde{g}(x, z)$ по z :

$$\partial_z \tilde{G}(x, z) = \tilde{g}(x, z), \quad \varepsilon \partial_t \tilde{G}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) = \tilde{g}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad (3.8)$$

обладающая следующим свойством:

$$\|\tilde{G}(\cdot, z)\|_1 \leq M_1 \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

где M_1 не зависит от $\widehat{g} \in \mathcal{H}(g)$. Ниже приводятся примеры функций $\widehat{g}(x, z) - g^0(x) = \tilde{g}(x)$, обладающих свойствами (3.8), (3.9).

Интегрируя (3.7) по t и используя (3.5), (3.6) и (3.8), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (|\partial_t w(\tau + t)|^2 + \|w(\tau + t)\|_1^2 + \delta^2 |w(\tau + t)|^2) + \gamma \int_0^t |\partial_t w(\tau + t)| d\tau_1 \\ & = - \int_0^t \langle f'_u w(\tau + \tau_1), \partial_t w(\tau + \tau_1) \rangle d\tau_1 + \varepsilon \int_0^t \left\langle \partial_t \tilde{G}\left(\frac{\tau + \tau_1}{\varepsilon}\right), \partial_t w(\tau + \tau_1) \right\rangle d\tau_1 \\ & = - \int_0^t \langle f'_u w(\tau + \tau_1), \partial_t w(\tau + \tau_1) \rangle d\tau_1 + \varepsilon \left\langle \tilde{G}\left(\cdot, \frac{\tau + t}{\varepsilon}\right), \partial_t w(\cdot, \tau + t) \right\rangle \\ & \quad - \varepsilon \int_0^t \left\langle \tilde{G}\left(\frac{\tau + \tau_1}{\varepsilon}\right), \partial_t^2 w(\tau + \tau_1) \right\rangle d\tau_1 := \text{I} + \text{II} + \text{III}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Интеграл I оценим с помощью неравенства Гёльдера с показателями $1/2$, $(n-2)/(2n)$, $1/n$:

$$\begin{aligned}
|I| &= \left| \int_0^t \langle f'_u w(\tau + \tau_1), \partial_t w(\tau + \tau_1) \rangle d\tau_1 \right| \\
&\leq \int_0^t \|f'_u\|_{L_n(\Omega)} \|w\|_{L_{2n/(n-2)}(\Omega)} \|\partial_t w\|_{L_2(\Omega)} d\tau_1 \\
&\leq C \int_0^t (1 + \|u^\varepsilon\|_{L_{2n/(n-2)}}^{2/(n-2)} + \|u^0\|_{L_{2n/(n-2)}}^{2/(n-2)}) \|w\|_1 |\partial_t w| d\tau_1 \\
&\leq C_1(R, M) \int_0^t (\|w\|_1^2 + |\partial_t w|^2) d\tau_1, \quad \|y^0\|_E^2, \|y^\varepsilon\|_E^2 \leq C_0(R^2). \quad (3.11)
\end{aligned}$$

При этом мы воспользовались тем, что $\|(u_0^\varepsilon(\tau), \partial_t u^\varepsilon(\tau))\|_E^2 \leq R^2$ и, как показано в §2, отсюда следует, что $\|(u^\varepsilon(\tau + \tau_1), \partial_t u^\varepsilon(\tau + \tau_1))\|_E^2 \leq C_0(R^2)$.

Второе слагаемое справа в (3.10) оценивается с помощью (3.9)

$$\begin{aligned}
|II| &\leq \varepsilon \left| \left\langle \tilde{G}\left(\cdot, \frac{\tau+t}{\varepsilon}\right), \partial_t w(\tau+t) \right\rangle \right| \\
&\leq \varepsilon M_1 |\partial_t w(\tau+t)| \leq \varepsilon M_1 \frac{1}{2} (|\partial_t w(\tau+t)|^2 + 1). \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Интеграл III в (3.10) допускает следующую оценку:

$$\begin{aligned}
|III| &= \varepsilon \left| \int_0^t \left\langle \tilde{G}\left(\frac{\tau+\tau_1}{\varepsilon}\right), \partial_t^2 w(\tau+\tau_1) \right\rangle d\tau_1 \right| \\
&\leq \varepsilon \int_0^t \left\| \tilde{G}\left(\cdot, \frac{\tau+\tau_1}{\varepsilon}\right) \right\|_1 \|\partial_t^2 w(\cdot, \tau+\tau_1)\|_{-1} d\tau_1 \\
&\leq \frac{1}{2}\varepsilon \int_0^t \left\| \tilde{G}\left(\cdot, \frac{\tau+\tau_1}{\varepsilon}\right) \right\|_1^2 d\tau_1 + \frac{1}{2}\varepsilon \int_0^t \|\partial_t^2 w(\cdot, \tau+\tau_1)\|_{-1}^2 d\tau_1. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле оценивается из уравнений (3.1) и (2.13):

$$\|\partial_t^2 w\|_{-1}^2 \leq 2(\|\partial_t^2 u^\varepsilon\|_{-1}^2 + \|\partial_t u^0\|_{-1}^2), \quad (3.14)$$

$$\|\partial_t^2 u^\varepsilon\|_{-1}^2 \leq C(\|u^\varepsilon\|_1^2 + \|u^\varepsilon\|_{-1}^2 + \|\partial_t u^\varepsilon\|_{-1}^2 + \|f(u^\varepsilon)\|_{-1}^2 + \|\widehat{g}\|_{-1}^2). \quad (3.15)$$

Учитывая (2.5) при $n \geq 3$ (случай $n \leq 2$ проще), имеем

$$\|f(u^\varepsilon)\|_{-1}^2 \leq C_1 \|f(u^\varepsilon)\|_H^2 \leq C_2 (\|u^\varepsilon\|_1 + |u^\varepsilon| + 1)^{2n/(n-2)} \quad (3.15')$$

и аналогичную оценку для $\|f(u^0)\|_{-1}^2$. Так как

$$\|y^0(\tau)\|_E^2 = \|y^\varepsilon(\tau)\|_E^2 = \|u_0\|_1^2 + |u_1|^2 \leq R^2,$$

то

$$\|y^0(\tau+t)\|_E^2 \leq C_3(R^2), \quad \|y^\varepsilon(\tau+t)\|_E^2 \leq C_3(R^2). \quad (3.16)$$

Из (3.14)–(3.16) следует, что

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon \int_0^t \|\partial_t^2 w(\cdot, \tau + \tau_1)\|_{-1}^2 d\tau_1 \\
 & \leq \varepsilon C_4 \left(\int_0^t (|\partial_t u^\varepsilon|^2 + |\partial_t u^0|^2) d\tau_1 + \int_0^t (\|u^\varepsilon\|_1^2 + \|u^0\|_1^2) d\tau_1 \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^t C_5(R^2) d\tau_1 + \int_0^t (|g^\varepsilon|^2 + |g^0|^2) d\tau_1 \right) \\
 & \leq \varepsilon C_6(t+1), \quad C_6 = C_6(R, \|g^\varepsilon\|_{L_2^b}, |g^0|). \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Из (3.8)–(3.17) следует

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{y}(\tau + t)\|_E^2 &:= \|w(\tau + t)\|_1^2 + |\partial_t w(\tau + t)|^2 \\
 &\leq |I| + |II| + |III| \\
 &\leq C_1(R, M) \int_0^t \|\tilde{y}(\tau + \tau_1)\|_E^2 d\tau_1 + \varepsilon M_1 (|\partial_t w(\tau + t)|^2 + 1) \\
 &\quad + \varepsilon \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \tilde{G}\left(\cdot, \frac{\tau + \tau_1}{\varepsilon}\right) \right\|_1^2 d\tau_1 + \frac{1}{2} \varepsilon C_6(t+1). \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

При достаточно малом ε имеем $\varepsilon M_1 < \frac{1}{2}$. Отсюда, из (3.18) и (3.9)

$$\|\tilde{y}(\tau + t)\|_E^2 \leq C_7 \int_0^t \|\tilde{y}(\tau + \tau_1)\|_E^2 d\tau_1 + \varepsilon C_8(t+1). \tag{3.19}$$

Обозначив $\|\tilde{y}(\tau + t)\|_E^2 / (t+1) = v(t)$, из (3.19) выводим дифференциальное неравенство:

$$v(t) \leq C_7 \int_0^t v(\tau_1) d\tau_1 + \varepsilon C_8.$$

Отсюда по неравенству Гронуола следует, что

$$v(t) \leq \varepsilon C_8 e^{C_7 t}$$

и

$$\|\tilde{y}(\tau + t)\|_E^2 \leq (t+1)v(t) \leq \varepsilon C_8(t+1)e^{C_7 t} \leq \varepsilon C_8 e^{2\rho t}, \tag{3.20}$$

где $2\rho = C_7 + 1$.

Мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.1. *При выполнении условий (3.8) и (3.9) для отклонения $w(\tau + t) = u_{\hat{g}}(\tau + t) - u_{g^0}(\tau + t)$ решений задач Коши (3.1), (3.2) и (2.13), (3.2) (при одинаковых начальных условиях $(u_0(x), u_1(x))$) имеет место оценка (3.20)*

$$\|\tilde{y}(\tau + t)\|_E = (\|w(\tau + t)\|_1^2 + |\partial_t w(\tau + t)|^2)^{1/2} \leq C \varepsilon^{1/2} e^{\rho t}, \tag{3.21}$$

где $C = C_8(M, M_1, R)$, $\rho = \rho(M, R)$.

Приведем некоторые примеры функций $g(x, z)$, которые удовлетворяют условиям (3.8) и (3.9).

а) Пусть $g(x, z)$ – тригонометрический полином по z с рационально независимыми частотами $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) = \bar{\alpha}$:

$$g(x, z) = a_0(x) + \sum_{0 < |\bar{k}| \leq N} a_{\bar{k}}(x) e^{i(\bar{\alpha}, \bar{k})z} := g^0(x) + \tilde{g}(x, z). \quad (3.22)$$

Здесь $\bar{k} = (k_1, \dots, k_l) \in \mathbb{Z}^l \setminus \{0\}$, $|\bar{k}| = k_1 + \dots + k_l$, $x \in \mathbb{T}^n$, $z \in \mathbb{R}$. Предполагается, что $a_{\bar{k}} = a_{-\bar{k}}$ для $0 < |\bar{k}| \leq N$ и $a_{\bar{k}}(x) \in H_1 = H_1(\mathbb{T}^n)$. Очевидно, $a_0(x) = g^0(x) = \bar{g}(x)$ – усреднение $g(x, t/\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$. В этом случае

$$\tilde{G}(x, z) = \sum_{0 < \bar{k} \leq N} \frac{a_{\bar{k}}(x)}{i(\bar{\alpha}, \bar{k})} e^{i(\bar{\alpha}, \bar{k})z}, \quad \partial_z \tilde{G} = \tilde{g}(x, z) = g(x, z) - g^0(x). \quad (3.23)$$

Так как α_j рационально независимы, то

$$|(\bar{\alpha}, \bar{k})| \geq \delta > 0 \quad \forall \bar{k}: 0 < |\bar{k}| \leq N.$$

Функция $\tilde{G}$ удовлетворяет условию (3.9), так как

$$\|\tilde{G}(\cdot, z)\|_1 \leq C \sum_{0 < \bar{k} \leq N} \frac{\|a_{\bar{k}}(\cdot)\|_1}{\delta} \leq M_1. \quad (3.24)$$

Любая функция $\hat{g}(x, z) \in \mathcal{H}(g)$ также имеет вид (3.22), а соответствующая ей функция $\tilde{G}(x, z)$, очевидно, также удовлетворяет оценке (3.24) с той же константой M_1 .

б) Рассмотрим теперь случай квазипериодической по z внешней силы $g(x, z)$, т.е.

$$g(x, z) = \Phi(x, z\bar{\alpha}), \quad \bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_l),$$

где $\Phi(x, \bar{\omega}) = \Phi(x, \omega_1, \dots, \omega_l)$ – 2π -периодическая функция по каждому ω_j , $j = 1, \dots, l$. Для простоты предположим, что $\Phi(x, \bar{\omega}) \in C(\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^l)$. Обозначим

$$\tilde{\Phi}(x, \bar{\omega}) = \Phi(x, \bar{\omega}) - g^0(x), \quad g^0(x) = \frac{1}{(2\pi)^l} \int_{\mathbb{T}^l} \Phi(x, \bar{\omega}) \mu(d\bar{\omega}),$$

где $\mu(d\bar{\omega})$ – лебегова мера на $\mathbb{T}^l$. Тогда

$$\tilde{g}(x, z) = \Phi(x, \bar{\alpha}z) - g^0(x) = g(x, z) - g^0(x).$$

Очевидно, $g^0(x)$ – усреднение функции $g(x, t/\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Предположим, что частоты $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) = \bar{\alpha}$ рационально независимы и удовлетворяют следующему диофантову условию:

$$|(\bar{\alpha}, \bar{k})| \geq C_{\bar{\alpha}} |\bar{k}|^{-(l-1+\delta)} \quad \forall \bar{k} \in \mathbb{Z}^l \setminus \{0\}, \quad \delta > 0. \quad (3.25)$$

Как известно, неравенство (3.25) имеет место, если $\bar{\alpha}$ принадлежит множеству $\mathbb{R}^l \setminus Q^l := S^l$, где Q^l имеет лебегову меру в $\mathbb{R}^l$, равную нулю: $\mu(Q^l) = 0$ (см. [13], [14]). Пусть $\bar{\alpha} \in S^l$. Разложим функцию $\tilde{\Phi}$ в ряд Фурье по ω_j , $j = 1, \dots, l$, и положим $\omega_j = z\alpha_j$, $z \in \mathbb{R}$. Мы получим

$$\tilde{g}(x, z) = \tilde{\Phi}(x, z\bar{\alpha}) = \sum_{\bar{k} \neq 0} a_{\bar{k}}(x) e^{i(\bar{\alpha}, \bar{k})z}. \quad (3.26)$$

Аналогично (3.23) имеем

$$\tilde{G}(x, z) = \sum_{\bar{k} \neq 0} \frac{a_{\bar{k}}(x)}{i(\bar{\alpha}, \bar{k})} e^{i(\bar{\alpha}, \bar{k})z}. \quad (3.27)$$

Если выполнено

$$\sum_{\bar{k} \neq 0} \|a_{\bar{k}}(\cdot)\|_1 |\bar{k}|^{l-1+\delta} < +\infty, \quad (3.28)$$

то, очевидно,

$$\|\tilde{G}(\cdot, z)\|_1 \leq M_1 \quad \forall z \in \mathbb{R}. \quad (3.29)$$

Отметим, что если выполнены оценки (3.28), (3.29) для функций $\tilde{g}(x, z)$ и $\tilde{G}(x, z)$, то аналогичные оценки справедливы также для любой функции $\tilde{\hat{g}}(x, z) = \hat{g} - g^0(x)$, где $\hat{g}(x, z) \in \mathcal{H}(g(x, z))$. Точнее, для этих функций $\tilde{\hat{g}}(x, z)$ существуют функции $\tilde{\hat{G}}$, удовлетворяющие оценке вида (3.29) с той же константой M_1 .

§ 4. Количественная аппроксимация траекторий, лежащих на глобальном аттракторе $\mathcal{A}_\varepsilon$

Выше был построен равномерный (по $\hat{g}(x, t/\varepsilon) \in \mathcal{H}(g(x, t/\varepsilon))$) глобальный аттрактор $\mathcal{A}_\varepsilon$ семейства процессов $\{U_{\hat{g}}(t, \tau), \hat{g}(x, t/\varepsilon) := \hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g(x, t/\varepsilon))\}$. Кроме того, был построен глобальный аттрактор $\mathcal{A} := \mathcal{A}_0$ усредненного уравнения (2.13). В настоящем параграфе будет построена аппроксимация траекторий $u_{\hat{g}^\varepsilon}(x, t) \in \mathcal{A}_\varepsilon$ через траектории $u_{g^0}(x, t) \in \mathcal{A}_0$ и будет дана оценка отклонений $u_{\hat{g}^\varepsilon}(x, t)$ от $u_{g^0}(x, t)$ ($g^0 := \bar{g}$ — усреднение g^ε при $\varepsilon \rightarrow 0$).

Усредненное уравнение (2.13)

$$\partial_t^2 u^0 + \gamma \partial_t u^0 = \Delta u^0 - \delta^2 u^0 - f(u^0) + g^0(x), \quad x \in \mathbb{T}^n, \quad (4.1)$$

обладает функцией Ляпунова

$$\mathcal{L}(y^0(t)) := \mathcal{L}(u^0(t)) = \int_{\mathbb{T}^n} \left(\frac{1}{2} |\partial_t u^0|^2 + \frac{1}{2} |\nabla u^0|^2 + \frac{1}{2} \delta^2 |u^0|^2 + F(u^0) - g^0 u^0 \right) dx, \quad (4.2)$$

$y^0(t) = (u^0(t), \partial_t u^0(t))$. Функция $\mathcal{L}(u^0(t))$ строго убывает по t вдоль траекторий $u^0(t)$, отличных от стационарных точек $z(x)$. Напомним, что имеет место следующее соотношение:

$$\mathcal{L}(u^0(t)) - \mathcal{L}(u^0(\tau)) = -\gamma \int_\tau^t |\partial_t u^0(s)|^2 ds, \quad t \geq \tau, \quad (4.3)$$

где $u^0(t)$ – решение уравнения (4.1) (см., например, [4]). Так как уравнение (4.1) автономно, то оно порождает полугруппу $\{S(t), t \geq 0\}$, $S(t - \tau)y^0(\tau) = y^0(t)$, где $y^0(t) = (u^0(t), \partial_t u^0(t))$ – решение (4.1). Полугруппа $\{S(t), t \geq 0\}$ обладает глобальным аттрактором $\mathcal{A}_0$.

Предполагается, что уравнение (4.1) обладает лишь конечным числом стационарных точек $z_i(x)$,

$$\Delta z_i(x) - \delta^2 z_i(x) - f(z_i) + g^0(x) = 0, \quad x \in \mathbb{T}^n,$$

$\{z_i(x), i = 1, \dots, N\} := \mathfrak{N}$. Предполагается, что каждая стационарная точка $z_i(x)$ является гиперболической (см. [3]–[5]). Тогда, как известно, аттрактор $\mathcal{A}_0$ является объединением полных неустойчивых многообразий $M^u(z_i)$, проходящих через эти стационарные точки $z_i(x)$:

$$\mathcal{A}_0 = \bigcup_{i=1}^N M^u(z_i)$$

(см. [3], [4]). Введем понятие конечномерной составной траектории, лежащей на $\mathcal{A}_0$ (см. [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Конечномерной составной траекторией* (к.с.т.), *лежащей на $\mathcal{A}_0$* , называется функция $\tilde{y}(t)$, $\tau \leq t < +\infty$, со значениями в $\mathcal{A}_0$, обладающая следующими свойствами:

- 1) существуют такие моменты времени $\tau = t_0^0 < t_1^0 < \dots < t_m^0 < t_{m+1}^0 = +\infty$, что $\tilde{y}(t)$ непрерывна на полуинтервалах $[t_i^0, t_{i+1}^0)$, $i = 0, 1, \dots, m$;
- 2) значения $\tilde{y}(t_j \pm 0)$ в точках разрыва t_j^0 , $j = 1, \dots, m$, функции $\tilde{y}(t)$ лежат в окрестности $\mathcal{O}_\rho(z^j)$ одной из стационарных точек $z_{i(j)} = z^j$, $j = 1, \dots, m$;
- 3) $\tilde{y}(t_j^0) = \tilde{y}(t_j^0 + 0) \in M^u(z^j)$, $\tilde{y}(t) = S(t - t_j^0)\tilde{y}(t_j^0) \quad \forall t \in [t_j^0, t_{j+1}^0)$; очевидно отсюда следует, что $\tilde{y}(t) \in M^u(z^j) \quad \forall t \in [t_j^0, t_{j+1}^0)$, $j = 1, \dots, m$, $m \leq N$.

Предположим, что выполнено следующее неравенство:

$$\|y(t_2) - y_1(t_2)\|_E \leq C e^{\alpha(t_2 - t_1)} \|y(t_1) - y_1(t_1)\|_E \quad (4.4)$$

для любых $t_1, t_2 > 0$. Здесь $y(t) = S(t)y(0)$, $y_1(t) = S(t)y_1(0)$, причем $y(0), y_1(0) \in \mathcal{O}_\eta(\mathcal{A}_0)$, где $\mathcal{O}_\eta(\mathcal{A}_0) := \mathcal{O}_\eta - \eta$ -окрестность $\mathcal{A}_0$ в пространстве E . Числа C и α зависят только от $\mathcal{O}_\eta$.

Для полугруппы $\{S(t)\}$, порожденной уравнением (4.1), имеет место неравенство (4.4). Доказательство приведено в [4; гл. 5, § 7]. В [4] доказана следующая общая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть полугруппа $\{S(t), t \geq 0\}$, действующая в банаховом (или гильбертовом) пространстве E , удовлетворяет следующим условиям:*

- 1) $\{S(t)\}$ обладает глобальным (E, E) аттрактором $\mathcal{A}_0$;
- 2) выполнено условие (4.4);
- 3) существует функция Ляпунова $\mathcal{L}(y(t))$ полугруппы $\{S(t)\}$, непрерывная на E ;
- 4) множество $\mathfrak{N}$ стационарных точек $\{S(t)\}$ конечно: $\mathfrak{N} = (z_1, \dots, z_N)$;
- 5) полугруппа $\{S(t)\}$ – класса $C^{1+\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, в окрестности каждой точки $z_i \in \mathfrak{N}$, и все точки z_i гиперболические;
- 6) $S(t)y$ непрерывна по $(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times E$.

Пусть Q — компакт в E , $y_0 \in Q$, $y(t) = S(t)y_0$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Тогда для любой такой траектории $y(t)$ полугруппы $\{S(t)\}$ найдется к.с.т. $\tilde{y} \in \mathcal{A}_0$ (удовлетворяющая всем требованиям определения 4.1) такая, что имеет место оценка

$$\|y(t) - \tilde{y}(t)\|_E \leq C e^{-\nu t} \quad \forall t \in [0, +\infty), \quad (4.5)$$

где C зависит лишь от Q , а $\nu > 0$ зависит только от $\{S(t)\}$.

Применим теорему 4.1 к уравнению (4.1) или, что эквивалентно, к порожденной ею полугруппе $\{S(t), t \geq 0\}$. Предположим дополнительно, что функция взаимодействия $f(u)$ удовлетворяет условию

$$|f'(u) - f'(v)| \leq C|u - v|^\alpha (1 + |u| + |v|)^\rho, \quad \alpha + \rho < \frac{2}{n-2} \quad (4.6)$$

при $n \geq 3$ и $\alpha > 0$ и $\rho > 0$ (ρ — любое число) при $n = 1, 2$.

Тогда, как показано в [4], если функция $f(u)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в §2, и условию (4.6), $\gamma, \delta^2 > 0$, $g_0(x) \in H$, то полугруппа $\{S(t)\}$, порожденная гиперболическим уравнением (4.1), удовлетворяет условиям 1)–6) теоремы 4.1. Следовательно, для каждой ее траектории $(u^0(t), \partial_t u^0(t)) = y^0(t)$ существует к.с.т. $\tilde{y}(t)$ такая, что имеет место (4.5). В силу автономности уравнения (4.1) аналогичная (4.5) оценка справедлива также для траекторий $\{y(t), t \geq \tau\}$ этого уравнения при любом $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\|y^0(t + \tau) - \tilde{y}(t + \tau)\|_E \leq C e^{-\nu t} \quad \forall t \in [0, +\infty), \quad (4.7)$$

где $\tilde{y}(t) \in \bigcup_{i=1}^N M^u(z_i) = \mathcal{A}_0$, $\tilde{y}(t)$ — к.с.т.

Рассмотрим равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}_\varepsilon$ гиперболического уравнения

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u = \Delta u - \delta^2 u + f(u) + \hat{g}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad \hat{g}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) := \hat{g}^\varepsilon, \quad (4.8)$$

где $\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g(x, t/\varepsilon)) := \mathcal{H}(g^\varepsilon)$, $g(x, t/\varepsilon) := g^\varepsilon$, ε — фиксированное число, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Ядро $\mathcal{K}_{\hat{g}^\varepsilon}$ уравнения (4.8) состоит из полных, ограниченных в E траекторий $\{y_{\hat{g}^\varepsilon}(t), t \in \mathbb{R}, \|y_{\hat{g}^\varepsilon}(t)\|_E \leq M_{y_{\hat{g}^\varepsilon}}, \text{ причем } y_{\hat{g}^\varepsilon}(t) := (u_{\hat{g}^\varepsilon}(t), \partial_t u_{\hat{g}^\varepsilon}(t)) \in \mathcal{A}_\varepsilon\}$. Имеет место следующая формула:

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \bigcup_{\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)} \mathcal{K}_{\hat{g}^\varepsilon}(0) = \bigcup_{\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)} \mathcal{K}_{\hat{g}^\varepsilon}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad t \text{ фиксировано}, \quad (4.9)$$

где $\mathcal{K}_{\hat{g}^\varepsilon}(t)$ — сечение $\mathcal{K}_{\hat{g}^\varepsilon}$.

Рассмотрим кусок траектории $y_{\hat{g}^\varepsilon}(t) := \hat{y}^\varepsilon(t) \subset \mathcal{A}_\varepsilon$:

$$\{\hat{y}^\varepsilon(\tau + t), -T \leq t \leq 0\}, \quad (4.9')$$

причем T будет определено ниже. Для простоты записи будем сначала считать, что $\tau = 0$. Из точки $\hat{y}^\varepsilon(-T)$ выходит траектория $y^0(-T + t) = (u^0(-T + t), \partial_t u^0(-T + t))$, $t \geq 0$, усредненного уравнения (4.1), удовлетворяющая при $t = 0$ условию

$$\hat{y}^\varepsilon(-T) = y^0(-T). \quad (4.10)$$

Как было показано в § 2, процессы $\{U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau), \hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)\}$ обладают компактным притягивающим множеством $[\mathcal{P}] \in E$. Поэтому $\mathcal{A}_\varepsilon \subset [\mathcal{P}]$ и $y^0(-T) \in [\mathcal{P}]$. Так как $y^0(-T)$ принадлежит фиксированному компактному множеству $[\mathcal{P}]$, то согласно теореме 4.1 можно найти к.с.т. $\{\tilde{y}^0(-T+t), t \geq 0\} \subset \bigcup_{i=1}^N M^u(z_i) = \mathcal{A}_0$ такую, что имеет место оценка

$$\|y^0(-T+t) - \tilde{y}^0(-T+t)\|_E \leq C_1 e^{-\nu t} \quad \forall t > 0, \quad (4.11)$$

где $C_1 = C_1([\mathcal{P}])$, а $\nu > 0$ и определяется с помощью усредненного уравнения (4.1) (или, что то же, соответствующей ему полугруппой $\{S(t), t \geq 0\}$).

Так как траектории $\{\hat{y}^\varepsilon(-T+t), t \geq 0\}$ и $\{y^0(-T+t), t \geq 0\}$ удовлетворяют одинаковым начальным условиям (4.10), то согласно оценке (3.21)

$$\|\hat{y}^\varepsilon(-T+t) - y^0(-T+t)\|_E \leq C \varepsilon^{1/2} e^{\rho t}, \quad t \geq 0. \quad (4.12)$$

Из (4.11) и (4.12) выводим

$$\begin{aligned} & \|\hat{y}^\varepsilon(-T+t) - \tilde{y}^0(-T+t)\|_E \\ & \leq \|\hat{y}^\varepsilon(-T+t) - y^0(-T+t)\|_E + \|y^0(-T+t) - \tilde{y}^0(-T+t)\|_E \\ & \leq (C + C_1)(\varepsilon^{1/2} e^{\rho t} + e^{-\nu t}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ниже из этой оценки выводится ряд следствий.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть функция $f(u)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в § 2, и условию (4.6); $\gamma > 0$, $\delta^2 > 0$; $g^0(x) \in H = L_2(\Omega)$; $\hat{g}(x, z) - g^0(x) := \tilde{g}(x, z)$, где $\hat{g}(x, t/\varepsilon) = \hat{g}^\varepsilon(x, t) \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$; $\tilde{g}(x, z)$ удовлетворяет условиям (3.8), (3.9).

Тогда имеет место следующая оценка для отклонения аттракторов $\mathcal{A}_\varepsilon$ от $\mathcal{A}_0$:

$$\text{dist}_E(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}_0) \leq C \varepsilon^{\nu/(2(\rho+\nu))}, \quad (4.14)$$

где ν и ρ определены в формулах (4.11) и (4.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в (4.13) $T = T_\varepsilon = (1/(2(\rho+\nu))) \log(1/\varepsilon)$ и $t = T_\varepsilon$. Для такого значения T_ε имеем

$$e^{-\nu T_\varepsilon} = \varepsilon^{1/2} e^{\rho T_\varepsilon} = \varepsilon^{\nu/(2(\rho+\nu))}.$$

Из (4.13) получим

$$\begin{aligned} & \|\hat{y}^\varepsilon(-T_\varepsilon + T_\varepsilon) - \tilde{y}^0(-T_\varepsilon + T_\varepsilon)\|_E \\ & = \|\hat{y}^\varepsilon(0) - \tilde{y}^0(0)\|_E \leq 2(C + C_1) \varepsilon^{\nu/(2(\rho+\nu))} = C_2 \varepsilon^{\nu/(2(\rho+\nu))}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Согласно (4.9) $\hat{y}^\varepsilon(t)|_{t=0} = \hat{y}_{\hat{g}^\varepsilon}(t)|_{t=0} \quad \forall \hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$ — любая точка $\mathcal{A}_\varepsilon$. Очевидно, $\tilde{y}^0(0) \in \mathcal{A}_0$. Поэтому из (4.15) следует (4.14).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Оценка (4.14) имеет место при менее ограничительных условиях на функцию $f(u)$. Для краткости изложения мы ограничились функциями $f(u)$, указанными в теореме 4.2.

Рассмотрим теперь вопрос об аппроксимизации куска траектории, например, $\{\hat{y}(-T_\varepsilon + t), T_\varepsilon - r_\varkappa(\varepsilon) \leq t \leq T_\varepsilon\} \in \mathcal{A}_\varepsilon$ через кусок к.с.т. $\{\tilde{y}^0(-T_\varepsilon + t), T_\varepsilon - r_\varkappa(\varepsilon) \leq t \leq T_\varepsilon\} \in \mathcal{A}_0 = \bigcup_{i=1}^N M^u(z_i)$; $r_\varkappa(\varepsilon) > 0$. (При этом T_ε можно заменить любым другим числом (см. ниже следующее).)

ТЕОРЕМА 4.3. *Любой кусок траектории $\hat{y}^\varepsilon(t) \in \mathcal{A}_\varepsilon$ временной длины*

$$r_\varkappa(\varepsilon) = \frac{1}{(\rho + \nu)} \frac{\varkappa}{2(2 + \varkappa)} \log \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varkappa > 0,$$

т.е.

$$\hat{y}^\varepsilon(t) \in \mathcal{A}_\varepsilon, \quad \theta \leq t \leq \theta + r_\varkappa(\varepsilon), \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (4.16)$$

можно аппроксимировать соответствующей ей к.с.т. $\{\tilde{y}^0(t), \theta \leq t \leq \theta + r_\varkappa(\varepsilon)\} \in \bigcup_{i=1}^N M^u(z_i)$, причем на любом $M^u(z_i)$ лежит не более одного непрерывного куска $\tilde{y}^0(t)$.

Имеет место следующая оценка

$$\|\hat{y}^\varepsilon(t) - \tilde{y}^0(t)\|_E \leq C_3 \varepsilon^{\nu / ((2 + \varkappa)(\rho + \nu))}, \quad (4.17)$$

$\theta \leq t \leq \theta + r_\varkappa(\varepsilon)$.

Константа C_3 не зависит от $\varkappa, \theta$ и $\hat{y}^\varepsilon(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано ниже, оценку (4.17) достаточно доказать для некоторого конкретного начального времени θ . Возьмем сначала

$$\begin{aligned} \theta = T_\varepsilon - r_\varkappa(\varepsilon) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\rho + \nu} \log \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\varkappa}{2(2 + \varkappa)} \frac{1}{\rho + \nu} \log \frac{1}{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2 + \varkappa} \frac{1}{\rho + \nu} \log \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Тогда

$$\theta + r_\varkappa(\varepsilon) = T_\varepsilon = \frac{1}{2(\rho + \nu)} \log \frac{1}{\varepsilon}. \quad (4.19)$$

Аналогично (4.10) пусть $\{y^0(-T_\varepsilon + t), t \geq 0\}$ – траектория усредненного уравнения (4.1), которая при $t = 0$ совпадает с $\hat{y}^\varepsilon(-T_\varepsilon)$:

$$\hat{y}^\varepsilon(-T_\varepsilon) = y^0(-T_\varepsilon). \quad (4.20)$$

Тогда, как было показано выше, имеет место оценка (4.12_ε) , совпадающая с (4.12) с заменой T на T_ε . Далее, аналогично (4.10), (4.11) для траектории $y^0(-T_\varepsilon + t)$ можно найти такую к.с.т. $\{\tilde{y}^0(-T_\varepsilon + t), t \geq 0\} \in \mathcal{A}_0 = \bigcup_{i=1}^N M^u(z_i)$, что имеет место оценка (4.11_ε) , совпадающая с (4.11) с заменой T на T_ε .

Из оценок (4.12_ε) и (4.11_ε) получаем (аналогично (4.13))

$$\|\hat{y}^\varepsilon(-T_\varepsilon + t) - \tilde{y}^0(-T_\varepsilon + t)\|_E \leq (C + C_1)(\varepsilon^{1/2} e^{\rho t} + e^{-\nu t}). \quad (4.21)$$

Рис. 1

Из рис. 1 видно, что при

$$T_\varepsilon - r_\kappa(\varepsilon) < t < T_\varepsilon$$

имеем

$$\varepsilon^{1/2}e^{\rho t} < e^{-\nu t}.$$

При $t = T_\varepsilon$ имеем $\varepsilon^{1/2}e^{\rho t} = e^{-\nu t}$.

Отсюда и из (4.21) следует, что при

$$T_\varepsilon - r_\kappa(\varepsilon) \leq t \leq T_\varepsilon \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \|\hat{y}(-T_\varepsilon + t) - \tilde{y}^0(-T_\varepsilon + t)\|_E &\leq (C + C_1)(e^{-\nu t} + \varepsilon^{1/2}e^{\rho t}) \\ &\leq 2(C + C_1)e^{-\nu t} \leq 2(C + C_1)e^{-\nu(T_\varepsilon - r_\kappa(\varepsilon))} \\ &:= C_3\varepsilon^{\nu/((2+\kappa)(\rho+\nu))}, \quad C_3 = 2(C + C_1). \end{aligned} \quad (4.23)$$

При этом мы воспользовались формулой (4.18) для $T_\varepsilon - r_\kappa(\varepsilon)$.

Из оценки (4.23) следует оценка (4.17), в которой $\theta \leq t \leq \theta + r_\kappa(\varepsilon)$. Действительно, (4.23) можно записать в виде

$$\|\hat{y}^\varepsilon(t_1) - y^0(t_1)\|_E \leq C_3\varepsilon^{\nu/((2+\kappa)(\rho+\nu))}, \quad -r_\kappa(\varepsilon) \leq t_1 \leq 0. \quad (4.24)$$

Отметим, что выбор начального значения t_1 , $t_1 = -r_\kappa(\varepsilon)$, в (4.24) не играет роли.

Действительно, напомним, что в рассматриваемом в (4.9') куске траектории $\hat{y}^\varepsilon(t)$ ($\hat{y}^\varepsilon(\tau + t)$, $-T \leq t \leq 0$) мы могли взять значение τ любым (а не как выше $\tau = 0$) и с этим значением τ продолжить все последующие, начиная с (4.9'), выкладки. Выбрав соответствующее значение τ , мы получим в (4.24) временной интервал $\theta \leq$

$t \leq \theta + r_{\varkappa}(\varepsilon)$, θ – любое число, $\theta \in \mathbb{R}$, указанный в формуле (4.17). Оценка (4.17) установлена.

Отметим, что к.с.т. $y^0(t_1)$ в (4.24) состоит из кусков траекторий усредненного уравнения (4.1), причем на любом $M^u(z_i)$ лежит не более одного куска.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Рассмотрим кусок траектории $\{\widehat{y}^\varepsilon(t), \theta \leq t \leq \theta + lr_{\varkappa}(\varepsilon)\} \in \mathcal{A}_\varepsilon$, $l \in \mathbb{N}$. Согласно теореме (4.3) для любой части этой траектории вида $\{\widehat{y}^\varepsilon(t), \theta + ir_{\varkappa}(\varepsilon) \leq t < \theta + (i+1)r_{\varkappa}(\varepsilon)\}$, $0 \leq i \leq l-1$, существует к.с.т. $\{\widetilde{y}_i^0, \theta + ir_{\varkappa}(\varepsilon) \leq t < \theta + (i+1)r_{\varkappa}(\varepsilon)\} \subset \mathcal{A}^0 = \bigcup_{j=1}^N M^u(z_j)$ такая, что*

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(t) - \widetilde{y}_i^0(t)\|_E \leq C_3 \varepsilon^{\nu/((2+\varkappa)(\rho+\nu))}, \quad \theta + ir_{\varkappa}(\varepsilon) \leq t < \theta + (i+1)r_{\varkappa}(\varepsilon), \quad (4.25)$$

$i = 0, 1, \dots, l-1$. Обозначим через $\widetilde{y}^0(t, l)$ кусочно непрерывную траекторию усредненного уравнения (4.1), задаваемую формулой

$$\widetilde{y}^0(t, l) = \{\widetilde{y}_i^0(t), \theta + ir_{\varkappa}(\varepsilon) \leq t < \theta + (i+1)r_{\varkappa}(\varepsilon), i = 0, 1, \dots, l-1\}.$$

Из оценок (4.25) следует

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(t) - \widetilde{y}^0(t, l)\|_E \leq C_3 \varepsilon^{\nu/((2+\varkappa)(\rho+\nu))}, \quad \theta \leq t \leq \theta + lr_{\varkappa}(\varepsilon). \quad (4.26)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Для любого куска траектории $\{\widehat{y}^\varepsilon(t), \theta \leq t \leq \theta + lr_{\varkappa}(\varepsilon)\} \mid \{\widehat{y}^\varepsilon(t)\} \subset \mathcal{A}_\varepsilon$, $l \in \mathbb{Z}_+$, существует такая аппроксимирующая ее кусочно непрерывная траектория $\{\widetilde{y}^0(t), \theta \leq t \leq \theta + lr_{\varkappa}(\varepsilon)\} \subset \mathcal{A}_0 = \bigcup_{i=1}^N M^u(z_j)$, что выполнена оценка (4.26).*

Очевидно, что с возрастанием l соответственно возрастает число кусков непрерывности $\widetilde{y}^0(t, l)$. Каждый из этих кусков лежит, очевидно, на одном из неустойчивых многообразий $M^u(z_j)$, $j = 1, \dots, N$.

Список литературы

1. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Attractors for equations of mathematical physics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Amer. Math. Soc. Collog. Publ. V. 49.)
2. Temam R. Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New York: Springer-Verlag, 1988. (Appl. Math. Ser. V. 68.)
3. Hale J. Asymptotic behaviour of dissipative systems. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1988.
4. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
5. Raugel G. Global attractors in partial differential equations // Handbook of Dynamical Systems 2 / ed. B. Fiedler. Amsterdam: North-Holland, 2001.
6. Chepyzhov V. V., Vishik M. I., Wendland W. On non-autonomous sine-Gordon type equations with a simple global attractor // Preprint № 2003/01. Stuttgart: Stuttgart Univ., 2003.
7. Вишик М. И., Фидлер Б. Количественное усреднение глобальных аттракторов гиперболических волновых уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами // УМН. 2002. Т. 47. № 4. С. 75–94.
8. Ильин А. А. Усреднение диссипативных систем с быстро осциллирующими правыми частями // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 5. С. 15–58.
9. Вишик М. И., Чепыжов В. В. Усреднение траекторных аттракторов эволюционных уравнений с быстро осциллирующими членами // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 1. С. 16–53.

10. *Harauz A.* Two remarks on dissipative hyperbolic problems // Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France. V. 7 / ed. H. Brezis, J. L. Lions. Boston, MA: Pitman, 1985. P. 161–179. (Res. Notes Math. V. 122.)
11. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. (9). 1994. V. 73. №3. P. 279–333.
12. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
13. *Kassels J. W. S.* An introduction to Diophantine approximations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1957.
14. *Fiedler B., Vishik M. I.* Quantative homogenization of global attractors for reaction-diffusion systems with rapidly oscillating terms // Preprint № A-18-2000. Berlin: Free Univ. Berlin, 2000.

Институт проблем передачи информации РАН, г. Москва
E-mail: vishik@iitp.ru, cher@iitp.ru

Поступила в редакцию
21.03.2003