Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, Инвариантные функции для показателей Ляпунова случайных матриц, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 1, 105–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7651>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:46:22

УДК 517.98+519.2

В. Ю. Протасов

Инвариантные функции для показателей Ляпунова случайных матриц

В работе представлен новый подход к изучению показателей Ляпунова случайных матриц. Доказано, что любое семейство неотрицательных $(d \times d)$ -матриц имеет непрерывный вогнутый инвариантный функционал на $\mathbb{R}_+^d$. При некоторых стандартных ограничениях на матрицы данный функционал строго положителен, а соответствующий ему коэффициент равен максимальному показателю Ляпунова. В качестве следствия получена асимптотика математического ожидания логарифма норм матричных произведений, а также их спектральных радиусов. Другое следствие – новые двусторонние оценки на показатель Ляпунова и алгоритм его вычисления для семейств неотрицательных матриц. Рассмотрены возможные обобщения полученных результатов на более общие семейства матриц, а также ряд приложений и примеров.

Библиография: 29 названий.

Ключевые слова: случайные матрицы, показатели Ляпунова, инвариантные функции, вогнутые однородные функционалы, неподвижная точка, асимптотика.

§ 1. Введение

Показатели (экспоненты) Ляпунова – показатели роста норм произведений случайных матриц – широко изучаются в литературе по теории вероятностей, статистическим уравнениям, эргодической теории, теории функций, математической экономике и т.д. (см. [1]–[15] и библиографию в этих работах). Основные результаты в этом направлении обобщают классические предельные теоремы на произведения случайных матриц, или, в более общем виде, на произведения элементов алгебр и некоммутативных групп. В настоящей работе мы ограничимся случаем независимых одинаково распределенных матриц.

Если скалярные случайные величины $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ независимы и одинаково распределены, то, как следует из центральной предельной теоремы, при достаточно общих условиях среднее $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i$ с вероятностью 1 стремится к константе – математическому ожиданию $\mathbf{E}X_1$, а величина $(\sum_{i=1}^k X_i - k\mathbf{E}X_1)/\sqrt{k}$ стремится по вероятности к нормально распределенной величине при $k \rightarrow \infty$. То

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00208 и № 10-01-00293), Программы Президента РФ поддержки молодых докторов наук (грант № МД-2195.2008.1) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3233.2008.1).

же верно и для произведений: величина $(X_k \cdots X_1)^{1/k}$ стремится п.н. (почти наверное) к константе $\exp(\mathbf{E} \log X_1)$, а распределение величины $(\sum_{i=1}^k \log X_i - k\mathbf{E} \log X_1)/\sqrt{k}$ стремится к нормальному. В какой мере эти факты обобщаются на матричные случайные величины, когда все X_i независимы и одинаково распределены на некотором множестве $(d \times d)$ -матриц $\mathcal{A}$? Сложность задачи объясняется тем обстоятельством, что матрицы не коммутируют. В 1960 г. Фюрстенберг и Кестен (см. [1]) доказали, что для любой матричной нормы при условии $\mathbf{E} \log^+ \|X_1\| < \infty$ величина $\|X_k \cdots X_1\|^{1/k}$ стремится п.н. к некоторой константе ρ , при этом $\log \rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \mathbf{E} \log \|X_k \cdots X_1\|$. Если, например, $\mathcal{A}$ состоит из одной матрицы, то ρ – ее спектральный радиус, т.е. наибольший модуль собственных значений. Усиление этого результата дает теорема Оселедца (1968 г.): для любого распределения матрицы X_1 с единственным условием $\mathbf{E} \log^+ \|X_1\| < \infty$ существуют константы $0 \leq \rho^{(d)} \leq \rho^{(d-1)} \leq \dots \leq \rho^{(1)} < +\infty$ такие, что с вероятностью 1 предел последовательности $\|X_k \cdots X_1 x\|^{1/k}$ существует для любого $x \in \mathbb{R}^d$ и принимает одно из значений $\rho^{(i)}$, при этом точки $x \in \mathbb{R}^d$, для которых он не превосходит $\rho^{(i)}$, образуют (случайное) подпространство в $\mathbb{R}^d$ (см. [2]). Константы $\rho^{(i)}$ являются аналогами собственных значений матрицы, их натуральные логарифмы $\lambda^{(i)} = \log \rho^{(i)}$ называются *показателями Ляпунова* данного матричного распределения. Далее мы в основном будем иметь дело с наибольшим из них $\lambda = \lambda^{(1)}$ и именно его будем называть показателем Ляпунова. Таким образом, $\lambda = \log \rho = \log \rho^{(1)} = \lambda^{(1)}$. Различные обобщения и применения результатов об асимптотике произведений случайных матриц см. в [3]–[13]. В частности, в [4]–[7] рассматривался случай унимодулярных матриц (т.е. матриц с единичным определителем), в [8]–[10] – случай положительных матриц. В каждом из этих случаев при некоторых дополнительных условиях величина $(\log \|X_k \cdots X_1\| - k\lambda)/\sqrt{k}$ стремится по вероятности к нормально распределенной.

Одна из основных задач, связанных со случайными матричными произведениями, – получение хороших оценок на показатель Ляпунова, а также эффективных алгоритмов его приближенного вычисления (некоторые методы были разработаны в [16]–[20]). Задача эта чрезвычайно сложная и вряд ли может быть решена для всех распределений матриц. Известно, например, что следующая проблема является NP-полной: для данного семейства $(0-1)$ -матриц определить, верно ли, что $\rho = 0$ (см. [21]).

Другая важная задача – уточнение асимптотики величин $\log \|X_k \cdots X_1\|$ и $\mathbf{E} \log \|X_k \cdots X_1 x\|$ при $k \rightarrow \infty$ для конкретных классов матриц. Например, важно выяснить, при каких условиях выполнено

$$|\mathbf{E} \log \|X_k \cdots X_1\| - k\lambda| \leq C, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где C – некоторая константа, не зависящая от k ?

В этой статье предлагается новый подход к исследованию показателей Ляпунова, основанный на инвариантных функционалах. Сначала мы докажем (теорема 1), что если все матрицы семейства $\mathcal{A}$ имеют общий инвариантный конус $K \subset \mathbb{R}^d$ (например, если они неотрицательны; в этом случае $K = \mathbb{R}_+^d$),

то существует неотрицательная непрерывная положительно-однородная функция $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\varphi \neq 0$, такая, что

$$\exp(\mathbf{E} \log \varphi(X_1 x)) = \tau \varphi(x) \quad \forall x \in K, \quad (2)$$

где $\tau \geq 0$ – некоторый коэффициент. Более того, данная инвариантная функция φ вогнута и монотонна на конусе K . При определенных, достаточно общих ограничениях на семейство $\mathcal{A}$ функция φ строго положительна и $\tau = \rho(\mathcal{A}) = e^{\lambda(\mathcal{A})}$ (теорема 2). Заметим, что инвариантные функции (функционалы) никак не связаны с инвариантными мерами, которые широко используются при изучении показателей Ляпунова. Концепция инвариантных функционалов имеет другое происхождение: она связана с понятием инвариантной нормы, которое применяется при изучении совместных спектральных характеристик матриц (совместный спектральный радиус, p -радиус и т.д.), этот аспект обсуждается в § 2. Итерируя уравнение (2) k раз, получаем

$$\mathbf{E} \log \varphi(X_k \cdots X_1 x) = k\lambda + \log \varphi(x) \quad \forall x \in K. \quad (3)$$

Этот результат приводит к точным оценкам на асимптотику величины $\mathbf{E} \log \|X_k \cdots X_1\|$ для случайных матриц с общим инвариантным конусом. Показано, в частности, что такие матрицы обладают свойством (1) и константа C эффективно оценивается (§ 5). Аналогичные результаты получаются для математического ожидания логарифма спектрального радиуса $\rho(X_k \cdots X_1)$, а также для нормы вектора $X_k \cdots X_1 x$ и его координат (теорема 3).

Другое применение инвариантных функционалов – получение оценок на показатель Ляпунова. Для оценок снизу существует хорошо известный результат Кея (см. [16]), согласно которому для любого положительного однородного супермультипликативного (т.е. $F(AB) \geq F(A)F(B)$ для любых A, B) функционала F на множестве неотрицательных $(d \times d)$ -матриц выполнено неравенство $\lambda \geq \mathbf{E} \log F(X_1)$, причем $\frac{1}{k} \mathbf{E} \log F(X_k \cdots X_1) \rightarrow \lambda$ при $k \rightarrow \infty$. Выбирая различные функционалы F , получаем оценки снизу на λ . Из теоремы 2 следует, что всегда найдется наилучший функционал F , который дает точную оценку на λ , т.е. для него данные неравенства обращаются в равенства. В самом деле, достаточно взять $F(M) = \inf_x \frac{\varphi(Mx)}{\varphi(x)}$, где φ – инвариантный функционал. Находя наилучшее приближение вогнутого функционала φ линейными функционалами, мы получаем новые оценки сверху и снизу на показатель Ляпунова, улучшающие ранее известные оценки. В § 6 предлагается алгоритм вычисления λ с гарантированной скоростью сходимости. В § 7 обсуждаются приложения к исследованию устойчивости динамических систем, к асимптотике решений разностных уравнений со случайными коэффициентами и к оценке продуктивности экономики в стационарной модели Леонтьева. Наконец, в § 8 показано, что данные результаты, вообще говоря, не обобщаются на более широкие классы матриц и ни одно из налагаемых на матрицы семейства $\mathcal{A}$ условий нельзя ослабить. Поэтому в § 8 мы вводим более общее понятие блочной инвариантной функции и доказываем ее существование для семейств неотрицательных матриц.

В работе используются стандартные обозначения $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{R}_+^d$ для d -мерного евклидова пространства со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и соответственно множества неотрицательных векторов. Мы считаем базис в $\mathbb{R}^d$ фиксированным и не будем делать различий между линейными операторами и их матрицами. Будет использовано стандартное обозначение $f(x) \asymp g(x)$ для асимптотически эквивалентных величин. Это означает, что существуют константы $c_1, c_2 > 0$, для которых $c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)$ при всех x . Через $\log$ будем обозначать натуральный логарифм. Иногда нам будет удобнее формулировать результаты не для показателя Ляпунова λ , а для величины $\rho = e^\lambda$.

§ 2. Постановка задачи. Инвариантные функционалы

Мы ограничимся дискретной случайной величиной, принимающей значения на конечном множестве матриц. Сделано это для простоты изложения, большинство результатов легко обобщаются на случай общих матричных распределений. Итак, дано семейство $(d \times d)$ -матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$. Рассматривается случайное произведение $\eta_k = A_{d_k} \cdots A_{d_1}$, где все сомножители независимы и одинаково распределены на $\mathcal{A}$. Каждый индекс d_s принимает значения $1, \dots, m$ с данными вероятностями $p_1, \dots, p_m$ соответственно. Все p_j положительны и $\sum_{j=1}^m p_j = 1$. Впредь будем предполагать, что каждое семейство матриц $\mathcal{A}$ снабжено вероятностями $\{p_j\}$. Для данного k через $\mathcal{A}^k$ обозначаем семейство из всех m^k произведений $\{A_{d_k} \cdots A_{d_1}\}$, каждому произведению соответствует вероятность $p_{d_k} \cdots p_{d_1}$.

Рассмотрим класс всех непрерывных неотрицательных однородных (т.е. $\varphi(x) \geq 0$ и $\varphi(tx) = |t|\varphi(x)$ для любых $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$) функций на $\mathbb{R}^d$. Положим

$$A\varphi(x) = \prod_{j=1}^m \varphi^{p_j}(A_j x), \quad A^k \varphi(x) = \prod_{d_k, \dots, d_1} \varphi^{p_{d_k} \cdots p_{d_1}}(A_{d_k} \cdots A_{d_1} x) \quad (4)$$

и, аналогично,

$$\|Ax\| = \prod_{j=1}^m \|A_j x\|^{p_j}, \quad \|A\| = \prod_{j=1}^m \|A_j\|^{p_j}, \quad \rho(A) = \prod_{j=1}^m \rho(A_j)^{p_j},$$

где $\rho(A_j)$ – спектральный радиус матрицы A_j . Так же поступим с обозначениями $\|A^k x\|$, $\|A^k\|$ и т.д. Таким образом, $\mathbf{E} \log \varphi(\eta_k x) = \log A^k \varphi(x)$ и, в частности, $\mathbf{E} \log \|\eta_k x\| = \log \|A^k x\|$. Каждая положительная однородная функция φ порождает оценки на показатель Ляпунова. Положим

$$\varphi_{\min}(\mathcal{A}) = \min_{x \in \mathbb{R}^d, \varphi(x)=1} A\varphi(x), \quad \varphi_{\max}(\mathcal{A}) = \max_{x \in \mathbb{R}^d, \varphi(x)=1} A\varphi(x).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любой положительной непрерывной однородной функции φ на $\mathbb{R}^d$ выполнено

$$\varphi_{\min}(\mathcal{A}) \leq \rho \leq \varphi_{\max}(\mathcal{A}). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку φ эквивалентна любой норме в $\mathbb{R}^d$ (т.е. $c_1\varphi(y) \leq \|y\| \leq c_2\varphi(y)$, $y \in \mathbb{R}^d$, где c_1, c_2 – положительные константы), имеем

$$\|A^k\| \geq \|A^k y\| \geq c_1 A^k \varphi(y) \geq c_1 \varphi(y) [\varphi_{\min}(\mathcal{A})]^k \geq \frac{c_1}{c_2} [\varphi_{\min}(\mathcal{A})]^k$$

при любом y , $\|y\| = 1$. Извлекая корень степени k и учитывая, что $\|A^k\|^{1/k} \rightarrow \rho$ при $k \rightarrow \infty$, получаем $\varphi_{\min}(\mathcal{A}) \leq \rho$. Аналогично,

$$\|A^k y\| \leq c_2 A^k \varphi(y) \leq \frac{c_2}{c_1} [\varphi_{\max}(\mathcal{A})]^k.$$

В силу теоремы Оселедда (см. [2]) существует $y \in \mathbb{R}^d$, для которого

$$\frac{1}{k} \log \|A_{d_k} \cdots A_{d_1} y\| \rightarrow \log \rho$$

п.н. при $k \rightarrow \infty$ и, следовательно,

$$\mathbf{E} \frac{1}{k} \log \|A_{d_k} \cdots A_{d_1} y\| \rightarrow \log \rho,$$

откуда $\|A^k y\|^{1/k} \rightarrow \rho$. Поэтому $\rho \leq \varphi_{\max}(\mathcal{A})$.

Таким образом, если удалось найти функционал φ , для которого отношение $\varphi_{\max}/\varphi_{\min}$ близко к 1 (т.е. отношение $A\varphi(x)/\varphi(x)$ примерно одинаково для всех $x \neq 0$), то мы получаем хорошее приближение для $\rho = e^\lambda$ и знаем асимптотику величины $\mathbf{E} \log \varphi(A_{d_k} \cdots A_{d_1} x)$ при $k \rightarrow \infty$. В идеале, если $\varphi_{\min} = \varphi_{\max}$, получаем точное значение показателя Ляпунова. Функционал φ в этом случае называется *инвариантным*. Таким образом, $A\varphi(x) = \tau\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, где $\tau \geq 0$ – некоторая константа. Функционал φ является собственным для оператора A . Из предложения 1 следует, что если инвариантный функционал положителен (т.е. $\varphi(x) \neq 0$ при $x \neq 0$), то $\tau = \rho$. Таким образом, наличие положительного инвариантного функционала серьезно упрощает исследование экспоненты Ляпунова. Однако такого функционала может не быть, даже у “хороших” семейств $\mathcal{A}$, например у неразложимых (пример 5). Оказывается тем не менее, что для семейств, имеющих общий инвариантный конус, инвариантные функционалы всегда существуют. Это будет показано в § 3 (теоремы 1 и 2). Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклый замкнутый точечный (не содержит прямой линии) невырожденный (с непустой внутренностью) конус. Он является *общим инвариантным конусом* семейства $\mathcal{A}$, если $A_j K \subset K$, $j = 1, \dots, m$. *Инвариантным функционалом* семейства $\mathcal{A}$ на конусе K называется непрерывный однородный функционал $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}_+$, не равный тождественно нулю и удовлетворяющий условию $A\varphi(x) = \tau\varphi(x)$ при всех x , где $\tau \geq 0$ – некоторая константа.

Наличие общего инвариантного конуса вполне естественно для существования инвариантных функционалов. Для того чтобы это пояснить, укажем на связь показателя Ляпунова с другими совместными спектральными характеристиками матриц.

Для конечного семейства матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ и произвольного параметра $p \in [0, +\infty]$ величина $\rho_p(\mathcal{A})$ – так называемый *p-радиус* семейства $\mathcal{A}$ – определяется как

$$\rho_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(m^{-k} \sum_{d_1, \dots, d_k \in \{0, 1\}} \|A_{d_k} \cdots A_{d_1}\|^p \right)^{1/(pk)}$$

с естественными изменениями на краях шкалы

$$\rho_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\prod_{d_1, \dots, d_k} \|A_{d_k} \cdots A_{d_1}\| \right)^{1/(km^k)}, \quad \rho_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{d_1, \dots, d_k} \|A_{d_k} \cdots A_{d_1}\|^{1/k}.$$

Для семейства, состоящего из одной матрицы A_1 , при любом p всегда имеем $\rho_p = \rho(A_1)$ – обычный спектральный радиус. Для произвольного семейства матриц *p-радиус* – это показатель асимптотического роста норм матричных произведений, усредненных по норме пространства L_p . Несложно заметить, что $\rho_0 = e^\lambda$, где λ – показатель Ляпунова семейства $\mathcal{A}$ с вероятностями $p_1 = \dots = p_m = 1/m$. В самом деле,

$$\lambda = \log \rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \mathbf{E} \log \|A_{d_k} \cdots A_{d_1}\| = \log \rho_0.$$

Показатель ρ_∞ , возникающий на противоположном краю шкалы, хорошо известен в теории матриц. Это *совместный спектральный радиус*. Его изучению и применениям посвящена обширная литература (см., например, библиографию в [15]). При этом весьма эффективным оказалось понятие инвариантной нормы. Если семейство $\mathcal{A}$ неразложимо, т.е. его матрицы не имеют нетривиального общего инвариантного подпространства, то существуют число $\tau > 0$ и инвариантная норма $\varphi(x) = \|x\|$ (возможно, не единственная) в $\mathbb{R}^d$, для которых $\max_{j=1, \dots, m} \varphi(A_j x) = \tau \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, причем для любой такой нормы $\tau = \rho_\infty$. Это доказал в 1988 г. Н. Е. Барабанов (см. [22]), затем независимо и в других терминах данный результат был получен в [23]. Все известные доказательства так или иначе основаны на применении принципа неподвижной точки к непрерывному отображению $B_\infty: \mathcal{K}_d \rightarrow \mathcal{K}_d$, где $\mathcal{K}_d$ – конус выпуклых неотрицательных однородных функционалов $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $B_\infty \varphi(x) = \max_{j=1, \dots, m} \varphi(A_j x)$. При этом используется ограниченная компактность конуса $\mathcal{K}_d$ (т.е. пересечение этого конуса с единичным шаром компактно). В [24] существование инвариантных норм было доказано для *p-радиусов* при всех $p \geq 1$. Дальнейшее обобщение на $p < 1$ невозможно. Например, для экспоненты Ляпунова, когда $p = 0$, даже для неразложимого семейства $\mathcal{A}$ может не существовать нормы $\varphi(\cdot)$, для которой $B_0 \varphi = \tau \varphi$, где $B_0 \varphi(x) = (\varphi(A_1 x) \cdots \varphi(A_m x))^{1/m}$. (Соответствующий пример будет построен в § 8 – пример 5.) Причина заключается в том, что отображение B_0 не сохраняет выпуклость функций. Оно, однако, сохраняет вогнутость. Легко показать, что если φ – неотрицательный однородный вогнутый функционал, то функционал $B_0 \varphi$ обладает теми же свойствами. Однако класс таких функционалов на $\mathbb{R}^d$ тривиален. В самом деле,

если $\varphi(x) > 0$ для некоторого x , то $\varphi(-x) = \varphi(x) > 0$, и в силу вогнутости

$$0 = \varphi\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x)\right) \geq \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(-x) > 0.$$

Следовательно, $\varphi \equiv 0$. Единственный выход из этой ситуации – рассматривать вогнутые функционалы φ не на всем $\mathbb{R}^d$, а на некотором выпуклом конусе $K \subset \mathbb{R}^d$. При этом, конечно, все операторы A_j должны сохранять конус K .

Таким образом, мы предполагаем, что операторы семейства $\mathcal{A}$ имеют общий инвариантный конус. В этом случае, как будет показано в § 3, при некоторых дополнительных ограничениях семейство $\mathcal{A}$ имеет инвариантный положительный вогнутый функционал на этом конусе. Данный факт выглядит скорее неожиданным, поскольку множество неотрицательных вогнутых однородных функционалов на конусе не является ограничено-компактным, и теорема о неподвижной точке в этой ситуации неприменима.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если операторы семейства $\mathcal{A}$ имеют общий инвариантный конус K , то неравенство (5) останется верным, если минимум и максимум брать по $x \in K$.

§ 3. Существование инвариантных функционалов. Антинорма

Мы докажем, что семейство матриц, имеющих общий инвариантный конус K , при некоторых дополнительных ограничениях имеет положительную инвариантную функцию на K , которая к тому же вогнута и монотонна. Введем следующее терминологию. *Антинормой* на конусе K будем называть положительную однородную вогнутую непрерывную функцию на K . Каждый конус K определяет частичный порядок на $\mathbb{R}^d$: $x \geq y$, если $x - y \in K$, соответственно $x > y$, если $x - y \in \text{int } K$. Конус $\tilde{K}$ называется *вложенным* в K , если $(\tilde{K} \setminus \{0\}) \subset \text{int } K$. Функция φ *монотонна* относительно конуса K , если $\varphi(x) \geq \varphi(y)$ при $x \geq y$.

Доказательство существования антинормы будет проведено в два этапа. Сначала (в теореме 1) мы установим, что любое семейство операторов с инвариантным конусом имеет инвариантный однородный неотрицательный вогнутый функционал, который к тому же является монотонным. В отличие от антинормы этот функционал может обращаться в нуль на границе конуса. В доказательстве нужно преодолеть сложности, связанные с некомпактностью множества вогнутых неотрицательных функционалов на конусе. Для этого будет построена система вложенных конусов, сходящаяся к K , на каждом из которых будет взят свой инвариантный функционал (существующий в силу теоремы Шаудера), затем будет осуществлен переход к слабому пределу. Далее (в теореме 2) мы покажем, что при некоторых дополнительных условиях этот функционал положителен, т.е. является антинормой.

ТЕОРЕМА 1. Для любого семейства операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ с инвариантным конусом K и для любых вероятностей $p_1, \dots, p_m$ существует

инвариантный монотонный однородный вогнутый непрерывный функционал $f: K \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Доказательству предположим следующую лемму.

ЛЕММА 1. Если конус $\tilde{K}$ вложен в конус K , то любой однородный вогнутый функционал f , заданный на $\tilde{K}$ и монотонный относительно K , продолжается на K по формуле

$$f(x) = \max_{z \in \tilde{K}, z \leq x} f(z)$$

до монотонного однородного вогнутого функционала на K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функционал f , очевидным образом, однородный и монотонный на K . Докажем, что он вогнутый. Возьмем произвольные $x_1, x_2 \in K$ и $t \in (0, 1)$. В силу компактности множеств $\{z \in \tilde{K} \mid z \leq x_1\}$ и $\{z \in \tilde{K} \mid z \leq x_2\}$ на каждом из них функция f достигает максимума в некоторых точках $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$ соответственно. Таким образом, $f(\tilde{z}_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2$. В силу вогнутости f на конусе $\tilde{K}$ и в силу неравенств $\tilde{z}_i \leq x_i$, $i = 1, 2$, имеем

$$\begin{aligned} (1-t)f(x_1) + tf(x_2) &= (1-t)f(\tilde{z}_1) + tf(\tilde{z}_2) \leq f((1-t)\tilde{z}_1 + t\tilde{z}_2) \\ &\leq \max_{\substack{z \in \tilde{K} \\ z \leq (1-t)x_1 + tx_2}} f(z) = f((1-t)x_1 + tx_2), \end{aligned}$$

что и требовалось.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим сначала невырожденный случай, когда каждый оператор A_j переводит внутренние точки конуса K во внутренние точки. Например, при $K = \mathbb{R}_+^d$ это условие означает, что все матрицы A_j неотрицательны и у них нет нулевых строк. Фиксируем произвольный конус $\tilde{K}$, вложенный в K , и произвольную точку $s \in \text{int } \tilde{K}$. Существует гиперплоскость H , проходящая через s , которая пересекает конус K по ограниченному множеству (это элементарное следствие теоремы отделимости). Обозначим $M = K \cap H$, $\tilde{M} = \tilde{K} \cap H$, q – диаметр множества M , h – минимальное расстояние от точек множества $\tilde{M}$ до границы множества M . Рассмотрим множество $\mathcal{P}$ всевозможных однородных вогнутых функционалов f , определенных на внутреннем конусе $\tilde{K}$, монотонных относительно K и таких, что $f(s) = 1$. Ясно, что $\mathcal{P}$ выпукло и замкнуто. Докажем, что оно компактно в метрике $\|f_1 - f_2\| = \max_{x \in \tilde{M}} |f_1(x) - f_2(x)|$. Начнем с ограниченности. Продолжим каждую функцию из $\mathcal{P}$ с помощью леммы 1 на конус K . Для любой пары точек $x_1, x_2 \in \tilde{M}$ обозначим через y точку пересечения прямой x_1x_2 с границей M . Таким образом, $x_2 \in [x_1, y]$, а значит, $x_2 = tx_1 + (1-t)y$ для некоторого $t \in [0, 1]$. Так как $|x_1 - y| \leq q$ и $|y - x_2| \geq h$, то $t \geq h/q$. В силу вогнутости f имеем

$$f(x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(y) \geq tf(x_1) \geq \frac{h}{q}f(x_1).$$

Подставив $x_2 = s$, получаем, что $f(x_1) \leq q/h$ для всех $x_1 \in \tilde{M}$, что доказывает ограниченность $\mathcal{P}$. Далее, возвратившись к неравенству $f(x_2) \geq tf(x_1)$

и учитывая, что

$$t = \frac{|y - x_2|}{y - x_1} \geq \frac{h}{h + |x_1 - x_2|},$$

получаем $(h + |x_1 - x_2|)f(x_2) \geq hf(x_1)$, откуда

$$f(x_1) - f(x_2) \leq \frac{1}{h}f(x_2) \leq \frac{q}{h^2}|x_1 - x_2|.$$

Таким образом, все функционалы из $\mathcal{P}$ липшицевы с константой q/h^2 на множестве $\widetilde{M}$. Следовательно, семейство $\mathcal{P}$ ограничено и равномерно непрерывно на компакте $\widetilde{M}$ и по теореме Арцела–Асколи компактно.

Рассмотрим отображение $B: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, заданное как $Bf = [Af(s)]^{-1}Af$, где отображение A определено на конусе $\widetilde{K}$ формулой (4). Заметим, что в силу невырожденности для любого j конус $A_j\widetilde{K}$ также вложен в K . Кроме того, множество $\widetilde{M} \times A_j\widetilde{M} \times \mathcal{P}$ компактно. Поэтому найдутся положительные константы c_1, c_2 такие, что $c_1 < f(A_jx)/f(x) < c_2$ для всех $x \in \widetilde{M}$, $f \in \mathcal{P}$. Значит, B непрерывно. По теореме Шаудера (см., например, [25; теорема 5.5.3]) оно имеет неподвижную точку, т.е. существует $f \in \mathcal{P}$, для которого $Bf = f$.

Теперь возьмем произвольную систему конусов $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, которая возрастает (K_i вложен в K_{i+1} при всех $i \geq 1$), стремится к K (замыкание множества $\bigcup_i K_i$ совпадает с K) и $s \in \text{int } K_1$. На каждом конусе K_i определим соответствующее множество функций $\mathcal{P}_i$ и оператор $B_i: \mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}_i$. Для каждого i существует неподвижная точка $f_i: B_i f_i = f_i$. В силу компактности всех $\mathcal{P}_i$ можно выделить подпоследовательность f_{i_k} , $k \in \mathbb{N}$, которая сходится на каждом K_i и, следовательно, сходится поточечно на внутренности конуса K . Предел этой последовательности f будет монотонной вогнутой функцией на множестве $\text{int } K$, причем ненулевой, поскольку $f(s) = 1$. Имеем $Af = \tau f$, где $\tau = [Af(s)] > 0$. Далее продолжаем f на границу конуса по непрерывности.

Осталось рассмотреть вырожденный случай: некоторый оператор A_j переводит внутреннюю точку K в граничную точку. В этом случае A_j переводит весь конус K в его грань, т.е. в пересечение конуса K с одной из его опорных гиперплоскостей L . Рассмотрим произвольный линейный функционал $f(x)$, равный нулю на L и положительный в полупространстве, содержащем K . Так как $A_jx \in L$ для любого $x \in K$, то $f(A_jx) = 0$ и, следовательно, $Af(x) = 0$ для всех $x \in K$. Таким образом, f – инвариантный функционал с $\tau = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого положительного инвариантного функционала $\tau = \rho$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись предложением 1 для $\varphi = f$ (с учетом замечания 1 для конусов), получаем, что обе части неравенства (5) равны τ , откуда $\tau = \rho$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Положительность инвариантного функционала существенна в предложении 2. Например, если семейство $\mathcal{A}$ состоит из одной диагональной матрицы A_1 с диагональными элементами $\tau_1 > \dots > \tau_d > 0$, то функционал $f(x) = (x_1 \dots x_d)^{1/d}$ является инвариантным и $\tau = (\tau_1 \dots \tau_d)^{1/d}$. Однако $\rho(\mathcal{A}) = \tau_1$, поэтому $\tau \neq \rho$.

Таким образом, с точки зрения показателей Ляпунова интерес представляют именно положительные инвариантные функционалы, в частности антинормы. В теореме 2 мы покажем, что таковые существуют, если выполнен ряд дополнительных условий на семейство $\mathcal{A}$. Для простоты дальнейшие результаты будут сформулированы для $K = \mathbb{R}_+^d$, все они без труда переносятся на произвольные конусы. Матрицы семейства $\mathcal{A}$ сохраняют конус $\mathbb{R}_+^d$, т.е. неотрицательны. Рассмотрим следующие дополнительные условия:

- а) в матрицах семейства $\mathcal{A}$ нет нулевых строк и нулевых столбцов;
- б) семейство $\mathcal{A}$ неприводимо;
- с) существует произведение $A_{d_r} \cdots A_{d_1}$ матриц из $\mathcal{A}$, имеющее хотя бы одну положительную строку или положительный столбец.

Условие б) означает, что не существует подмножества базисных векторов, линейная оболочка которых есть общее инвариантное подпространство всех матриц из $\mathcal{A}$. Равносильное условие: для любых i и j найдется произведение матриц из $\mathcal{A}$, у которого элемент в j -й строке и i -м столбце положителен. Из неразложимости следует неприводимость, но не наоборот. Условия, подобные а)–с) или более сильные, всегда налагаются на семейства неотрицательных матриц при исследовании показателей Ляпунова (см. [8]–[10], [16]). Они позволяют избежать различных вырожденных случаев.

Как будет показано в § 8, ни одно из условий а)–с) в теореме существования нельзя ослабить. Однако, модифицировав понятие антинормы, можно обойтись без условия с) (теорема 4).

ТЕОРЕМА 2. *Любое семейство неотрицательных матриц, удовлетворяющее условиям а)–с), имеет инвариантную монотонную антинорму.*

Фактически мы докажем больше: при условиях а)–с) любой инвариантный неотрицательный однородный вогнутый непрерывный функционал на $\mathbb{R}_+^d$ положителен, т.е. является антинормой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть f – любой инвариантный однородный неотрицательный вогнутый непрерывный функционал, который существует по теореме 1. Нормируем его условием $f(s) = 1$, где $s = \frac{1}{d}e = (\frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d})$. Для любого вектора $x \geq 0$ обозначим через $x_{\min}$ его минимальную координату. Пусть $M = \{x \in \mathbb{R}_+^d \mid (x, e) = 1\}$. Для любого $\alpha \in (0, \frac{1}{d}]$ положим $\mu(\alpha) = \min_{x \in H, x_{\min} = \alpha} f(x)$. Покажем, что $\mu(r\alpha) \geq r\mu(\alpha)$ для любого $r \leq 1$. Пусть минимум в определении величины $\mu(r\alpha)$ достигается в некоторой точке $x_{r\alpha}$, а прямая $sx_{r\alpha}$ пересекает границу положительного октанта в точке y . Возьмем точку $x_\alpha \in [s, x_{r\alpha}]$, у которой минимальная координата равна α . Тогда $x_{r\alpha} = rx_\alpha + (1-r)y$. В силу вогнутости

$$f(x_{r\alpha}) \geq rf(x_\alpha) + (1-r)f(y) \geq rf(x_\alpha) \geq r\mu(\alpha).$$

Итак, $\mu(r\alpha) \geq r\mu(\alpha)$. В частности, для любого $\alpha \in (0, \frac{1}{d}]$ имеем

$$\mu(\alpha) = \mu\left(\alpha d \cdot \frac{1}{d}\right) \geq \alpha d \mu\left(\frac{1}{d}\right) = \alpha d.$$

Таким образом, $\mu(\alpha) \geq \alpha d$.

Далее, для некоторого n семейство $\mathcal{A}^n$ содержит положительную матрицу, т.е. существуют индексы $q_1, \dots, q_n$, для которых произведение $\Pi = A_{q_n} \cdots A_{q_1}$ положительно. Для того чтобы это показать, рассмотрим матричную полугруппу по умножению $\mathcal{S}$, порожденную матрицами семейства $\mathcal{A}$. В силу условия с) полугруппа $\mathcal{S}$ содержит матрицу с положительной строкой или столбцом (пусть для определенности – строкой). Возьмем матрицу $A \in \mathcal{S}$, имеющую максимальное число $l \geq 1$ положительных строк. Считаем, что первые l ее строк положительны. Пусть $l < n$ и $(l+1)$ -я строка матрицы A содержит положительный элемент $a_{l+1,i}$. В силу неприводимости существует матрица $C \in \mathcal{S}$, у которой $c_{i1} > 0$. Тогда i -я строка матрицы CA положительна. Согласно условию а) для любого $B \in \mathcal{S}$ матрица AB также имеет первые l положительных строк. Следовательно, первые $l+1$ строк матрицы ACA положительны. Таким образом, $l = n$.

Возьмем теперь точку z , для которой $(e, z) = 1$, $z_{\min} = \alpha$ и $f(z) = \mu(\alpha)$. В силу условия а) имеем $A_j z > 0$ при всех j . Поэтому в силу вогнутости f имеем $f(A_j z) > 0$ для всех j , откуда $\tau > 0$. Тогда

$$f(z) = \tau^{-n} A^n f(z) = \tau^{-n} \prod_{d_n, \dots, d_1} f^{p_{d_n} \cdots p_{d_1}}(A_{d_n} \cdots A_{d_1} z). \quad (6)$$

Будем далее обозначать $A_{d_n} \cdots A_{d_1} z = b_{d_n, \dots, d_1}$, а минимальный положительный элемент матриц семейства $\mathcal{A}^n$ обозначаем через c_n . Ясно, что минимальная координата вектора $b_{q_n, \dots, q_1}$ не меньше c_n . Так как $(e, b_{q_n, \dots, q_1})^{-1} b_{q_n, \dots, q_1} \in M$ и минимальная координата этого вектора не меньше $(e, b_{q_n, \dots, q_1})^{-1} c_n$, то

$$f(b_{q_n, \dots, q_1}) \geq (e, b_{q_n, \dots, q_1}) \mu((e, b_{q_n, \dots, q_1})^{-1} c_n) \geq (e, b_{q_n, \dots, q_1}) \cdot d(e, b_{q_n, \dots, q_1})^{-1} c_n = c_n d.$$

Итак,

$$f(b_{q_n, \dots, q_1}) \geq c_n d. \quad (7)$$

Теперь оценим значение функции f для всех остальных произведений. В силу условия а) матрица $A_{d_n} \cdots A_{d_1}$ не имеет нулевых строк, поэтому минимальная координата вектора $b_{d_n, \dots, d_1}$ не меньше $c_n z_{\min} = c_n \alpha$. Значит, минимальная координата вектора $(e, b_{d_n, \dots, d_1})^{-1} b_{d_n, \dots, d_1} \in M$ не меньше $(e, b_{d_n, \dots, d_1})^{-1} c_n \alpha$. Применив доказанное выше неравенство при $r = (e, b_{d_n, \dots, d_1})^{-1} c_n$, получаем

$$f((e, b_{d_n, \dots, d_1})^{-1} b_{d_n, \dots, d_1}) \geq \mu((e, b_{d_n, \dots, d_1})^{-1} c_n \alpha) = (e, b_{d_n, \dots, d_1})^{-1} c_n \mu(\alpha),$$

откуда, учитывая однородность f , получаем $f(A_{d_n} \cdots A_{d_1} z) \geq c_n \mu(\alpha)$. Оценив с помощью этого неравенства $m^n - 1$ сомножителей в (6), а последний оценив с помощью неравенства (7), получаем

$$f(z) \geq \tau^{-n} \left(\frac{d}{\mu(\alpha)} \right)^{p_{q_1} \cdots p_{q_n}} \prod_{d_n, \dots, d_1} (c_n \mu(\alpha))^{p_{d_n} \cdots p_{d_1}}.$$

Учитывая, что $f(z) = \mu(\alpha)$, а также, что сумма произведений $p_{d_n} \cdots p_{d_1}$ по всем наборам $d_n, \dots, d_1$ равна 1, получаем

$$\mu(\alpha) \geq \tau^{-n} \left(\frac{d}{\mu(\alpha)} \right)^{p_{q_1} \cdots p_{q_1}} c_n \mu(\alpha),$$

откуда

$$\mu(\alpha) \geq d(\tau^{-n}c_n)^v, \quad (8)$$

где мы обозначили $v = (p_{q_n} \cdots p_{q_1})^{-1}$. Заметим, что правая часть неравенства (8) не зависит от α . Следовательно, функционал $f(x)$ ограничен снизу данной константой при всех $x \in M$, $x > 0$, а значит, в силу непрерывности и при всех $x \in M$, $x \geq 0$.

§ 4. Следствия. Асимптотика математического ожидания логарифма матричных произведений

Мы представим два применения инвариантной антинормы. Первое – точные оценки асимптотического поведения величин $\mathbf{E} \log \|\eta_k\|$, $\mathbf{E} \log \|\eta_k x\|$ и $\mathbf{E} \log \rho(\eta_k)$ при больших k . Второе – оценки на показатель Ляпунова неотрицательных матриц и метод его приближенного вычисления. Последнее будет предметом изучения в § 6, а здесь мы займемся оценками матричных произведений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если существует инвариантная антинорма, то найдутся константы $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от x и k , такие, что для любого вектора $x \geq 0$, $\|x\| = 1$, и для любого натурального k имеем*

$$c_1 \rho^k \leq \|A^k x\| \leq c_2 \rho^k. \quad (9)$$

Кроме того, $c_1 \rho^k \leq \|A^k\| \leq C_2 \rho^k$ для всех k , где C_2 – некоторая константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как антинорма f положительна, она эквивалентна любой норме. Следовательно, величина $\|A^k x\|$ эквивалентна $A^k f(x) = \rho^k f(x) \asymp \rho^k \|x\|$, что доказывает (9). Отсюда получаем $\|A^k\| \geq c_1 \rho^k$. Для доказательства оценки сверху на $\|A^k\|$ можно взять любую норму в $\mathbb{R}^d$. Для нормы $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ имеем $\|B\|_1 \leq d \|Bs\|_1$ для любой неотрицательной матрицы B , где $s = (\frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d})$. В самом деле, $\|B\|_1$ равно максимальной из сумм элементов столбцов матрицы B , что не превосходит суммы всех ее элементов, т.е. величины $d \|Bs\|_1$. Применив (9), получаем $\|A^k\|_1 \leq d \|A^k s\|_1 \leq d c_2 \rho^k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *При условиях а)–с) для произвольных ненулевых векторов $v, x \geq 0$ с вероятностью 1 имеем $(A_{d_k} \cdots A_{d_1} x, v)^{1/k} \rightarrow \rho$ при $k \rightarrow \infty$. Если при этом один из векторов v, x строго положителен, то найдутся константы $c_1, c_2 > 0$ такие, что $c_1 \rho^k \leq (A^k x, v) \leq c_2 \rho^k$ при любом k .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех k величины $(\eta_k x, v)$ ограничены сверху подходящей нормой $\|\eta_k\|$, а снизу – элементом матрицы $(\eta_k)_{ij}$, умноженным на некоторую константу. С вероятностью 1 имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\eta_k\|^{1/k} \rightarrow \rho$ (в силу теоремы Фюрстенберга–Кестена) и $\lim_{k \rightarrow \infty} [(\eta_k)_{ij}]^{1/k} \rightarrow \rho$ (в силу теоремы 2 в [9]). Следовательно, $(\eta_k x, v)^{1/k}$ при $k \rightarrow \infty$ также сходится к ρ .

Предположим теперь, что $x > 0$. Семейство сопряженных операторов $\mathcal{A}^* = \{A_1^*, \dots, A_m^*\}$ также удовлетворяет условиям а)–с). Функция $v \mapsto (v, x)$ является нормой в $\mathbb{R}_+^d$ (т.е. ограничением некоторой нормы $\|\cdot\|_x$ на $\mathbb{R}_+^d$). Применяя предложение 3 к данной норме и к сопряженному семейству $\mathcal{A}^*$, получаем,

что величина $(A^k x, v) = (x, (A^*)^k v) = \|(A^*)^k v\|_x$ лежит между $c_1 \rho^k$ и $c_2 \rho^k$, где константы зависят от нормы, т.е. от x .

Взяв $v = e_i$, получаем следующую асимптотику на математическое ожидание логарифма от координат вектора $\eta_k x = A_{d_k} \cdots A_{d_1} x$.

СЛЕДСТВИЕ 1. При условиях а)–с) для любого вектора $x \geq 0$ и любой координаты i величина $(A_{d_k} \cdots A_{d_1} x)_i^{1/k}$ сходится п.н. к ρ . Если $x > 0$, то $\exp(\mathbf{E} \log(\eta_k x)_i) \asymp \rho^k$.

Ту же асимптотику имеет и спектральный радиус матричных произведений $\rho(\eta_k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. При условиях а)–с) с вероятностью 1 имеем

$$[\rho(\eta_k)]^{1/k} \rightarrow \rho$$

при $k \rightarrow \infty$. Существуют константы $c_1, c_2 > 0$ такие, что $c_1 \rho^k \leq \rho(A^k) \leq c_2 \rho^k$ при любом k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Спектральный радиус матрицы η_k не меньше ее диагонального элемента $(\eta_k)_{11}$ и не больше $\|\eta_k\|$. Каждая из этих величин в степени $1/k$ сходится п.н. к показателю ρ (первая – в силу теоремы Фюрстенберга–Кестена, вторая – в силу [9; теорема 2]). Следовательно, $\rho^{1/k}(\eta_k) \rightarrow \rho$ п.н. при $k \rightarrow \infty$. Неравенство $\rho(A^k) \leq c_2 \rho^k$ следует из предложения 3. Осталось доказать оценку снизу $\rho(A^k) \geq c_1 \rho^k$. Заметим прежде всего, что для любой неотрицательной матрицы B имеем $\rho(B) \geq \min_{i=1, \dots, d} \|Be_i\|_1$, где $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$ – L_1 -норма. Далее, найдется матричное произведение $\Pi = A_{q_n} \cdots A_{q_1}$, все элементы которого положительны (см. доказательство теоремы 2). Обозначим через c_n наименьший элемент матрицы Π и через c наименьший положительный элемент матриц семейства $\mathcal{A}$. Рассмотрим любое произведение вида $P_{j,l} = A_{r_j} \cdots A_{r_1} \Pi A_{t_l} \cdots A_{t_1}$. В каждом столбце матрицы $A_{t_l} \cdots A_{t_1}$ есть положительный элемент, он не меньше c^l . Следовательно, каждый элемент матрицы $\Pi A_{t_l} \cdots A_{t_1}$ не меньше $c_n c^l$. Поэтому L_1 -норма любого столбца матрицы $P_{j,l}$ не меньше $\|A_{r_j} \cdots A_{r_1}\|_1 c_n c^l$. Итак, для любого $i = 1, \dots, d$ имеем $\|P_{j,l} e_i\|_1 \geq \|A_{r_j} \cdots A_{r_1}\|_1 c_n c^l$. Следовательно,

$$\rho(A_{r_j} \cdots A_{r_1} \Pi A_{t_l} \cdots A_{t_1}) \geq \|A_{r_j} \cdots A_{r_1}\|_1 c_n c^l \quad (10)$$

для любых $k, l \geq 0$ и для любых последовательностей индексов $r_1, \dots, r_j$ и $t_1, \dots, t_l$. Для произвольного $k > n$ обозначим через $\mathcal{R}_l$ множество произведений из $\mathcal{A}^k$ со следующим свойством: l – наименьшее число, для которого данное произведение имеет вид $P_{j,l}$. Таким образом, $j = k - n - l$ и $l \leq k - n$. Если оно не содержит произведения Π , то полагаем $l = k - n + 1$. Вероятность того, что данное случайное произведение η_k принадлежит $\mathcal{R}_l$, не превосходит $p(1-p)^{\lfloor l/n \rfloor}$ при $l \leq k - n$ и $(1-p)^{\lfloor l/n \rfloor}$ при $l = k - n + 1$, где $p = p_{q_1} \cdots p_{q_n}$, через $[x]$ обозначена целая часть числа x . Применив (10), оцениваем снизу условное математическое ожидание для каждого $l \leq k - n$:

$$\mathbf{E}\{\log \rho(\eta_k) \mid \eta_k \in \mathcal{R}_l\} \geq \log c_n c^l + \mathbf{E}\{\log \|\eta_{k-n-l}\|_1\} \geq \log c_n c^l + \log c_1 \rho^{k-n-l}.$$

Последнее неравенство получено с помощью предложения 3. При $l = k - n + 1$ данное условное ожидание тривиально оценивается снизу как $\log c^k$. Суммируя по всем $l = 0, \dots, k - n + 1$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \log \rho(\eta_k) &= \sum_{l=0}^{k-n+1} \mathbf{P}\{\eta_k \in \mathcal{R}_l\} \mathbf{E}\{\log \rho(\eta_k) \mid \eta_k \in \mathcal{R}_l\} \\ &\geq \mathbf{P}\{\eta_k \in \mathcal{R}_{k-n+1}\} k \log c \\ &\quad + \sum_{l=0}^{k-n} \mathbf{P}\{\eta_k \in \mathcal{R}_l\} (\log c_n c_1 + l \log c + (k - n - l) \log \rho) \\ &= k \log \rho + \mathbf{P}\{\eta_k \in \mathcal{R}_{k-n+1}\} (k \log c - k \log \rho) \\ &\quad + \sum_{l=0}^{k-n} \mathbf{P}\{\eta_k \in \mathcal{R}_l\} (\log c_n c_1 + l \log c + (k - n - l) \log \rho - k \log \rho). \end{aligned}$$

Оценивая сверху каждую вероятность в данной сумме, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_k \in \mathcal{R}_{k-n+1}\} |k \log c - k \log \rho| &\leq p^{[k/n]} k \left| \log \frac{c}{\rho} \right|, \\ \mathbf{P}\{\eta_k \in \mathcal{R}_l\} |\log c_n c_1 + l \log c + (k - n - l) \log \rho - k \log \rho| \\ &\leq p(1 - p)^{[l/n]} |\log c_n c_1 + l \log c - (n + l) \log \rho|. \end{aligned}$$

Таким образом, величина $|\mathbf{E} \log \rho(\eta_k) - k \log \rho|$ не превосходит

$$p^{[k/n]} k \left| \log \frac{c}{\rho} \right| + \sum_{l=0}^{k-n} p(1 - p)^{[l/n]} |\log c_n c_1 + l \log c - (n + l) \log \rho|.$$

Поскольку $0 < p < 1$, то данный ряд сходится по $l \in \mathbb{N}$, поэтому сумма равномерно ограничена по всем натуральным k .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Фактически мы доказали более сильное утверждение: если для произвольной неотрицательной матрицы B обозначить

$$\delta(B) = \min_{\|x\|=1, x \geq 1} \|Bx\|,$$

то предложение 5 выполнено для величины $\delta(\eta_k)$. Константы c_1, c_2 различны в предложениях 3–5, в каждом случае они легко оцениваются через параметры матриц семейства $\mathcal{A}$.

Соберем полученные результаты в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. Если выполнены условия а)–с) и $x \geq 0$, $\|x\| = 1$ – произвольный вектор, то для каждой из величин $s_k = \|\eta_k\|, \rho(\eta_k), \|\eta_k x\|, (\eta_k x)_i$ имеет место сходимость $\frac{1}{k} \log s_k \rightarrow \lambda$ п.н. при $k \rightarrow \infty$. Более того, для каждой из величин $s_k = \|\eta_k\|, \rho(\eta_k), \|\eta_k x\|$ существует константа C такая, что

$$|\mathbf{E} \log s_k - k\lambda| \leq C, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

При $x > 0$ это же верно и для величины $s_k = (\eta_k x)_i$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Без условия положительности вектора x свойство (11) может не выполняться для $s_k = (\eta_k x)_i$. Например, если семейство $\mathcal{A}$ содержит циклическую матрицу A_1 , для которой $A_1 e_i = e_{i+1}$, $i = 1, \dots, d-1$, $A_1 e_d = e_1$, то для любых i, j имеем $(A_1^{r+td})_{ij} = 0$ при всех $t \in \mathbb{N}$, где $r = r(i, j)$. Следовательно, элемент $(\eta_{r+td})_{ij}$ при любом t обращается в нуль с положительной вероятностью, а значит, $\mathbf{E} \log(\eta_{r+td} e_j)_i = -\infty$ при любом t .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Асимптотика величин $\|\eta_k\|$ и $\|\eta_k x\|$ для семейств неотрицательных матриц изучалась во многих работах. Так, в работе [8] было показано, что если все матрицы A_j положительны, то распределение величины $(\log \|\eta_k\| - k\lambda)/\sqrt{k}$ стремится к нормальному при $k \rightarrow \infty$ и то же верно для $\|\eta_k x\|$ при любом $x \geq 0$. Ряд усилений этого результата вместе с ослаблениями условия положительности см. в [9]. Из этих фактов, однако, не следует равномерной ограниченности величины $|\mathbf{E} \log \|\eta_k\| - k\lambda|$ при $k \in \mathbb{N}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В доказательстве предложений 3–5 и теоремы 3 не использовалась вогнутость f . Поэтому они будут верны, если семейство $\mathcal{A}$ имеет положительный инвариантный функционал на конусе K . В частности, если величина $|\mathbf{E} \log \|\eta_k\| - k\lambda|$ не является равномерно ограниченной при $k \in \mathbb{N}$, то семейство $\mathcal{A}$ не имеет не только инвариантной антинормы, но и никакого положительного инвариантного функционала.

§ 5. Оценки на константы

Несложно оценить константы в предложении 3 и в теореме 3. Для данной положительной однородной функции φ на $\mathbb{R}_+^d$ обозначим

$$\gamma_\varphi = \frac{\max_{x \in M} \varphi(x)}{\min_{x \in M} \varphi(x)},$$

где $M = \{x \in \mathbb{R}_+^d \mid (x, e) = 1\}$. Для инвариантной антинормы оценка (8) дает $\min_{x \in M} f(x) \geq d(\rho^{-n} c_n)^v$, где, напомним, n – наименьшее натуральное число, для которого семейство $\mathcal{A}^n$ содержит положительную матрицу $A_{q_n} \cdots A_{q_1}$, c_n – наименьший положительный элемент матриц семейства $\mathcal{A}^n$, $v = (p_{q_n} \cdots p_{q_1})^{-1}$. С другой стороны, поскольку $f(s) = 1$, из вогнутости функции f получаем $\max_{x \in M} f(x) \leq d$. Таким образом, для любой инвариантной антинормы имеем

$$\gamma_f \leq \left(\frac{\rho^n}{c_n} \right)^v. \quad (12)$$

Тогда для любой функции φ получаем

$$\left[\left(\frac{\rho^n}{c_n} \right)^v \gamma_\varphi \right]^{-1} \cdot \rho^k \leq \frac{\varphi(A^k x)}{\varphi(x)} \leq \left(\frac{\rho^n}{c_n} \right)^v \gamma_\varphi \cdot \rho^k. \quad (13)$$

В частности, при $\varphi = \|\cdot\|$ получаем оценки на константы в предложении 3

$$c_1 \geq \left[\left(\frac{\rho^n}{c_n} \right)^v \gamma_{\|\cdot\|} \right]^{-1}, \quad c_2 \leq \left(\frac{\rho^n}{c_n} \right)^v \gamma_{\|\cdot\|},$$

а величина

$$\log\left(\left(\frac{\rho^n}{c_n}\right)^v \gamma_{\|\cdot\|}\right) = \frac{n \log \rho - \log c_n}{p_{q_n} \cdots p_{q_1}} + \log \gamma_{\|\cdot\|}$$

является оценкой сверху на константу C в теореме 3.

§ 6. Следствия. Две оценки на показатель Ляпунова

Согласно предложению 1 любая положительная однородная функция φ на $\mathbb{R}_+^d$ дает оценку снизу $\varphi_{\min}(\mathcal{A})$ и оценку сверху $\varphi_{\max}(\mathcal{A})$ на показатель Ляпунова. Их точность зависит от того, насколько удачно выбрана функция φ . Если взять в качестве φ инвариантную антинорму, то обе оценки точны: $\varphi_{\min}(\mathcal{A}) = \varphi_{\max}(\mathcal{A}) = \rho$. Однако инвариантная антинорма изначально неизвестна. Для произвольной функции φ точность оценок, даваемая неравенством (13) для $k = 1$, как правило, неприемлема уже при сравнительно малых n , так как величина $(\rho^n/c_n)^v \gamma_\varphi$ может быть очень велика. Выходом из ситуации является последовательное приближение инвариантной антинормы. Взяв произвольную начальную функцию φ , применяем предложение 1 для семейства $\mathcal{A}^k$ вместо $\mathcal{A}$. При этом мы пользуемся тем, что $\rho(\mathcal{A}^k) = \rho^k(\mathcal{A})$, а семейство $\mathcal{A}^k$ имеет ту же инвариантную антинорму, что и $\mathcal{A}$, с коэффициентом $\tau = \rho^k$. Применив (13), получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Для любой положительной однородной функции φ на $\mathbb{R}_+^d$ и для любого $k \geq 1$ выполнены неравенства*

$$[\varphi_{\min}(\mathcal{A}^k)]^{1/k} \leq \rho \leq [\varphi_{\max}(\mathcal{A}^k)]^{1/k}. \quad (14)$$

Если семейство $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям а)–с), то левая и правая части (14) сходятся к ρ при $k \rightarrow \infty$. Более того, отношения $\rho/[\varphi_{\min}(\mathcal{A}^k)]^{1/k}$ и $[\varphi_{\max}(\mathcal{A}^k)]^{1/k}/\rho$ не превосходят $[(\rho^n/c_n)^v \gamma_\varphi]^{1/k}$ при любом k .

Таким образом, точность приближения, даваемая оценкой (14), при больших k не превосходит $O(1/k)$. На практике можно значительно улучшить данную скорость сходимости, если взять φ не произвольным образом, а как наилучшую функцию в некотором классе функций, т.е. дающую наилучшее приближение. Наилучшая функция ищется как решение определенной выпуклой задачи. При этом оценки сверху и снизу в (14) могут даваться разными функциями φ , каждая из которых наилучшая в своем классе. Данная идея использовалась для приближенного вычисления совместного спектрального радиуса матриц (см. [15]) и дала весьма эффективные алгоритмы даже при сравнительно больших размерностях d . Для вычисления показателя Ляпунова мы предлагаем такие оценки сверху и снизу.

Оценка снизу. В предложении 1 будем искать наилучшую оценку снизу среди линейных функций $\varphi(x) = (v, x)$, где $v > 0$ – произвольный вектор. Положим

$$\omega(v) = \varphi_{\min}(\mathcal{A}) = \inf_{x \geq 0, (v, x) = 1} \prod_{j=1}^m (v, A_j x)^{p_j}.$$

Так как функция $\prod_{j=1}^m (v, A_j x)^{p_j}$ вогнута по x , ее минимум достигается в крайней точке области определения, т.е. в одной из точек e_i , поэтому

$$\omega(v) = \min_{i=1, \dots, d} \frac{1}{(v, e_i)} \prod_{j=1}^m (v, A_j e_i)^{p_j} = \min_{i=1, \dots, d} \frac{1}{v_i} \prod_{j=1}^m (A_j^* v)_i^{p_j}.$$

Так как $\omega(v) \leq \rho$ для любого $v > 0$, то $\omega = \sup_{v>0} \omega(v) \leq \rho$. Получаем следующую оценку снизу на показатель $\rho = e^\lambda$:

$$\omega = \sup_{v>0} \min_{i=1, \dots, d} \frac{1}{v_i} \prod_{j=1}^m (A_j^* v)_i^{p_j}. \quad (15)$$

Несложно убедиться, что функция $g_i(v) = \frac{1}{v_i} \prod_{j=1}^m (A_j^* v)_i^{p_j}$ квазивогнута по v , т.е. все ее множества уровня $\{v \mid g_i(v) \geq c\}$ выпуклы. Поэтому и функция $\omega(v)$ квазивогнута как минимум квазивогнутых функций. Следовательно, ω эффективно вычисляется как максимум квазивогнутой функции (15). Это может быть сделано, например, градиентным методом или методом эллипсоидов (см. [26]). Таким образом, для любого семейства неотрицательных матриц имеем

$$\log \omega(\mathcal{A}) \leq \lambda(\mathcal{A}).$$

Оценка сверху. Ищем наилучшую оценку сверху среди функций $\varphi(x) = \max_{i=1, \dots, d} (x_i/v_i)$, где $v > 0$ – произвольный вектор. Тогда для любой матрицы B с неотрицательными элементами максимум величины $\varphi(Bx)/\varphi(x)$ по всем $x \geq 0$ достигается в точке v . Следовательно,

$$\nu(v) = \varphi_{\max}(\mathcal{A}) = \max_{i=1, \dots, d} \frac{1}{v_i} \prod_{j=1}^m (A_j v)_i^{p_j}.$$

Так как $\nu(v) \geq \rho$ для любого $v > 0$, то $\nu = \inf_{v>0} \nu(v) \geq \rho$. Получаем следующую оценку сверху на показатель Ляпунова:

$$\nu = \inf_{v>0} \max_{i=1, \dots, d} \frac{1}{v_i} \prod_{j=1}^m (A_j v)_i^{p_j}. \quad (16)$$

В данном виде эта оценка трудна для вычисления, поскольку функция $\nu(v)$ не является выпуклой. Сделав замену координат $v_i = e^{u_i}$, $u_i \in \mathbb{R}$, получаем

$$\nu(u) = \max_{i=1, \dots, d} \prod_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^d a_{il}^{(j)} e^{u_l - u_i} \right)^{p_j},$$

где $a_{il}^{(j)}$ – элементы матрицы A_j . Функция $\prod_{j=1}^m (\sum_{l=1}^d a_{il}^{(j)} e^{u_l - u_i})^{p_j}$ выпукла, поскольку ее логарифм – выпуклая функция. Следовательно, функция $\nu(u)$ выпукла как максимум выпуклых функций. Таким образом, величина ν эффективно вычисляется как значение следующей выпуклой задачи:

$$\nu = \inf_{u \in \mathbb{R}^d} \max_{i=1, \dots, d} \prod_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^d a_{il}^{(j)} e^{u_l - u_i} \right)^{p_j}.$$

Для любого семейства неотрицательных матриц имеем

$$\log \nu(\mathcal{A}) \geq \lambda(\mathcal{A}).$$

Алгоритм вычисления показателя Ляпунова. Для данного $k \geq 1$ вычисляем значения $\omega(\mathcal{A}^k)$ и $\nu(\mathcal{A}^k)$. Тогда

$$\frac{1}{k} \log \omega(\mathcal{A}^k) \leq \lambda(\mathcal{A}) \leq \frac{1}{k} \log \nu(\mathcal{A}^k). \quad (17)$$

Обе части неравенства сходятся к $\lambda(\mathcal{A})$ с линейной по k скоростью (предложение 6). На практике данная сходимость лучше даже для сравнительно больших размерностей d .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В [16] Кей показал, что для любого положительного однородного супермультипликативного (т.е. $F(XY) \geq F(X)F(Y)$ для любых X, Y) функционала f на пространстве неотрицательных $(d \times d)$ -матриц выполнено неравенство $\lambda \geq \log F(A)$, причем при условиях а)–с) имеем $\frac{1}{k} \log F(A^k) \rightarrow \lambda$ при $k \rightarrow \infty$. Мы обозначаем $F(A^k) = \prod_{d_1, \dots, d_k} F^{p_{d_1} \dots p_{d_k}}(A_{d_1} \dots A_{d_k})$. Выбирая различные функционалы F , получаем оценки снизу на λ . В качестве F подходит, в частности, перманент матрицы или любой ее диагональный элемент (см. [16]). Если теперь применить теоремы 1 и 2, получаем, что в указанном классе функционалов F всегда найдется наилучший, который дает точную оценку.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого неотрицательного семейства $\mathcal{A}$ при условиях а)–с) найдется функционал F , для которого неравенство $\lambda \geq \log F(A)$ обращается в равенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно взять

$$F(M) = \inf_{x \geq 0, x \neq 0} \frac{f(Mx)}{f(x)}$$

для любой матрицы M , где f – инвариантная антинорма.

Заметим, что любая однородная положительная функция φ порождает супермультипликативный функционал

$$F(M) = \inf_{x \geq 0, x \neq 0} \frac{\varphi(Mx)}{\varphi(x)},$$

который дает оценку $\varphi_{\min}(\mathcal{A}) \leq \rho$. Для любого $k \geq 1$ имеем $F(A^k) \leq \varphi_{\min}(\mathcal{A}^k)$, поскольку произведение минимумов не превосходит минимума произведения. Следовательно, оценка снизу в неравенстве (14) по крайней мере не хуже (а для большинства семейств матриц лучше) оценки $\frac{1}{k} \log F(A^k) \leq \lambda$, даваемой теоремой Кей. Такую же ситуацию мы имеем с оценками сверху. Поскольку при $\varphi(x) = \|x\|$ имеем $\|A^k\| \geq \varphi_{\max}(\mathcal{A}^k)$, оценка сверху, даваемая неравенством (14), не хуже оценки $\lambda \leq \frac{1}{k} \log \|A^k\|$ (последняя чаще всего применяется для приближения показателя Ляпунова). Неравенство (14), таким образом, улучшает известные оценки на λ . Практическая эффективность оценок $\omega(\mathcal{A}^k)$ и $\nu(\mathcal{A}^k)$ в (17) объясняется тем, что каждая из них является наилучшей для своего класса функций φ .

§ 7. Приложения

ПРИМЕР 1 (стабильность линейных динамических систем). Одно из первых применений совместных спектральных характеристик матриц – задача о стабильности дискретных линейных систем с переключениями. Дано семейство матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$. Последовательность точек $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такова, что $x_{k+1} = A_{d_k} x_k$ для любого k , где индексы d_k выбираются произвольным образом. Система называется *стабильной*, если последовательность x_k стремится к нулю при любом выборе индексов d_k и начального элемента x_1 . В [22] доказано, что стабильность системы равносильна условию $\rho_\infty(\mathcal{A}) < 1$, где ρ_∞ – совместный спектральный радиус (§ 2). Если предположить, что индексы d_k появляются на каждом шаге независимо с вероятностями $\mathbf{P}\{d_k = i\} = p_i$, то естественно определить стабильность системы условием $x_k \rightarrow 0$ п.н. при $k \rightarrow \infty$. Из теоремы Оселедда следует, что если $\lambda(\mathcal{A}) < 0$, то система стабильна, а если $\lambda(\mathcal{A}) > 0$, то нет. Если матрицы семейства $\mathcal{A}$ неотрицательны и удовлетворяют условиям а)–с), то теорема 3 позволяет разобрать и граничный случай $\lambda = 0$. При таком значении λ система не стабильна, поскольку $\mathbf{E} \log \|x_k\| = \mathbf{E} \log \|\eta_k x_1\| \geq -C$ для любого начального элемента $x_1 \geq 0$. Стабильность конкретной системы может быть проверена с помощью оценок на показатель Ляпунова, полученных в § 6.

ПРИМЕР 2 (разностное уравнение со случайными коэффициентами). Рассмотрим разностное уравнение на последовательность $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

$$v_{k+1} = a_n v_k + \dots + a_0 v_{k-n}, \quad k \geq n, \quad (18)$$

где вектор коэффициентов $a = (a_0, \dots, a_n)$ при каждом k независимо принимает случайные значения из некоторого конечного множества $\mathbf{a} = \{a^{(1)}, \dots, a^{(m)}\}$ с ненулевыми вероятностями $p_1, \dots, p_m$. В качестве начальных условий задан вектор $\mathbf{v}^n = (v_0, \dots, v_n)$. Координаты любого вектора из $\mathbb{R}^{n+1}$, равно как строки и столбцы матриц, будем нумеровать с 0 до n . Что можно сказать об асимптотике элемента v_k с вероятностью 1 при $k \rightarrow \infty$? Обозначая $\mathbf{v}^k = (v_{k-n}, \dots, v_k)$, запишем уравнение (18) в матричном виде: $\mathbf{v}^{k+1} = A \mathbf{v}^k$, где $A \in \mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$, каждая $((n+1) \times (n+1))$ -матрица A_j имеет в качестве последней строки вектор $a^{(j)}$, а в остальных строках $(A_j)_{st} = 1$ при $t = s+1$ и $(A_j)_{st} = 0$, если иначе. Ясно, что величина $\frac{1}{k} |v_k|$ с вероятностью 1 должна стремиться к одному из показателей Ляпунова семейства $\mathcal{A}$ в зависимости от начального вектора $\mathbf{v}^n$. В общем случае, однако, это не так. Причина в том, что показатели Ляпунова задают асимптотику нормы вектора $\mathbf{v}^k$, а не его последней координаты v_k . Теорема 3 позволяет исследовать эту задачу в случае уравнений с неотрицательными коэффициентами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть выполнены следующие предположения:

- (i) все векторы $a^{(j)}$ неотрицательны и у каждого из них $a_0^{(j)} \neq 0$;
- (ii) хотя бы для одного $j \leq t$ наибольший общий делитель чисел множества $\{n+1\} \cup \{i \mid a_i^{(j)} \neq 0\}$ равен 1.

Тогда для любого начального вектора $\mathbf{v}^n > 0$ величина $\frac{1}{k} \log |v_k|$ с вероятностью 1 стремится при $k \rightarrow \infty$ к $\lambda = \lambda(\mathcal{A})$. Более того, существует $C > 0$, для которого $|\mathbf{E} \log v_k - k\lambda| \leq C$ при всех k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно убедиться, что семейство матриц $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям а)–с), после чего применить теорему 3. Первое условие, очевидно, следует из того, что $a_0^{(j)} > 0$ при каждом j . Условие б) следует из того, что каждая матрица A_j неприводима. В самом деле, обнулив все элементы последней строки, кроме $a_0^{(j)}$ (который положителен), а $a_0^{(i)}$ заменив на 1, получим матрицу циклической перестановки множества $\mathcal{J} = \{0, \dots, n\}$, которая неприводима. Следовательно, A_j также неприводима. Для доказательства с) покажем, что матрица A_j , удовлетворяющая (ii), примитивна, т.е. некоторая ее степень положительна. Так как A_j неприводима, то по теореме Романовского (см. [27]) она не является примитивной, только если существует разбиение множества $\mathcal{J}$ на $r \geq 2$ множеств $\mathcal{J}_0, \dots, \mathcal{J}_{r-1}$ одинаковой мощности q (таким образом, $n+1 = qr$), и при этом матрица A_j действует как некоторая перестановка σ этих множеств, т.е. любой вектор с носителем в $\mathcal{J}_k$ переходит в вектор с носителем в $\mathcal{J}_{\sigma(k)}$. Так как матрица A_j мажорирует циклическую перестановку множества $\mathcal{J}$, то единственным возможным разбиением с точностью до нумерации является следующее: $\mathcal{J}_k = \{i \mid i \equiv k \pmod{r}\}$. Согласно свойству (ii) найдется индекс i , не делящийся на r , для которого $a_i^{(j)} > 0$. Обозначив через i' остаток от деления i на r , получаем, что $n \in \mathcal{J}_{\sigma(i')}$. Но, с другой стороны, $n \in \mathcal{J}_{\sigma(0)}$, поскольку $a_0^{(j)} > 0$. Таким образом, $\sigma(0) = \sigma(i')$, что невозможно, поскольку $i' \neq 0$.

Условия (i) и (ii) существенны, основной результат может не выполняться при нарушении одного из них. Заметим, что для выполнения условия (ii) достаточно, чтобы $a_n^{(j)} \neq 0$ хотя бы при одном j .

ПРИМЕР 3 (модель Леонтьева, условие продуктивности экономики). В стационарной модели Леонтьева рассматривается n отраслей экономики; для того чтобы произвести единицу продукции i -й отрасли, нужно A_{ij} единиц продукции j -й отрасли. Получаем, таким образом, $(n \times n)$ -матрицу A , называемую *матрицей затрат* (consumption matrix). Условие *продуктивности* экономики заключается в том, что $\rho(A) < 1$. Оно означает, что для любого уровня спроса (вектора спроса – demand vector – $z \in \mathbb{R}_+^n$) существует уровень необходимого производства (вектор $x \in \mathbb{R}_+^n$), при котором $x = Ax + z$, т.е. экономика может воспроизводить собственные затраты, обеспечивая при этом заданный уровень потребления. Элементарно доказывается, что разрешимость уравнения $x = Ax + z$ среди неотрицательных векторов x для любой правой части $z \geq 0$ равносильна условию $\rho(A) < 1$. Предположим, нам известны данные статистики за прошлые годы, из которых можно делать выводы о возможном распределении случайной матрицы A . Таким образом, A может принимать значения $A_1, \dots, A_m$ с заданными вероятностями $p_1, \dots, p_m$. В этом случае наиболее адекватной характеристикой продуктивности будет показатель Ляпунова λ семейства $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$. В самом деле, согласно предложению 5

при условиях а)–с) для произведений $\eta_k = A_{d_k} \cdots A_{d_1}$ случайных матриц имеем $\frac{1}{k} \log \rho(\eta_k) \rightarrow \lambda$ п.н. и $\frac{1}{k} \mathbf{E} \log \rho(\eta_k) \rightarrow \lambda$ при $k \rightarrow \infty$. Более того,

$$|\mathbf{E} \log \rho(\eta_k) - k\lambda| \leq C, \quad k \in \mathbb{N}$$

(теорема 3). Условие продуктивности экономики запишется как $\lambda(\mathcal{A}) < 1$. Оно может быть проверено с помощью оценок из § 6. Заметим, что условия а)–с) допускают естественное экономическое объяснение. Например, условие а) означает, что экономика не имеет “изолированных” отраслей, не влияющих на другие отрасли либо не испытывающих влияния других отраслей.

§ 8. Возможные обобщения

Теорема 2 устанавливает существование инвариантной монотонной антинормы для неотрицательных матриц при выполнении дополнительных условий а)–с). Данные условия существенны. Покажем, что при ослаблении любого из них могут появляться семейства матриц, не имеющие не только инвариантной антинормы, но и никакого инвариантного положительного функционала.

Условие а). Если, например, первый столбец матрицы A_1 нулевой и $\rho = 1$, то $A_1 e_1 = 0$ и, следовательно, $f(e_1) = Af(e_1) = 0$. Поэтому инвариантный функционал не может быть положительным.

Условие б). Простейший пример – “семейство” из одной диагональной матрицы A_1 с различными положительными диагональными элементами. Тогда для различных базисных элементов e_i величины $\|A_1^k e_i\|$ имеют различный экспоненциальный рост при $k \rightarrow \infty$, что противоречит теореме 3.

Показатели Ляпунова приводимых семейств операторов изучались в [13]. В этом случае существует перестановка базисных векторов, после которой каждая матрица A_j приобретает блочный верхне-треугольный вид с диагональными блоками $A_j^{(1)}, \dots, A_j^{(r)}$, причем в каждом блоке возникает неприводимое семейство $\mathcal{A}^{(n)} = \{A_j^{(n)}\}_{j=1}^m$. Оказывается, что $\lambda(\mathcal{A}) = \max_{n=1, \dots, r} \lambda(\mathcal{A}^{(n)})$ (см. [13]). Поэтому, скажем, проблема оценивания или вычисления показателя Ляпунова полностью сводится к неприводимому случаю. Сложнее обстоит дело с асимптотикой математического ожидания $\mathbf{E} \log \|\eta_k\|$. Теорема 3 может не выполняться даже для семейств диагональных матриц, у которых показатели Ляпунова блоков $\lambda(\mathcal{A}^{(n)})$ равны при всех $n = 1, \dots, d$ (пример 4 ниже).

Условие с). Пример 5 ниже показывает, что даже в размерности $d = 2$ существуют семейства, обладающие свойствами а) и б), для которых $\lambda = 0$, однако величина $\mathbf{E} \log \|\eta_k\|$ неограниченно растет при $k \rightarrow \infty$, а значит, у них нет положительного инвариантного функционала (теорема 3 и замечание 6).

Из трех условий наиболее ограничительным является с). Общий случай не сводится к этому условию, как происходит с условием б), когда общий случай сводится к неприводимым матрицам с помощью факторизации. Между тем условие с) не выполняется по крайней мере в одном важном случае, когда семейство $\mathcal{A}$ является блочным, или, что то же, имеет блочную структуру. Это

означает, что существует дизъюнктное разбиение $\{1, \dots, d\} = \bigcup_{k=1}^r \Omega_k$, в котором $r \geq 2$, все Ω_k непусты и выполнены два условия:

1) каждая матрица A_j задает перестановку множеств $\Omega_1, \dots, \Omega_r$, т.е. существует перестановка $\sigma = \sigma_j$ множества $\{1, \dots, r\}$, для которой $A_j V_k \subset V_{\sigma(k)}$ при всех k , где V_k – пространство, порожденное векторами $\{e_i, i \in \Omega_k\}$;

2) для любых k и $i \in \Omega_k$ найдется произведение матриц $A_{d_n} \cdots A_{d_1}$, у которого все элементы i -го столбца, номера которых принадлежат соответствующему множеству Ω_q , где $q = \sigma_{d_n} \cdots \sigma_{d_1}(k)$, положительны.

Таким образом, каждая матрица A_s , $s = 1, \dots, m$, разбита на r^2 прямоугольных блоков $\Omega_i \times \Omega_j$, $i, j = 1, \dots, r$. В каждом из r столбцов, состоящем из r блоков, только в одном блоке есть ненулевые элементы. То же верно и для r блочных строк. Свойство 2) означает, что для каждого i найдется произведение матриц семейства $\mathcal{A}$, у которого i -й столбец имеет максимально возможное множество положительных элементов, т.е. все его элементы, стоящие в соответствующем блоке, положительны. Любое семейство матриц перестановок является блочным, в этом случае $r = d$ и все блоки имеют размерность 1. Другой пример: любое семейство матриц, комбинаторно эквивалентных перестановочным (т.е. матрицы перестановок, в которых вместо единиц – произвольные положительные числа).

Мы будем предполагать, что блочное семейство матриц $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям а) и б). Условие а) означает, что каждый ненулевой блок матрицы A_j содержит ненулевую строку и ненулевой столбец. Условие б) означает, что семейство перестановок $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ неприводимо, т.е. для любых $i, j \in \{1, \dots, r\}$ существует последовательность перестановок, переводящая i в j .

Рассмотрим случай, когда семейство $\mathcal{A}$ состоит из одной матрицы. Напомним, что неотрицательная матрица называется *примитивной*, если некоторая ее степень положительна. Следующий факт хорошо известен в теории матриц (см. [28; гл. 8]): *неприводимая неотрицательная матрица не является примитивной тогда и только тогда, когда она имеет блочную структуру*. Это утверждение равносильно теореме Романовского (см. [27]). Обобщение этого факта на произвольные семейства матриц сформулируем в виде следующей гипотезы.

ГИПОТЕЗА 1. Семейство неотрицательных матриц, удовлетворяющее а) и б), либо обладает свойством с) (и, следовательно, имеет положительное произведение), либо имеет блочную структуру.

Проблема классификации полугрупп неотрицательных матриц, не имеющих ни одной строго положительной матрицы, связана как с произведениями случайных матриц, так и с неоднородными цепями Маркова. Известно, что существует полиномиальный алгоритм, позволяющий для конкретного семейства матриц определить, имеет ли порожденная этим семейством полугруппа положительную матрицу (см. [29]).

Как уже упоминалось, блочные семейства матриц, удовлетворяющие а) и б), могут не иметь инвариантных функций. Тем не менее теорема 2 может быть

распространена на блочные семейства с помощью следующего обобщения понятия инвариантной антинормы. Обозначим через K_i положительный октант в пространстве V_i . Таким образом,

$$K_i = \{v \in \mathbb{R}^d \mid v \geq 0, v_q = 0 \text{ при } q \notin \Omega_i\}.$$

Блочной антинормой назовем положительную однородную непрерывную функцию на множестве $\bigcup_{i=1}^r K_i$, вогнутую на каждом K_i . Блочная антинорма f называется *инвариантной*, если существует $\tau \geq 0$, для которого $Af(x) = \tau f(x)$ для всех $x \in \bigcup_{i=1}^r K_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Если семейство $\mathcal{A}$ имеет блочную структуру, то для любой блочной инвариантной положительной функции φ на множестве $\bigcup_{i=1}^r K_i$ имеем $\tau = \rho = e^\lambda$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Оселедца (см. [2]) с вероятностью 1 предел последовательности $\frac{1}{k} \log \|A_{d_k} \cdots A_{d_1} x\|$ существует и принимает значение одного из показателей Ляпунова $\lambda^{(i)}$ семейства $\mathcal{A}$, при этом точки $x \in \mathbb{R}^d$, для которых он не превосходит $\lambda^{(i)}$, образуют (случайное) подпространство $U_i \subset \mathbb{R}^d$. Для любого $n \leq r$ и для любой точки $x_n \in K_n$ это же верно для величины $\frac{1}{k} \log \varphi(\eta_k(x_n)) = \frac{1}{k} \log \varphi(A_{d_k} \cdots A_{d_1} x_n)$, поскольку $\|\cdot\| \asymp \varphi(\cdot)$. Так как $\frac{1}{k} \mathbf{E} \log \varphi(\eta_k(x_n)) = \log \tau$, то предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \varphi(\eta_k(x_n))$ равен $\log \tau$, откуда $\log \tau = \lambda^{(j)}$ для некоторого $j \in \{1, \dots, d\}$. Таким образом, с вероятностью 1 выполнено $\frac{1}{k} \log \|\eta_k(x)\| \rightarrow \lambda^{(j)}$ при $k \rightarrow \infty$ для всех $x \in \bigcup_{n=1}^r K_n$. Следовательно, подпространство U_j содержит все множества $K_n, n = 1, \dots, r$, а значит, совпадает со всем $\mathbb{R}^d$, поскольку множества K_n порождают $\mathbb{R}^d$. Из этого следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \|\eta_k(x)\| \leq \lambda^{(j)}$ п.н. для всех $x \in \mathbb{R}^d$, откуда $j = 1$ и $\log \tau = \lambda^{(1)} = \lambda$ — наибольший показатель Ляпунова.

ТЕОРЕМА 4. *Если семейство $\mathcal{A}$ имеет блочную структуру и удовлетворяет условиям а) и б), то оно имеет монотонную инвариантную блочную антинорму на множестве $\bigcup_{i=1}^r K_i$, при этом $\tau = \rho = e^\lambda$.*

В частности, если верна упомянутая гипотеза, то теоремы 2 и 4 охватывают все неприводимые семейства неотрицательных матриц, удовлетворяющие условию а). Доказательству теоремы 4 предпошем следующую техническую лемму.

ЛЕММА 2. *Даны множество $\{1, \dots, r\}$ и конечное неприводимое семейство перестановок $\{\sigma_j\}_{j=1}^m$ этого множества; каждой перестановке σ_i приписан положительный вес p_i , сумма весов равна 1. Тогда для любых чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ найдутся числа $\beta_1, \dots, \beta_r$ такие, что величины $\alpha_i - \beta_i + \sum_{j=1}^m p_j \beta_{\sigma_j(i)}$ равны для всех $i = 1, \dots, r$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $(r \times r)$ -матрицу T по формуле

$$T_{ik} = \sum_{\{j \mid \sigma_j(i)=k\}} p_j,$$

при этом сумма по пустому множеству полагается равной нулю. Нужно показать, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}^r$ найдется такой $\beta \in \mathbb{R}^r$, что все координаты вектора $\alpha - \beta + T\beta$ равны. Так как матрица T стохастическая (по строкам) и неприводимая, то она имеет собственный вектор $e = (1, \dots, 1)$, а соответствующее собственное значение 1 простое (см. [28; гл. 8]). Поэтому оператор $I - T$, где I – единичная матрица, имеет простое собственное значение 0. Следовательно, его образ $\text{Im}(I - T)$ не пересекается с ядром. Поскольку вектор e принадлежит ядру, он не принадлежит образу. Но так как размерность образа равна $r - 1$, то для любого $\alpha \in \mathbb{R}^r$ найдется число μ , для которого $\alpha + \mu e \in \text{Im}(I - T)$. Это значит, что уравнение $\beta - T\beta = \alpha + \mu e$ имеет решение β , что и требовалось.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Для каждого i берем конус $\tilde{K}_i$, вложенный в K_i , точку $s_i \in \text{int } K_i$ и рассматриваем семейство $\mathcal{P}_i$ неотрицательных однородных вогнутых функций f_i , определенных на $\tilde{K}_i$, монотонных относительно конуса K_i и таких, что $f_i(s_i) = 1$. Так же, как в доказательстве теоремы 1, продолжаем каждую из них с $\tilde{K}_i$ на весь конус K_i по формуле $f_i(x) = \max_{z \in \tilde{K}_i, z \leq x} f_i(z)$ и показываем, что множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \dots \times \mathcal{P}_r$ выпукло и компактно, а оператор

$$B: (f_1, \dots, f_r) \rightarrow ([Af_1(s_1)]^{-1}Af_1, \dots, [Af_r(s_r)]^{-1}Af_r)$$

непрерывен на $\mathcal{P}$. Следовательно, этот оператор имеет неподвижную точку $f \in \mathcal{P}$, т.е. $f = (f_1, \dots, f_r)$, где $f_i \in \mathcal{P}_i$. Построив расширяющуюся систему вложенных конусов для каждого конуса K_i , получаем последовательность инвариантных функций $f^{(k)}$, которая имеет подпоследовательность, сходящуюся равномерно на каждом компакте в $\text{int } K_i$ к некоторой монотонной вогнутой функции $f = (f_1, \dots, f_r)$. Продолжив ее по непрерывности на границы конусов, получаем для каждого $i = 1, \dots, r$ монотонную однородную вогнутую функцию f_i на K_i , для которой $Af_i(x) = \tau_i f_i(x)$, $x \in K_i$, где $\tau_i = Af_i(s_i)$. Теперь умножим функции f_i на некоторые положительные числа b_i таким образом, что коэффициенты τ_i станут равны. После умножения для функций $\{b_i f_i\}$ получим

$$\tau_i(b_i f_i)(x) = b_i \prod_{\{j, k | \sigma_j(i) = k\}} b_k^{-p_j} (b_k f_k(A_j x))^{p_j}.$$

Следовательно, новые коэффициенты таковы: $\tau_i b_i^{-1} \prod_{\sigma_j(i)=k} b_k^{p_j}$, $i = 1, \dots, r$. Взяв логарифмы и обозначив $\alpha_i = \log \tau_i$ и $\log b_i = \beta_i$, получаем, что величины $\alpha_i - \beta_i + \sum_{j=1}^m p_j \beta_{\sigma_j(i)}$ равны для всех $i = 1, \dots, r$. Применив лемму 2, получаем решение этой системы уравнений. Итак, получили функции f_i на K_i и положительное τ , для которых $Af_i = \tau f_i$, $i = 1, \dots, r$. Так же, как и в доказательстве теоремы 2, используя свойство 2) вместо с), показываем, что каждая функция f_i положительна на K_i . Теперь в силу предложения 8 имеем $\tau = \rho$.

С помощью теоремы 4 легко обобщить оценки для показателя Ляпунова и алгоритм его вычисления (§ 6) на блочные семейства. Результаты § 4 об асимптотике матричных произведений (теорема 3) обобщаются следующим образом.

Если $\mathcal{A}$ – блочное семейство матриц, удовлетворяющее а) и б), то для каждой из величин $s_k = \|\eta_k\|$, $\rho(\eta_k)$, $\|\eta_k x\|$, $(\eta_k x)_i$ имеет место сходимость $\frac{1}{k} \log s_k \rightarrow \lambda$ п.н. при $k \rightarrow \infty$. Кроме того, для каждой из величин $s_k = \|\eta_k\|$, $\rho(\eta_k)$, $\|\eta_k x\|$ существует константа C такая, что $\mathbf{E} \log s_k \geq k\lambda + C$, $k \in \mathbb{N}$. Однако обратное неравенство, вообще говоря, не выполнено для величин $\|\eta_k\|$ и $\rho(\eta_k)$ (пример 5), а выполнено лишь для величины $\|\eta_k x\|$ при $x \in \bigcup_{i=1}^k K_i$.

В заключение приводим примеры, показывающие, что условия б) и с) нельзя опустить в теоремах 2 и 3.

ПРИМЕР 4. Для семейства из двух диагональных матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с вероятностями $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ имеем $\lambda = 0$ и, соответственно, $\rho = 1$ (показатель Ляпунова блочно-диагональных матриц равен максимальному из показателей блоков; см. [13]). Возьмем $e = (1, 1)$. Тогда для любого произведения $\eta_k = A_{d_k} \cdots A_{d_1}$ имеем $\eta_k e = (2^q, 1)$, где q – разность между числом единиц и двоек среди индексов d_i . Следовательно, в норме $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ случайная величина $\log_2 \|\eta_k(e)\|_\infty$ равна $\max\{\xi_k, 0\}$, где ξ_k – сумма k независимых испытаний Бернулли с равновероятными исходами ± 1 . Из центральной предельной теоремы элементарно получаем

$$\mathbf{E} \max\{\xi_k, 0\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{k}.$$

Таким образом, величина

$$\mathbf{E} \log_2 \|A_{d_k} \cdots A_{d_1} e\|_\infty \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{k}$$

неограниченна, и, следовательно, данное семейство не имеет положительной инвариантной функции. Аналогично устанавливается, что

$$\mathbf{E} \log_2 \rho(\eta_k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{k}.$$

Этот пример обобщается на любое семейство неотрицательных диагональных $(d \times d)$ -матриц. Пусть

$$A_j = \text{diag}(a_1^{(j)}, \dots, a_d^{(j)}), \quad j = 1, \dots, m.$$

Если $a_s^{(1)} \cdots a_s^{(m)} = 1$ для всех $s = 1, \dots, d$, то $\rho = 1$, однако $\mathbf{E} \log_2 \|\eta_k e\| \geq C\sqrt{k}$, если не все матрицы $A_1, \dots, A_q$ равны. Доказательство осуществляется по той же схеме, мы оставляем его читателю. В силу предложения 3 данное семейство диагональных матриц не имеет положительной инвариантной функции.

ПРИМЕР 5. Семейство из двух матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

с вероятностями $p_1 = p_2 = 1/2$ неприводимо и имеет блочную структуру (два блока размерности 1). Согласно теореме 4 оно имеет блочную инвариантную антинорму $f = (f_1, f_2)$. В данном случае ее легко предъявить явно: $f_1(x_1, 0) = x_1$ и $f_2(0, x_2) = x_2$. Для нее $\tau = 1$, и в силу предложения 8 имеем $\rho = 1$. Покажем, что величина $\mathbf{E} \log_2 \|A_{d_k} \cdots A_{d_1} e\|_\infty$ неограничена. При $k \rightarrow \infty$ она эквивалентна $C_0 \sqrt{k}$, где $C_0 > 0$ – некоторая константа. Из этого будет следовать, что данное семейство не имеет положительной инвариантной функции на $\mathbb{R}_+^2$.

Для произвольного $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$, обозначив $(\alpha_1, \alpha_2) = (\log_2 x_1, \log_2 x_2)$, получаем, что оператор A_1 переводит пару (α_1, α_2) в пару $(\alpha_1 + 1, \alpha_2)$, а оператор A_2 – в пару $(\alpha_2, \alpha_1 - 1)$. Начальному вектору e соответствует $(0, 0)$, пары, соответствующие всем образам вектора e , состоят из целых чисел. Если $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то сумма максимальных координат двух образов пары (α_1, α_2) после применения операторов A_1, A_2 равна $2 \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, если же $\alpha_1 = \alpha_2$, то эта сумма становится равной $2 \max\{\alpha_1, \alpha_2\} + 1$. Следовательно,

$$\mathbf{E} \log_2 \|A_{d_{n+1}} \cdots A_{d_1} e\|_\infty = \mathbf{E} \log_2 \|A_{d_n} \cdots A_{d_1} e\|_\infty + 2^{-n-1} \delta_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (19)$$

где δ_n – количество пар с равными координатами, соответствующих 2^n векторам $\{A_{d_n} \cdots A_{d_1} e \mid d_j \in \{1, 2\}, j = 1, \dots, n\}$. Вычислим δ_n . Обозначим через δ_n^j количество пар среди 2^n данных, для которых $\alpha_1 - \alpha_2 = j$. Таким образом, $\delta_n = \delta_n^0$. Элементарно проверяем рекуррентное соотношение $\delta_{n+1}^j = \delta_n^{j-1} + \delta_n^{1-j}$, выполненное при всех $n \geq 0$. Учитывая, что $\delta_0^0 = 1$ и $\delta_0^j = 0$ при всех $j \neq 0$, по индукции заключаем, что производящая функция $\psi_n(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_n^j z^j$ равна $2z(z + \frac{1}{z})^{n-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, δ_n^0 (свободный коэффициент $\psi_n(z)$) равен нулю при нечетных n и равен

$$2C_{n-1}^{m/2} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} 2^{n+1}$$

при четных n . Подставляя δ_n в уравнение (19) и сложив по всем четным $n = 0, \dots, k-1$, получаем

$$\mathbf{E} \log_2 \|A_{d_k} \cdots A_{d_1} e\|_\infty \asymp \sum_{j < k/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2j}} \asymp C_0 \sqrt{k}.$$

Список литературы

- [1] H. Furstenberg, H. Kesten, “Products of random matrices”, *Ann. Math. Statist.*, **31**:2 (1960), 457–469.
- [2] В. И. Оселедец, “Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем”, Тр. ММО, **19**, УРСС, М., 1968, 179–210; англ. пер.: V.I. Oseledets, “A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems”, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, **19** (1968), 197–231.
- [3] J. C. Watkins, “Limit theorems for products of random matrices: a comparison of two points of view”, *Random matrices and their applications* (Brunswick, Maine, 1984), *Contemp. Math.*, **50**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, 5–22.

- [4] В. Н. Тутубалин, “О предельных теоремах для произведения случайных матриц”, *ТВП*, **10:1** (1965), 19–32; англ. пер.: V. N. Tutubalin, “On limit theorems for the product of random matrices”, *Theory Probab. Appl.*, **10:1** (1965), 15–27.
- [5] В. Н. Тутубалин, “Сближение вероятностных мер по вариации и произведения случайных матриц”, *ТВП*, **13:1** (1968), 63–81; англ. пер.: V. N. Tutubalin, “Approximation of probability measures in variation and products of random matrices”, *Theory Probab. Appl.*, **13:1** (1968), 65–83.
- [6] В. Н. Тутубалин, “Некоторые теоремы типа усиленного закона больших чисел”, *ТВП*, **14:2** (1969), 319–326; англ. пер.: V. N. Tutubalin, “Some theorems of the type of the strong law of large numbers”, *Theory Probab. Appl.*, **14:2** (1969), 313–319.
- [7] E. Le Page, “Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires”, *Probability measures on groups* (Oberwolfach, 1981), Lecture Notes in Math., **928**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1982, 258–303.
- [8] H. Ishitani, “A central limit theorem for the subadditive process and its application to products of random matrices”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **12:3** (1976), 565–575.
- [9] H. Hennon, “Limit theorems for products of positive random matrices”, *Ann. Probab.*, **25:4** (1997), 1545–1587.
- [10] Y. Peres, “Domains of analytic continuation for the top Lyapunov exponent”, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **28:1** (1992), 131–148.
- [11] А. В. Лётчиков, “Условная предельная теорема для произведений случайных матриц”, *Матем. сб.*, **186:3** (1995), 65–84; англ. пер.: A. V. Letchikov, “Conditional limit theorem for products of random matrices”, *Sb. Math.*, **186:3** (1995), 371–389.
- [12] И. Я. Гольдшейд, Г. А. Маргулис, “Показатели Ляпунова произведения случайных матриц”, *УМН*, **44:5** (1989), 13–60; англ. пер.: I. Ya. Gol’dsheid, G. A. Margulis, “Lyapunov indices of a product of random matrices”, *Russian Math. Surveys*, **44:5** (1989), 11–71.
- [13] L. Gerencsér, G. Michaletzky, Z. Orlovits, “Stability of block-triangular stationary random matrices”, *Systems Control Lett.*, **57:8** (2008), 620–625.
- [14] В. Ю. Протасов, “Фрактальные кривые и всплески”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70:5** (2006), 123–162; англ. пер.: V. Yu. Protasov, “Fractal curves and wavelets”, *Izv. Math.*, **70:5** (2006), 975–1013.
- [15] R. M. Jurgens, V. Yu. Protasov, V. D. Blondel, “Overlap-free words and spectra of matrices”, *Theoret. Comput. Sci.*, **410:38–40** (2009), 3670–3684.
- [16] E. S. Key, “Lower bounds for the maximal Lyapunov exponent”, *J. Theoret. Probab.*, **3:3** (1990), 477–488.
- [17] R. Gharavi, V. Anantharam, “An upper bound for the largest Lyapunov exponent of a Markovian product of nonnegative matrices”, *Theoret. Comput. Sci.*, **332:1–3** (2005), 543–557.
- [18] L. Dieci, E. S. Van Vleck, “Lyapunov spectral intervals: theory and computation”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **40:2** (2002), 516–542.
- [19] L. Dieci, E. S. Van Vleck, “Perturbation theory for approximation of Lyapunov exponents by QR methods”, *J. Dynam. Differential Equations*, **18:3** (2006), 815–840.
- [20] W.-J. Beyn, A. Lust, “A hybrid method for computing Lyapunov exponents”, *Numer. Math.*, **113:3** (2009), 357–375.
- [21] J. N. Tsitsiklis, V. D. Blondel, “The Lyapunov exponent and joint spectral radius of pairs of matrices are hard – when not impossible – to compute and to approximate”, *Math. Control Signals Systems*, **10:1** (1997), 31–40.
- [22] Н. Е. Барабанов, “О показателе Ляпунова дискретных включений. I”, *Автом. и телемех.*, 1988, № 2, 40–46; “О показателе Ляпунова дискретных включений. II”, *Автом. и телемех.*, 1988, № 3, 24–29; “О показателе Ляпунова дискретных включений. III”, *Автом. и телемех.*, 1988, № 5, 17–24; англ. пер.: N. E. Barabanov,

- “Lyapunov indicator of discrete inclusions. I”, *Automat. Remote Control*, **49**:2 (1988), 152–157; “The Lyapunov indicator of discrete inclusions. II”, *Automat. Remote Control*, **49**:3 (1988), 24–29; “The Lyapunov indicator of discrete inclusions. III”, *Automat. Remote Control*, **49**:5 (1988), 17–24.
- [23] В. Ю. Протасов, “Совместный спектральный радиус и инвариантные множества линейных операторов”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **2**:1 (1996), 205–231.
- [24] V. Yu. Protasov, “Extremal L_p -norms of linear operators and self-similar functions”, *Linear Algebra Appl.*, **428**:10 (2008), 2339–2356.
- [25] В. И. Богачёв, О. Г. Смолянов, *Действительный и функциональный анализ*, РХД, М.–Ижевск, 2009.
- [26] St. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.
- [27] V. Romanovsky, “Un théorème sur les zéros des matrices non négatives”, *Bull. Soc. Math. France*, **61** (1933), 213–219.
- [28] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М., 1989; пер. с англ.: R. A. Horn, Ch. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.
- [29] В. Ю. Протасов, “Полугруппы неотрицательных матриц”, *УМН*, **65**:6 (2010), 191–192.

В. Ю. Протасов (V. Yu. Protasov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: v-protasov@yandex.ru

Поступила в редакцию
11.11.2009