Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Тимофеева, О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности. III: Функториальный подход, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 3, 107–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7652>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 05:38:20

УДК 512.722+512.723

Н. В. Тимофеева

О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности. III: Фунториальный подход

Проводится построение новой компактификации схемы модулей стабильных по Гизекеру векторных расслоений, имеющих заданный многочлен Гильберта на гладкой проективной поляризованной поверхности (S, L) , определенной над полем $k = \bar{k}$ нулевой характеристики. Семейства локально свободных пучков на поверхности S пополнены локально свободными пучками на схемах, являющихся модификациями поверхности S . Пространство модулей Гизекера–Маруямы обладает бирациональным морфизмом на новое пространство модулей. Предложен функтор семейств пар “поляризованная схема – расслоение”, имеющий пространство модулей требуемого типа.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: пространство модулей, полустабильные когерентные пучки, функтор модулей, алгебраическая поверхность.

Введение

Пусть S – гладкая неприводимая проективная алгебраическая поверхность над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики. Зафиксируем обильный обратимый пучок $L \in \text{Pic } S$, который для краткости будем называть *поляризацией поверхности* S . Во всем тексте этой работы $r = \text{rank } E$ – ранг, $p_E(m) = \chi(E \otimes L^m)/r$ – приведенный многочлен Гильберта когерентного пучка E без кручения на схеме S относительно поляризации L . Как обычно, $\chi(\cdot)$ обозначает эйлерову характеристику. Мы работаем с понятием стабильности (полустабильности) когерентного пучка E на поверхности S в смысле Гизекера (см. [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Когерентный $\mathcal{O}_S$ -пучок E *стабилен* (соответственно *полустабилен*), если для любого собственного подпучка $F \subset E$ ранга $r' = \text{rank } F$ при $m \gg 0$

$$p_E(m) > p_F(m) \quad (\text{соответственно } p_E(m) \geq p_F(m)).$$

Известно (см. [2]), что структура пространства модулей полустабильных пучков сильно зависит от выбора поляризации. Аналогично, если дана проективная схема $\tilde{S}$ с поляризацией $\tilde{L}$, то для пучка $\tilde{E}$ без кручения ранга r имеем обозначение $p_{\tilde{E}}(m) = \chi(\tilde{E} \otimes \tilde{L}^m)/r$. Схема модулей Гизекера–Маруямы полустабильных пучков без кручения на поверхности S , имеющих относительно пучка L многочлен Гильберта $rp_E(m)$, обозначается символом $\bar{M}$. Известно (см. [3]), что она является проективной схемой конечного типа над полем k .

При этом точки, соответствующие стабильным локально свободным пучкам (векторным расслоениям), образуют в схеме $\bar{M}$ открытую по Зарискому подсхему M_0 . Пусть схема $\bar{M}$ является тонким пространством модулей. Тогда на $\bar{M}$ имеется тривиальное произведение $\Sigma := \bar{M} \times S \xrightarrow{\pi} \bar{M}$, несущее универсальное семейство стабильных пучков $\mathbb{E}$. В [4], [5] построены проективная схема $\tilde{M}$ и нетривиальное плоское семейство схем $\tilde{\Sigma} \xrightarrow{\pi} \tilde{M}$, оснащенное семейством локально свободных пучков $\tilde{\mathbb{E}}$. Также определен бирациональный морфизм схем $\Phi: \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ такой, что $(\Phi_*\tilde{\mathbb{E}})^{\vee\vee} = \mathbb{E}$. В [6] проведены аналогичные конструкции (плоские семейства схем $\tilde{\Sigma}_i \xrightarrow{\tilde{\pi}_i} \tilde{B}_i$, оснащенные локально свободными пучками $\tilde{\mathbb{E}}_i$) над этальными окрестностями $\tilde{B}_i \xrightarrow{\text{étale}} \tilde{M}$ для случая, когда $\bar{M}$ не обладает универсальным семейством пучков. В любом случае схема $\tilde{M}$ содержит открытую по Зарискому подсхему, изоморфную M_0 . Указанное построение будем называть *стандартным разрешением*.

Кроме того, построенный в работах [4], [5] бирациональный морфизм $\Phi: \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ устанавливает соответствие $(\tilde{S}, \tilde{E}) \mapsto (S, E)$ между парами $(\tilde{S}, \tilde{E}) \in \tilde{M}$ и $(S, E) \in \bar{M}$. Там же построен бирациональный морфизм $\phi: \tilde{M} \rightarrow \bar{M}$. Поэтому при поточечном (послойном) рассмотрении мы считаем, что слой $\pi^{-1}(y) = S$ семейства Σ является образом слоя $\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{y}) = \tilde{S}$, задаваемым доминантным морфизмом Φ . При этом когерентный пучок E на слое S однозначно определяется расслоением $\tilde{E}$ на слое $\tilde{S}$ согласно выражению $E = \mathbb{E}|_{\pi^{-1}(y)} = (\Phi_*\tilde{\mathbb{E}})^{\vee\vee}|_{\pi^{-1}(y)}$. Теоретико-схемное описание поверхностей $\tilde{S}$, возникающих как слои плоских семейств $\tilde{\Sigma}$, дано в работе [7].

Для дальнейшего заметим, что все операции и рассуждения, проведенные в [5] для универсального семейства стабильных пучков $\mathbb{E}$, также справедливы для любой его подкрутки $\mathbb{E} \otimes \mathbb{L}^m$ на послойно обильный обратимый пучок $\mathbb{L}$. То же самое верно (см. [6]) для любого плоского семейства стабильных (полу-стабильных) пучков, параметризованного гладкой квазипроективной алгебраической схемой.

В настоящей статье мы работаем в предположении, что все неприводимые компоненты схемы модулей Гизекера–Маруямы содержат локально свободные пучки. Такая ситуация носит асимптотический характер (см. [8; теорема 0.3], [9; теорема D]), если дискриминант пучков $\Delta := c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2 \gg 0$. В общем случае это не так. Однако всегда можно ограничиться заменой схемы Гизекера–Маруямы объединением тех ее компонент, которые содержат локально свободные пучки. Такие компоненты схемы Гизекера–Маруямы далее будут называться *основными*.

Цель настоящей работы – реализация функториального подхода к компактификации схемы модулей стабильных векторных расслоений на поверхности, построенной автором в работах [4]–[6] с помощью раздутий в идеалах Фиттинга. Компактификация, построенная в указанных работах, будет далее называться *конструктивной* и обозначаться $\widehat{M}$, а $\bar{M}^c$, а ее морфизм на схему Гизекера–Маруямы обозначим как $\phi^c: \bar{M}^c \rightarrow \bar{M}$. Понятно, что поскольку построение конструктивной компактификации использовало дополнительные раздутия (гладкие разрешения, частичные разрешения по Кирван, а также уплотняющее бирациональное преобразование при формировании образа в схеме Гильберта), то придать ей прозрачный геометрический смысл схемы

модулей не представляется возможным. Однако будет построен бирациональный морфизм конструктивной компактификации на проективную схему модулей пар “поляризованная проективная схема – векторное расслоение”.

Следуя [10; гл. 2, п. 2.2], напомним некоторые определения. Пусть $\mathcal{C}$ – категория, $\mathcal{C}^o$ – двойственная к ней категория, $\mathcal{C}' = \mathcal{Funct}(\mathcal{C}^o, \mathbf{Sets})$ – категория функторов в категорию множеств. По лемме Ионеды функтор $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}': F \mapsto (\underline{F}: X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F))$ вкладывает $\mathcal{C}$ как полную подкатегорию в $\mathcal{C}'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [10; гл. 2, определение 2.2.1]). Функтор $f \in \mathcal{Ob} \mathcal{C}'$ копредставлен объектом $F \in \mathcal{Ob} \mathcal{C}$, если существует $\mathcal{C}'$ -морфизм $\psi: f \rightarrow \underline{F}$ такой, что любой морфизм $\psi': f \rightarrow \underline{F'}$ пропускается через единственный морфизм $\omega: \underline{F} \rightarrow \underline{F'}$.

В настоящей работе будет введен класс допустимых проективных схем $\tilde{S}$ с выделенной поляризацией $\tilde{L}$ (определение 5) и сформулировано определение стабильности (полустабильности) для пар $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ “поляризованная допустимая схема – локально свободный пучок”. Пусть T – схема над полем k . Рассматриваются семейства полустабильных пар

$$\mathfrak{F}_T = \left\{ \begin{array}{l} \pi: \mathbb{F} \rightarrow T, \tilde{L} \in \text{Pic } \mathbb{F}, \forall t \in T \tilde{L}_t = \tilde{L}|_{\pi^{-1}(t)} \text{ обилен} \\ (\pi^{-1}(t), \tilde{L}_t) - \text{допустимая схема с выделенной поляризацией} \\ \tilde{E} - \text{локально свободный } \mathcal{O}_{\mathbb{F}}\text{-пучок} \\ \chi(\tilde{E} \otimes \tilde{L}^m)|_{\pi^{-1}(t)} = rp_E(m) \\ ((\pi^{-1}(t), \tilde{L}_t), \tilde{E}|_{\pi^{-1}(t)}) - \text{стабильная (полустабильная) пара} \end{array} \right\}$$

и функтор $f: (\mathbf{Schemes}_k) \rightarrow (\mathbf{Sets})$ из категории k -схем в категорию множеств, ставящий в соответствие схеме T множество классов эквивалентности $(\mathfrak{F}_T / \sim)$.

При этом отношение эквивалентности $\sim$ определено следующим образом. Семейства $((\pi: \mathbb{F} \rightarrow T, \tilde{L}), \tilde{E})$ и $((\pi': \mathbb{F}' \rightarrow T, \tilde{L}'), \tilde{E}')$ из класса $\mathfrak{F}_T$ будем считать эквивалентными (обозначение $((\pi: \mathbb{F} \rightarrow T, \tilde{L}), \tilde{E}) \sim ((\pi': \mathbb{F}' \rightarrow T, \tilde{L}'), \tilde{E}')$), если:

- 1) существует изоморфизм $\mathbb{F} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}'$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{F}' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & T & \end{array} \quad (0.1)$$

коммутативна;

- 2) существует линейное расслоение L на T такое, что $\tilde{E}' = \tilde{E} \otimes \pi^* L$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Схема $\tilde{M}$ – грубое пространство модулей функтора f , если f копредставлен схемой $\tilde{M}$.

ТЕОРЕМА 1. Функтор f обладает грубым пространством модулей $\tilde{M}$ со следующими свойствами:

- (i) $\tilde{M}$ – проективная нётерова алгебраическая схема;
- (ii) имеет место бирациональный морфизм объединения основных компонент схемы Гизекера–Маруямы для поверхности S и многочлена Гильберта $gr_E(m)$

$$\kappa: \bar{M} \rightarrow \tilde{M};$$

(iii) имеет место бирациональный морфизм конструктивной компактификации $\phi: \widetilde{M}^c \rightarrow \widetilde{M}$;

(iv) имеет место коммутативный треугольник компактификаций

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{M}^c & \\ \phi^c \swarrow & & \searrow \phi \\ \overline{M} & \xrightarrow{\kappa} & \widetilde{M} \end{array} \quad (0.2)$$

(v) имеет место открытая по Зарискому подсхема $\widetilde{M}_0 \subset \widetilde{M}$, соответствующая таким стабильным парам $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$, что $(\widetilde{S}, \widetilde{L}) \cong (S, L)$; над схемой $\widetilde{M}_0$ морфизмы диаграммы (0.2) – изоморфизмы, т.е. $M_0 \cong \widetilde{M}_0^c \cong \widetilde{M}_0$;

(vi) на классе полустабильных пар определено отношение M -эквивалентности такое, что пары представлены одной точкой в $\widetilde{M}$ тогда и только тогда, когда они M -эквивалентны.

Все рассуждения настоящей работы применимы к любым многочленам Гильберта безотносительно к величине дискриминанта, а также к количеству и геометрии неприводимых компонент соответствующей схемы Гизекера–Маруямы. В общем (приводимом) случае теорема гарантирует существование грубого пространства модулей у каждого максимального по включению неприводимого подстека в $\coprod (\mathfrak{F}_T/\sim)$, содержащего такие пары $((\pi^{-1}(t), \widetilde{L}_t), \widetilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(t)})$, что

$$(\pi^{-1}(t), \widetilde{L}_t) \cong (S, L);$$

их будем называть S -парами. Под $\widetilde{M}$ понимается именно пространство модулей подстека, содержащего полустабильные S -пары.

В § 1 приведены некоторые результаты, необходимые для дальнейшего. Кроме того вычислена структура векторного расслоения $\widetilde{E} = \mathbb{E}|_{\pi^{-1}(t)}$ на схеме $\widetilde{S} = \pi^{-1}(t)$, если расслоение $\widetilde{E}$ получается из полустабильного когерентного пучка с помощью конструкции работ [4]–[6]. Пары такого вида далее называются dS -парами.

В § 2 мы обратимся к построению схемы Гизекера–Маруямы $\overline{M}$ как GIT-фактора $\overline{M} = Q/\mathrm{SL}(V)$ подходящей подсхемы Q Quot-схемы Гротендика. Пусть $\widetilde{Q}$ – квазипроективная схема, полученная из схемы Q применением конструкций работ [4]–[6]. Построен морфизм μ схемы $\widetilde{Q}$ в подходящую схему Гильберта подсхем грасманова многообразия $G(V, r)$. Доказано, что его образ $\mu(\widetilde{Q})$ – квазипроективная $\mathrm{SL}(V)$ -инвариантная подсхема схемы Гильберта.

В § 3 вычислен явный вид выделенных поляризации $\widetilde{L}$ на схемах $\widetilde{S}$.

Изучению изоморфизма $v: H^0(\widetilde{S}, \widetilde{E} \otimes \widetilde{L}^m) \xrightarrow{\sim} H^0(S, E \otimes L^m)$ пространств глобальных сечений, индуцированного конструкцией разрешения особенностей полустабильных пучков, посвящен § 4. Этот изоморфизм используется в § 5 и § 6.

В § 5 введено понятие стабильности (полустабильности) на множестве пар “поляризованная схема – расслоение” $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ и исследована связь нового понятия стабильности (полустабильности) с классической стабильностью (полустабильностью) по Гизекеру когерентных пучков на поляризованной поверхности (S, L) .

В § 6 введено и обосновано понятие M -эквивалентности стабильных (полустабильных) пар. В частности, показано, что S -эквивалентные полустабильные когерентные пучки разрешаются в M -эквивалентные полустабильные пары.

§ 7 носит вспомогательный характер. В нем доказаны результаты, связанные с локальной свободой подпучков и факторов обратного образа фильтрации Жордана–Гельдера для пучков $\tilde{E} = \sigma^*E/\text{tors}$.

В § 8 доказана ограниченность семейств dS -пар и показано, что подсхема, образованная в схеме Гильберта dS -парами, в точности совпадает с подсхемой $\mu(\tilde{Q})$.

§ 9 посвящен изучению действия группы $\text{PGL}(V)$ на множестве точек схемы Гильберта, соответствующих S -парам, и проверке выполнимости на нем критерия GIT-стабильности (GIT-полустабильности) Гильберта–Мамфорда. Результаты этого параграфа гарантируют существование, квазипроективность и нётеровость схемы $\tilde{M}$ как GIT-фактора. Кроме того, из рассуждений этого параграфа немедленно следует существование в $\tilde{M}$ открытой подсхемы, изоморфной открытой подсхеме M_0 в схеме Гизекера–Маруямы.

В § 10 показано, что существует сюръективный бирациональный морфизм схемы Гизекера–Маруямы $\bar{M}$ на схему $\tilde{M}$, что доказывает проективность схемы $\tilde{M}$.

В § 11 изучена связь M -эквивалентности полустабильных пар и GIT-эквивалентности соответствующих им точек в схеме Гильберта.

Наконец, § 12 посвящен доказательству того, что построенная схема $\tilde{M}$ действительно является пространством модулей полустабильных пар.

§ 1. Когерентные пучки и их разрешения

Этот параграф носит вспомогательный характер. В нем суммированы результаты предыдущих работ автора, необходимые для дальнейшего, а также получены некоторые следствия из этих результатов.

Напомним некоторые формулировки и результаты из [7]. Поскольку в настоящей работе не все алгебраические схемы будут многообразиями, то всюду класс обильного дивизора H , используемый в [7], заменен соответствующим обильным обратимым пучком L . Для удобства вычислений будем считать, что L очень обилен. Если это не так, заменим пучок L его очень обильной тензорной степенью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (см. [7]). Артинов пучок $\mathcal{K}$ называется $(S, L, r, p_E(m))$ -допустимым, если имеется точная $\mathcal{O}_S$ -тройка

$$0 \rightarrow E \rightarrow E^{\vee\vee} \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow 0, \quad (1.1)$$

в которой когерентный пучок E ранга r с многочленом Гильберта $rp_E(m)$ полустабилен относительно поляризации L .

Связь $(S, L, r, p_E(m))$ -допустимости с пучками нулевых идеалов Фиттинга $\mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$ для полустабильных когерентных пучков E дается следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [7]). Класс всех $\mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$, для полустабильных пучков E содержится в классе всех пучков вида $\mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^2(\mathcal{K}, \mathcal{O}_S)$ для всех артиновых факторпучков $\mathcal{K}$ длины $l = l(\mathcal{K}) = h^0(S, \mathcal{K}) < c_2$ пучка $\bigoplus^r \mathcal{O}_S$.

Пусть I – пучок идеалов некоторой нульмерной подсхемы Z на поверхности S , t – символ, трансцендентный над $\mathcal{O}_S(U)$ при всех открытых $U \subset S$, $\mathcal{O}_S[t]$ – пучок полиномиальных алгебр над $\mathcal{O}_S$, $I[t]$ – его подпучок идеалов, определяемый соответствием $U \mapsto I(U)[t]$. При этом справа стоит полиномиальное кольцо (без единицы) над $I(U)$. Также рассмотрим подпучок главных идеалов $(t) \subset \mathcal{O}_S[t]$ и сумму подпучков идеалов $I[t] + (t)$ в $\mathcal{O}_S[t]$.

Образует s -ю степень $(I[t] + (t))^s$, $s > 0$, как подпучок идеалов в $\mathcal{O}_S[t]$. Он содержит подмодуль $(t)^{s+1}$, порожденный элементом t^{s+1} . Таким образом, определен $\mathcal{O}_S[t]$ – фактормодуль $(I[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$. При $s = 0$ положим

$$(I[t] + (t))^s / (t)^{s+1} := \mathcal{O}_S.$$

Образует градуированную $\mathcal{O}_S$ -алгебру $\bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$. Она порождена компонентой степени $s = 1$, т.е. подгруппой $(I[t] + (t)) / (t)^2$.

Морфизм

$$\mathcal{O}_S \rightarrow \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$$

приводит к морфизму проективных схем

$$\sigma: \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t)^{s+1} \rightarrow S.$$

Его будем называть *каноническим*. Как показано в [7], схема $\text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$ получается как слой композиции

$$\widehat{T \times S} \xrightarrow{\sigma} T \times S \xrightarrow{\pi} T,$$

где $T = \text{Spec } k[t] \cong \mathbb{A}_k^1$, π – проекция на базу T , σ – морфизм раздутья тривиального семейства поверхностей $T \times S$ в пучке идеалов $\mathcal{I} = I[t] + (t)$, задающем подсхему Z в слое $\pi^{-1}(0) \cong S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Назовем поляризованную алгебраическую схему $(\tilde{S}, \tilde{L})$ $(S, L, r, p_E(m))$ -допустимой, если схема $(\tilde{S}, \tilde{L})$ удовлетворяет одному из следующих условий:

(i) $(\tilde{S}, \tilde{L}) \cong (S, L)$;

(ii) $\tilde{S} \cong \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$, где $I = \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^2(\mathcal{K}, \mathcal{O}_S)$ для артинова факторпучка $q: \bigoplus^r \mathcal{O}_S \twoheadrightarrow \mathcal{K}$ длины $l(\mathcal{K}) \leq c_2$, причем $\tilde{L}^m = L^m \otimes (\sigma^{-1} I \cdot \mathcal{O}_{\tilde{S}})$ для некоторого $m \gg 0$; при этом для любого m , для которого пучок $L^m \otimes (\sigma^{-1} I \cdot \mathcal{O}_{\tilde{S}})$ очень обилен, поляризацию $\tilde{L}^m$ будем называть *выделенной*.

Из конструктивного построения компактификации Фиттинга в [4]–[6] следует, что поскольку $(S, L, r, p_E(m))$ -допустимые схемы включаются в одно плоское семейство или в конечный набор плоских семейств, вложенных как локально

замкнутые подсхемы в проективную схему (например, в универсальную схему схемы Гильберта), то существует (общее для всех классов изоморфизма схем $\tilde{S}$ и не зависящее от расслоений $\tilde{E}$) положительное m_0 такое, что для всех $m \geq m_0$ и для всех классов изоморфизма схем $\tilde{S}$ пучки $L^m \otimes (\sigma^{-1}I \cdot \mathcal{O}_{\tilde{S}})$ очень обильны.

Далее переобозначим L^m как L и $\tilde{L}^m$ как $\tilde{L}$. Будем считать, что многочлены Гильберта пучков вычисляются относительно новых L и $\tilde{L}$. В [2] показано, что при замене очень обильного обратимого пучка его тензорной степенью класс стабильных (полуостабильных) когерентных пучков остается неизменным.

Поскольку в настоящей работе параметры $(S, L, r, p_E(m))$ фиксированы, то для краткости будем называть $(S, L, r, p_E(m))$ -допустимые схемы и $(S, L, r, p_E(m))$ -допустимые артиновы пучки просто *допустимыми*.

Ясно, что допустимая схема вида $\tilde{S} = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t^{s+1})$ может быть естественным образом представлена в виде объединения неприводимых компонент $\tilde{S} = \bigcup_{i \geq 0} \tilde{S}_i$, где главная компонента $\tilde{S}_0 = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I)^s$ – раздутая в пучке идеалов I поверхность S и при $i > 0$ $\tilde{S}_i$ – неприводимые дополнительные компоненты $\bigcup_{i > 0} \tilde{S}_i$. При этом, как показано в [7], дополнительная компонента может иметь структуру неприведенной схемы. Очевидно, допустимая схема состоит из одной компоненты $S \cong \tilde{S} = \tilde{S}_0$ тогда и только тогда, когда она изоморфна исходной поверхности S .

Допустимая схема $\tilde{S}$ обладает морфизмом $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$, при этом ограничение $\sigma_0 = \sigma|_{\tilde{S}_0}: \tilde{S}_0 \rightarrow S$ канонического морфизма σ на главную компоненту $\tilde{S}_0$ является морфизмом раздутия.

Будем говорить, что когерентный пучок E без кручения *деформационно эквивалентен локально свободному пучку*, если E может быть включен в плоское семейство $\mathcal{O}_S$ -пучков $\mathbb{E}$ над связной базой T , причем ограничения пучка $\mathbb{E}$ на слои вида $t \times S$, где $t \in T$ – достаточно общая точка, локально свободны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть когерентный пучок E , деформационно эквивалентный локально свободному пучку, является образом векторного расслоения $\tilde{E}$ на допустимой схеме $\tilde{S}$. Тогда имеется канонически определенный подпучок $\text{tors} \subset \sigma^*E$ такой, что

$$\tilde{E} \cong \sigma^*E / \text{tors}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим плоское семейство $\mathbb{E}$ полустабильных пучков на поверхности S . Пусть T – база семейства. По конструкции, развитой в [4], [5], оно имеет гомологическую размерность 1. Зафиксируем точную тройку

$$0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_0 \rightarrow \mathbb{E} \rightarrow 0, \quad (1.2)$$

в которой пучки E_0 и E_1 локально свободны. Рассмотрим морфизм раздутия $\sigma: \widehat{T \times S} \rightarrow T \times S$ когерентного пучка идеалов $\mathbb{I} = \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_{T \times S})$. Применяя к (1.2) дуализацию и функтор обратного образа при морфизме σ , определим пучки

$$A = \ker(\sigma^*E_1^\vee \rightarrow \sigma^*\mathcal{E}xt^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_{T \times S})), \quad \widehat{\mathbb{E}} = (\ker(\sigma^*E_0^\vee \rightarrow A))^\vee.$$

Согласно [5] они локально свободны. Имеет место следующая точная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 & & \tau & & & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & A^\vee & \longrightarrow & \sigma^* E_0 & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{E}} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow = & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \sigma^* E_1 & \longrightarrow & \sigma^* E_0 & \longrightarrow & \sigma^* \widehat{\mathbb{E}} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow \\
 & & 0 & & & & \tau \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & 0
 \end{array} \tag{1.3}$$

где символом τ обозначен $\mathcal{O}_{\widehat{T \times S}}$ -пучок кручения $\mathcal{E}xt^1(\sigma^* \mathcal{E}xt^1(\widehat{\mathbb{E}}, \mathcal{O}_{T \times S}), \mathcal{O}_{\widehat{T \times S}})$. Правая вертикальная тройка в (1.3) приводит к выражению $\widehat{\mathbb{E}} = \sigma^* \widehat{\mathbb{E}} / \tau$. Рассмотрим ограничение этого равенства на слой $\mathrm{pr}^{-1}(t) = \widetilde{S}$ композиции

$$\mathrm{pr}: \widehat{T \times S} \xrightarrow{\sigma} T \times S \xrightarrow{\pi} T$$

в замкнутой точке $t \in T$. Пусть $i_t: \mathrm{pr}^{-1}(t) \hookrightarrow \widehat{T \times S}$ – морфизм вложения слоя. Тогда имеем морфизм слоя $\sigma: \widetilde{S} \rightarrow S$, изоморфизмы $i_t^* \sigma^* \widehat{\mathbb{E}} = \sigma^* E$ и $i_t^* \widehat{\mathbb{E}} = \widetilde{E}$. Поскольку пучок $\widehat{\mathbb{E}}$ локально свободен как пучок $\mathcal{O}_{\widehat{T \times S}}$ -модулей, то и пучок $\widetilde{E}$ локально свободен как пучок $\mathcal{O}_{\widetilde{S}}$ -модулей.

В ситуации, когда $\widetilde{S}$ – приведенная схема, ограничение правой вертикальной тройки в (1.3) на слой $\widetilde{S}$ поставляет изоморфизм $\widetilde{E} = \sigma^* E / \mathrm{tors}$.

В общем случае (возможно, неприведенной) схемы $\widetilde{S}$ рассмотрим ее разложение в объединение неприводимых компонент $\widetilde{S} = \bigcup \widetilde{S}_i$, где $\widetilde{S}_0$ – ее главная компонента. Она имеет структуру приведенной схемы. Дополнительные компоненты $\widetilde{S}_i, i > 0$, могут не быть приведенными. Пусть U – открытое по Зарискому подмножество одной из компонент $\widetilde{S}_i, i \geq 0$, и $\sigma^* E|_{\widetilde{S}_i}(U)$ – соответствующая группа сечений, являющаяся $\mathcal{O}_{\widetilde{S}_i}(U)$ -модулем. Сечения $s \in \sigma^* E|_{\widetilde{S}_i}(U)$, аннулируемые простыми идеалами положительной коразмерности в $\mathcal{O}_{\widetilde{S}_i}(U)$, образуют подмодуль в $\sigma^* E|_{\widetilde{S}_i}(U)$, который будем обозначать $\mathrm{tors}_i(U)$. Соответствие $U \mapsto \mathrm{tors}_i(U)$ определяет подпучок $\mathrm{tors}_i \subset \sigma^* E|_{\widetilde{S}_i}$. Заметим, что ассоциированные простые идеалы положительной коразмерности, аннулирующие сечения $s \in \sigma^* E|_{\widetilde{S}_i}(U)$, соответствуют подсхемам с носителями в прообразе $\sigma^{-1}(\mathrm{Supp} \kappa) = \bigcup_{i > 0} \widetilde{S}_i$. Поскольку по построению схема $\widetilde{S} = \bigcup_{i \geq 0} \widetilde{S}_i$ связна, то подпучки $\mathrm{tors}_i, i \geq 0$, позволяют построить подпучок $\mathrm{tors} \subset \sigma^* E$. Последний определяется следующим образом. Сечение $s \in \sigma^* E|_{\widetilde{S}_i}(U)$ удовлетворяет условию $s \in \mathrm{tors}_i|_{\widetilde{S}_i}(U)$ тогда и только тогда, когда:

- существует сечение $y \in \mathcal{O}_{\tilde{S}_i}(U)$ такое, что $ys = 0$;
- выполнено хотя бы одно из двух условий: либо $y \in \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ – простой идеал положительной коразмерности; либо существуют открытое по Зарискому подмножество $V \subset \tilde{S}$ и сечение $s' \in \sigma^*E(V)$ такие, что $V \supset U$, $s'|_U = s$ и $s'|_{V \cap \tilde{S}_0} \in \text{tors}(\sigma^*E|_{\tilde{S}_0})(V \cap \tilde{S}_0)$ (в последнем выражении подпучок кручения $\text{tors}(\sigma^*E|_{\tilde{S}_0})$ понимается в обычном смысле).

Подпучок $\text{tors} \subset \sigma^*E$ играет в нашей конструкции роль, аналогичную роли подпучка кручения в случае приведенной и неприводимой базисной схемы. Поскольку путаница исключена, то tors всюду понимается в указанном смысле, а подпучок tors называется *подпучком кручения*.

Рассмотрим эпиморфизм $\varpi: \sigma^*E \rightarrow \tilde{E}$, определяемый ограничением эпиморфизма $\sigma^*\mathbb{E} \rightarrow \tilde{\mathbb{E}}$ на слой $\tilde{S}$. Ясно, что $\text{tors} \subset \ker \varpi$. Заметим, что $\ker \varpi$ аннулируется локальными сечениями, принадлежащими идеалам положительной коразмерности на компоненте $\tilde{S}_i$, $i > 0$, либо при ограничении на компоненту $\tilde{S}_0$. Отсюда заключаем, что $\ker \varpi \subset \text{tors}$ и $\tilde{E} = \sigma^*E/\text{tors}$, что и требовалось.

В [7] показано, что слой композиции $\widehat{T \times S} \xrightarrow{\sigma} T \times S \xrightarrow{\pi} T$ в точке $t \in T$ имеет вид схемы $\tilde{S} = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t^{s+1})$ для $I = \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(\mathbb{E}|_t, \mathcal{O}_{t \times S})$.

Поведение векторных расслоений $\tilde{E}$ на дополнительных компонентах $\tilde{S}_i \subset \tilde{S}$, $i > 0$, дается следующим простым вычислением. Стандартная точная тройка (1.1) переводится функтором обратного образа в точную тройку

$$0 \rightarrow \sigma^*E/\text{tors} \rightarrow \sigma^*E^{\vee\vee} \rightarrow \sigma^*\mathcal{K} \rightarrow 0. \quad (1.4)$$

В подходящей окрестности $U \subset S$ носителя $\text{Supp } \mathcal{K}$ локально свободный пучок $E^{\vee\vee}|_U$ может быть заменен локальной тривиализацией $\mathcal{O}_U^{\oplus r}$. Точная тройка (1.4) на прообразе $\sigma^{-1}U$ примет вид

$$0 \rightarrow \tilde{E}|_{\sigma^{-1}U} \rightarrow (\sigma^*\mathcal{O}_U)^{\oplus r} \rightarrow \sigma^*\mathcal{K} \rightarrow 0.$$

Поскольку $\tilde{S}_i \subset \sigma^{-1}U$ при $i > 0$, то при ограничении на каждую из дополнительных компонент $\tilde{S}_i$ имеем

$$0 \rightarrow \tilde{E}_i \rightarrow \sigma_i^*\mathcal{O}_S^{\oplus r} \rightarrow \sigma_i^*\mathcal{K} \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

Пусть $q_0: \mathcal{O}_S^{\oplus r} \rightarrow \mathcal{K}$ – морфизм, индуцированный точной тройкой (1.1). Тогда пучок $\tilde{E}_i$ дается соотношением

$$\tilde{E}_i = \ker \sigma_i^*q_0. \quad (1.6)$$

Более того, согласно предложению 1 для всевозможных полустабильных когерентных пучков E с фиксированным многочленом Гильберта $rp_E(m)$ все пучки $\tilde{E}_i$ на дополнительных компонентах $\tilde{S}_i$ могут быть описаны соотношениями вида (1.6) для подходящих $q_0 \in \prod_{l \leq c_2} \text{Quot}^l \mathcal{O}_S^{\oplus r}$.

§ 2. Стандартное разрешение и грассманианы

В работах [4]–[6] дана и обоснована (в различных вариантах) конструкция преобразования плоского над (квази)проективной базой T семейства $\mathbb{E}$ когерентных пучков гомологической размерности 1 без кручения на поверхности S

в плоское семейство схем над базой $\tilde{T}$, оснащенное локально свободным пучком $\tilde{\mathbb{E}}$. При этом схема $\tilde{T}$ бирациональна схеме T .

Для дальнейшего необходимо обратиться к построению схемы Гизекера–Маруямы методами геометрической теории инвариантов. Пусть E – полустабильный когерентный пучок без кручения с многочленом Гильберта, равным $rp_E(t)$, $H^0(S, E \otimes L^m) = V$ – k -векторное пространство глобальных сечений, причем пучок $E \otimes L^m$ порожден глобальными сечениями. Рассмотрим Quot-схему Гротендика $\text{Quot}^{rp_E(t)}(V \otimes L^{(-m)})$, параметризующую факторпучки вида

$$V \otimes L^{(-m)} \twoheadrightarrow E, \quad (2.1)$$

имеющие многочлен Гильберта $\chi(E \otimes L^t) = rp_E(t)$. Поскольку семейства полустабильных по Гизекеру когерентных пучков E на поверхности S с фиксированным многочленом Гильберта $rp_E(t)$ ограничены, то существует (общее для всех E) целое m_0 такое, что при $m > m_0$ все пучки $E \otimes L^m$ порождены своими глобальными сечениями, причем для всех E векторные пространства $H^0(S, E \otimes L^m)$ имеют размерность $rp_E(m)$. Тогда все полустабильные когерентные пучки E рассматриваемого класса могут быть реализованы как факторпучки вида (2.1). Проективная схема $\text{Quot}^{rp_E(t)}(V \otimes L^{(-m)})$ содержит квазипроективную подсхему Q' , точки которой отвечают полустабильным по Гизекеру факторпучкам E в (2.1), для которых имеет место изоморфизм $H^0(S, E \otimes L^m) \cong V$. Схема $\bar{M}$ получается как GIT-фактор подмножества GIT-полустабильных точек квазипроективной подсхемы $Q' \subset \text{Quot}^{rp_E(t)}(V \otimes L^{(-m)})$ по действию группы $\text{PGL}(V)$, индуцированному выбором базисов пространства V . Пусть Q – компонента или объединение компонент в Q' , соответствующих тем компонентам схемы $\bar{M}$, которые содержат локально свободные пучки. Схема $\text{Quot}^{rp_E(t)}(V \otimes L^{(-m)})$ снабжена универсальным семейством факторпучков $\mathbb{E}_{\text{Quot}}$; пусть $\mathbb{E}_Q := \mathbb{E}_{\text{Quot}}|_Q$ – его ограничение на подсхему Q .

К паре $(Q, \mathbb{E}_Q)$ применимы конструкции работы [6]. В частности, повторяя доказательство предложения 1.2 из [6] и конструкции § 2 из [6] и выбрав в качестве базы семейства пучков квазипроективную схему Q , получим следующее:

- $\tilde{Q}$ – квазипроективная схема;
- $\phi: \tilde{Q} \rightarrow Q$ – бирациональный проективный морфизм;
- $\tilde{\Sigma}_Q \xrightarrow{\pi} \tilde{Q}$ – плоское семейство схем;
- $\tilde{\mathbb{E}}_Q$ – локально свободный пучок на схеме $\tilde{\Sigma}_Q$;
- $\Phi: \tilde{\Sigma}_Q \rightarrow \Sigma_Q$ – бирациональный проективный морфизм на произведение $\Sigma_Q = Q \times S$, причем $(\Phi_* \tilde{\mathbb{E}}_Q)^{\vee\vee} = \mathbb{E}_Q$ (аналог предложения 2.9 из [6]);
- для вложения $\tilde{\Delta} = \tilde{Q} \times S \hookrightarrow \tilde{Q} \times \Sigma_Q$, задаваемого замыканием образа диагонального вложения $Q_0 \times S \hookrightarrow Q_0 \times \pi^{-1}(Q_0)$, имеет место явное описание морфизма ϕ (аналог следствия 2.10 в [6])

$$\phi: \tilde{Q} \rightarrow Q:$$

$$\tilde{y} \mapsto ((\text{id}_{\tilde{Q}}, \Phi)_* \mathcal{O}_{\tilde{Q}} \boxtimes \tilde{\mathbb{E}}_Q)^{\vee\vee}|_{\tilde{\Delta}}|_{\tilde{y} \times S}.$$

Всюду далее $\tilde{\mathbb{L}}_Q \in \text{Pic } \tilde{\Sigma}_Q$ – обратимый пучок, очень обильный относительно базы $\tilde{Q}$, по отношению к которому слои семейства $\tilde{\Sigma}_Q$ имеют постоянный

многочлен Гильберта, а также $\chi(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q|_{\pi^{-1}(\tilde{q})})$ не зависит от выбора точки $\tilde{q} \in \tilde{Q}$.

Будем считать, что пучок $\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m$ глобально порожден на слоях морфизма π . Тогда $\pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m)$ будет локально свободным пучком ранга $rp_E(m)$ на схеме $\tilde{Q}$. Сформируем расслоение Грассмана $\text{Grass}(\pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m), r)$ факторпространств размерности r слоев векторного расслоения $\pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m)$. Слой расслоения Грассмана $\text{Grass}(\pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m), r)$ изоморфен обыкновенному грассманиану $G(V, r)$.

Векторное расслоение $\pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m)$ локально тривиально. Зафиксируем любое конечное тривиализующее открытое покрытие $\tilde{Q} = \bigcup_i U_i$ вместе с тривиализующими изоморфизмами

$$\tau_i: \pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m)|_{U_i} \xrightarrow{\sim} V \otimes \mathcal{O}_{U_i}.$$

В этом случае имеется индуцированная тривиализация расслоения Грассмана $\text{Grass}(\pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m), r)$:

$$\begin{aligned} \text{Grass}(\tau_i): \text{Grass}(\pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m), r)|_{U_i} \\ \cong \text{Grass}(\pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m)|_{U_i}, r) \xrightarrow{\sim} \text{Grass}(V \otimes \mathcal{O}_{U_i}, r) \cong G(V, r) \times U_i, \end{aligned}$$

где стрелка индуцирована морфизмом τ_i^{-1} . При этом данные склейки, определенные на пересечениях $U_{ij} = U_i \cap U_j$ композициями вида

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} &= \text{Grass}(\tau_i) \circ \text{Grass}(\tau_j)^{-1}: \\ G(V, r) \times U_{ij} &\rightarrow \text{Grass}(\pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m)|_{U_{ij}}, r) \rightarrow G(V, r) \times U_{ij}, \end{aligned}$$

задаются элементами группы $\text{GL}(V)$, действующими на пространстве V линейными преобразованиями. Соответствующее действие тех же элементов на грассманиане $G(V, r)$ пропускается через действие проективной группы $\text{PGL}(V)$.

Итак, для любого элемента U_i тривиализующего покрытия схемы $\tilde{Q}$ и ограничения $\tilde{\Sigma}_i = \tilde{\Sigma}_Q|_{U_i}$ семейства $\tilde{\Sigma}_Q$ определен морфизм

$$\tilde{\Sigma}_i \rightarrow \text{Grass}(\pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m), r)|_{U_i},$$

при ограничении на слой структурного морфизма грассманиана при $m \gg 0$ являющийся вложением. Применение тривиализующего изоморфизма $\text{Grass}(\tau_i)$ приводит к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Sigma}_i & \longrightarrow & G(V, r) \times U_i \xrightarrow{\text{pr}_1} G(V, r) \\ \pi_i \downarrow & \swarrow \text{pr}_2 & \\ U_i & & \end{array}$$

Горизонтальная композиция при ограничении на любой слой $\tilde{S}_{\tilde{q}} = \pi_i^{-1}(\tilde{q})$ проекции π_i поставляет вложение $j_{\tilde{q}}: \tilde{S}_{\tilde{q}} \hookrightarrow G(V, r)$ схемы $\tilde{S}_{\tilde{q}}$ в грассманиан $G(V, r)$.

Образ $j_{\tilde{q}}^*(\tilde{S}_{\tilde{q}})$ является замкнутой в $G(V, r)$ подсхемой с многочленом Гильберта $\chi(j_{\tilde{q}}^* \mathcal{O}_{G(V, r)}(t))$, постоянным для всех слоев, всех элементов покрытия и одинаковым для всех тривиализующих покрытий. Обозначим его $P(t)$.

Пусть $\text{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$ – схема Гильберта подсхем в $G(V, r)$, имеющих многочлен Гильберта, равный $P(t)$. Для каждого элемента U_i тривиализующего покрытия имеют место отображение

$$\tilde{\mu}_i: \tilde{\Sigma}_i \rightarrow \text{Univ}^{P(t)} G(V, r)$$

в универсальную подсхему $\text{Univ}^{P(t)} G(V, r) \subset \text{Hilb}^{P(t)} G(V, r) \times G(V, r)$ и отображение

$$\mu_i: U_i \rightarrow \text{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$$

базы U_i в схему Гильберта, включаемые в расслоенный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Sigma}_i & \xrightarrow{\tilde{\mu}_i} & \text{Univ}^{P(t)} G(V, r) \\ \pi_i \downarrow & & \downarrow \pi_H \\ U_i & \xrightarrow{\mu_i} & \text{Hilb}^{P(t)} G(V, r) \end{array}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку U_i – квазипроективные схемы и $\text{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$ – проективная схема, то μ_i – квазипроективные морфизмы.

Пусть T – регулярная схема размерности 1; введем обозначение $\Sigma = T \times S$. Пусть также $\mathbb{E}$ – плоское семейство когерентных полустабильных пучков без кручения на поляризованной поверхности (S, L) , параметризованное схемой T , с фиксированным многочленом Гильберта $rp_E(t)$. Пусть $T_0 \subset T$ – непустое открытое подмножество такое, что на его прообразе $\pi^{-1}(T_0) = \Sigma_0 \subset \Sigma$ пучок $\mathbb{E}_0 = \mathbb{E}|_{\Sigma_0}$ локально свободен. Рассмотрим раздутие $\sigma: \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ пучка идеалов $\mathbb{I} = \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_{\Sigma})$. Композиция $\hat{\Sigma} \xrightarrow{\sigma} \Sigma \xrightarrow{\pi} T$ является плоским проективным морфизмом, поскольку ее слои – проективные схемы, $\hat{\Sigma}$ – неприводимая схема, T – регулярная схема размерности 1. Ясно, что $\hat{\Sigma}_0 = \sigma^{-1}\Sigma_0 \cong \Sigma_0$. Для любого $x \in T_0$ определено индуцированное пучком $\mathbb{E}_0|_{x \times S} = E_x$ вложение $j_x: S \hookrightarrow G(V, r)$. Композиция этого вложения с вложением Плюккера $\text{Pl}: G(V, r) \hookrightarrow P(\bigwedge^r V)$ выделяет очень обильный обратимый пучок

$$L_E = j_x^* \mathcal{O}_{G(V, r)}(1) = j_x^* \text{Pl}^* \mathcal{O}_{P(\bigwedge^r V)}(1).$$

Композиция $j_x \circ \text{Pl}: S \hookrightarrow P(\bigwedge^r V)$ задана композицией морфизмов пучков

$$\begin{aligned} \bigwedge^r V \otimes \mathcal{O}_S &\xrightarrow{\sim} \bigwedge^r H^0(S, E \otimes L^m) \otimes \mathcal{O}_S \\ &\rightarrow H^0\left(S, \bigwedge^r (E \otimes L^m)\right) \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow \bigwedge^r (E \otimes L^m). \end{aligned}$$

При этом эпиморфность двух последних отображений обеспечивается выбором $m \gg 0$. Тем же гарантирован тот факт, что пучок $\bigwedge^r(E \otimes L^m)$ очень обилен. Из конструкции морфизма $j_x \circ \text{Pl}$ следует, что

$$L_E = \bigwedge^r(E \otimes L^m) = L^{mr} \otimes \det E.$$

В дальнейшем мы не будем делать в обозначениях различия между первым классом Чжэня $c_1 = c_1(E)$ и его образом в группе Пикара поверхности S и будем писать, например, $L_E = L^{mr} \otimes c_1$.

Подсхема $\hat{\Sigma}_0 = T_0 \times S$ обладает вложением в относительное проективное пространство $P(\bigwedge^r \pi_* (\mathbb{E}_0 \otimes \mathbb{L}_0^m)) \cong P(\bigwedge^r V) \times T_0$. Вложение задано очень обильным относительно T_0 пучком $\mathbb{L}_E = L_E \boxtimes \mathcal{O}_{T_0}$ и включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_0 & \hookrightarrow & P\left(\bigwedge^r \pi_* (\mathbb{E}_0 \otimes \mathbb{L}_0^m)\right) \\ & \searrow \pi & \downarrow p \\ & & T_0 \end{array} \quad (2.2)$$

Здесь и далее $\mathbb{L}_0 := L \boxtimes \mathcal{O}_{T_0}$ – обратимый $\mathcal{O}_{\Sigma_0}$ -пучок, очень обильный относительно T_0 .

Заметим, что схема $\hat{\Sigma}$ оснащена локально свободным пучком $\hat{\mathbb{E}}$. Он является плоским над базой T .

Также заметим, что при $m \gg 0$ существует эпиморфизм $V \otimes \mathbb{L}_0^{(-m)} \rightarrow \mathbb{E}_0$. Зафиксируем его. Тем самым, имеется морфизм

$$\nu_0: T_0 \rightarrow \text{Quot}^{r p_E(t)}(V \otimes L^{(-m)})$$

базы T_0 в Quot-схему Гротендика $\text{Quot}^{r p_E(t)}(V \otimes L^{(-m)})$. Поскольку пучок $\mathbb{E}$ послойно полустабилен, то без ограничения общности можно считать, что $\nu_0(T_0) \subset Q$. Пусть $\tilde{T} = T \times_Q \tilde{Q}$ и $\nu: \tilde{T} \rightarrow \tilde{Q}$ – соответствующий морфизм. Тогда для прообраза $\tilde{\Sigma} = \hat{\Sigma} \times_T \tilde{T}$ семейства $\hat{\Sigma}$ по универсальности схемы Гильберта $\text{Hilb}^{P(t)} \text{Grass}(\pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m), r)$ имеем расслоенную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \text{Univ}^{P(t)} \text{Grass}(\pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m), r) & \xleftarrow{\tilde{\mu}} & \tilde{\Sigma}_Q & \xleftarrow{\tilde{\nu}} & \tilde{\Sigma} \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \pi \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hilb}^{P(t)} \text{Grass}(\pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m), r) & \xleftarrow{\mu} & \tilde{Q} & \xleftarrow{\nu} & \tilde{T} \end{array}$$

Пусть $\tilde{\mathbb{L}} = \tilde{\nu}^* \tilde{\mathbb{L}}_Q$. Одномерная база T не претерпевает бирационального преобразования, т.е. $\tilde{T} \cong T$.

Поскольку ясно, что $\mathbb{L}_0 \cong \tilde{\mathbb{L}}|_{\Sigma_0}$, то, комбинируя диаграмму (2.2) с открытым вложением

$$P\left(\bigwedge^r \pi_* (\mathbb{E}_0 \otimes \mathbb{L}_0^m)\right) \hookrightarrow P\left(\bigwedge^r \pi_* (\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m)\right)$$

и формируя замыкание $\bar{\Sigma}_0$ образа схемы Σ_0 в расслоении $P(\bigwedge^r \pi_*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m))$, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Sigma}_0 & \hookrightarrow & P\left(\bigwedge^r \pi_*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m)\right) \\ & \searrow & \downarrow p \\ & & \tilde{T} \end{array}$$

причем схема $\bar{\Sigma}_0$ совпадает на открытом подмножестве с образом схемы $\tilde{\Sigma}$. Поскольку обе схемы неприводимые и плоские над одной и той же базой $\tilde{T}$, то образ $\tilde{\Sigma}$ совпадает с $\bar{\Sigma}_0$. Это показывает, что одномерное плоское семейство $\tilde{\Sigma}$ может рассматриваться как замыкание образа его открытой подсхемы Σ_0 при вложении в проективное расслоение $P(\bigwedge^r \pi_*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m))$.

Для сравнения структуры семейств $\tilde{\Sigma}$ и $\bar{\Sigma}_0$ и поляризаций на их слоях построим вложения обоих семейств в одно и то же относительное проективное пространство. Во-первых, рассмотрим композицию вложения в относительный грассманиан с плюккеровым вложением и коммутативный треугольник

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Sigma}_Q & \xrightarrow{j} \text{Grass}(\pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m), r) \xrightarrow{\text{Pl}} P\left(\bigwedge^r \pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m)\right) \\ & \searrow \pi & \downarrow p \\ & & \tilde{Q} \end{array} \quad (2.3)$$

Здесь π – плоский морфизм, $\tilde{\mathbb{L}}_Q^m$ – обратимый пучок, очень обильный относительно $\tilde{Q}$. Во-вторых, морфизм ν индуцирует расслоенный квадрат

$$\begin{array}{ccc} P\left(\bigwedge^r \pi_*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m)\right) & \longrightarrow & P\left(\bigwedge^r \pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m)\right) \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \tilde{T} & \xrightarrow{\nu} & \tilde{Q} \end{array}$$

Комбинирование двух последних диаграмм

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{\Sigma}_Q & \xrightarrow{\text{Pl} \circ j} & P\left(\bigwedge^r \pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m)\right) \\ & \nearrow & & \searrow \pi & \downarrow p \\ \tilde{\Sigma} & \hookrightarrow & P\left(\bigwedge^r \pi_*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m)\right) & & \tilde{Q} \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow \nu & \\ & & \tilde{T} & & \end{array} \quad (2.4)$$

показывает, что для вычисления выделенных поляризаций на слоях семейства $\tilde{\Sigma}_Q$ можно пользоваться однопараметрическими семействами вида $\tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{T}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Существуют $\mathrm{PGL}(V)$ -инвариантные морфизмы*

$$\tilde{\mu}: \tilde{\Sigma}_Q \rightarrow \mathrm{Univ}^{P(t)} G(V, r), \quad \mu: \tilde{Q} \rightarrow \mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r),$$

включаемые в расслоенную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{\Sigma}_Q & \\
 \nearrow & \downarrow \tilde{\mu} & \searrow \\
 \tilde{\Sigma}_i & \xrightarrow{\tilde{\mu}_i} & \mathrm{Univ}^{P(t)} G(V, r) \\
 \downarrow \pi_i & \downarrow \pi & \downarrow \pi \\
 U_i & \xrightarrow{\mu_i} & \mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r)
 \end{array}
 \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Измельчая, если это необходимо, покрытие U_i , добьемся того, чтобы каждый элемент U_i имел образ $U'_i = \phi(U_i)$, который открыт в Q , причем $U_i = \phi^{-1}(U'_i)$ и подсхемы U'_i составляют покрытие схемы Q . По-прежнему покрытие схемами U_i несет тривиализацию локально свободного пучка $\pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m)$.

Схемы $Q \subset \mathrm{Quot}^{rpe(t)}(V \otimes L^{(-m)})$ и $\mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$ снабжены действиями группы $\mathrm{PGL}(V)$, индуцированными линейными преобразованиями векторного пространства V . Пусть

$$\alpha: \mathrm{PGL}(V) \times Q \rightarrow Q,$$

$$\beta: \mathrm{PGL}(V) \times \mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r) \rightarrow \mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$$

– соответствующие морфизмы. Будем обозначать теми же символами ограничения этих морфизмов на любые подмножества. Сокращение $\mathrm{PGL}(V) \star U$ обозначает $\alpha(U \times \mathrm{PGL}(V))$ или $\beta(U \times \mathrm{PGL}(V))$ соответственно. Ясно, что множества вида $\mathrm{PGL}(V) \star U$ являются $\mathrm{PGL}(V)$ -инвариантными.

Открытые подсхемы U'_i и U_i , хотя а priori не являются $\mathrm{PGL}(V)$ -инвариантными, порождают следующую расслоенную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{PGL}(V) \times U'_i & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{PGL}(V) \star U'_i \\
 \uparrow 1 \times \phi & & \uparrow \phi \\
 \mathrm{PGL}(V) \times U_i & \xrightleftharpoons[\beta']{\alpha'} & \mathrm{PGL}(V) \star U_i \\
 \downarrow 1 \times \mu_i & & \downarrow \mu_i \\
 \mathrm{PGL}(V) \times \mu_i(U_i) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{PGL}(V) \star \mu_i(U_i)
 \end{array}
 \quad (2.6)$$

в которой $\alpha' = \beta'$ по определению действий α и β . Поэтому схема $\tilde{Q}$ представима в виде

$$\tilde{Q} = \bigcup_i \mathrm{PGL}(V) \star \phi^{-1}(U'_i) = \bigcup_i \mathrm{PGL}(V) \star U_i.$$

В силу (2.6) получим морфизмы

$$\begin{array}{ccccc} \bigcup_i \mathrm{PGL}(V) \star \mu_i(U_i) & \xleftarrow{\mu} & \bigcup_i \mathrm{PGL}(V) \star U_i & \xrightarrow{\phi} & \bigcup_i \mathrm{PGL}(V) \star U'_i \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mu(\tilde{Q}) & & \tilde{Q} & & Q \end{array}$$

Морфизм $\mu := \bigcup_i \mathrm{PGL}(V) \star \mu_i$ определяется отображениями μ_i и их композициями с действием группы; в силу центрального знака равенства связные компоненты схемы $\tilde{Q}$ отображением $\bigcup_i \mathrm{PGL}(V) \star \mu_i$ переводятся в связные множества, поэтому определение морфизма μ корректно. Поскольку морфизмы μ_i по определению эквивариантны, то подсхема $\mu(\tilde{Q}) \subset \mathrm{PGL}(V)$ -инвариантна в $\mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$.

Универсальное свойство схемы Гильберта гарантирует существование морфизма $\tilde{\mu}$ и расслоенной диаграммы (2.5).

Следующий простой результат обеспечивает независимость схемы модулей $\tilde{M}$ от выбора покрытия схемы $\tilde{Q}$, тривиализующего локально свободный пучок $\pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Подсхема $\mu(\tilde{Q}) \subset \mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$ не зависит от выбора покрытия $\bigcup_i U_i = \tilde{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем другое покрытие $\tilde{Q} = \bigcup_j \tilde{U}_j$ с тривиализующими изоморфизмами

$$\tilde{\tau}_j: \pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m)|_{\tilde{U}_j} \xrightarrow{\sim} V \otimes \mathcal{O}_{\tilde{U}_j}$$

и повторим процедуру построения подсхемы $\mu(\tilde{Q})$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \bigcup_j \mathrm{PGL}(V) \star \tilde{U}'_j &= \bigcup_i \mathrm{PGL}(V) \star U'_i = Q, \\ \bigcup_j \mathrm{PGL}(V) \star \tilde{U}_j &= \bigcup_i \mathrm{PGL}(V) \star U_i = \tilde{Q}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим пересечение $U_i \cap \tilde{U}_j$ и индуцированные изоморфизмы тривиализации

$$V \otimes \mathcal{O}_{U_i \cap \tilde{U}_j} \xleftarrow[\sim]{\tau_i} \pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m)|_{U_i \cap \tilde{U}_j} \xrightarrow[\sim]{\tilde{\tau}_j} V \otimes \mathcal{O}_{U_i \cap \tilde{U}_j}.$$

Таким образом, на общей части $U_i \cap \tilde{U}_j$ тривиализации отождествляются подходящим $\mathrm{GL}(V)$ -преобразованием. Следовательно, образы индуцированных

отображений схемы $U_i \cap \tilde{U}_j$ в схему Гильберта $\mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$ отождествляются соответствующим $\mathrm{PGL}(V)$ -преобразованием. Тогда имеем

$$\bigcup_i \mathrm{PGL}(V) \star \mu_i(U_i) = \bigcup_j \mathrm{PGL}(V) \star \tilde{\mu}_j(\tilde{U}_j) = \mu(\tilde{Q}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. $\mu(\tilde{Q})$ – квазипроективная подсхема в $\mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образует замыкание $\overline{\mu(\tilde{Q})}$ подсхемы $\mu(\tilde{Q})$ в проективной схеме $\mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$. Для доказательства предложения достаточно убедиться в том, что подмножество $\mu(\tilde{Q})$ открыто в $\overline{\mu(\tilde{Q})}$.

Пусть $\bar{Q}$ – схемное замыкание подсхемы Q в $\mathrm{Quot}^{rPE(t)}(V \otimes L^{(-m)})$, $\bar{Q}$ – проективное замыкание квазипроективной схемы $\tilde{Q}$. Утверждается, что схема $\bar{Q}$ может быть выбрана так, что имеет место расслоенная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \mu(\tilde{Q}) & \xleftarrow{\mu} & \tilde{Q} & \xrightarrow{\phi} & Q \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mu(\tilde{Q})} & \xleftarrow{\bar{\mu}} & \bar{Q} & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \bar{Q} \end{array} \quad (2.7)$$

в которой вложения открыты.

Действительно, пусть схема $\bar{Q}$ не включается в диаграмму (2.7). Рассмотрим локально замкнутое “диагональное” вложение $\tilde{Q} \hookrightarrow \overline{\mu(\tilde{Q})} \times \bar{Q}$; пусть Q' – замыкание его образа. Теперь образуем локально замкнутое вложение $\tilde{Q} \hookrightarrow Q' \times \bar{Q}$, и пусть Q'' – замыкание его образа. Переобозначив $\bar{Q}_1 := Q''$, получим искомое проективное замыкание. Морфизмы $\bar{\mu}$ и $\bar{\phi}$ даются композициями замкнутых вложений и проекций на прямые сомножители:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}: \bar{Q}_1 &\hookrightarrow Q' \times \bar{Q} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} Q' \hookrightarrow \overline{\mu(\tilde{Q})} \times \bar{Q} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \overline{\mu(\tilde{Q})}, \\ \bar{\phi}: \bar{Q}_1 &\hookrightarrow Q' \times \bar{Q} \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \bar{Q}. \end{aligned}$$

Тогда $\bar{Q}_1$ – искомое проективное замыкание, которое будем обозначать символом $\bar{\bar{Q}}$.

Теперь необходима

ЛЕММА 1. *Выполнено равенство $\overline{\mu(\tilde{Q})} \setminus \mu(\tilde{Q}) = \bar{\mu}(\bar{Q} \setminus \tilde{Q})$.*

Так как схема $\tilde{Q}$ квазипроективна, то “граница” $\bar{Q} \setminus \tilde{Q}$ замкнута в $\bar{Q}$. Поскольку морфизм $\bar{\mu}$ проективен, он является собственным и переводит замкнутые подмножества в замкнутые. Таким образом, образ $\bar{\mu}(\bar{Q} \setminus \tilde{Q})$ замкнут в $\bar{\mu}(\bar{Q})$. В силу леммы 1 подмножество $\overline{\mu(\tilde{Q})} \setminus \mu(\tilde{Q})$ замкнуто в $\bar{\mu}(\bar{Q})$. Следовательно, подмножество $\mu(\tilde{Q})$ открыто в проективной схеме $\bar{\mu}(\bar{Q})$. Таким образом, $\mu(\tilde{Q})$ – квазипроективная схема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Достаточно проверить теоретико-множественное равенство. Включение $\overline{\mu(\tilde{Q})} \setminus \mu(\tilde{Q}) \supset \overline{\mu}(\tilde{Q} \setminus \tilde{Q})$ следует сразу же из построения. Для доказательства обратного включения предположим, что в прообразе $\overline{\mu}^{-1}(\mu(\tilde{Q}) \setminus \mu(\tilde{Q}))$ “границы” есть “неграничная” точка, т.е. точка x , не принадлежащая подмножеству $\tilde{Q} \setminus \tilde{Q}$. Значит, $x \in \tilde{Q}$, но тогда $\overline{\mu}(x) \in \mu(\tilde{Q})$. Полученное противоречие доказывает лемму.

§ 3. Выделенная поляризация схемы $\tilde{S}$

В этом параграфе получен явный вид выделенной поляризации на схеме $\tilde{S}$. Поскольку последняя может не быть многообразием, то мы будем работать с очень обильными обратимыми пучками вместо классов дивизоров. Свойства морфизма $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$, поскольку он является структурным морфизмом проективного спектра подходящего пучка алгебр, во многом аналогичны свойствам морфизма раздутия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Выделенные поляризации $\tilde{L}$ схем вида $\tilde{S}$, указанные в определении 5, ставят в плоских семействах допустимых схем многочлен Гильберта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (2.4) можно работать над регулярной одномерной базой T . Пусть $\Sigma := T \times S$ – тривиальное семейство поверхностей S , снабженное плоским семейством $\mathbb{E}$ полустабильных когерентных пучков без кручения с предписанным многочленом Гильберта $rp_E(t)$. Пусть

$$\mathbb{I} = \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_\Sigma)$$

и $\sigma: \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ – морфизм раздутия схемы Σ в пучке идеалов $\mathbb{I}$. Поскольку σ – проективный морфизм, то существуют проективное расслоение $p: \mathbb{P}_\Sigma \rightarrow \Sigma$ и морфизм замкнутого вложения $i: \hat{\Sigma} \hookrightarrow \mathbb{P}_\Sigma$ такие, что треугольник

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Sigma} & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}_\Sigma \\ & \searrow \sigma & \downarrow p \\ & & \Sigma \end{array}$$

коммутативен. Действительно, так как $\mathbb{I}$ – конечно порожденный $\mathcal{O}_\Sigma$ -модуль, то существуют локально свободный $\mathcal{O}_\Sigma$ -пучок конечного ранга F и эпиморфизм $\mathcal{O}_\Sigma$ -модулей $F \rightarrow \mathbb{I}$. Тогда определены индуцированный эпиморфизм симметрических алгебр $Sym F \rightarrow \bigoplus_{s \geq 0} \mathbb{I}^s$ и, следовательно, индуцированный морфизм вложения проективных спектров

$$\hat{\Sigma} = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} \mathbb{I}^s \xrightarrow{i} \mathbb{P}_\Sigma = \text{Proj} Sym F.$$

Теперь рассмотрим композицию $\mathbb{P}_\Sigma \xrightarrow{p} \Sigma \xrightarrow{\pi} T$ проективных морфизмов. По-прежнему $\mathbb{L}$ – обратимый $\mathcal{O}_\Sigma$ -пучок, очень обильный относительно T , соответствующий пучку L при ограничении на любой слой проекции π . Тогда (см. [11; гл. II, упр. 7.14 (6)]) для $m \gg 0$ пучок $\mathbb{L}_T := \mathcal{O}_{\mathbb{P}_\Sigma}(1) \otimes p^* \mathbb{L}^m$

является очень обильным относительно T . Ограничение этого пучка на образ вложения i поставляет очень обильный относительно схемы T пучок $\widehat{\mathbb{L}} = i^*\mathbb{L}_T = \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}}(1) \otimes \sigma^*\mathbb{L}^m$ на схеме $\widehat{\Sigma}$. Итак, существуют проективное расслоение $p_T: \mathbb{P}_T \rightarrow T$ и замкнутое вложение $j: \widehat{\Sigma} \hookrightarrow \mathbb{P}_T$, включающиеся в коммутативный треугольник

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Sigma} & \xrightarrow{j} & \mathbb{P}_T \\ & \searrow \pi \circ p & \downarrow p_T \\ & & T \end{array}$$

При этом $\widehat{\Sigma}$ – замыкание образа открытого подмножества Σ_0 при вложении j . Следовательно (см. [11; гл. III, теорема 9.9]), многочлен Гильберта образа $j(\widehat{\Sigma})$ послойно постоянен над базой T .

Покажем, что пучок $\widehat{\mathbb{L}}$ поставляет на достаточно общем слое (изоморфном поверхности S) поляризацию, задаваемую пучком L . Ограничение на слой $\pi^{-1}(t) \cong S$ дает $\widehat{\mathbb{L}}|_{\pi^{-1}(t)} = i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_\Sigma}(1) \otimes \sigma^*\mathbb{L}^m)|_{\pi^{-1}(t)} = L^m$.

Ограничение на специальный слой $\pi^{-1}(t_0) \cong \tilde{S} \not\cong S$ приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \tilde{L}^m &:= \widehat{\mathbb{L}}|_{\pi^{-1}(t_0)} = (\mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}}(1) \otimes \sigma^*\mathbb{L}^m)|_{\pi^{-1}(t_0)} = (\sigma^{-1}\mathbb{I} \cdot \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}}) \otimes \sigma^*\mathbb{L}^m|_{\pi^{-1}(t_0)} \\ &= (\sigma^{-1}I \cdot \mathcal{O}_{\tilde{S}}) \otimes \sigma^*L^m, \end{aligned}$$

где $I \subset \mathcal{O}_S$ – пучок идеалов, получаемый при ограничении пучка $\mathbb{I}$ на слой $\pi^{-1}(t_0)$.

§ 4. Изоморфизм $H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}^m) \xrightarrow{\sim} H^0(S, E \otimes L^m)$

Такой изоморфизм, очевидно, существует, поскольку пространства глобальных сечений имеют одинаковые размерности. В этом параграфе вычислен изоморфизм $H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}^m) \xrightarrow{\sim} H^0(S, E \otimes L^m)$, выделяемый по конструкции стандартного разрешения, ставящей в соответствие когерентному пучку без кручения E пару $(\tilde{S}, \tilde{E})$. Сначала построим искомый гомоморфизм k -векторных пространств, а затем докажем, что это изоморфизм.

Далее заменим схемы Q и $\tilde{Q}$ их неособыми разрешениями $\xi: Q' \rightarrow Q$ и $\tilde{\xi}: \tilde{Q}' \rightarrow \tilde{Q}$ такими, что определен бирациональный морфизм $\phi': \tilde{Q}' \rightarrow Q'$. Семейство $\tilde{\Sigma}_Q$ заменим его прообразом $\tilde{\Sigma}' = \tilde{\Sigma}_Q \times_{\tilde{Q}} \tilde{Q}'$ и образуем обратные образы $\tilde{\mathbb{E}}'_Q = \tilde{\xi}^*\tilde{\mathbb{E}}_Q$ и $\mathbb{E}'_Q = \xi^*\mathbb{E}_Q$. Поскольку $\mu(\tilde{Q}') = \mu(\tilde{Q})$, то будем сохранять обозначения $\tilde{Q}$ и Q для неособых разрешений, $\phi: \tilde{Q} \rightarrow Q$ для соответствующего бирационального морфизма, $\tilde{\Sigma}_Q$ для семейства схем, $\mathbb{E}_Q$ и $\mathbb{E}_Q$ для семейств пучков.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Стандартное разрешение, примененное к семейству $p: Q \times S \rightarrow Q$ и семейству пучков $\mathbb{E}_Q$, в каждой паре точек $(\tilde{q}, q)$, $\tilde{q} \in \tilde{Q}$, $q = \phi(\tilde{q}) \in Q$, определяет фиксированный изоморфизм*

$$v: H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}^m) \xrightarrow{\sim} H^0(S, E \otimes L^m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что определено отображение

$$\mu: \tilde{Q} \rightarrow \text{Hilb}^{P(t)} G(V, r), \quad \tilde{\Sigma} = \pi^{-1}\mu(\tilde{Q}).$$

Следующая диаграмма фиксирует остальные обозначения:

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{\Sigma} & \xleftarrow{\tilde{\mu}} & \tilde{\Sigma}_Q & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & Q \times S \\
 \pi \downarrow & \swarrow M & \pi \downarrow & \searrow \Phi & \downarrow p \\
 \mu(\tilde{Q}) & \xleftarrow{\mu} & \tilde{Q} & \xrightarrow{\phi} & Q \\
 & \swarrow p & \swarrow p & & \swarrow p \\
 \mu(\tilde{Q}) \times S & \xleftarrow{\mu \times 1} & \tilde{Q} \times S & \xrightarrow{\phi \times 1} & Q \times S
 \end{array} \quad (4.1)$$

Все параллелограммы левой части и нижний параллелограмм правой части диаграммы расслоенные. Все морфизмы, помеченные символом π , наследуются со структурного морфизма универсальной схемы $\text{Univ}^{P(m)} G(V, r)$. Все морфизмы, помеченные символом p , являются проекциями соответствующих прямых произведений на первые сомножители.

При этом схема $Q \times S$ несет когерентный рефлексивный пучок $\mathbb{E}_Q$ гомологической размерности 1, плоский над Q . Схемы $\tilde{\Sigma}$ и $\tilde{\Sigma}_Q$ снабжены локально свободными пучками $\tilde{\mathbb{E}}$ и $\tilde{\mathbb{E}}_Q$ соответственно, причем $\tilde{\mathbb{E}}_Q = \tilde{\mu}^*\tilde{\mathbb{E}}$. На квазипроективных схемах $\tilde{\Sigma}$ и $Q \times S$ зафиксированы обратимые пучки $\tilde{\mathbb{L}}$ и $\mathbb{L}$, очень обильные относительно $\mu(\tilde{Q})$ и Q соответственно, и при этом $(\tilde{\phi}_*\tilde{\mu}^*\tilde{\mathbb{L}}^m)^{\vee\vee} = \mathbb{L}^m$. Введено обозначение $\tilde{\mathbb{L}}_Q := \tilde{\mu}^*\tilde{\mathbb{L}}$. Также согласно стандартному разрешению $(\tilde{\phi}_*\tilde{\mathbb{E}}_Q)^{\vee\vee} = \mathbb{E}_Q$. Из этого соотношения следует

ЛЕММА 2. Для подходящих очень обильных обратимых $\theta_{\tilde{Q}}$ -пучка $\tilde{\mathcal{L}}$ и θ_Q -пучка $\mathcal{L}$ таких, что $(\phi_*\tilde{\mathcal{L}})^{\vee\vee} = \mathcal{L}$, и для подходящего целого $n \gg 0$ имеет место вложение

$$(\Phi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m \otimes \pi^*\tilde{\mathcal{L}}^{nm}))^{\vee\vee} \hookrightarrow (\phi \times 1)^*(\mathbb{E}_Q \otimes \mathbb{L}^m \otimes p^*\mathcal{L}^{nm}).$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Определено вложение

$$[(\mu \times 1)^*M_*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m)]^{\vee\vee} \hookrightarrow (\phi \times 1)^*(\mathbb{E}_Q \otimes \mathbb{L}^m \otimes p^*\mathcal{L}^{nm}).$$

Доказательства леммы 2 и следствия 1 будут приведены ниже.

Последовательность замен базы согласно (4.1) приводит к цепочке

$$\begin{aligned}
 \pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \times \tilde{\mathbb{L}}^m) &= \pi_*\tilde{\mu}^*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m) \xleftarrow{\sim} \mu^*\pi_*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m) = \mu^*p_*M_*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m) \\
 &\hookrightarrow p_*(\mu \times 1)^*M_*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m)/\text{tors} \hookrightarrow p_*[(\mu \times 1)^*M_*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m)]^{\vee\vee} \\
 &\hookrightarrow p_*(\phi \times 1)^*(\mathbb{E}_Q \otimes \mathbb{L}^m \otimes p^*\mathcal{L}^{nm}).
 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Первая стрелка в (4.2) является изоморфизмом, поскольку $m \gg 0$ (см. [12; лекция 7, п. 3°]). Вторая стрелка – морфизм локально свободного пучка, и оба

пучка совпадают на открытом подмножестве. Следовательно, вторая стрелка – мономорфизм. Морфизм пучков, индуцированный вложением в рефлексивную оболочку, является вложением, поскольку пучок слева не имеет кручения. Последний морфизм имеет место в силу следствия 1.

Итак, при $m \gg 0$ имеем вложение $\mathcal{O}_{\tilde{Q}}$ -пучков

$$\Upsilon: \pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m) \hookrightarrow p_*(\phi \times 1)^*(\mathbb{E}_Q \otimes \mathbb{L}^m \otimes p^*\mathcal{L}^{nm}). \quad (4.3)$$

Оба пучка локально свободные ранга $rp_E(m)$, поскольку пучок $\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m$ плоский над $\tilde{Q}$, а пучок $\mathbb{E}_Q \otimes \mathbb{L}^m$ плоский над Q .

Поскольку π – проективный морфизм нётеровых схем, пучок $\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m$ плоский над $\tilde{Q}$ и функции $\dim H^i(\pi^{-1}(\tilde{q}), \tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m)$ при $m \gg 0$ постоянны как функции точки $\tilde{q} \in \tilde{Q}$, то по [11; гл. III, следствие 12.9] имеет место изоморфизм

$$\pi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m) \otimes k_{\tilde{q}} \cong H^0(\tilde{S}, \tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m),$$

где $\tilde{S} = \pi^{-1}(\tilde{q})$, $\tilde{q} \in \tilde{Q}$, $\tilde{\mathbb{E}} = \tilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(\tilde{q})}$. По аналогичной причине

$$p_*(\mathbb{E}_Q \otimes \mathbb{L}^m) \otimes k_q \cong H^0(S, E \otimes L^m),$$

где $S = p^{-1}(q)$, $q \in Q$, $E = \mathbb{E}|_{p^{-1}(q)}$. Полагая, что точки $\tilde{q}$ и q таковы, что $\phi(\tilde{q}) = q$, имеем индуцированный вложением (4.3) гомоморфизм векторных пространств глобальных сечений $v: H^0(\tilde{S}, \tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m) \rightarrow H^0(S, E \otimes L^m)$.

Заметим, что по построению морфизма $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$ с помощью раздутия семейства поверхностей (см. [7]) имеет место изоморфизм $\sigma^*\mathcal{O}_S = \mathcal{O}_{\tilde{S}}$. Таким образом, принимая во внимание равенство $\tilde{\mathbb{E}} = \sigma^*E/\text{tors}$, рассмотрим отображение пространств глобальных сечений

$$H^0(\sigma^*): H^0(S, E \otimes L^m) \rightarrow H^0(\tilde{S}, \sigma^*(E \otimes L^m)).$$

Оно индуцировано формированием обратного образа. Также рассмотрим отображение

$$\zeta: H^0(\tilde{S}, \sigma^*(E \otimes L^m)) \rightarrow H^0(\tilde{S}, \tilde{\mathbb{E}} \otimes \sigma^*L^m),$$

индуцированное морфизмом $\sigma^*E \rightarrow \tilde{\mathbb{E}}$, и вложение

$$\xi: H^0(\tilde{S}, \tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m) \hookrightarrow H^0(\tilde{S}, \tilde{\mathbb{E}} \otimes \sigma^*L^m),$$

индуцированное морфизмом обратимых пучков $\tilde{\mathbb{L}}^m \hookrightarrow \sigma^*L^m$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма гомоморфизмов векторных пространств

$$\begin{array}{ccc} H^0(S, E \otimes L^m) & \xrightarrow{H^0(\sigma^*)} & H^0(\tilde{S}, \sigma^*(E \otimes L^m)) \\ \uparrow v & & \downarrow \zeta \\ H^0(\tilde{S}, \tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m) & \xrightarrow{\xi} & H^0(\tilde{S}, \tilde{\mathbb{E}} \otimes \sigma^*L^m) \end{array}$$

Поскольку ξ – мономорфизм, то и v – мономорфизм. Векторные пространства $H^0(\tilde{S}, \tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m)$ и $H^0(S, E \otimes L^m)$ имеют равные размерности, поэтому v – изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Заметим, что имеет место аналог формулы $[\tilde{\phi}_* \tilde{\mathbb{E}}_Q]^{\vee\vee} = \mathbb{E}_Q$, доказываемый рассуждениями, в точности аналогичными проведенным в работе [6]. Для обратимых пучков $\tilde{\mathbb{L}}_Q$ и $\mathbb{L}$ таких, что $[\tilde{\phi}_* \tilde{\mathbb{L}}_Q]^{\vee\vee} = \mathbb{L}$, справедливо равенство $[\tilde{\phi}_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m)]^{\vee\vee} = \mathbb{E}_Q \otimes \mathbb{L}^m$. Пусть $\tilde{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{L}$ – очень обильные обратимые пучки такие, как указано в формулировке леммы.

Рассмотрим пучок

$$\Phi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q \otimes \pi^* \tilde{\mathcal{L}}^{nm}) = \Phi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q \otimes \Phi^* p^* \tilde{\mathcal{L}}^{nm}) = \Phi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q) \otimes p^* \tilde{\mathcal{L}}^{nm},$$

где первый изоморфизм справедлив в силу диаграммы (4.1), второй – в силу формулы проекции. Формируя рефлексивную оболочку, получим

$$[\Phi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q \otimes \pi^* \tilde{\mathcal{L}}^{nm})]^{\vee\vee} = [\Phi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q)]^{\vee\vee} \otimes p^* \tilde{\mathcal{L}}^{nm}.$$

Также рассмотрим другой $\mathcal{O}_{\tilde{Q} \times S}$ -пучок $(\phi \times 1)^*(\mathbb{E}_Q \otimes \mathbb{L}^m)$. Он также рефлексивен на $\tilde{Q} \times S$ (см. [5; леммы 1.2, 1.3]). Пучки $[\Phi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q)]^{\vee\vee}$ и $(\phi \times 1)^*(\mathbb{E}_Q \otimes \mathbb{L}^m)$ совпадают на тех открытых подмножествах схемы $\tilde{Q} \times S$, где они локально свободны. Такие подмножества получаются удалением из $\tilde{Q} \times S$ замкнутых подсхем коразмерности ≥ 3 . Схема $\tilde{Q} \times S$ по предположению цела и нормальна. Тогда (см. [6; следствие 1.10]) $[\Phi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q)]^{\vee\vee} = (\phi \times 1)^*(\mathbb{E}_Q \otimes \mathbb{L}^m)$. Таким образом, после тензорного умножения на обратимый пучок $p^* \tilde{\mathcal{L}}^{nm}$ имеем изоморфизм

$$[\Phi_*(\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q \otimes \pi^* \tilde{\mathcal{L}}^{nm})]^{\vee\vee} = (\phi \times 1)^*(\mathbb{E}_Q \otimes \mathbb{L}^m) \otimes p^* \tilde{\mathcal{L}}^{nm}. \quad (4.4)$$

Утверждается, что

$$p^* \tilde{\mathcal{L}}^{nm} \hookrightarrow p^* \mathcal{L}^{nm}.$$

Действительно, $\phi_* \tilde{\mathcal{L}}^{nm} \hookrightarrow (\phi_* \tilde{\mathcal{L}}^{nm})^{\vee\vee} = \mathcal{L}^{nm}$. Применение обратного образа дает $\phi^* \phi_* \tilde{\mathcal{L}}^{nm} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}^{nm}$; эпиморфность обеспечивается условием $nm \gg 0$. Тогда $\phi^* \phi_* \tilde{\mathcal{L}}^{nm} / \text{tors} = \tilde{\mathcal{L}}^{nm}$, откуда $\tilde{\mathcal{L}}^{nm} = \phi^* \phi_* \tilde{\mathcal{L}}^{nm} / \text{tors} \hookrightarrow \phi^* \mathcal{L}^{nm}$. Умножая тензорно это вложение на правую часть (4.4), получим

$$\begin{aligned} (\phi \times 1)^*(\mathbb{E}_Q \otimes \mathbb{L}^m) \otimes p^* \tilde{\mathcal{L}}^{nm} &\hookrightarrow (\phi \times 1)^*(\mathbb{E}_Q \otimes \mathbb{L}^m) \otimes p^* \phi^* \mathcal{L}^{nm} \\ &= (\phi \times 1)^*(\mathbb{E}_Q \otimes \mathbb{L}^m \otimes p^* \mathcal{L}^{nm}), \end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Заметим, что $\tilde{\mathbb{E}}_Q \otimes \tilde{\mathbb{L}}_Q^m = \tilde{\mu}^*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m)$. Поскольку $\tilde{\mathcal{L}}$ – очень обильный обратимый $\mathcal{O}_{\tilde{Q}}$ -пучок, то имеет место вложение

$$[\Phi_* \tilde{\mu}^*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m)]^{\vee\vee} \hookrightarrow [\Phi_*(\tilde{\mu}^*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m) \otimes \tilde{\mathcal{L}}^{nm})]^{\vee\vee}.$$

Замена базы, примененная к первому пучку, и применение леммы 2 дают

$$[\Phi_* \tilde{\mu}^*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m)]^{\vee\vee} = [(\mu \times 1)^* M_*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m)]^{\vee\vee} \hookrightarrow (\phi \times 1)^*(\mathbb{E}_Q \otimes \mathbb{L}^m \otimes \mathcal{L}^{nm}).$$

§ 5. Стабильность (полустабильность)

В этом параграфе введено определение стабильности (полустабильности) для пар $(\tilde{S}, \tilde{E})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. S -стабильной (соответственно S -полустабильной) парой $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ назовем следующие данные:

- $\tilde{S} = \bigcup_{i \geq 0} \tilde{S}_i$ – допустимая схема, $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$ – канонический морфизм,
- $\sigma_i: \tilde{S}_i \rightarrow S$ – его ограничения на компоненты $\tilde{S}_i$, $i \geq 0$;
- $\tilde{E}$ – векторное расслоение на схеме $\tilde{S}$;
- $\tilde{L} \in \text{Pic } \tilde{S}$ – выделенная поляризация;

такие, что:

- $\chi(\tilde{E} \otimes \tilde{L}^m) = rp_E(t)$;
- на схеме $\tilde{S}$ пучок $\tilde{E}$ стабилен (соответственно полустабилен) по Гизекеру, т.е. для любого собственного подпучка $\tilde{F} \subset \tilde{E}$ при $m \gg 0$

$$\frac{h^0(\tilde{F} \otimes \tilde{L}^m)}{\text{rank } F} < \frac{h^0(\tilde{E} \otimes \tilde{L}^m)}{\text{rank } E}$$

$$\left(\text{соответственно } \frac{h^0(\tilde{F} \otimes \tilde{L}^m)}{\text{rank } F} \leq \frac{h^0(\tilde{E} \otimes \tilde{L}^m)}{\text{rank } E} \right);$$

- на каждой из дополнительных компонент $\tilde{S}_i, i > 0$, пучок $\tilde{E}_i := \tilde{E}|_{\tilde{S}_i}$ квазиидеален, т.е. обладает описанием вида (1.6) для некоторого $q_0 \in \bigsqcup_{l \leq c_2} \text{Quot}^l \bigoplus^r \mathcal{O}_S$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\tilde{S} \cong S$, то стабильность (полустабильность) пары $(\tilde{S}, \tilde{E})$ равносильна стабильности (полустабильности) векторного расслоения $\tilde{E}$ по Гизекеру на поверхности $\tilde{S}$ относительно поляризации $\tilde{L} \in \text{Pic } \tilde{S}$.

Для исследования связи S -стабильности (S -полустабильности) пары $(\tilde{S}, \tilde{E})$ со стабильностью (с полустабильностью) по Гизекеру соответствующего ей пучка E на поверхности S заметим, что при $m \gg 0$ $rp_E(m) = h^0(E \otimes L^m)$. Для определения стабильности по Гизекеру важно поведение многочлена Гильберта при $m \gg 0$, поэтому будем считать m достаточно большим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Будем говорить, что локально свободный пучок $\tilde{E}$ на допустимой схеме $\tilde{S}$ получается стандартным разрешением из пучка E , если существует плоское семейство $\mathbb{E}$ когерентных $\mathcal{O}_S$ -пучков с базой $T = \text{Spec } k[t]$ такое, что:

- (i) при $t \neq 0$ пучки $E_t = \mathbb{E}|_{t \neq 0}$ локально свободны;
- (ii) при $t = 0$ пучок $E_0 = \mathbb{E}|_{t=0}$ изоморфен пучку E ;
- (iii) стандартное разрешение приводит к раздутию $\sigma: \widetilde{T \times S} \rightarrow T \times S$, осна-

щенному локально свободным пучком $\tilde{\mathbb{E}}$, причем слой композиции $\widetilde{T \times S} \xrightarrow{\sigma} T \times S \xrightarrow{p} T$ в точке $t = 0$ изоморфен $\tilde{S}$ и несет локально свободный пучок $\tilde{\mathbb{E}}|_{t=0} \cong \tilde{E}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Это определение, в частности, означает в силу предложения 2, что для локально свободного $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ -пучка $\tilde{E}$ найдется когерентный $\mathcal{O}_S$ -пучок E такой, что $\tilde{E} = \sigma^* E / \text{tors}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть локально свободный $\mathcal{O}_S$ -пучок $\tilde{E}$ получается стандартным разрешением из когерентного $\mathcal{O}_S$ -пучка E . Пучок $\tilde{E}$ стабилен (полустабилен) на схеме $\tilde{S}$ тогда и только тогда, когда пучок E стабилен (полустабилен).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E полустабилен по Гизекеру на (S, L) и $\tilde{E}$ – локально свободный пучок на схеме $\tilde{S}$, получаемый из E стандартным разрешением. Очевидно, $\tilde{E}$ квазиидеален на дополнительных компонентах схемы $\tilde{S}$, если он получается из когерентного пучка стандартным разрешением. Зафиксируем (любую) точку $q \in \text{Quot}^{r_E(t)}(V \otimes L^{(-m)})$, соответствующую факторпучку E . Рассмотрим собственный подпучок $\tilde{F} \subset \tilde{E}$. Поскольку $m \gg 0$, считаем, что оба пучка $\tilde{E} \otimes \tilde{L}^m$ и $\tilde{F} \otimes \tilde{L}^m$ порождены глобальными сечениями. Зафиксируем эпиморфизм $H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}^m) \otimes \tilde{L}^{(-m)} \rightarrow \tilde{E}$. Подпучок $\tilde{F}$ порождается подпространством глобальных сечений $V_{\tilde{F}} = H^0(\tilde{S}, \tilde{F} \otimes \tilde{L}^m) \subset H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}^m)$. Тогда подпространство $V_F \subset H^0(S, E \otimes L^m)$, изоморфное подпространству $V_{\tilde{F}}$ и порождающее некоторый подпучок $F \in E$, дается с помощью выделенного изоморфизма $v: H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}^m) \xrightarrow{\sim} H^0(S, E \otimes L^m)$ выражением $V_F = v(V_{\tilde{F}})$. Поскольку пучки $\tilde{F}$ и F канонически изоморфны на соответствующих открытых подмножествах схем $\tilde{S}$ и S , то их ранги равны. Ясно, что $V_F = H^0(S, F \otimes L^m)$ и

$$\frac{h^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}^m)}{r} - \frac{h^0(\tilde{S}, \tilde{F} \otimes \tilde{L}^m)}{r'} = \frac{h^0(S, E \otimes L^m)}{r} - \frac{h^0(S, F \otimes L^m)}{r'} > 0$$

(соответственно $\dots \geq 0$). Отсюда следует полустабильность $\tilde{E}$. Обратная импликация доказывается аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Приведенное рассуждение показывает, что имеет место сохраняющее многочлены Гильберта биективное соответствие между подпучками $\mathcal{O}_S$ -пучка E и подпучками соответствующего ему $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ -пучка $\tilde{E}$.

§ 6. М-эквивалентность полустабильных пар

В этом параграфе исследовано поведение фильтрации Жордана–Гёльдера полустабильного когерентного пучка при стандартном разрешении. Также введено понятие М-эквивалентности для полустабильных пар и исследована его связь с S-эквивалентностью полустабильных когерентных пучков. В частности, доказано, что S-эквивалентные когерентные пучки на поверхности S разрешаются в М-эквивалентные пары вида $(\tilde{S}, \tilde{E})$.

Напомним некоторые понятия теории полустабильных когерентных пучков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8 (см. [10; определение 1.5.1]). *Фильтрацией Жордана–Гёльдера* полустабильного пучка E на поляризованной проективной схеме X , имеющего приведенный многочлен Гильберта $p_E(t)$, называется последовательность подпучков

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_\ell = E$$

таких, что факторпучки $gr_i(E) = F_i/F_{i-1}$ стабильны с приведенными многочленами Гильберта, равными $p_E(t)$.

Обозначим через $gr(E)$ полистабильный пучок $\bigoplus_{i=1}^{\ell} gr_i(E)$. Хорошо известная теорема (см. [10; предложение 1.5.2]) утверждает, что класс изоморфизма пучка $gr(E)$ не зависит от выбора фильтрации Жордана–Гёльдера пучка E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9 (см. [10; определение 1.5.3]). Полустабильные пучки E и E' называются *S-эквивалентными*, если $gr(E) = gr(E')$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Очевидно, S-эквивалентные стабильные пучки изоморфны.

Дадим определение фильтрации Жордана–Гёльдера для S -полустабильного пучка на (возможно) приводимой допустимой поляризованной схеме $(\tilde{S}, \tilde{L})$, полностью аналогичное классическому определению для пучка, полустабильного по Гизекеру.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. *Фильтрацией Жордана–Гёльдера* пучка $\tilde{E}$ на поляризованной проективной приводимой схеме $(\tilde{S}, \tilde{L})$ такого, что пара $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ полустабильна в смысле определения 6, и имеющего приведенный многочлен Гильберта $p_E(t)$, называется последовательность подпучков

$$0 = \tilde{F}_0 \subset \tilde{F}_1 \subset \dots \subset \tilde{F}_{\ell} = \tilde{E}$$

таких, что факторпучки $gr_i(\tilde{E}) = \tilde{F}_i / \tilde{F}_{i-1}$ стабильны по Гизекеру с приведенными многочленами Гильберта, равными $p_E(t)$.

Следующий пример показывает, что S-эквивалентные полустабильные когерентные пучки могут иметь различные ассоциированные пучки идеалов Фиттинга, приводящие к неизоморфным схемам $\tilde{S}$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим схему модулей полустабильных когерентных пучков на комплексной проективной плоскости $S = \mathbb{P}^2$ ранга 2 с классами Чжэня $c_1 = 0$, $c_2 = 2$. Как доказано в [13], для четных значений c_1 и $c_2 - c_1^2/4$ схема модулей полустабильных пучков не обладает универсальным семейством. Это означает, что существует строго полустабильный когерентный пучок E с фильтрацией Жордана–Гёльдера, приводящей к точной тройке

$$0 \rightarrow I \rightarrow E \rightarrow I' \rightarrow 0,$$

в которой I , I' – пучки максимальных идеалов $\mathfrak{m}_x$ приведенной точки $x \in \mathbb{P}^2$. Заметим, что полистабильный пучок, S-эквивалентный пучку E , имеет вид $I \oplus I'$. При этом $\text{Ext}^1(I', I) \neq 0$. Для доказательства рассмотрим точную $\mathcal{O}_S$ -тройку

$$0 \rightarrow I \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow k_x \rightarrow 0$$

и применим к ней функтор $\text{Ext}^*(I', -)$. Поскольку все расширения вида $0 \rightarrow k_x \rightarrow A \rightarrow I' \rightarrow 0$ тривиальны, то $\text{Ext}^1(I', k_x) = 0$. Имеем изоморфизм групп расширений $\text{Ext}^1(I', I) \cong \text{Ext}^1(I', \mathcal{O}_S)$. Последняя группа нетривиальна, так как содержит класс нетривиального расширения, соответствующего локально свободной резольвенте пучка идеалов I' : $0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow F_0 \rightarrow I' \rightarrow 0$. Соответствующее ему в $\text{Ext}^1(I', I)$ нетривиальное расширение E включается в точную

диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & k_x & \xrightarrow{=} & k_x & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_S & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & I' \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow = \\
 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & E & \longrightarrow & I' \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Для когерентного $\mathcal{O}_S$ -пучка F без кручения будем использовать обозначение $\varkappa(F) := F^{\vee\vee}/F$.

Из средней вертикальной тройки имеем $\varkappa(E) = k_x$. Вместе с тем для полустабильного пучка $I \oplus I'$ выполнено $\varkappa(I \oplus I') = k_x^{\oplus 2}$. Тогда

$$\mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^2(\varkappa(E), \mathcal{O}_S) = \mathfrak{m}_x,$$

а

$$\mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^2(\varkappa(I \oplus I'), \mathcal{O}_S) = \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^2(\varkappa(I), \mathcal{O}_x) \cdot \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^2(\varkappa(I'), \mathcal{O}_x) = II' = \mathfrak{m}_x^2$$

– пучок идеалов первой инфинитезимальной окрестности точки x .

Следующий пример показывает, что расслоенное произведение не может быть использовано для построения понятия эквивалентности для полустабильных пар.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим пучки максимальных идеалов $I_1 = I_2 = \mathfrak{m}_x$ приведенной точки $x \in S$. Тогда соответствующие схемы $\tilde{S}_1$ и $\tilde{S}_2$ имеют вид

$$\tilde{S}_1 = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I_1[t] + (t))^s / (t^{s+1}), \quad \tilde{S}_2 = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I_2[t] + (t))^s / (t^{s+1}).$$

Как обычно, $\sigma_i: \tilde{S}_i \rightarrow S$ – канонические морфизмы, $\tilde{S}_i = \tilde{S}_{i0} \sqcup_{\sigma_{i0}^{-1}(x)} \mathbb{P}^2$ – разложение на неприводимые компоненты, причем $\sigma_i|_{\tilde{S}_{i0}} = \sigma_{i0}: \tilde{S}_{i0} \rightarrow S$ – раздутие приведенной точки x , $\sigma_{i0}^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^1$ – исключительный дивизор этого раздутия. Схемы $\tilde{S}_1$ и $\tilde{S}_2$ изоморфны; пусть $i: \tilde{S}_1 \rightarrow \tilde{S}_2$ – отождествляющий их изоморфизм. Пусть схемы $\tilde{S}_1$ и $\tilde{S}_2$ несут стабильные расслоения $\tilde{E}_1$ и $\tilde{E}_2$, являющиеся образами не локально свободного когерентного стабильного пучка E на поверхности S . Очевидно, $i_* \tilde{E}_1 = \tilde{E}_2$. При этом, очевидно, векторные расслоения $\tilde{E}_i$, $i = 1, 2$, нетривиальны при ограничении на исключительный дивизор $\mathbb{P}^1$. Образуем расслоенное произведение $\tilde{S}_1 \times_S \tilde{S}_2$, и пусть $\sigma'_i: \tilde{S}_1 \times_S \tilde{S}_2 \rightarrow \tilde{S}_i$ – его проекции на сомножители. Произведение $\tilde{S}_1 \times_S \tilde{S}_2$ содержит четырехмерную

компоненту, изоморфную произведению $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. В ней содержится изоморфная квадрике $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ замкнутая подсхема, выделяемая произведением исключительных дивизоров раздутий $\sigma_{i0}: \tilde{S}_{i0} \rightarrow S$. Тогда обратные образы $\sigma'_i{}^* \tilde{E}_i$ оказываются неизоморфными на расслоенном произведении $\tilde{S}_1 \times_S \tilde{S}_2$: ограничение $\sigma_1'^* \tilde{E}_1|_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}$ нетривиально вдоль первого сомножителя в произведении $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и тривиально вдоль второго, а ограничение $\sigma_2'^* \tilde{E}_2|_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}$ тривиально вдоль первого сомножителя и нетривиально вдоль второго.

Теперь рассмотрим схемы

$$\tilde{S}_1 = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I_1[t] + (t))^s / (t)^{s+1}, \quad \tilde{S}_2 = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I_2[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$$

и их канонические морфизмы $\sigma_1: \tilde{S}_1 \rightarrow S$ и $\sigma_2: \tilde{S}_2 \rightarrow S$ на поверхность S . Сформируем обратные образы пучков идеалов $I'_2 = \sigma_1^{-1} I_2 \cdot \mathcal{O}_{\tilde{S}_1} \subset \mathcal{O}_{\tilde{S}_1}$ и $I'_1 = \sigma_2^{-1} I_1 \cdot \mathcal{O}_{\tilde{S}_2} \subset \mathcal{O}_{\tilde{S}_2}$ и образуем проективные спектры

$$\tilde{S}_{12} = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I'_2[t] + (t))^s / (t)^{s+1}, \quad \tilde{S}_{21} = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I'_1[t] + (t))^s / (t)^{s+1}.$$

Имеют место канонические морфизмы $\sigma'_2: \tilde{S}_{12} \rightarrow \tilde{S}_1$ и $\sigma'_1: \tilde{S}_{21} \rightarrow \tilde{S}_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. $\tilde{S}_{12}$ и $\tilde{S}_{21}$ – равноразмерные схемы, причем $\tilde{S}_{12} \cong \tilde{S}_{21}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $\tilde{S}_{12} \cong \tilde{S}_{21}$ и что эти схемы могут быть включены в плоские семейства с общим членом, изоморфным либо S , либо $\tilde{S}_1$, либо $\tilde{S}_2$. Отсюда следует, что все компоненты схемы $\tilde{S}_{12}$ имеют размерность не выше 2. Затем будет дана теоретико-схемная характеристизация схем $\tilde{S}_{12}$, которая показывает, что $\tilde{S}_{12}$ – равноразмерная схема (т.е. все приведенные схемы, соответствующие ее компонентам, имеют размерность 2).

Пусть $T = \text{Spec } k[t]$. Обратимся к тривиальному 2-параметрическому семейству поверхностей $T \times T \times S$ с проекциями $T \times S \xleftarrow{p_{13}} T \times T \times S \xrightarrow{p_{23}} T \times S$. Введем обозначения

$$\mathbb{I}_1 := \mathcal{O}_T \boxtimes I_1 \subset \mathcal{O}_{T \times S}, \quad \mathbb{I}_2 := \mathcal{O}_T \boxtimes I_2 \subset \mathcal{O}_{T \times S}.$$

Сформируем обратные образы $p_{13}^* \mathbb{I}_1$ и $p_{23}^* \mathbb{I}_2$. Это пучки идеалов на схеме $T \times T \times S$. Рассмотрим морфизм

$$\sigma_1 \times \text{id}_T: \hat{\Sigma}_1 \times T \rightarrow T \times T \times S$$

с тождественным отображением второго сомножителя. На схеме $\hat{\Sigma}_1 \times T$ рассмотрим прообраз $(\sigma_1 \times \text{id}_T)^{-1} p_{23}^* \mathbb{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{\hat{\Sigma}_1 \times T}$ и соответствующий ему морфизм раздутия $\sigma_{12}: \Sigma_{12} \rightarrow \hat{\Sigma}_1 \times T$. Ограничим пучок $(\sigma_1 \times \text{id}_T)^{-1} p_{23}^* \mathbb{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{\hat{\Sigma}_1 \times T}$ на слой композиции $\hat{\Sigma}_1 \times T \xrightarrow{\sigma_1 \times \text{id}_T} T \times T \times S \xrightarrow{p_{12}} T \times T$ в точке (t_1, t_2) . Пусть $\tilde{i}: \tilde{S}_1 \hookrightarrow \hat{\Sigma}_1 \times T$ – морфизм вложения этого слоя. Коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\Sigma}_1 \times T & \xrightarrow{\sigma_1 \times \text{id}_T} & T \times T \times S & \xrightarrow{p_{12}} & T \times T \\ \uparrow \tilde{i} & & \uparrow i & & \uparrow \\ \tilde{S}_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & \tilde{S}_1 & \longrightarrow & (t_1, t_2) \end{array}$$

дает

$$\tilde{i}^{-1}((\sigma_1 \times \text{id}_T)^{-1} p_{23}^* \mathbb{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_1 \times T}) \cdot \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_1} = \sigma_1^{-1} i^{-1}(p_{23}^* \mathbb{I}_2) \cdot \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_1} = \sigma_1^{-1} I_2 \cdot \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_1}.$$

Теперь рассмотрим вложение прямой $j_T: T \hookrightarrow T \times T$, заданной уравнением $at_1 + bt_2 + c = 0$, $a, b, c \in k$, и соответствующую расслоенную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma_{12} & \xrightarrow{\sigma_{12}} & \widehat{\Sigma}_1 \times T & \xrightarrow{\sigma_1 \times \text{id}_T} & T \times T \times S & \xrightarrow{p_{12}} & T \times T \\ j_{12} \uparrow & & \uparrow j_1 & & j_T \times \text{id}_S \uparrow & & \uparrow j_T \\ \Sigma_{12j} & \longrightarrow & \Sigma_{1j} & \xrightarrow{\sigma'_1} & T \times S & \longrightarrow & T \end{array} \quad (6.1)$$

фиксирующую обозначения. Если вложение j_T не соответствует случаю $b = 0$, то $\Sigma_{1j} \simeq \widehat{\Sigma}_1$ и $j_1^{-1}((\sigma_1 \times \text{id}_T)^{-1} p_{23}^* \mathbb{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma} \times T}) \cdot \mathcal{O}_{\Sigma_{1j}} = \sigma_1^{-1} \mathbb{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{\Sigma_1}$. Иначе (при $b = 0$) имеем $\Sigma_{1j} \cong T \times S$.

Морфизм $\sigma_{1j}: \widehat{\Sigma}_{1j} \rightarrow \Sigma_{1j}$ раздутья пучка идеалов $\sigma_1^{-1} \mathbb{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{\Sigma_1}$ включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{12} & \xrightarrow{\sigma_{12}} & \widehat{\Sigma}_1 \times T \\ \uparrow & & \uparrow j_1 \\ \widehat{\Sigma}_{1j} & \xrightarrow{\sigma_{1j}} & \Sigma_{1j} \end{array}$$

и в силу универсальности левого расслоенного произведения в (6.1) существует морфизм $u: \widehat{\Sigma}_{1j} \rightarrow \Sigma_{12j}$.

Морфизм раздутья $\sigma'_2: \widehat{\Sigma}_{12} \rightarrow \widehat{\Sigma}_1$ пучка идеалов $\sigma_1^{-1} \mathbb{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_1}$ включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Sigma}_{12} & \xrightarrow{\sigma'_1} & \widehat{\Sigma}_2 \\ \sigma'_2 \downarrow & & \downarrow \sigma_2 \\ \widehat{\Sigma}_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & T \times S \end{array} \quad (6.2)$$

Заметим, что здесь σ'_1 – морфизм раздутья пучка идеалов $\sigma_2^{-1} \mathbb{I}_1 \cdot \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_2}$ и, таким образом, $\widehat{\Sigma}_{21} = \widehat{\Sigma}_{12}$. Также $\widehat{\Sigma}_1$, $\widehat{\Sigma}_2$, $\widehat{\Sigma}_{12}$ – приведенные неприводимые схемы, каждая из которых расслоена над одномерной регулярной базой T со слоем проективная схема. Следовательно, схемы $\widehat{\Sigma}_1$, $\widehat{\Sigma}_2$, $\widehat{\Sigma}_{12}$ образуют над T плоские семейства проективных схем. Каждое из этих семейств имеет в достаточно общей точке схемы T слой, изоморфный поверхности S . Отсюда следует, что каждый слой семейства $\widehat{\Sigma}_{12}$ имеет вид проективного спектра $\text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$, где $I \subset \mathcal{O}_S$ – подходящий пучок идеалов. Слои плоского семейства проективных схем несут поляризации, относительно которых многочлены Гильберта слоев постоянны по базе. По конструкции такие поляризации слоев схем $\widehat{\Sigma}_1$, $\widehat{\Sigma}_2$, $\widehat{\Sigma}_{12}$ в точности совпадают с поляризациями, вычисленными в § 3.

Теперь докажем, что Σ_{12j} является плоским над T семейством схем. Для этого рассмотрим следующую точную $\mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_1 \times T}$ -тройку, порожденную пучком

идеалов $(\sigma_1 \times \text{id}_T)^{-1} p_{23}^* \mathbb{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_1 \times T}$:

$$0 \rightarrow (\sigma_1 \times \text{id}_T)^{-1} p_{23}^* \mathbb{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_1 \times T} \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_1 \times T} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0.$$

Здесь Z – подходящая замкнутая подсхема. Применим функтор j_1^* и заметим, что пучок идеалов $j_1^{-1}((\sigma_1 \times \text{id}_T)^{-1} p_{23}^* \mathbb{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_1 \times T}) \cdot \mathcal{O}_{\Sigma_{1j}}$ изоморфен факторпучку $j_1^*(\sigma_1 \times \text{id}_T)^{-1} p_{23}^* \mathbb{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_1 \times T} / \text{tors}$, причем подпучок кручения дается выражением $\text{tors} = \mathcal{O}r_1^{j_1^{-1} \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_1 \times T}}(j_1^{-1} \mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_{\Sigma_{1j}})$. Заметим, что $\Sigma_{1j} \cong \widehat{\Sigma}_1$ и $j_1^* \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_1 \times T} \cong \mathcal{O}_{\Sigma_{1j}}$. С учетом последних двух изоморфизмов имеем

$$\mathcal{O}r_1^{j_1^{-1} \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_1 \times T}}(j_1^{-1} \mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_{\Sigma_{1j}}) = \mathcal{O}r_1^{\mathcal{O}_{\Sigma_{1j}}}(j_1^{-1} \mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_{\Sigma_{1j}}) = 0.$$

Таким образом, имеем равенство

$$j_1^*(\sigma_1 \times \text{id}_T)^{-1} p_{23}^* \mathbb{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_1 \times T} = j_1^{-1}((\sigma_1 \times \text{id}_T)^{-1} p_{23}^* \mathbb{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_1 \times T}) \cdot \mathcal{O}_{\Sigma_{1j}} = \sigma_1^{-1} \mathbb{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{\Sigma_1}.$$

Для раздутий имеем

$$\mathbb{S}_{12j} = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (j_1^*(\sigma_1 \times \text{id}_T)^{-1} p_{23}^* \mathbb{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_1 \times T})^s = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (\sigma_1^{-1} \mathbb{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{\Sigma_1})^s = \widehat{\Sigma}_{12}.$$

Поскольку $\widehat{\Sigma}_{12}$ – плоское над T семейство, то схема $\mathbb{S}_{12j}$ также является плоской над T .

Поскольку любые две точки на $T \times T$ можно соединить ломаной из двух прямых, удовлетворяющих условию $b \neq 0$, то многочлены Гильберта слоев схемы $\mathbb{S}_{12} \rightarrow T \times T$ постоянны по базе $T \times T$. Таким образом, схема $\mathbb{S}_{12}$ плоская над базой $T \times T$.

Для характеристики схемной структуры специального слоя схемы Σ_{12} (и, тем самым, соответствующего слоя схемы $\mathbb{S}_{12}$) достаточно рассмотреть вложение j_T , заданное уравнением $t_2 = 0$, и подсхему $\widetilde{\Sigma}_1 = j_1(\Sigma_{1j})$. Она представляет собой плоское семейство подсхем со слоем $\widetilde{S}_1 = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I_1[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$. По доказанному прообраз $\widetilde{\Sigma}_{12} = \sigma_1^{-1}(\widetilde{\Sigma}_1)$ также является схемой, плоской над $j_T(T) \cong T$, слой которой в общей точке изоморфен $\widetilde{S}_1 = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I_1[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$. Применив в этой ситуации рассуждения работы [7], получим, что специальной слой $\widetilde{S}_{12}$ схемы $\widetilde{\Sigma}_{12}$ имеет следующую теоретико-схемную характеристику: $\widetilde{S}_{12} = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I'_2[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$ для пучка идеалов $I'_2 \subset \mathcal{O}_{\widetilde{S}_1}$, заданного соотношением $I'_2 = \sigma_1^{-1} I_1 \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{S}_1}$.

Итак, для каждой пары схем $\widetilde{S}_1 = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I_1[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$ и $\widetilde{S}_2 = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I_2[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$ определена схема

$$\widetilde{S}_{12} = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I'_1[t] + (t))^s / (t)^{s+1} = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I'_2[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$$

вместе с морфизмами $\widetilde{S}_1 \xleftarrow{\sigma'_1} \widetilde{S}_{12} \xrightarrow{\sigma'_2} \widetilde{S}_2$, причем диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{S}_{12} & \xrightarrow{\sigma'_2} & \widetilde{S}_2 \\ \sigma'_1 \downarrow & & \downarrow \sigma_2 \\ \widetilde{S}_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & S \end{array}$$

коммутативна. Операция $(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2) \mapsto \tilde{S}_1 \diamond \tilde{S}_2 = \tilde{S}_{12}$, определенная только что указанным способом, очевидно, ассоциативна. Более того, поскольку для любого допустимого морфизма $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$ выполнено $\tilde{S} \diamond S = S \diamond \tilde{S} = \tilde{S}$, то допустимые морфизмы каждого класса $[E]$ S -эквивалентных полустабильных когерентных пучков порождают коммутативный моноид $\diamond[E]$ с бинарной операцией $\diamond$ и нейтральным элементом $\text{id}_S: S \rightarrow S$.

Заметим, что согласно предложению 8 и замечанию 4 существует сохраняющее многочлены Гильберта биективное соответствие между подпучками когерентного $\mathcal{O}_S$ -пучка E и подпучками соответствующего ему локально свободного $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ -пучка $\tilde{E}$. Тем самым, если в E зафиксирована фильтрация Жордана–Гёльдера, образованная подпучками F_i , то в $\tilde{E}$ указанным соответствием выделяется последовательность полустабильных подпучков $\tilde{F}_i$ с тем же приведенным многочленом Гильберта таких, что $\text{rank } \tilde{F}_i = \text{rank } F_i$.

Пусть X – проективная схема, L – обильный обратимый $\mathcal{O}_X$ -пучок, E – когерентный $\mathcal{O}_X$ -пучок. Пусть пучок $E \otimes L^m$ порожден глобальными сечениями, т.е. имеет место эпиморфизм $q: H^0(X, E \otimes L^m) \otimes L^{(-m)} \twoheadrightarrow E$. Зафиксируем подпространство $H \subset H^0(X, E \otimes L^m)$. Будем говорить, что подпучок $F \subset E$ порожден подпространством H , если он является образом композиции

$$H \otimes L^{(-m)} \subset H^0(X, E \otimes L^m) \otimes L^{(-m)} \xrightarrow{q} E.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Преобразование $E \mapsto \sigma^* E / \text{tors}$ совместимо на всех подпучках $F \subset E$ с изоморфизмом v при всех $m \gg 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный подпучок $F \subset E$ ранга r' . Необходимо проверить, что подпучок $\tilde{F} \subset \tilde{E} = \sigma^* E / \text{tors}$, порожденный в $\tilde{E}$ подпространством $v^{-1} H^0(S, F \otimes L^m)$, совпадает с подпучком $\sigma^* F / \text{tors}$.

Ясно, что пучки $\sigma^* F / \text{tors}$ и $\tilde{F}$ совпадают на открытом подмножестве W схемы $\tilde{S}$, где морфизм схем $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$ является изоморфизмом. Таким образом, осталось проверить их совпадение на дополнительных компонентах схемы $\tilde{S}$. Структура пучка $\tilde{E}$ на дополнительных компонентах описывается данными (1.5), (1.6). По-прежнему U – открытая окрестность $\text{Supp } \varkappa$ в S . Совпадение подпучков $\tilde{F}$ и $\sigma^* F / \text{tors}$ на открытом подмножестве $\sigma^{-1}(U) \cap W$ поставляет (возможно, при уменьшении открытого подмножества W) изоморфизмы $\tilde{F}|_{\sigma^{-1}(U) \cap W} = (\sigma^* F / \text{tors})|_{\sigma^{-1}(U) \cap W} = \sigma^* \bigoplus^{r'} \mathcal{O}_{U \cap \sigma(W)}$ и вложение обратных образов тривиальных пучков

$$\sigma^* \bigoplus^{r'} \mathcal{O}_{U \cap \sigma(W)} \hookrightarrow \sigma^* \bigoplus^r \mathcal{O}_{U \cap \sigma(W)}.$$

Оно продолжается на подмножество U , включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \sigma^* \bigoplus^r \mathcal{O}_U & \xrightarrow{\sigma^* q_0} & \sigma^* \varkappa \\ \uparrow & \nearrow & \\ \sigma^* \bigoplus^{r'} \mathcal{O}_U & & \end{array}$$

где $\varkappa = E^{\vee\vee}/E$, и является общим для обоих подпучков. На дополнительной компоненте $\tilde{E}_i$ имеем

$$\tilde{E}_i = (\sigma^* E / \text{tors})|_{\tilde{S}_i} = \ker \sigma^* q_0.$$

Пучки $\tilde{F}$ и $\sigma^* F / \text{tors}$ совпадают с ядром диагонального морфизма.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пучки $\tilde{F}_i = \sigma^* F_i / \text{tors}$ полустабильные ранга $r_i = \text{rank } F_i$ с приведенным многочленом Гильберта, равным $p_E(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство рангов следует из равенства $\tilde{F}_i = \sigma^* F_i / \text{tors}$ и того факта, что морфизм σ является изоморфизмом на открытой подсхеме в $\tilde{S}$. Многочлен Гильберта при всех $t \gg 0$ фиксируется соотношениями

$$\chi(\tilde{F}_i \otimes \tilde{L}^t) = h^0(\tilde{S}, \tilde{F}_i \otimes \tilde{L}^t) = h^0(S, F_i \otimes L^t) = \chi(F_i \otimes L^t) = r_i p_E(t).$$

Рассмотрим эпиморфизмы $\tilde{q}: H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}^m) \otimes \tilde{L}^{(-m)} \rightarrow \tilde{E}$ и $q: H^0(S, E \otimes L^m) \otimes L^{(-m)} \rightarrow E$, причем $\tilde{E} = \sigma^* E / \text{tors}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Подпучки $\tilde{F} \subset \tilde{E}$ и $F \subset E$ назовем *v-соответственными*, если существуют подпространства $\tilde{V} \subset H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}^m)$ и $V = v(\tilde{V}) \subset H^0(S, E \otimes L^m)$ такие, что

$$\tilde{q}(\tilde{V} \otimes \tilde{L}^{-m}) = \tilde{F}, \quad q(V \otimes L^{-m}) = F.$$

Обозначение: $F = v(\tilde{F})$. Соответствующие факторпучки $\tilde{E}/\tilde{F}$ и E/F также будем называть *v-соответственными* и обозначать $E/F = v(\tilde{E}/\tilde{F})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Преобразование $E \mapsto \sigma^* E / \text{tors}$ переводит насыщенные подпучки в насыщенные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F_{i-1} \subset F_i$ – насыщенный подпучок. Предположим, что факторпучок $\tilde{F}_i / \tilde{F}_{i-1}$ имеет подпучок кручения τ . Он порождается векторным подпространством $\tilde{T} \subset H^0(\tilde{S}, \tilde{F}_i \otimes \tilde{L}^m) / H^0(\tilde{S}, \tilde{F}_{i-1} \otimes \tilde{L}^m)$. Пусть $\tilde{T}'$ – его прообраз в $H^0(\tilde{S}, \tilde{F}_i \otimes \tilde{L}^m)$ и $\mathcal{T}' \subset \tilde{F}_i$ – подпучок, порождаемый подпространством $\tilde{T}'$. Тогда имеет место эпиморфизм пучков $\mathcal{T}' \rightarrow \tau$ с ядром $\mathcal{T}' \cap \tilde{F}_{i-1}$. Пусть

$$\tilde{K} = H^0(\tilde{S}, (\mathcal{T}' \cap \tilde{F}_{i-1}) \otimes \tilde{L}^m) \subset H^0(\tilde{S}, \tilde{F}_{i-1} \otimes \tilde{L}^m)$$

– его порождающее подпространство. Тогда изоморфизм v приводит к точной диаграмме векторных пространств

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & v(\tilde{K}) & \longrightarrow & v(\tilde{T}') & \longrightarrow & v(\tilde{T}')/v(\tilde{K}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \wr v & & \downarrow \wr v & & \downarrow \wr \bar{v} \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{K} & \longrightarrow & \tilde{T}' & \longrightarrow & \tilde{T}'/\tilde{K} \longrightarrow 0 \end{array}$$

в которой морфизм $\bar{v}$ индуцирован морфизмом v . Также имеют место точные последовательности *v-соответственных* когерентных пучков

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & v(\mathcal{T}' \cap \tilde{F}_{i-1}) & \longrightarrow & v(\mathcal{T}') & \longrightarrow & v(\tau) \longrightarrow 0, \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{T}' \cap \tilde{F}_{i-1} & \longrightarrow & \mathcal{T}' & \longrightarrow & \tau \longrightarrow 0. \end{array}$$

Пучки $\mathcal{T}' \cap \tilde{F}_{i-1}$, $v(\mathcal{T}' \cap \tilde{F}_{i-1})$, $\mathcal{T}'$ и $v(\mathcal{T}')$ совпадают при ограничении на открытые подмножества W и $\sigma(W)$ соответственно. Таким образом, если τ – пучок кручения, то и $v(\tau)$ также является пучком кручения, что противоречит насыщенности подпучка F_{i-1} .

СЛЕДСТВИЕ 3. *Имеют место изоморфизмы $\sigma^*(F_i/F_{i-1})/\text{tors} \cong \tilde{F}_i/\tilde{F}_{i-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем точную тройку

$$0 \rightarrow F_{i-1} \rightarrow F_i \rightarrow F_i/F_{i-1} \rightarrow 0$$

и применим к ней функтор σ^* . Получим

$$0 \rightarrow \sigma^*F_{i-1}/\tau \rightarrow \sigma^*F_i \rightarrow \sigma^*(F_i/F_{i-1}) \rightarrow 0,$$

где символом τ обозначен нарушающий точность слева подпучок кручения. Факторизация по кручению первых двух пучков и применение предложения 10 приводят к точной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & \text{tors}(\sigma^*F_i) & \longrightarrow & \tau' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \sigma^*F_{i-1}/\tau & \longrightarrow & \sigma^*F_i & \longrightarrow & \sigma^*(F_i/F_{i-1}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{F}_{i-1} & \longrightarrow & \tilde{F}_i & \longrightarrow & \tilde{F}_i/\tilde{F}_{i-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

в которой пучок N определен как $\ker(\sigma^*F_{i-1}/\tau \rightarrow \tilde{F}_{i-1})$. Осталось заметить, что пучок τ' – пучок кручения, и поскольку подпучок $F_{i-1} \subset F_i$ насыщен, то согласно предложению 11 пучок $\tilde{F}_i/\tilde{F}_{i-1}$ не имеет кручения. Таким образом, $\tilde{F}_i/\tilde{F}_{i-1} \cong \sigma^*(F_i/F_{i-1})/\text{tors}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Факторпучки $\tilde{F}_i/\tilde{F}_{i-1}$ стабильны с приведенным многочленом Гильберта, равным $p_E(t)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подпучок $\tilde{R} \subset \tilde{F}_i/\tilde{F}_{i-1}$ и пространство глобальных сечений

$$H^0(\tilde{S}, \tilde{R} \otimes \tilde{L}^m) \subset H^0(\tilde{S}, (\tilde{F}_i/\tilde{F}_{i-1}) \otimes \tilde{L}^m) = H^0(\tilde{S}, \tilde{F}_i \otimes \tilde{L}^m)/H^0(\tilde{S}, \tilde{F}_{i-1} \otimes \tilde{L}^m).$$

Как обычно, полагаем m настолько большим, что высшие когомологии обращаются в 0. Пусть $\tilde{H}$ – прообраз в $H^0(\tilde{S}, \tilde{F}_i \otimes \tilde{L}^m)$ подпространства $H^0(\tilde{S}, \tilde{R} \otimes \tilde{L}^m)$

и $H := v(\tilde{H})$. Обозначим через $\mathcal{H}$ подпучок в F_i , порождаемый подпространством H . Ясно, что $\mathcal{H}/F_{i-1} \subset F_i/F_{i-1}$. Из цепочки очевидных равенств

$$\begin{aligned} h^0(\tilde{S}, \tilde{R} \otimes \tilde{L}^m) &= \dim \tilde{H} - h^0(\tilde{S}, \tilde{F}_{i-1} \otimes \tilde{L}^m) = \dim H - h^0(S, F_{i-1} \otimes L^m) \\ &= h^0(S, \mathcal{H} \otimes L^m) - h^0(S, F_{i-1} \otimes L^m) = h^0(S, (\mathcal{H}/F_{i-1}) \otimes L^m) \end{aligned}$$

следует, что

$$\begin{aligned} &\frac{h^0(\tilde{S}, (\tilde{F}_i/\tilde{F}_{i-1}) \otimes \tilde{L}^m)}{\text{rank}(\tilde{F}_i/\tilde{F}_{i-1})} - \frac{h^0(\tilde{S}, \tilde{R} \otimes \tilde{L}^m)}{\text{rank} \tilde{R}} \\ &= \frac{h^0(S, (F_i/F_{i-1}) \otimes L^m)}{\text{rank}(F_i/F_{i-1})} - \frac{h^0(S, (\mathcal{H}/F_{i-1}) \otimes L^m)}{\text{rank}(\mathcal{H}/F_{i-1})} > 0. \end{aligned}$$

Это доказывает стабильность факторпучка $\tilde{F}_i/\tilde{F}_{i-1}$.

Теперь рассмотрим точную тройку $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow gr_1(E) \rightarrow 0$ и соответствующую тройку пространств глобальных сечений, точную при $m \gg 0$:

$$0 \rightarrow H^0(S, E_1 \otimes L^m) \rightarrow H^0(S, E \otimes L^m) \rightarrow H^0(S, gr_1(E) \otimes L^m) \rightarrow 0.$$

Переход к соответствующему $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ -пучку $\tilde{E}$, его подпучку $\tilde{E}_1$, глобальным сечениям и применение изоморфизма v приводят к коммутативной диаграмме векторных пространств

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(S, E_1 \otimes L^m) & \longrightarrow & H^0(S, E \otimes L^m) & \longrightarrow & H^0(S, gr_1(E) \otimes L^m) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow v & & \uparrow v & & \uparrow \bar{v} \\ 0 & \longrightarrow & H^0(\tilde{S}, \tilde{E}_1 \otimes \tilde{L}^m) & \longrightarrow & H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}^m) & \longrightarrow & H^0(\tilde{S}, gr_1(\tilde{E}) \otimes \tilde{L}^m) \longrightarrow 0 \end{array}$$

в которой изоморфизм $\bar{v}$ индуцирован изоморфизмом v . Продолжая рассуждение индуктивно для остальных подпучков фильтрации Жордана–Гельдера пучка E , получим, что биективное соответствие подпучков продолжается на факторпучки фильтраций. Тем самым, при переходе от факторпучков E_i/E_{i-1} к $\tilde{E}_i/\tilde{E}_{i-1}$ сохраняются многочлены Гильберта и стабильность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Фильтрацией Жордана–Гельдера* полустабильного расслоения $\tilde{E}$ с многочленом Гильберта, равным $rp(t)$, назовем последовательность полустабильных подпучков $0 \subset \tilde{F}_1 \subset \dots \subset \tilde{F}_\ell \subset \tilde{E}$ с приведенными многочленами Гильберта, равными $p(t)$, таких, что факторпучки $gr_i(\tilde{E}) = \tilde{F}_i/\tilde{F}_{i-1}$ стабильны.

Пучок $\bigoplus_i gr_i(\tilde{E})$ будем называть *ассоциированным полистабильным пучком* расслоения $\tilde{E}$.

Таким образом, из результатов предложений 10, 11 и следствий 2–4 следует, что преобразование $E \mapsto \sigma^*E/\text{tors}$ переводит фильтрацию Жордана–Гельдера пучка E в фильтрацию Жордана–Гельдера расслоения σ^*E/tors .

Пусть $(\tilde{S}, \tilde{E})$ и $(\tilde{S}', \tilde{E}')$ – полустабильные пары.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Полустабильные пары $(\tilde{S}, \tilde{E})$ и $(\tilde{S}', \tilde{E}')$ назовем *М-эквивалентными (моноидально эквивалентными)*, если для морфизмов $\diamond$ -произведения $\tilde{S} \diamond \tilde{S}'$ на сомножители $\bar{\sigma}': \tilde{S} \diamond \tilde{S}' \rightarrow \tilde{S}$ и $\bar{\sigma}: \tilde{S} \diamond \tilde{S}' \rightarrow \tilde{S}'$ и ассоциированных полистабильных пучков $\bigoplus_i gr_i(\tilde{E})$ и $\bigoplus_i gr_i(\tilde{E}')$ имеет место изоморфизм

$$\bar{\sigma}'^* \bigoplus_i gr_i(\tilde{E})/\text{tors} \cong \bar{\sigma}^* \bigoplus_i gr_i(\tilde{E}')/\text{tors}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *S-эквивалентные полустабильные когерентные пучки E и E' соответствуют М-эквивалентным полустабильным парам $(\tilde{S}, \tilde{E})$ и $(\tilde{S}', \tilde{E}')$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стандартное разрешение переводит полустабильный когерентный пучок E в полустабильную пару $(\tilde{S}, \tilde{E})$, и при этом фильтрация Жордана–Гёльдера пучка E переходит в фильтрацию Жордана–Гёльдера расслоения $\tilde{E}$. Таким образом, полистабильный пучок $\bigoplus_i gr_i(E)$ переходит в ассоциированный полистабильный пучок $\bigoplus_i gr_i(\tilde{E})$. Итак, для пучка E имеем

$$\bar{\sigma}'^* \bigoplus_i gr_i(\tilde{E})/\text{tors} = \bar{\sigma}'^* \left[\sigma^* \bigoplus_i gr_i(E)/\text{tors} \right] / \text{tors} = \bar{\sigma}'^* \sigma^* \bigoplus_i gr_i(E)/\text{tors}. \quad (6.3)$$

Аналогично, для пучка E' , S-эквивалентного пучку E , имеем

$$\bar{\sigma}^* \bigoplus_i gr_i(\tilde{E}')/\text{tors} = \bar{\sigma}^* \left[\sigma'^* \bigoplus_i gr_i(E')/\text{tors} \right] / \text{tors} = \bar{\sigma}^* \sigma'^* \bigoplus_i gr_i(E')/\text{tors}. \quad (6.4)$$

Правые части (6.3) и (6.4) изоморфны в силу изоморфизма полистабильных $\mathcal{O}_S$ -пучков $\bigoplus_i gr_i(E) \cong \bigoplus_i gr_i(E')$ и коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} \diamond \tilde{S}' & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & \tilde{S}' \\ \bar{\sigma}' \downarrow & & \downarrow \sigma' \\ \tilde{S} & \xrightarrow{\sigma} & S \end{array}$$

для $\diamond$ -произведения. Предложение доказано.

§ 7. Минимальное разрешение в моноиде $\diamond[E]$

Этот параграф носит вспомогательный характер. В нем доказаны результаты, связанные с локальной свободой подпучков и факторпучков фильтрации Жордана–Гёльдера для пучков вида $\tilde{E} = \sigma^* E/\text{tors}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. $\bar{\sigma}: \bar{S}_* \rightarrow S$ – минимальное разрешение в моноиде $\diamond[E]$, порожденном каноническими морфизмами для класса S-эквивалентных полустабильных когерентных $\mathcal{O}_S$ -пучков $[E]$, если выполнены следующие свойства:

(i) (*разрешение*) для любых канонических морфизмов $\sigma_i: \tilde{S}_i \rightarrow S$, $\sigma_j: \tilde{S}_j \rightarrow S$ диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \bar{S}_* & \xrightarrow{\bar{\sigma}_j} & \tilde{S}_i \\ \bar{\sigma}_i \downarrow & \searrow \bar{\sigma} & \downarrow \sigma_i \\ \tilde{S}_j & \xrightarrow{\sigma_j} & S \end{array}$$

коммутативны, и все пучки $\bar{\sigma}^* E_i / \text{tors}$, где $\bar{\sigma} = \sigma_j \circ \bar{\sigma}_i = \sigma_i \circ \bar{\sigma}_j$, локально свободны;

(ii) (*минимальность*) для всякого морфизма $\sigma' \in \diamond[E]$, $\sigma': \tilde{S}' \rightarrow S$, такого, что выполнено свойство (i), существует морфизм $f: \tilde{S}' \rightarrow \bar{S}_*$, включающийся для всех i, j в коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{S}' & & & & \\ & \searrow f & & \searrow & \\ & \bar{S}_* & \xrightarrow{\bar{\sigma}_j} & \tilde{S}_i & \\ & \downarrow \bar{\sigma}_i & \searrow \bar{\sigma} & \downarrow \sigma_i & \\ & \tilde{S}_j & \xrightarrow{\sigma_j} & S & \end{array}$$

причем $\sigma' = \bar{\sigma} \circ f$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Естественно считать, что для одноэлементного класса, определяемого стабильным пучком E , соответствующий канонический морфизм σ минимален.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Для пары полустабильных когерентных пучков E_1 и E_2 и соответствующих им разрешений $\sigma_1: \tilde{S}_1 \rightarrow S$ и $\sigma_2: \tilde{S}_2 \rightarrow S$ $\diamond$ -произведение $\tilde{S}_1 \diamond \tilde{S}_2$ удовлетворяет условиям разрешения и минимальности, т.е. является минимальным разрешением пары пучков E_1, E_2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *Каждый класс S-эквивалентных когерентных $\mathcal{O}_S$ -пучков обладает минимальным разрешением $\bar{S}_*$, соответствующим морфизму $\bar{\sigma}: \bar{S}_* \rightarrow S$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно убедиться в том, что пучкам каждого класса S-эквивалентности соответствует конечный набор канонических морфизмов $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$. Это означает, что минимальное разрешение $\bar{S}_*$ может быть построено с помощью операции $\diamond$ за конечное число шагов.

В самом деле, каждый класс S-эквивалентности состоит из пучков, особенности которых имеют носитель в одних и тех же точках поверхности S , т.е. $\text{Supp } \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$ постоянен в классе S-эквивалентности. Далее, пучки нулевых идеалов Фиттинга $\mathcal{F}itt^0 \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S) = \mathcal{F}itt^0 \mathcal{E}xt^2(\kappa, \mathcal{O}_S)$ имеют кодлину, ограниченную сверху глобально по $\bar{M}$. Пусть l_0 – максимальное по $\bar{M}$ значение $\text{colength } \mathcal{F}itt^0 \mathcal{E}xt^2(\kappa, \mathcal{O}_S)$.

Обратимся к Quot-схеме Гротендика $\text{Quot}^l \bigoplus^r \mathcal{O}_S$, параметризующей нульмерные факторпучки длины l на поверхности S . Известно, что это нётерова

алгебраическая схема конечного типа. Она обладает естественной стратификацией, задаваемой классами изоморфизма нульмерных факторпучков.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Число страт конечно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим эпиморфизм $q: \mathcal{O}_S^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathcal{K}$ и вложение (любого) прямого слагаемого $\mathcal{O}_S \hookrightarrow \mathcal{O}_S^{\oplus r}$. Обозначим $\mathcal{K}_r := \mathcal{K}$. Тогда $\mathcal{O}_{Z_1}$ – образ этого прямого слагаемого при композиции $\mathcal{O}_S \hookrightarrow \mathcal{O}_S^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathcal{K}_r$. Имеет место точная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & I_{Z_1} & \longrightarrow & K_r & \longrightarrow & K_{r-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_S & \longrightarrow & \mathcal{O}_S^{\oplus r} & \longrightarrow & \mathcal{O}_S^{\oplus(r-1)} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Z_1} & \longrightarrow & \mathcal{K}_r & \longrightarrow & \mathcal{K}_{r-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Теперь, проводя процедуру для правой вертикальной тройки и итерируя процесс, получим кофилтрацию

$$\mathcal{K}_r \twoheadrightarrow \mathcal{K}_{r-1} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \mathcal{K}_2 \twoheadrightarrow \mathcal{K}_1 = \mathcal{O}_{Z_r}$$

с ядрами $\mathcal{O}_{Z_1}, \dots, \mathcal{O}_{Z_{r-1}}$, т.е. серию коротких точных последовательностей

$$\begin{aligned}
 0 &\rightarrow \mathcal{O}_{Z_1} \rightarrow \mathcal{K}_r \rightarrow \mathcal{K}_{r-1} \rightarrow 0, \\
 0 &\rightarrow \mathcal{O}_{Z_2} \rightarrow \mathcal{K}_{r-1} \rightarrow \mathcal{K}_{r-2} \rightarrow 0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 0 &\rightarrow \mathcal{O}_{Z_{r-1}} \rightarrow \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{O}_{Z_r} \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, каждый артинов пучок $\mathcal{O}_S$ -модулей, являющийся факторпучком пучка $\mathcal{O}_S^{\oplus r}$, обладает (возможно, не единственным) представлением в виде последовательности нульмерных подсхем $Z_1, \dots, Z_r$ и последовательности векторов

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_2 &\in \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{O}_{Z_r}, \mathcal{O}_{Z_{r-1}}), \\
 \mathcal{K}_3 &\in \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{K}_2, \mathcal{O}_{Z_{d-2}}), \quad \dots, \quad \mathcal{K}_r \in \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{K}_{r-1}, \mathcal{O}_{Z_1}).
 \end{aligned}$$

Здесь для краткости один и тот же символ обозначает как элемент группы расширений, так и сам пучок расширения. Теперь осталось заметить, что следующие множества конечны:

§ 8. Ограниченность семейств полустабильных пар

В этом параграфе будет показано, что пары вида $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$, деформационно эквивалентные парам, у которых $(\tilde{S}, \tilde{L}) \cong (S, L)$, составляют в $\text{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$ подмножество, совпадающее с $\mu(\tilde{Q})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пару $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ будем называть *S-парой*, если $(\tilde{S}, \tilde{L}) \cong (S, L)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Пара $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ деформационно эквивалентна *S-парам*, если существуют:

- связная алгебраическая схема T размерности 1;
- плоское семейство схем $\pi: \Sigma \rightarrow T$;
- очень обильный относительно π обратимый пучок $\tilde{\mathbb{L}}$;
- локально свободный $\mathcal{O}_\Sigma$ -пучок $\tilde{\mathbb{E}}$;

такие, что:

- для всякой замкнутой точки $t \in T$ слой $\pi^{-1}(t)$ – допустимая схема, $\tilde{\mathbb{L}}|_{\pi^{-1}(t)}$ – ее выделенная поляризация, $\tilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(t)}$ – локально свободный пучок, многочлен Гильберта которого равен

$$\chi(\tilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(t)} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^t|_{\pi^{-1}(t)}) = rp_E(t);$$

- существует точка $t_0 \in T$ такая, что

$$((\pi^{-1}(t_0), \tilde{\mathbb{L}}|_{\pi^{-1}(t_0)}), \tilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(t_0)}) \cong ((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E});$$

- в каждой общей точке $t \neq t_0$ $((\pi^{-1}(t), \tilde{\mathbb{L}}|_{\pi^{-1}(t)}), \tilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(t)})$ – *S-пара*.

Пары, деформационно эквивалентные *S-парам*, будем называть *dS-парами*, подмножество точек в $\text{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$, соответствующих *dS-парам*, обозначим через K^{dS} , подмножество точек, соответствующих *S-парам* – через K^S .

Теперь необходима следующая хорошо известная теорема.

ТЕОРЕМА 2 (см. [10; 3.3.7]). Пусть $f: X \rightarrow Y$ – проективный морфизм схем конечного типа над полем k , и пусть $\mathcal{O}_X(1)$ – f -обильное линейное расслоение. Пусть P – многочлен степени d , μ_0 – рациональное число. Тогда семейство чисто d -мерных пучков на слоях морфизма f с многочленом Гильберта P и максимальным наклоном $\mu_{\max} \geq \mu_0$ ограничено.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Теорема сформулирована для более общего случая чисто d -мерных пучков и через $\mu_{\max}$ означает максимальный наклон в фильтрации Хардера–Нарасимхана пучка E . Поскольку мы интересуемся полустабильными пучками, фильтрация Хардера–Нарасимхана для полустабильного пучка состоит из самого этого пучка. Следовательно, наклон $\mu_{\max} = \mu$ постоянен.

Заметим, что по рассуждениям из § 6 полустабильные *dS*-пары несут локально свободные пучки, наклон которых постоянен в фильтрации Жордана–Гельдера и, следовательно, ограничен. Таким образом, применяя в этой ситуации теорему 2, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. Семейство полустабильных *dS-пар* ограничено.

Таким образом, существует (общее для всех полустабильных dS -пар) целое $\tilde{m}_0$ такое, что при $m > \tilde{m}_0$ пучки $\tilde{E} \otimes \tilde{L}^m$ определяют замкнутые вложения соответствующих схем $\tilde{S}$ в многообразие Грассмана $G(V, r)$, где V – k -векторное пространство размерности $rp_E(m)$. Таким образом, во всех рассуждениях по построению схемы модулей полустабильных пар следует полагать $m > \max(m_0, \tilde{m}_0)$. Число m_0 охарактеризовано в § 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. *S -пары составляют в K^{dS} открытую подсхему.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что множество точек схемы Гильберта, над которыми слои морфизма

$$\pi: \operatorname{Univ}^{P(t)} G(V, r) \rightarrow \operatorname{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$$

соответствуют S -парам, в точности составляет пересечение множества точек схемы $\operatorname{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$, слои морфизма π над которыми геометрически целы, и подсхемы K^{dS} . Первое из указанных подмножеств открыто согласно [14; теорема 12.2.4, (viii)]. Ограничение на подсхему K^{dS} доказывает предложение.

Из рассуждений предыдущих параграфов ясно, что $\mu(\tilde{Q}) \subset K^{dS}$, причем оба подмножества $\operatorname{PGL}(V)$ -инвариантны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. *Имеет место совпадение подмножеств $\mu(\tilde{Q}) = K^{dS}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $K^{dS} \setminus \mu(\tilde{Q}) \neq \emptyset$. Заметим, что подмножества, составленные полустабильными S -парами в $\mu(\tilde{Q})$ и в K^{dS} , совпадают и равны K^S . Пусть $T = \operatorname{Spec} k[t]$ – аффинная кривая в K^{dS} такая, что ее открытая часть $T_0 = \{t \neq t_0\} \subset T$ принадлежит подмножеству K^S , а специальная точка $t_0 = T \setminus T_0 \in K^{dS} \setminus \mu(\tilde{Q})$. Пусть $\pi_1: \tilde{S}_1 \rightarrow T$ – соответствующее вложению $T \hookrightarrow K^{dS} \subset \operatorname{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$ плоское семейство подсхем, задаваемое расслоенным произведением $\tilde{S}_1 = T \otimes_{\operatorname{Hilb}^{P(t)} G(V, r)} \operatorname{Univ}^{P(t)} G(V, r)$ и несущее локально свободный пучок $\tilde{\mathbb{E}}_1$. Итак, имеем плоское семейство схем $\pi_1: \tilde{S}_1 \rightarrow T$, снабженное локально свободным пучком $\tilde{\mathbb{E}}_1$, и бирациональные морфизмы $\xi_1: \tilde{S}_1 \rightarrow \tilde{S}_1$ и $\sigma_1: \tilde{S}_1 \rightarrow T \times S$, образующие домик Хиронаки. Обозначим через $\mathbb{E}_2$ рефлексивный пучок $(\sigma_{1*} \xi_1^* \tilde{\mathbb{E}}_1)^{\vee\vee} = \mathbb{E}_2$ на произведении $T \times S$. Он локально свободен на открытом подмножестве вне коразмерности 3. Согласно [15; следствие 6.3] модуль над кольцом главных идеалов является плоским тогда и только тогда, когда он не имеет кручения. Поэтому $\mathbb{E}_2$ – пучок плоских $\mathcal{O}_T$ -модулей. Он является подпучком локально свободного $\mathcal{O}_T$ -модуля $\mathcal{F}$ того же ранга, т.е. определено вложение $\mathbb{E}_2 \hookrightarrow \mathcal{F}$. Пусть $\mathfrak{a} := \mathcal{F}/\mathbb{E}_2$. Ясно, что выбором детерминанта пучка $\mathcal{F}$ можно добиться того, чтобы $\mathfrak{a}$ был артиновым пучком с носителем на слое $t_0 \times S$: $\mathfrak{a}|_{t_0 \times S} \cong \mathfrak{a}$. Применив к точной тройке $\mathcal{O}_{T \times S}$ -пучков

$$0 \rightarrow \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow 0$$

ограничение на слой $t_0 \times S$, получим точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{T}or_1^{T \times S}(\mathfrak{a}, k_{t_0} \boxtimes \mathcal{O}_S) \rightarrow \mathbb{E}_2|_{t_0 \times S} \rightarrow \mathcal{F}|_{t_0 \times S} \rightarrow \mathfrak{a}|_{t_0 \times S} \rightarrow 0.$$

Поскольку $\mathfrak{a}$ – пучок на слое $t_0 \times S$, то $\mathcal{T}or_1^{T \times S}(\mathfrak{a}, k_{t_0} \boxtimes \mathcal{O}_S) = \mathcal{T}or_1^S(\mathfrak{a}, \mathcal{O}_S) = 0$ и $\mathbb{E}_2$ – плоское семейство пучков без кручения на гладкой поверхности. Согласно [9; доказательство предложения 4.3] $\mathbb{E}_2$ – $\mathcal{O}_{S \times T}$ -пучок гомологической размерности 1, и к нему применимо стандартное разрешение.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. По построению специального слоя $\pi^{-1}(t_0) = \tilde{S}_1$ можно считать, что $\hat{\Sigma}_1 = \tilde{\Sigma}_1$, и ξ_1 – тождественный морфизм.

Применив к пучку $\mathbb{E}_2$ стандартное разрешение, получим плоское над T семейство схем $\pi_2: \hat{\Sigma}_2 \rightarrow T$ с локально свободным пучком $\tilde{\mathbb{E}}_2$, а также бирациональный морфизм $\sigma_2: \hat{\Sigma}_2 \rightarrow T \times S$, причем $(\sigma_{2*}\tilde{\mathbb{E}}_2)^{\vee\vee} = \mathbb{E}_2$. Применив диаграмму (6.2), получим локально свободные пучки $\sigma_1'^*\tilde{\mathbb{E}}_2$ и $\sigma_2'^*\tilde{\mathbb{E}}_1$. Обозначив $\sigma := \sigma_1' \circ \sigma_2 = \sigma_2' \circ \sigma_1$, имеем очевидные соотношения $(\sigma_*\sigma_1'^*\tilde{\mathbb{E}}_2)^{\vee\vee} = (\sigma_*\sigma_2'^*\tilde{\mathbb{E}}_1)^{\vee\vee} = \mathbb{E}_2$.

Заметим, что на открытых подмножествах $\pi_1^{-1}T_0 \cong \pi_2^{-1}T_0$ пучки $\sigma_1'^*\tilde{\mathbb{E}}_2$ и $\sigma_2'^*\tilde{\mathbb{E}}_1$ изоморфны. Обозначим $\pi_i^{-1}(t_0) =: \tilde{S}_i$ для $i = 1, 2$ и соответственно $\tilde{E}_i := \tilde{\mathbb{E}}_i|_{\tilde{S}_i}$.

ЛЕММА 3. Пары $(\tilde{S}_1, \tilde{E}_1)$ и $(\tilde{S}_2, \tilde{E}_2)$ изоморфны.

Утверждение леммы противоречит предположению $K^{dS} \setminus \mu(\tilde{Q}) \neq \emptyset$ и завершает доказательство предложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Заметим, что локально свободные пучки $\sigma_1'^*\tilde{\mathbb{E}}_2 \otimes \det(\sigma_1'^*\tilde{\mathbb{E}}_2)^\vee$ и $\sigma_2'^*\tilde{\mathbb{E}}_1 \otimes \det(\sigma_2'^*\tilde{\mathbb{E}}_1)^\vee$ совпадают на открытом подмножестве вне коразмерности не ниже 2. Таким образом, они совпадают на всей схеме $\hat{\Sigma}_{12}$, т.е. $\sigma_1'^*\tilde{\mathbb{E}}_2 \otimes \det(\sigma_1'^*\tilde{\mathbb{E}}_2)^\vee = \sigma_2'^*\tilde{\mathbb{E}}_1 \otimes \det(\sigma_2'^*\tilde{\mathbb{E}}_1)^\vee$. Также заметим, что левая часть этого соотношения – локально свободный пучок, тривиальный вдоль исключительного дивизора морфизма раздутия σ_1' . Аналогично, пучок справа тривиален вдоль исключительного дивизора морфизма раздутия σ_2' . Отсюда следует, что существуют схема $\hat{\Sigma}_0$, пара бирациональных морфизмов $\hat{\Sigma}_2 \xrightarrow{\eta_2} \hat{\Sigma}_0 \xleftarrow{\eta_1} \hat{\Sigma}_1$ и локально свободный пучок $\tilde{\mathbb{E}}_0$ на схеме $\hat{\Sigma}_0$ такие, что $\tilde{\mathbb{E}}_i \otimes \det \tilde{\mathbb{E}}_i^\vee = \eta_i^*\tilde{\mathbb{E}}_0$ для $i = 1, 2$.

Сведем рассмотрение к случаю с тривиальным детерминантом. Введем вспомогательное обозначение $\tilde{E}'_i := \tilde{\mathbb{E}}_i \otimes \det \tilde{\mathbb{E}}_i^\vee$ для $i = 1, 2$. Тогда $\tilde{E}'_i = \eta_i^*\tilde{\mathbb{E}}_0$. Заметим, что пучки E и $E' = E \otimes \det E^\vee$ имеют одинаковые пучки особенностей $\varkappa = \varkappa'$. Поэтому вдоль дополнительных компонент приводимых слоев семейств $\tilde{\Sigma}_i$ имеем $\tilde{E}'_i|_{\text{add}} = \ker \sigma^*(\oplus^r \mathcal{O}_S \rightarrow \varkappa)|_{\text{add}}$, т.е. пучки $\tilde{E}'_i$ нетривиальны вдоль дополнительных компонент схем $\tilde{S}_i$. Поскольку $\tilde{\mathbb{E}}_0$ – локально свободный пучок, то η_i – тождественные морфизмы.

Тем самым, морфизмы σ_i совпадают, поэтому будем использовать обозначения $\hat{\Sigma} := \hat{\Sigma}_1 = \hat{\Sigma}_2$ и $\sigma: \hat{\Sigma} \rightarrow T \times S$. Также имеются два локально свободных пучка $\tilde{\mathbb{E}}_i$, $i = 1, 2$, удовлетворяющих соотношению $\tilde{\mathbb{E}}_1 \otimes \det \tilde{\mathbb{E}}_1^\vee = \tilde{\mathbb{E}}_2 \otimes \det \tilde{\mathbb{E}}_2^\vee$. Детерминанты $\det \tilde{\mathbb{E}}_i$ совпадают на дополнении к исключительному дивизору морфизма σ , причем $(\sigma_* \det \tilde{\mathbb{E}}_i)^{\vee\vee} = \det \mathbb{E}_2$. Поэтому пучки $\tilde{E}_i = \tilde{\mathbb{E}}_i|_{\tilde{S}}$ могут отличаться только на дополнительных компонентах схемы $\tilde{S}$. Заметим, что специальный слой этой проекции $\tilde{S} = \pi^{-1}(t_0)$ является проективным спектром $\mathcal{O}_S$ -алгебры. Пусть $\mathcal{O}(1)$ – его скручивающий пучок Серра. Тогда $\tilde{E}_1 = \tilde{E}_2 \otimes \mathcal{O}(l_1 - l_2)$ для некоторых целых l_1, l_2 .

Пусть $l_1 - l_2 \geq 0$ (противоположный случай рассматривается аналогично). По определению выделенной поляризации имеем $\tilde{L}^m = \sigma^*L^m \otimes \mathcal{O}(1)$, и определено вложение обратимых пучков $\sigma^*L^m \otimes \mathcal{O}(1) \hookrightarrow \sigma^*L^m$. Поэтому имеет место вложение $\tilde{L}^m \otimes \mathcal{O}(l_1 - l_2) \hookrightarrow \tilde{L}^m$. В силу локальной свободы пучка $\tilde{E}_2$ имеет

место точная тройка

$$0 \rightarrow \tilde{E}_2 \otimes \tilde{L}^m \otimes \mathcal{O}(l_1 - l_2) \rightarrow \tilde{E}_2 \otimes \tilde{L}^m \rightarrow Q \otimes \tilde{E}_2 \otimes \tilde{L}^m \rightarrow 0, \quad (8.1)$$

в которой Q – факторпучок с носителем на дополнительных компонентах схемы $\tilde{S}$. При $m \gg 0$ точна связанная с (8.1) последовательность пространств глобальных сечений

$$0 \rightarrow H^0(\tilde{S}, \tilde{E}_2 \otimes \tilde{L}^m \otimes \mathcal{O}(l_1 - l_2)) \rightarrow H^0(\tilde{S}, \tilde{E}_2 \otimes \tilde{L}^m) \rightarrow H^0(\tilde{S}, Q \otimes \tilde{E}_2 \otimes \tilde{L}^m) \rightarrow 0.$$

Поскольку $\tilde{E}_2 \otimes \mathcal{O}(l_1 - l_2) = \tilde{E}_1$ и при этом многочлены Гильберта ограничений $\tilde{\mathbb{E}}_1|_{\tilde{S}}$ и $\tilde{\mathbb{E}}_2|_{\tilde{S}}$ равны (так как пучки $\tilde{\mathbb{E}}_i$ плоские над базой T семейства $\tilde{\Sigma}$ и совпадают над T_0), то

$$h^0(\tilde{S}, \tilde{E}_2 \otimes \tilde{L}^m \otimes \mathcal{O}(l_1 - l_2)) = h^0(\tilde{S}, \tilde{E}_2 \otimes \tilde{L}^m).$$

Отсюда следует, что $\chi(Q \otimes \tilde{E}_2 \otimes \tilde{L}^m) = 0$ при всех $m \gg 0$. Таким образом, $Q = 0$ и $l_1 = l_2$. Из (8.1) следует, что $\tilde{E}_1 = \tilde{E}_2$.

§ 9. $\mathrm{PGL}(V)$ -действия, GIT-стабильность и GIT-факторы

В этом параграфе проведен анализ выполнимости численного критерия Гильберта–Мамфорда для подходящего $\mathrm{PGL}(V)$ -линеаризованного очень обильного обратимого векторного расслоения на схеме $\mu(\tilde{Q})$. Тем самым, показано, что хороший $\mathrm{PGL}(V)$ -фактор $\mu(\tilde{Q})/\mathrm{PGL}(V)$ определен в категории алгебраических схем над полем k . При этом оказывается, что каждая $\mathrm{PGL}(V)$ -орбита в $\mu(\tilde{Q})$ содержит по крайней мере одну $\mathrm{PGL}(V)$ -полустабильную точку.

Пусть $\mathcal{S}$ – универсальное факторрасслоение на грассманиане $G(V, r)$, по-прежнему $\mathcal{O}_{G(V, r)}(1)$ – положительная образующая его группы Пикара. Для проекций универсальной подсхемы $\mathrm{Univ}^{P(t)} G(V, r)$ будем использовать обозначения

$$\mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r) \xleftarrow{\pi} \mathrm{Univ}^{P(t)} G(V, r) \xrightarrow{\pi'} G(V, r).$$

Образуем на схеме Гильберта пучки $\tilde{L}_l^h = \det \pi_* \pi'^* \mathcal{S}(l)$. В силу того, что проекция $\pi: \mathrm{Univ}^{P(t)} G(V, r) \rightarrow \mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$ – плоский морфизм и пучки $\mathcal{S}(l)$ локально свободны, получаем, что пучки $\tilde{L}_l^h$ обратимы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19. *Пучки $\tilde{L}_l^h$ очень обильны при $l \gg 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [10; предложение 2.2.5] для проективной схемы X , обильного обратимого пучка L на схеме X и схемы Гильберта $\mathrm{Hilb}^{P(t)} X$ с универсальной схемой

$$\mathrm{Hilb}^{P(t)} X \xleftarrow{\pi} \mathrm{Univ}^{P(t)} X \xrightarrow{\pi'} X$$

пучки $\det \pi_* \pi'^* L^n$ очень обильны при $n \gg 0$. Заменим L его достаточно большой тензорной степенью так, чтобы пучок $\det \pi_* \pi'^* L$ был очень обильным. Возьмем $X = G(V, r)$ и $L = \det \mathcal{S} \otimes \mathcal{O}_{G(V, r)}(l')$, если l' настолько велико, что L обилен. Тогда пучок

$$\det \pi_* \pi'^* L = \det \pi_* \pi'^* (\det \mathcal{S} \otimes \mathcal{O}_{G(V, r)}(l')) = \det \pi_* \pi'^* \mathcal{S}(l) = \tilde{L}_l^h$$

для подходящего $l \gg 0$ очень обилен.

Рассмотрим действие линейной алгебраической группы $\mathrm{GL}(V)$ на векторном пространстве V его линейными преобразованиями. Тогда определены индуцированные действия группы $\mathrm{PGL}(V)$ на многообразии Грассмана $G(V, r)$ и на схеме Гильберта $\mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$. Подсхема $\mu(\tilde{Q})$ является $\mathrm{GL}(V)$ -инвариантной. Зафиксируем обозначение $\tilde{L}_l := \tilde{L}_l^h|_{\mu(\tilde{Q})}$.

Напомним следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17 (см. [10; определение 4.2.5]). Пусть X – k -схема конечного типа, G – алгебраическая k -группа и $\alpha: X \times G \rightarrow X$ – действие группы. G -линеаризацией квазикогерентного $\mathcal{O}_X$ -пучка F называется изоморфизм $\mathcal{O}_{X \times G}$ -пучков $\Lambda: \alpha^* F \rightarrow \mathrm{pr}_1^* F$, где $\mathrm{pr}_1: X \times G \rightarrow X$ – проекция, причем выполняется следующее условие коцикла:

$$(\mathrm{id}_X \times \mathrm{mult})^* \Lambda = \mathrm{pr}_{12}^* \Lambda \circ (\alpha \times \mathrm{id}_G)^* \Lambda.$$

Здесь $\mathrm{pr}_{12}: X \times G \times G \rightarrow X \times G$ – проекция на первые два сомножителя, $\mathrm{mult}: G \times G \rightarrow G$ – морфизм умножения в группе G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20. Пучки $\tilde{L}_l$ несут $\mathrm{GL}(V)$ -линеаризацию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma: G(V, r) \times \mathrm{GL}(V) \rightarrow G(V, r)$ – морфизм действия группы $\mathrm{GL}(V)$. Универсальное факторрасслоение $\mathcal{S}(l)$ несет $\mathrm{GL}(V)$ -линеаризацию $\Lambda: \gamma^* \mathcal{S}(l) \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_1^* \mathcal{S}(l)$, индуцированную эпиморфизмом $V \otimes \mathcal{O}_{G(V, r)}(l) \rightarrow \mathcal{S}(l)$. Теперь рассмотрим морфизм $\mathrm{GL}(V)$ -действия

$$\alpha: \mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r) \times \mathrm{GL}(V) \rightarrow \mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r),$$

индуцированного действием γ . При $l \gg 0$ верна следующая цепочка изоморфизмов:

$$\begin{aligned} \alpha^* \tilde{L}_l &= \det \alpha^* (\pi_* \pi'^* \mathcal{S}(l))|_{\mu(\tilde{Q})} \\ &= \det \pi_* \pi'^* \gamma^* \mathcal{S}(l)|_{\mu(\tilde{Q})} \xrightarrow{\det(\pi_* \pi'^* \Lambda|_{\mu(\tilde{Q})})} \det \pi_* \pi'^* \mathrm{pr}_1^* \mathcal{S}(l)|_{\mu(\tilde{Q})} \\ &= \det \mathrm{pr}_1^* \pi_* \pi'^* \mathcal{S}(l)|_{\mu(\tilde{Q})} = \mathrm{pr}_1^* \tilde{L}_l. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Центральный морфизм в (9.1) индуцирован линеаризацией Λ пучка $\mathcal{S}(l)$ и поставляет требуемую линеаризацию.

Теперь рассмотрим (см. [10; гл. 4, п. 4.2]) произвольную однопараметрическую подгруппу $\lambda: \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow \mathrm{GL}(V)$. Будем обозначать образ точки $t \in \mathbb{A}^1 \setminus 0$ при морфизме λ через $\lambda(t)$. Морфизм λ в композиции с действием α приводит для всякой замкнутой точки $\tilde{x} \in \mu(\tilde{Q})$ к морфизму $\alpha(\lambda): \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow \mu(\tilde{Q})$, задаваемому соответствием $t \mapsto \tilde{x}_t = \alpha(\lambda(t), \tilde{x})$. В силу собственности схемы $\mu(\tilde{Q})$ морфизм $\alpha(\lambda)$ может быть единственным образом продолжен до морфизма $\alpha(\lambda): \mathbb{A}^1 \rightarrow \mu(\tilde{Q})$. Тогда точка $\tilde{x}_0 = \overline{\alpha(\lambda)}(0)$ является неподвижной точкой действия подгруппы λ . Обозначение: $\tilde{x}_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)(\tilde{x})$. Подгруппа λ действует на слое $L_{\tilde{x}_0}$ G -линеаризованного линейного расслоения L с некоторым весом r : если Λ – линеаризация на L , то $\Lambda(\tilde{x}_0, g) = g^r \cdot \mathrm{id}_{L_{\tilde{x}_0}}$. Определим вес соответствующего одномерного представления группы λ как $w^{\tilde{L}_l}(\tilde{x}, \lambda) = -r$.

Аналогично, для $GL(V)$ -действия $\beta: Q \times GL(V) \rightarrow Q$ на подсхеме $Q \subset \text{Quot}^{P_E(t)} V \otimes \mathcal{O}_S$, составленной полустабильными пучками, и той же однопараметрической подгруппы λ имеем $x_0 = \overline{\beta(\lambda)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)(x)$.

Основным инструментом для анализа существования фактора является численный критерий Гильберта–Мамфорда. Напомним следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18 (см. [10; определение 4.2.9]). Точка $x \in X$ схемы X полустабильна относительно G -линеаризованного обильного линейного расслоения L , если существуют целое число n и инвариантное глобальное сечение $s \in H^0(X, L^n)$ такие, что $s(x) \neq 0$. Точка x стабильна, если к тому же стабилизатор $\text{Stab}(x)$ конечен и G -орбита точки x замкнута в открытом множестве всех полустабильных точек в X .

ТЕОРЕМА 3 (критерий Гильберта–Мамфорда; см. [10; теорема 4.2.11]). Точка $x \in X$ полустабильна тогда и только тогда, когда для всех нетривиальных однопараметрических подгрупп $\lambda: \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow G$ имеет место неравенство

$$w(x, \lambda) \geq 0.$$

Точка x стабильна тогда и только тогда, когда для всех λ выполнено строгое неравенство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Пусть G – алгебраическая группа, X, Y – алгебраические схемы, $\mu: X \rightarrow Y$ – морфизм схем, $\alpha: Y \times G \rightarrow Y$ – действие группы G . Морфизм $\alpha': X \times G \rightarrow X$ назовем действием группы G на схеме X , индуцированным действием α при морфизме μ , если квадрат

$$\begin{array}{ccc} X \times G & \xrightarrow{\alpha'} & X \\ (\mu, \text{id}) \downarrow & & \downarrow \mu \\ Y \times G & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array}$$

декартов.

Пусть G – редуктивная алгебраическая группа, X, Y, Z – собственные алгебраические схемы, $\mu: X \rightarrow Y$ и $\phi: X \rightarrow Z$ – морфизмы схем, $\alpha: Y \times G \rightarrow Y$ и $\beta: Z \times G \rightarrow Z$ – действия группы G . Пусть также $\alpha', \beta': X \times G \rightarrow X$ – действия группы G на схеме X , индуцированные действиями α и β соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Назовем действия α и β X -согласованными, если коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X \times G & \xrightarrow{\alpha'} & X \\ \downarrow = & & \downarrow = \\ X \times G & \xrightarrow{\beta'} & X \end{array}$$

Рассмотрим два морфизма $\mu(\tilde{Q}) \xleftarrow{\mu} \tilde{Q} \xrightarrow{\phi} Q$. По определению действий группы $GL(V)$ на схемах $\mu(\tilde{Q})$ и Q эти действия являются $\tilde{Q}$ -согласованными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Назовем точки $y \in Y$ и $z \in Z$ соответственными относительно морфизмов μ и ϕ , если $\mu^{-1}(y) \cap \phi^{-1}(z) \neq \emptyset$.

В дальнейшем мы обозначаем через $\lambda(x)$ орбиту точки x при действии однопараметрической подгруппы λ , а через $\lambda(t)(x)$ – ее точку, соответствующую данному t .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21. Пусть $y \in Y$ и $z \in Z$ – соответственные точки. Для любой однопараметрической подгруппы λ неподвижность точки $y = y_0$ влечет существование пары (y_0, z_0) соответственных точек такой, что точка z_0 неподвижна, и наоборот.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} y_0 \times \lambda & \longrightarrow & Y \times \lambda & \longleftarrow & X \times \lambda & \longrightarrow & Z \times \lambda & \longleftarrow & \lambda(z) \times \lambda \\ \downarrow & & \alpha(\lambda) \downarrow & & \alpha'(\lambda) \downarrow \neq \beta'(\lambda) & & \downarrow \beta(\lambda) & & \downarrow \\ y_0 & \longrightarrow & Y & \xleftarrow{\mu} & X & \xrightarrow{\phi} & Z & \xleftarrow{\quad} & \lambda(z) \end{array}$$

немедленно следует, что если точки y_0 и z соответственные, то для всякого t точки $\lambda(t)(y_0) = y_0$ и $\lambda(t)(z)$ также соответственные. Теперь заметим, что в силу собственности схемы Z существует точка $z_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)(z)$. Так как подмножество $\lambda(z)$ открыто в $\bar{\lambda}(\mathbb{A}^1)$, то для прообразов в X получаем, что $\phi^{-1}\lambda(z)$ открыто в $\phi^{-1}\bar{\lambda}(\mathbb{A}^1)$. Заметим, что пересечение с замкнутым подмножеством $\mu^{-1}(y_0)$ дает, что $\phi^{-1}\lambda(z) \cap \mu^{-1}(y_0)$ открыто в $\phi^{-1}\bar{\lambda}(\mathbb{A}^1) \cap \mu^{-1}(y_0)$. Вместе с тем для всякого $t \neq 0$ пересечение $\phi^{-1}\lambda(t)(z) \cap \mu^{-1}(y_0)$ – непустое замкнутое в $\phi^{-1}\bar{\lambda}(\mathbb{A}^1) \cap \mu^{-1}(y_0)$ подмножество. Следовательно, $\phi^{-1}(z_0) \cap \mu^{-1}(y_0)$ – непустое подмножество, что требовалось.

Пусть теперь схемы X, Y, Z проективны (квазипроективны), а морфизмы μ и ϕ сюръективны. Пусть L_Y и L_Z – очень обильные обратимые G -линеаризованные векторные расслоения на схемах Y и Z соответственно; $\Lambda_Y: \alpha^*L_Y \rightarrow \mathrm{pr}_1^*L_Y$ и $\Lambda_Z: \beta^*L_Z \rightarrow \mathrm{pr}_1^*L_Z$ – изоморфизмы их G -линеаризаций. Для слоев расслоений L_Y и L_Z в замкнутых точках $y \in Y$ и $z \in Z$ введем соответственно обозначения $L_{Y,y}$ и $L_{Z,z}$. Тогда ограничения $\Lambda_{Y,0}$ и $\Lambda_{Z,0}$ изоморфизмов линеаризаций на действия однопараметрической подгруппы λ и на слои над λ -неподвижными точками y_0 и z_0 имеют соответственно вид

$$\Lambda_{Y,0}: \alpha(\lambda)^*L_{Y,y_0} \rightarrow \mathrm{pr}_1^*L_{Y,y_0}, \quad \Lambda_{Z,0}: \beta(\lambda)^*L_{Z,z_0} \rightarrow \mathrm{pr}_1^*L_{Z,z_0}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. G -линеаризации Λ_Y и Λ_Z *послойно согласованы*, если для всякой пары соответственных λ -неподвижных точек $y_0 \in Y$ и $z_0 \in Z$ существует изоморфизм $f_0: L_{Y,y_0} \rightarrow L_{Z,z_0}$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \alpha(\lambda)^*L_{Y,y_0} & \xrightarrow[\sim]{\Lambda_{Y,y_0}} & \mathrm{pr}_1^*L_{Y,y_0} \\ \alpha(\lambda)^*f_0 \downarrow \wr & & \wr \downarrow \mathrm{pr}_1^*f_0 \\ \beta(\lambda)^*L_{Z,z_0} & \xrightarrow[\sim]{\Lambda_{Z,z_0}} & \mathrm{pr}_1^*L_{Z,z_0} \end{array} \quad (9.2)$$

коммутативна.

Имеет место очевидное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22. *Послойно согласованные линеаризации векторных расслоений L_Y и L_Z индуцируют для всякой однопараметрической подгруппы $\lambda: \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow G$ на слоях в соответственных неподвижных точках одномерные представления с равными весами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диаграмма (9.2) поставляет эквивалентность одномерных представлений мультипликативной группы поля k . Эквивалентные представления группы имеют равные характеры. Следовательно, веса представлений, индуцированных морфизмами $\Lambda_{Y,0}$ и $\Lambda_{Z,0}$, равны.

В нашей ситуации действия группы $\mathrm{GL}(V)$ на схемах $\mu(\tilde{Q})$ и Q являются $\tilde{Q}$ -согласованными. Рассуждения в доказательстве предложения 5 и, в частности, расслоенная диаграмма (2.7) позволяют заменить схемы $\tilde{Q}$, $\mu(\tilde{Q})$ и Q их подходящими проективными замыканиями. Тогда, полагая $X = \tilde{Q}$, $Y = \mu(\tilde{Q})$ и $Z = \overline{Q}$, применим предложение 21.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23. *Расслоения $\tilde{L}_l$ и расслоения $L_l = p_{1*}(\mathbb{E} \otimes \mathbb{L}^l)$ несут согласованные линеаризации.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Две соответственные точки $\tilde{x} \in \mu(\tilde{Q})$ и $x \in Q$ задают эпиморфизмы $V \otimes \mathcal{O}_{\tilde{S}} \rightarrow \tilde{E} \otimes \tilde{L}^m$ и $V \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow E \otimes L^m$. Подкрутка на l и формирование $rp_E(l+m)$ -й внешней степени приводят к эпиморфизмам

$$\begin{aligned} \bigwedge^{rp_E(l+m)} (V \otimes \tilde{L}^l) &\rightarrow \bigwedge^{rp_E(l+m)} \tilde{E} \otimes \tilde{L}^{(l+m)}, \\ \bigwedge^{rp_E(l+m)} (V \otimes L^l) &\rightarrow \bigwedge^{rp_E(l+m)} E \otimes L^{(l+m)} \end{aligned}$$

соответственно. Взятие глобальных сечений при $l \gg 0$ до формирования внешних степеней дает

$$\begin{aligned} \bigwedge^{rp_E(l+m)} (V \otimes H^0(\tilde{S}, \tilde{L}^l)) &\rightarrow \bigwedge^{rp_E(l+m)} H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}^{(l+m)}), \\ \bigwedge^{rp_E(l+m)} (V \otimes H^0(S, L^l)) &\rightarrow \bigwedge^{rp_E(l+m)} H^0(S, E \otimes L^{(l+m)}). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Поскольку проекции $\pi: \mathrm{Univ}^{P(t)} G(V, r) \rightarrow \mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$ и $p_1: Q \times S \rightarrow Q$ — плоские морфизмы, то прямые образы $\pi_* \mathcal{O}_{\mathrm{Univ}^{P(t)} G(V, r)}(l-m)$ и $p_{1*} \mathbb{L}^l$ локально свободные ранга $P(l)$. По теореме Грауэрта (см. [11; гл. III, следствие 12.9]) имеем $\pi_* \mathcal{O}_{\mathrm{Univ}^{P(t)} G(V, r)}(l-m) \otimes k_{\tilde{x}} \cong H^0(\tilde{S}, \tilde{L}^l)$, а также $p_{1*} \mathbb{L}^l \otimes k_x \cong H^0(S, L^l)$.

Выберем открытые по Зарискому окрестности $\tilde{U} \ni \tilde{x}$ и $U \ni x$, поставляющие локальные тривиализации

$$\begin{aligned} \pi_* \mathcal{O}_{\mathrm{Univ}^{P(t)} G(V, r)}(l-m)|_{\tilde{U}} &\cong H^0(\tilde{S}, \tilde{L}^l) \otimes \mathcal{O}_{\pi^{-1}(\tilde{U})}, \\ p_{1*} \mathbb{L}^l|_U &\cong H^0(S, L^l) \otimes \mathcal{O}_{p_1^{-1}(U)}. \end{aligned}$$

Без ограничения общности можно считать, что открытые подмножества $\tilde{U}$ и U содержат соответственные точки, представляющие объекты $(\tilde{S} \cong S, \tilde{E} \cong E)$

и E соответственно, причем E – локально свободный пучок. Тогда на открытых подмножествах $\tilde{U}_0 \cong U_0$ таких точек имеется тождественный изоморфизм $H^0(\tilde{S}, \tilde{L}^l) \otimes \mathcal{O}_{\pi^{-1}(\tilde{U}_0)} \cong H^0(S, L^l) \otimes \mathcal{O}_{p_1^{-1}(U_0)}$. В силу тривиальности пучков этот изоморфизм продолжается до изоморфизма

$$H^0(\tilde{S}, \tilde{L}^l) \otimes \mathcal{O}_{\pi^{-1}(\tilde{U})} \cong H^0(S, L^l) \otimes \mathcal{O}_{p_1^{-1}(U)}.$$

Тем самым, фиксируется изоморфизм слоев $H^0(\tilde{S}, \tilde{L}^l) \otimes k_{\tilde{x}} \cong H^0(S, L^l) \otimes k_x$ в точках $\tilde{x}$ и x . Тогда эпиморфизмы (9.3) могут быть дополнены до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^{rp_E(l+m)} (V \otimes H^0(\tilde{S}, \tilde{L}^l)) & \longrightarrow & \bigwedge^{rp_E(l+m)} H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}^{(l+m)}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \bigwedge^{rp_E(l+m)} (V \otimes H^0(S, L^l)) & \longrightarrow & \bigwedge^{rp_E(l+m)} H^0(S, E \otimes L^{(l+m)}) \end{array} \quad (9.4)$$

где правая вертикальная стрелка индуцирована изоморфизмом v , полученным в § 4.

Пусть $((\tilde{S}_{\tilde{x}_0}, \tilde{L}_{\tilde{x}_0}), \tilde{E}_{\tilde{x}_0})$ – полустабильная пара, соответствующая точке $\tilde{x}_0 \in \mu(\tilde{Q})$. Также S_{x_0} – слой семейства $p_1: Q \times S \rightarrow Q$ в точке $x_0 \in Q$, $L_{x_0} = L$ – его поляризация, E_{x_0} – полустабильный когерентный пучок, соответствующий точке $x_0 \in Q$. Введем сокращенные обозначения

$$\tilde{W} = \bigwedge^{rp_E(l+m)} (V \otimes H^0(\tilde{S}_{\tilde{x}_0}, \tilde{L}_{\tilde{x}_0}^l)), \quad W = \bigwedge^{rp_E(l+m)} (V \otimes H^0(S_{x_0}, L_{x_0}^l)).$$

Замечая, что слои $(\tilde{L}_l)_{\tilde{x}_0}$ и $(L_l)_{x_0}$ векторных расслоений $\tilde{L}_l$ и L_l в соответственных точках $\tilde{x}_0$ и x_0 даются изоморфизмами

$$\begin{aligned} (\tilde{L}_l)_{\tilde{x}_0} &= \bigwedge^{rp_E(l+m)} H^0(\tilde{S}_{\tilde{x}_0}, \tilde{E}_{\tilde{x}_0} \otimes \tilde{L}_{\tilde{x}_0}^{(l+m)}), \\ (L_l)_{x_0} &= \bigwedge^{rp_E(l+m)} H^0(S_{x_0}, E_{x_0} \otimes L_{x_0}^{(l+m)}), \end{aligned}$$

и используя ограничения изоморфизмов линеаризации на слои векторных расслоений и диаграмму (9.4), получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \alpha(\lambda)^* \tilde{W} & \xrightarrow{\sim} & \beta(\lambda)^* W & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & \alpha(\lambda)^* (\tilde{L}_l)_{\tilde{x}_0} & & \beta(\lambda)^* (L_l)_{x_0} & \\ & \downarrow \tilde{\Lambda}_0 & & \downarrow \Lambda_0 & \\ \text{pr}_1^* \tilde{W} & \xrightarrow{\quad} & \text{pr}_1^* W & & \\ & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & \text{pr}_1^* (\tilde{L}_l)_{\tilde{x}_0} & \xrightarrow{\sim} & \text{pr}_1^* (L_l)_{x_0} & \end{array} \quad (9.5)$$

в которой все наклонные стрелки – эпиморфизмы, остальные – изоморфизмы. Передняя грань диаграммы (9.5) доказывает предложение.

СЛЕДСТВИЕ 5. Соответственные λ -неподвижные точки схем $\mu(\tilde{Q})$ и Q несут λ -действия с равными весами.

Результат немедленно следует из предыдущего предложения и предложения 22.

Применение численного критерия Гильберта–Мамфорда приводит к следующему следствию.

СЛЕДСТВИЕ 6. Для всякой пары соответственных точек $(\tilde{x}, x)$, где $\tilde{x} \in \mu(\tilde{Q})$ и $x \in Q$, L_l -стабильность (L_l -полустабильность) точки x влечет $\tilde{L}_l$ -стабильность ($\tilde{L}_l$ -полустабильность) точки $\tilde{x}$, и наоборот.

Для дальнейшего необходима известная из геометрической теории инвариантов

ТЕОРЕМА 4 (см. [10; теорема 4.2.10]). Пусть G – редуктивная группа, действующая на проективной схеме X , снабженной G -линеаризованным обильным линейным расслоением L . Тогда существуют проективная схема Y и морфизм $\pi: X^{ss}(L) \rightarrow Y$ такие, что π – универсальный хороший фактор для данного G -действия. Более того, существует открытое подмножество $Y^s \subset Y$ такое, что $X^s(L) = \pi^{-1}(Y^s)$, и такое, что $\pi: X^s \rightarrow Y^s$ – универсальный геометрический фактор.

Применим эту теорему в следующей ситуации:

$$X = \overline{\mu(\tilde{Q})}, \quad G = \mathrm{PGL}(V), \quad L = \tilde{L}_l, \quad l \gg 0.$$

Поскольку не известно, имеет ли место равенство $\overline{(\mu(\tilde{Q}))^{ss}} = \mu(\tilde{Q})$, в силу следствия 6 имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 24. Существует квазипроективная алгебраическая схема $\tilde{M}$ вместе с морфизмом $\pi: \mu(\tilde{Q}) \rightarrow \tilde{M}$, причем π – универсальный хороший $\mathrm{PGL}(V)$ -фактор. Схема $\tilde{M}$ содержит открытую подсхему $\tilde{M}^s \supset \tilde{M}$ такую, что ограничение $\pi|_{\mu(\tilde{Q})^s}: \mu(\tilde{Q})^s \rightarrow \tilde{M}^s$ – универсальный геометрический фактор.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Пусть $Q_0 \subset Q$ – открытое подмножество точек, соответствующих локально свободным факторпучкам, $\tilde{Q}_0 \cong Q_0$ – его образ при стандартном разрешении, а $\mu(\tilde{Q}_0)$ – соответствующее подмножество в схеме $\mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$. Поскольку морфизм μ переводит различные классы изоморфных пар $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ в различные классы изоморфных подсхем в грассманиане, а действия группы $\mathrm{GL}(V)$ на схемах Q и $\mu(\tilde{Q})$ согласованы, то имеем изоморфизм хороших GIT-факторов

$$\tilde{M}_0 := \mu(\tilde{Q}_0)/\mathrm{GL}(V) \cong Q_0/\mathrm{GL}(V) =: M_0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Поскольку схема $\mu(\tilde{Q})$ приведена, то и ее фактор

$$\mu(\tilde{Q})/\mathrm{PGL}(V) = \tilde{M}$$

является приведенной схемой (см. [16; гл. 0, § 2, п. (2)]).

ЗАМЕЧАНИЕ 12. В нашем случае $\mathrm{char}(k) = 0$ и согласно [16; гл. 1, § 2, теорема 1.1] схема $\tilde{M}$ – нётерова алгебраическая схема, так как $\mu(\tilde{Q})$ – нётерова алгебраическая схема.

§ 10. Морфизмы компактификаций и проективность $\widetilde{M}$

Напомним, что подмножество Q , составленное в схеме $\mathrm{Quot}^{rp(t)}(V \otimes L^{(-m)})$ полустабильными когерентными пучками, является квазипроективной алгебраической схемой. Морфизм стандартного разрешения $\phi: \widetilde{Q} \rightarrow Q$ – проективный морфизм алгебраических схем и, тем самым, схема $\widetilde{Q}$ – квазипроективная алгебраическая схема. По построению она снабжена плоским семейством допустимых схем $\Sigma_{\widetilde{Q}}$, оснащённым локально свободным пучком $\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{Q}}$. Последний индуцирует отображение $\Sigma_{\widetilde{Q}} \rightarrow G(r, V)$, при ограничении на слои семейства $\Sigma_{\widetilde{Q}}$ являющееся замкнутым вложением. При этом имеется морфизм базы $\widetilde{Q}$ семейства $\Sigma_{\widetilde{Q}}$ в схему Гильберта подсхем грассманиана $\mu: \widetilde{Q} \rightarrow \mathrm{Hilb}^{P(t)} G(r, V)$. Обозначим через $\overline{M}$ объединение тех компонент схемы Гизекера–Маруямы, которые содержат локально свободные пучки.

Далее, заметим, что имеется (теоретико-множественное) сюръективное отображение $\kappa: \overline{M} \rightarrow \widetilde{M}$, даваемое формулой $E \mapsto (\widetilde{S}, \sigma^* E / \mathrm{tors})$. Схемы $\overline{M}$ и $\widetilde{M}$ содержат открытые подсхемы $M_0^s \subset \overline{M}$ и $\widetilde{M}_0^s \subset \widetilde{M}$, для которых ограничение $\kappa_0 := \kappa|_{M_0^s}: M_0^s \rightarrow \widetilde{M}_0^s$ задаёт изоморфизм схем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 25. *Определён бирациональный морфизм проективных нётеровых схем $\kappa: \overline{M} \rightarrow \widetilde{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в произведении $\overline{M} \times \widetilde{M}$ с проекциями $\overline{M} \xleftarrow{\overline{p}} \overline{M} \times \widetilde{M} \xrightarrow{\widetilde{p}} \widetilde{M}$ подмножество

$$A := \{(x, \kappa(x)) \in \overline{M} \times \widetilde{M} \mid x \in \overline{M}\}.$$

Также рассмотрим подмножество

$$A_0 = \{(x, \kappa(x)) \in \overline{M} \times \widetilde{M} \mid x \in \overline{M}_0^s\} = A \cap M_0^s \times \widetilde{M}_0^s,$$

соответствующее GIT-стабильным S -парам. При этом вложение $A_0 \hookrightarrow \overline{M} \times \widetilde{M}$ снабжает подмножество A_0 структурой локально замкнутой подсхемы в произведении $\overline{M} \times \widetilde{M}$. образуем замыкание $\overline{A}_0$ подсхемы A_0 в произведении $\overline{M} \times \widetilde{M}$.

Заметим, что имеется включение множеств $A \subset \overline{A}_0$. При этом образ подмножества A совпадает с множеством $\overline{A}_0$. Это сразу следует из стандартного разрешения семейства полустабильных когерентных пучков с базой $T = \mathrm{Spec} R$, где R – кольцо дискретного нормирования. Член семейства в общей точке составляет точку в A_0 , член семейства в специальной точке – точку в $\overline{A}_0 \setminus A_0$. При этом специальный член семейства соответствует точке подмножества $A \setminus A_0$. Рассматривая различные морфизмы $T \rightarrow \overline{M}$, получим биекцию $\overline{A}_0 \simeq A$. Тем самым, подмножество A снабжено структурой замкнутой подсхемы в произведении $\overline{M} \times \widetilde{M}$. При этом по построению подмножества A имеем $\overline{p}(A) = \overline{M}$ и по конструкции схемы $\widetilde{M}$ также $\widetilde{p}(A) = \widetilde{M}$.

Введём морфизмы $\overline{\kappa}$ и $\widetilde{\kappa}$ как композиции согласно коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \swarrow \overline{\kappa} & \downarrow & \searrow \widetilde{\kappa} & \\ \overline{M} & \xleftarrow{\overline{p}} & \overline{M} \times \widetilde{M} & \xrightarrow{\widetilde{p}} & \widetilde{M} \end{array}$$

По построению морфизма κ морфизмы $\bar{\kappa}$ и $\tilde{\kappa}$ сюръективные и бирациональные. Кроме того, для любой замкнутой точки $x \in \bar{M}$ соответствие $x \mapsto (x, \kappa(x))$ составляет теоретико-множественное отображение $\bar{M} \rightarrow A$, обратное к морфизму $\bar{\kappa}$, рассматриваемому как отображение множеств. Таким образом, морфизм $\bar{\kappa}$ бирационален и биективен на каждой компоненте схемы A . Итак, $\bar{\kappa}: A \rightarrow \bar{M}$ – изоморфизм. Переобозначив композицию $\kappa: \bar{M} \xrightarrow{\bar{\kappa}^{-1}} A \xrightarrow{\tilde{\kappa}} \tilde{M}$, получим требуемый морфизм схем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 26. $\tilde{M}$ – проективная схема.

Доказательство этого предложения основано на следующей простой лемме.

ЛЕММА 4. Квазипроjektивная полная схема проективна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – квазипроjektивная полная схема. Поскольку X квазипроjektивна, то существуют подходящее проективное пространство $\mathbb{P}$ и вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}$. Так как X полна, то для всякой схемы Y проекция на второй сомножитель $\text{pr}_2: X \times Y \rightarrow Y$ переводит замкнутые подсхемы в замкнутые. Положим $Y = \mathbb{P}$ и рассмотрим диагональное вложение $\Delta: \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{P} \times \mathbb{P}$. В силу отделимости схемы $\mathbb{P}$ оно замкнуто. В коммутативной диаграмме с расслоенным квадратом

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\delta} & X \times \mathbb{P} & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \mathbb{P} \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow \text{pr}_2 & \\ \mathbb{P} & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{P} \times \mathbb{P} & & \end{array}$$

диагональное вложение Δ замкнуто. Следовательно, и морфизм δ – замкнутое вложение. Образ $\text{pr}_2 \circ \delta(X) \cong X$ замкнут в пространстве $\mathbb{P}$ в силу полноты схемы X . Тем самым, X – проективная схема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 26. В силу леммы 4 достаточно убедиться в том, что $\tilde{M}$ – полная схема. По ранее доказанному имеет место морфизм $\kappa: \bar{M}' \rightarrow \bar{M}$, причем $\bar{M}$ – проективная схема. Докажем, что для любой схемы Y и проекции $\text{pr}_2: \bar{M} \times Y \rightarrow Y$ образ $\text{pr}_2(Z)$ любой замкнутой подсхемы $Z \subset \bar{M} \times Y$ замкнут в Y . Пусть Z' – прообраз в $\bar{M} \times Y$ подсхемы Z . Тогда имеет место коммутативная диаграмма с расслоенным квадратом

$$\begin{array}{ccccc} Z' & \hookrightarrow & \bar{M} \times Y & \xrightarrow{\text{pr}_2} & Y \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow \text{pr}_2 & \\ Z & \hookrightarrow & \tilde{M} \times Y & & \end{array}$$

Поскольку схема $\bar{M}$ полна, то образ $\text{pr}_2(Z') = \text{pr}_2(Z)$ замкнут в Y , что и завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. В работах [4]–[6] построена компактификация схемы модулей стабильных векторных расслоений, которую мы обозначаем $\tilde{M}^c$ и называем конструктивной. Там же показано, что конструктивная компактификация обладает бирациональным проективным морфизмом $\phi^c: \tilde{M}^c \rightarrow \bar{M}$ на схему Гизекера–Маруямы. Тогда композиция этого морфизма с морфизмом κ дает бирациональный проективный морфизм схем $\phi: \tilde{M}^c \xrightarrow{\phi^c} \bar{M} \xrightarrow{\kappa} \tilde{M}$.

§ 11. Сравнение эквивалентностей

Цель настоящего параграфа – изучить связь между М-эквивалентностью полустабильных пар и GIT-эквивалентностью на схеме $\mu(\tilde{Q})$.

Рассмотрим следующую процедуру *предельного перехода* (это вычисление аналогично приведенному в [10; лемма 4.4.3]).

Возьмем пару $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ и зафиксируем эпиморфизм

$$h: H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}) \otimes \tilde{L}^\vee \twoheadrightarrow \tilde{E}.$$

Если зафиксирован изоморфизм $H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}) \xrightarrow{\sim} V$, то эпиморфизм h задает точку $h \in \text{Hilb}^{P(t)}(G(V, r))$ и точку $h \in \text{Quot}^{rp(t)}(V \otimes \tilde{L}^\vee)$. Однопараметрическая подгруппа $\lambda: \mathbb{A}^1 \setminus 0 \hookrightarrow \text{SL}(V)$ полностью определена разложением $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ векторного пространства V в прямую сумму весовых подпространств V_n , $n \in \mathbb{Z}$, веса n , т.е. для всякого $v \in V_n$ действие элементов подгруппы λ определяется выражением $v \cdot \lambda(T) = T^n v$. Разумеется, для почти всех n выполнено $V_n = 0$. Определим возрастающие фильтрации для V и пучка $\tilde{E}$ выражениями $V_{(n)} = \bigoplus_{\nu \leq n} V_\nu$ и $\tilde{E}_{(n)} = h(V_{(n)} \otimes \tilde{L}^\vee)$ соответственно. Тем самым, определены эпиморфизмы $h_n: V_{(n)} \otimes \tilde{L}^\vee \twoheadrightarrow \tilde{E}_n$, где $\tilde{E}_n = \tilde{E}_{(n)} / \tilde{E}_{(n-1)}$. Суммирование по всем весам дает эпиморфизм

$$\bar{h} = \bigoplus h_n: V \otimes \tilde{L}^\vee \twoheadrightarrow \bigoplus \tilde{E}_n = \text{gr}(\tilde{E}) =: \bar{E}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. В $\text{Quot}^{rp(t)}(V \otimes \tilde{L}^\vee)$ имеем $\bar{h} = \lim_{T \rightarrow 0} h \cdot \lambda(T)$.

Построим явно семейство $\theta: V \otimes \tilde{L}^\vee \otimes k[T] \rightarrow \mathcal{E}$, параметризованное аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \text{Spec } k[T]$, такое, что $\theta_0 = \bar{h}$ и $\theta_\rho = h \cdot \lambda(\rho)$ для $\rho \neq 0$. Пусть

$$\mathcal{E} := \bigoplus_n \tilde{E}_{(n)} \otimes T^n \subset \tilde{E} \otimes_k k[T, T^{-1}].$$

Поскольку прямая сумма содержит конечный набор ненулевых слагаемых, то $\mathcal{E}$ – когерентный пучок на $\mathbb{A}^1 \times \tilde{S}$. Действительно, пусть N – целое положительное число такое, что $V_n = 0$ и $\tilde{E}_n = 0$ при $n \leq -N$. Тогда $\mathcal{E} \subset \tilde{E} \otimes T^{-N} k[T]$. Аналогично определим модуль

$$\mathcal{V} := \bigoplus_n V_{(n)} \otimes \tilde{L}^\vee \otimes T^n \subset V \otimes_k \tilde{L}^\vee \otimes_k k[T, T^{-1}].$$

Ясно, что эпиморфизм h индуцирует сюръекцию $h': \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{E}$ плоских над $\mathbb{A}^1$ когерентных $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1 \times \tilde{S}}$ -пучков. Наконец, определим изоморфизм $\gamma: V \otimes_k k[T] \xrightarrow{\sim} \bigoplus_n V_{(n)} \otimes T^n$ посредством ограничений $\gamma|_{V_\nu} = T^\nu \text{id}_{V_\nu}$ для всех ν . Также определим морфизм θ с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_n \tilde{E}_{(n)} \otimes T^n & \xlongequal{\quad} & \mathcal{E} & \hookrightarrow & \tilde{E} \otimes T^{-N} k[T] \\ \theta \uparrow & & \uparrow h' & & \uparrow h \otimes \text{id} \\ V \otimes \tilde{L}^\vee \otimes k[T] & \xrightarrow[\sim]{\gamma} & \mathcal{V} & \hookrightarrow & V \otimes_k \tilde{L}^\vee \otimes_k T^{-N} k[T] \end{array}$$

Ограничение на слой, соответствующий $T = 0$, дает

$$\mathcal{E}/T\mathcal{E} = \bigoplus_n \tilde{E}_n$$

и, тем самым, $\theta_0 = \bigoplus_n h_n$.

Ограничение на открытое дополнение $\mathbb{A}^1 \setminus 0$ соответствует обратимости элемента T . Таким образом, после тензорного умножения на $\otimes_{k[T]} k[T, T^{-1}]$ получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \otimes_{k[T]} k[T, T^{-1}] & \xrightarrow{\sim} & \tilde{E} \otimes_k k[T, T^{-1}] \\ \theta \uparrow & & \uparrow h \otimes \text{id} \\ V \otimes_k \tilde{L}^\vee \otimes_k k[T, T^{-1}] & \xrightarrow{\gamma} & V \otimes_k \tilde{L}^\vee \otimes_k k[T, T^{-1}] \end{array}$$

в которой отображение γ задает действие однопараметрической подгруппы λ . Таким образом, θ – искомое отображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. Пусть G – алгебраическая группа, $f: Y \rightarrow X$ – GIT-фактор. Замкнутые точки y_1 и y_2 схемы Y называются GIT-эквивалентными, если $f(y_1) = f(y_2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 27. М-эквивалентность влечет GIT-эквивалентность, и наоборот.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим две М-эквивалентные полустабильные пары $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ и $((\tilde{S}_{gr}, \tilde{L}_{gr}), \tilde{E}_{gr})$. Каждый слой морфизма формирования GIT-фактора содержит одну замкнутую орбиту. Известно (см. [10; теорема 4.3.3]), что точки, соответствующие полистабильным когерентным пучкам, и только они обладают в схеме Quot замкнутыми орбитами. В силу согласованности действий группы $\text{PGL}(V)$ пары вида $((\tilde{S}_{gr}, \tilde{L}_{gr}), \tilde{E}_{gr})$ и только они задают в схеме Гильберта замкнутые орбиты.

Достаточно проверить истинность предложения для таких точек, одна из которых имеет вид $((\tilde{S}_{gr}, \tilde{L}_{gr}), \tilde{E}_{gr})$.

Рассмотрим эпиморфизм

$$V \otimes \tilde{L}^\vee \twoheadrightarrow \tilde{E}. \quad (11.1)$$

Поскольку $K^{dS} = \mu(\tilde{Q})$, то пара $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ имеет прообраз в Q . Пусть это эпиморфизм $V \otimes \tilde{L}^\vee \twoheadrightarrow \tilde{E}$. Нетривиальной является ситуация, когда пучок E строго полустабильен. Рассмотрим его класс S-эквивалентности $[E]$. Пусть $\bar{\sigma}: \bar{S}_* \rightarrow S$ – минимальное разрешение в моноиде $\diamond[E]$, $\tilde{L}$ – очень обильный обратимый пучок на схеме $\bar{S}_*$. Морфизм минимального разрешения включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \bar{S}_* & \xrightarrow{\sigma'} & \tilde{S}_{gr} \\ \sigma'_{gr} \downarrow & \searrow \bar{\sigma} & \downarrow \sigma_{gr} \\ \tilde{S} & \xrightarrow{\sigma} & S \end{array}$$

Тогда эпиморфизм (11.1) индуцирует эпиморфизм

$$V \otimes \sigma'^*_{gr} \tilde{L}^\vee \twoheadrightarrow \sigma'^*_{gr} \tilde{E}. \quad (11.2)$$

Пусть $r\bar{p}(t) = \chi(\sigma'^*_{gr} \tilde{E} \otimes \bar{L}^t)$. Согласно результатам § 7, если F_i – подпучки фильтрации Жордана–Гёльдера для пучка E , то факторпучки

$$\bar{F}_i/\bar{F}_{i-1} = \bar{\sigma}^*(F_i/F_{i-1})/\text{tors} = \sigma'^*_{gr}(\tilde{F}_i/\tilde{F}_{i-1})/\text{tors}$$

локально свободны.

Рассмотрим схему факторпучков $\text{Quot}^{r\bar{p}(t)}(V \otimes \bar{L}^\vee)$. В этой схеме рассматриваем предельный переход в семействе локально свободных факторпучков с общим членом вида (11.2). Тогда предельный объект имеет вид

$$\bigoplus_i \bar{F}_i/\bar{F}_{i-1} = \bigoplus_i \bar{\sigma}^*(F_i/F_{i-1})/\text{tors} = \sigma'^*_{gr}(\tilde{E})/\text{tors} = \sigma'^*_{gr} \tilde{E}_{gr}.$$

Полученное в процедуре предельного перехода семейство $\mathcal{O}_{\tilde{S}}^*$ -пучков $\mathcal{E}$ индуцирует морфизм его базы в схему Гильберта $\text{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$. В самом деле, формирование прямых образов относительно морфизма σ'_{gr} для пучков на слоях в общих точках $T \neq 0$ приводит к $\mathcal{O}_{\tilde{S}}^*$ -пучкам, изоморфным $\tilde{E}$. Аналогично, прямой образ относительно морфизма σ' пучка на слое над точкой $T = 0$ приводит к $\mathcal{O}_{\tilde{S}_{gr}}^*$ -пучку $\tilde{E}_{gr}$.

Приведенное рассуждение показывает, что орбита точки, соответствующей объекту $((\tilde{S}_{gr}, \tilde{L}_{gr}), \tilde{E}_{gr})$, находится в замыкании орбиты М-эквивалентной точки $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$. Отсюда следует, что GIT-эквивалентность равносильна М-эквивалентности.

§ 12. $\tilde{M}$ как пространство модулей

В этом параграфе доказывается, что построенная схема $\tilde{M}$ является грубым пространством модулей функтора

$$f: (\text{Schemes}_k) \rightarrow (\text{Sets})$$

теоремы 1.

Для этого достаточно убедиться в том, что функтор f копредставлен схемой $\tilde{M}$. Выберем объект $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$. Заметим, что пучком $\tilde{E} \otimes \tilde{L}$ определяется вложение $j: \tilde{S} \hookrightarrow G(V, r)$. Это вложение определено не единственным образом, а с точностью до класса изоморфизма $H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}) \xrightarrow{\sim} V$ по модулю умножения на ненулевые скаляры $\vartheta \in k^*$. Таким образом, точка, соответствующая подсхеме $j(\tilde{S}) \subset G(V, r)$, определена в схеме Гильберта $\text{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$ с точностью до действия группы $\text{PGL}(V)$. Тем самым, объект $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ определяет морфизм $h \in \text{Hom}(\text{Spec } k, \tilde{M})$.

Обратно, согласно предложению 27 морфизм $h \in \text{Hom}(\text{Spec } k, \tilde{M})$ выделяет точку, представляющую класс эквивалентности объектов $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$.

Построим для любой схемы B и естественного преобразования $\psi': f \rightarrow \underline{F}'$ единственное естественное преобразование $\omega: \tilde{M} \rightarrow \underline{F}'$ такое, что выполнено $\psi' = \omega \circ \psi$.

Пусть преобразование ψ' соответствует плоскому семейству $\pi: \tilde{\Sigma} \rightarrow B$ с полойной поляризацией $\tilde{\mathbb{L}}$, оснащенному семейством локально свободных пучков $\tilde{\mathbb{E}}$.

При этом ограничение на любой слой $\pi^{-1}(y)$ морфизма π поставляет объект $((\pi^{-1}(b), \tilde{\mathbb{L}}|_{\pi^{-1}(b)}, \tilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(b)})$, принадлежащий классу $\mathfrak{F}$. Тогда имеет место морфизм

$$\tilde{\Sigma} \rightarrow G(\pi_*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}), r)$$

такой, что треугольник

$$\begin{array}{ccc} G(\pi_*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}), r) & \longleftarrow & \tilde{\Sigma} \\ \downarrow & \swarrow \pi & \\ B & & \end{array}$$

коммутативен. Пучок $\pi_*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}})$ локально свободен, поэтому расслоение Грассмана $G(\pi_*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}), r)$ локально тривиально над B . Пусть $\bigcup_i B_i = B$ – тривиализующее открытое покрытие; подсемейства $\tilde{\Sigma}_i$ заданы расслоенными квадратами

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Sigma} & \longleftarrow & \tilde{\Sigma}_i \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_i \\ B & \longleftarrow & B_i \end{array}$$

где горизонтальные стрелки – открытые вложения. Зафиксируем изоморфизмы тривиализации

$$\tau_i: G(\pi_*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}), r)|_{B_i} \rightarrow G(V, r) \times B_i.$$

Композиция

$$\tilde{\Sigma}_i \xrightarrow{j_i} G(\pi_*(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}), r)|_{B_i} \xrightarrow{\tau_i} G(V, r) \times B_i \xrightarrow{\text{pr}_1} G(V, r)$$

задает морфизм базы в схему Гильберта

$$\mu_i: B_i \rightarrow \text{Hilb}^{P(t)} G(V, r).$$

Он определен с точностью до действия группы $\text{PGL}(V)$, осуществляющей также склейку элементов тривиализующего покрытия. Таким образом, формирование GIT-фактора приводит к морфизму $B \rightarrow \tilde{M}$. Двойственный к нему морфизм в двойственной категории $(\text{Schemes}_k)^o$ задает естественное преобразование $\omega: \tilde{M} \rightarrow \underline{F}'$.

Автор выражает искреннюю признательность Д. О. Орлову (Математический институт им. В. А. Стеклова, г. Москва, Россия), М. Риду (Институт математических исследований Уорикского университета, Великобритания), Н. Шефферд-Баррону (Кембриджский университет, Великобритания), А. Лангеру (Варшавский университет, Польша) за плодотворные обсуждения и интерес к настоящей работе.

Список литературы

- [1] D. Gieseker, “On the moduli of vector bundles on an algebraic surface”, *Ann. of Math.* (2), **106**:1 (1977), 45–60.
- [2] G. Ellingsrud, L. Göttsche, “Variation of moduli space and Donaldson invariants under change of polarization”, *J. Reine Angew. Math.*, **467** (1995), 1–49.
- [3] M. Maruyama, “Moduli of stable sheaves. II”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **18**:3 (1978), 557–614.
- [4] Н. В. Тимофеева, “Компактификация в схеме Гильберта многообразия модулей стабильных 2-векторных расслоений на поверхности”, *Матем. заметки*, **82**:5 (2007), 756–769; англ. пер.: N. V. Timofeeva, “A compactification of the moduli variety of stable vector 2-bundles on a surface in the Hilbert scheme”, *Math. Notes*, **82**:5–6 (2007), 677–690.
- [5] Н. В. Тимофеева, “О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности”, *Матем. сб.*, **199**:7 (2008), 103–122; англ. пер.: N. V. Timofeeva, “On a new compactification of the moduli of vector bundles on a surface”, *Sb. Math.*, **199**:7 (2008), 1051–1070.
- [6] Н. В. Тимофеева, “О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности. II”, *Матем. сборник*, **200**:3 (2009), 95–118; англ. пер.: N. V. Timofeeva, “On a new compactification of the moduli of vector bundles on a surface. II”, *Sb. Math.*, **200**:3 (2009), 405–427.
- [7] N. Timofeeva, *On degeneration of surface in Fitting compactification of moduli of stable vector bundles*, arXiv:0809.1148.
- [8] D. Gieseker, J. Li, “Moduli of high rank vector bundles over surfaces”, *J. Amer. Math. Soc.*, **9**:1 (1996), 107–151.
- [9] K. G. O’Grady, “Moduli of vector bundles on projective surfaces: some basic results”, *Invent. Math.*, **123**:1 (1996), 141–207.
- [10] *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Aspects Math., **E31**, Vieweg, Braunschweig, 1997.
- [11] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, **52**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1977.
- [12] Д. Мамфорд, *Лекции о кривых на алгебраической поверхности*, Мир, М., 1968; пер. с англ.: D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1966.
- [13] J. Le Potier, “Fibrés stables de rang 2 sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ ”, *Math. Ann.*, **241**:3 (1979), 217–256.
- [14] A. Grothendieck, “Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **32** (1967), 5–361.
- [15] D. Eisenbud, *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **150**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1995.
- [16] D. Mumford, J. Fogarty, *Geometric invariant theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **34**, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

Н. В. Тимофеева (N. V. Timofeeva)

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова

E-mail: ntimofeeva@list.ru

Поступила в редакцию

13.11.2009 и 29.06.2010