Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Теория релаксационных колебаний для уравнения Хатчинсона, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 6, 51–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7653>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:42:00

УДК 517.926

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Теория релаксационных колебаний для уравнения Хатчинсона

В настоящей работе для известного уравнения Хатчинсона из экологии, представляющего собой скалярное уравнение с запаздыванием, строится полная асимптотика устойчивого релаксационного цикла в виде рядов по целым степеням некоторого малого параметра. Развита на этом пути техника асимптотического интегрирования применяется затем к исследованию вопроса об аттракторах системы связанных уравнений Хатчинсона, взаимодействующих по кольцевому принципу.

Библиография: 8 названий.

Ключевые слова: система с запаздыванием, релаксационные колебания, асимптотика, устойчивость.

§ 1. Введение

Теория релаксационных колебаний в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при некоторых производных берет начало с заметки [1]. Ее последующее развитие отражено в монографии [2], а достаточно законченный характер она приняла в [3]. Далее, в монографии [4] некоторые идеи и методы из [2], [3] были перенесены на ряд дифференциальных уравнений вольтерровского типа с запаздыванием, возникающих при моделировании различных экологических процессов. Что же касается результатов, полученных в настоящей работе, то их можно рассматривать как продолжение исследований, начатых в [4].

Приступим к описанию объектов дальнейшего анализа. Основной из них – это базовое экологическое уравнение

$$\dot{N} = \lambda[1 - N(t - 1)]N, \quad (1.1)$$

где $N(t) \geq 0$ – плотность численности популяции млекопитающих в текущий момент времени, $\lambda = \text{const} > 0$ – мальтузианский коэффициент линейного роста. Это уравнение было предложено в 1948 г. американским биологом Г. Хатчинсоном в [5] и позднее получило его имя.

Как известно (см. [6], [7]), при всех $\lambda > \pi/2$ уравнение (1.1) имеет медленно осциллирующий цикл $N_*(t, \lambda) > 0$, $N_*(t, \pi/2) \equiv 1$, $N_*(0, \lambda) \equiv 1$, периода $T_*(\lambda)$, $T_*(\pi/2) = 4$ (медленная осцилляция означает, что расстояние между любыми соседними нулями функции $N_*(t, \lambda) - 1$ больше единицы). Этот цикл рождается из состояния равновесия $N \equiv 1$ при $0 < \lambda - \pi/2 \ll 1$ в результате бифуркации Андронова–Хопфа, а при последующем увеличении λ довольно быстро

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00342-а, № 09-01-00614-а) и Целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (государственный контракт № 02.740.11.0197).

Рис. 1

приобретает релаксационную форму (см. рис. 1, где показан график $N_*(t, \lambda)$ при $\lambda = 2.5$). В случае же $\lambda \gg 1$ справедливы следующие асимптотические равенства (см. [4]):

$$\max_{0 \leq t \leq T_*} N_*(t, \lambda) = \exp(\lambda - 1) + (2e)^{-1} + O(\exp(-\lambda)), \quad (1.2)$$

$$\min_{0 \leq t \leq T_*} N_*(t, \lambda) = \exp \left[-\exp \lambda + 2\lambda - 1 + \frac{1 + (1 + \lambda) \ln \lambda}{\lambda} + O\left(\frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^2}\right) \right], \quad (1.3)$$

$$T_*(\lambda) = \frac{1 + \exp \lambda}{\lambda} + O\left(\frac{\exp(-\lambda)}{\lambda}\right). \quad (1.4)$$

Добавим еще, что, как показывают численные эксперименты, цикл $N_*(t, \lambda)$ является экспоненциально орбитально устойчивым (в метрике фазового пространства $C[-1, 0]$) при всех $\lambda > \pi/2$. Однако строго доказать этот факт удастся лишь при $0 < \lambda - \pi/2 \ll 1$ и $\lambda \gg 1$.

Уравнение (1.1) моделирует динамику плотности популяции изолированного вида, обитающего в однородном ареале. Предположим теперь, что в рассматриваемом ареале сосуществуют n близких видов, а конкуренция между ними происходит по кольцевому принципу. Тогда согласно [4] эволюция во времени плотностей $N_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, таких видов описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{N}_j = \frac{\lambda}{1 + a_j} [1 + a_j(1 - N_{j-1}) - N_j(t - 1)] N_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.5)$$

где $N_0 = N_n$, $a_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, — коэффициенты конкуренции. Точнее говоря, в [4] рассматривался частный случай, когда в (1.5) $n = 3$, $a_1 = a_2 = a_3$. Вопрос же об аттракторах этой системы в общем случае пока не изучался.

В настоящей статье решаются следующие две задачи. Во-первых, при $\lambda \gg 1$ для цикла $N_*(t, \lambda)$ уравнения (1.1) на различных промежутках изменения t

строится полная асимптотика в виде рядов по целым степеням параметра $\varepsilon = \exp(-\lambda)$, что позволяет, в частности, уточнить формулы (1.2)–(1.4). Во-вторых, устанавливается, что при условиях

$$a_j = a_j^0 \exp(-2\lambda), \quad a_j^0 = \text{const} > 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.6)$$

и при $\lambda \gg 1$ за аттракторы системы (1.5) отвечает некоторое $(n - 1)$ -мерное отображение, динамика которого может быть достаточно сложной.

§ 2. Асимптотика релаксационного цикла уравнения Хатчинсона

2.1. Основная конструкция. Построение асимптотики медленно осциллирующего цикла уравнения (1.1) существенно опирается на тот факт, что при всех $\lambda \gg 1$ это уравнение допускает специальное решение $N_0(t, \lambda)$, определенное на полуоси $t \in (-\infty, 0]$ и обладающее следующими свойствами: $N_0(t, \lambda) > 0$, $t \in (-\infty, 0]$, $N_0(0, \lambda) \equiv 1$, $N_0(t, \lambda) \rightarrow 0$, $t \rightarrow -\infty$. Кроме того, для любого $c \in (0, 1]$ найдется такое $t_0 = t_0(c, \lambda) > 0$, что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} N_0(t - t_0, \lambda) \exp(-\lambda t) = c. \quad (2.1)$$

Забегая вперед, отметим, что функция $N_0(t, \lambda)$, $-1 \leq t \leq 0$, с точностью до величин порядка $\varepsilon^{-4} \exp(-1/\varepsilon)$, где $\varepsilon = \exp(-\lambda)$, совпадает с начальным условием интересующего нас периодического решения. Поэтому вопрос об асимптотике последнего действительно сводится к асимптотическому анализу указанного специального решения.

Для отыскания решения $N_0(t, \lambda)$ положим в (1.1)

$$u = \exp(\lambda t), \quad N = u(1 + v(u)), \quad v(1) = 0. \quad (2.2)$$

В результате для $v = v(u)$ приходим к следующей задаче Коши:

$$v' = -\varepsilon(1 + v(\varepsilon u))(1 + v), \quad v(1) = 0, \quad (2.3)$$

где $\varepsilon = \exp(-\lambda)$, штрих означает дифференцирование по u . Заметим, далее, что задача (2.3), в свою очередь, эквивалентна интегральному уравнению

$$v(u) = -\varepsilon \int_1^u (1 + v(\varepsilon s))(1 + v(s)) ds. \quad (2.4)$$

Последующий анализ базируется на процедуре комплексификации входящих в (2.2)–(2.4) переменных u , v и параметра ε . В связи с этим зафиксируем произвольно постоянные $u_0 > 1$, $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ и обозначим через $\Omega = \Omega(u_0, \varepsilon_0)$ множество векторов $(u, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2$, компоненты которых удовлетворяют условиям $|u| \leq u_0$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Далее, через $H(\Omega)$ обозначим банахово пространство (над полем действительных чисел), состоящее из комплекснозначных функций $v = v(u, \varepsilon)$, непрерывных на Ω , аналитических по совокупности переменных во всех внутренних точках этого множества и удовлетворяющих при вещественных u , ε дополнительному условию

$$\text{Im } v(u, \varepsilon) \equiv 0, \quad (u, \varepsilon) \in [0, u_0] \times [0, \varepsilon_0]. \quad (2.5)$$

Норму в $H(\Omega)$ определим равенством

$$\|v\| = \max_{(u,\varepsilon) \in \Omega} |v(u, \varepsilon)|. \quad (2.6)$$

Наконец, во вспомогательной комплексной плоскости (s) рассмотрим путь $\gamma_{[1,u]}$, представляющий собой отрезок с концами в точках $s = 1$ и $s = u$. При этом ориентацию на $\gamma_{[1,u]}$ выберем таким образом, чтобы $s = 1$ была начальной точкой, а $s = u$ — конечной.

В результате перечисленных действий получаем комплексный вариант уравнения (2.4), а именно, уравнение

$$v(u, \varepsilon) = -\varepsilon \int_{\gamma_{[1,u]}} (1 + v(\varepsilon s, \varepsilon))(1 + v(s, \varepsilon)) ds. \quad (2.7)$$

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2.1. *По любому фиксированному $u_0 > 1$ можно указать такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(u_0) \in (0, 1)$, что интегральное уравнение (2.7) имеет в пространстве $H(\Omega)$, где $\Omega = \Omega(u_0, \varepsilon_0)$, единственное решение*

$$v = v_0(u, \varepsilon), \quad v_0(1, \varepsilon) \equiv 0, \quad v_0(u, 0) \equiv 0. \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\Pi(v)$ оператор, порожденный правой частью равенства (2.7), и заметим, что $\Pi(v) \in H(\Omega)$ при $v \in H(\Omega)$. Действительно, в силу условия $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0 < 1$ при каждом $s \in \gamma_{[1,u]}$, где $|u| \leq u_0$, точка $(\varepsilon s, \varepsilon)$ принадлежит Ω , а значит, $(1 + v(\varepsilon s, \varepsilon))(1 + v(s, \varepsilon)) \in H(\Omega)$. Остается добавить, что интегрирование по $s \in \gamma_{[1,u]}$ не выводит из пространства $H(\Omega)$.

Несложный анализ с использованием формул (2.6), (2.7) показывает, что для любых элементов $v, v_1, v_2 \in H(\Omega)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\Pi(v)\| &\leq (1 + u_0)\varepsilon_0(1 + \|v\|)^2, \\ \|\Pi(v_1) - \Pi(v_2)\| &\leq (1 + u_0)\varepsilon_0(2 + \|v_1\| + \|v_2\|)\|v_1 - v_2\|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Далее, распорядимся выбором параметра ε_0 таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$4(1 + u_0)\varepsilon_0 < 1. \quad (2.10)$$

В этом случае в силу (2.9) оператор Π преобразует в себя замкнутый шар $S \subset H(\Omega)$ единичного радиуса с центром в нуле и является на S сжимающим (с константой сжатия $q = 4(1 + u_0)\varepsilon_0 < 1$). Таким образом, при условии (2.10) уравнение $\Pi(v) = v$ имеет в S единственную неподвижную точку $v = v_0(u, \varepsilon)$. Что же касается фигурирующих в (2.8) тождеств, то они очевидным образом вытекают из структуры правой части уравнения (2.7). Лемма 2.1 доказана.

Обратимся теперь к вещественным значениям $u \in [0, u_0]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и заметим, что в силу (2.5) при указанных u, ε функция $v_0(u, \varepsilon)$ также является вещественной. Отсюда и из формул (2.2), (2.8) заключаем, что интересующее нас решение $N_0(t, \lambda)$ исходного уравнения (1.1) задается равенством

$$N_0(t, \lambda) = u(1 + v_0(u, \varepsilon)) \Big|_{u=\exp(\lambda t), \varepsilon=\exp(-\lambda)}. \quad (2.11)$$

Отдельно остановимся на алгоритмической части проблемы, связанной с асимптотическим вычислением функции $v_0(u, \varepsilon)$. С этой целью обратим внимание на то, что в силу леммы 2.1 она раскладывается в ряд

$$v_0(u, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k v_{k,0}(u), \quad (2.12)$$

сходящийся равномерно по $(u, \varepsilon) \in [0, u_0] \times [0, \varepsilon_0]$ (при условии, что u_0, ε_0 удовлетворяют требованию (2.10)). Что же касается коэффициентов $v_{k,0}(u)$ из (2.12), то они определяются рекуррентно по следующему правилу.

Подставим ряд (2.12) в (2.3) и будем приравнивать коэффициенты при ε^k , $k = 1, 2, \dots$, в левой и правой частях получившегося равенства. В результате для $v_{k,0}(u)$ приходим к рекуррентной последовательности дифференциальных уравнений вида $dv_{k,0}/du = f_k(u)$, где $f_1 = -1$, а все остальные f_k зависят только от $v_{m,0}(u)$, $m \leq k-1$. Отсюда очевидным образом имеем

$$v_{k,0}(u) = \int_1^u f_k(s) ds, \quad k \geq 1.$$

Реализуя описанную процедуру, убеждаемся в том, что

$$v_{1,0} = 1 - u, \quad v_{2,0} = \frac{3}{2} - 2u + \frac{u^2}{2}, \quad v_{3,0} = \frac{13}{6} - 4u + 2u^2 - \frac{u^3}{6} \quad (2.13)$$

и т.д. Более того, опираясь на метод математической индукции, нетрудно увидеть, что в общем случае

$$v_{k,0}(u) = \sum_{s=0}^k \alpha_{s,k}^0 u^s, \quad k \geq 1, \quad (2.14)$$

где $\alpha_{s,k}^0$, $s = 0, 1, \dots, k$, – некоторые вещественные постоянные, причем

$$\alpha_{k,k}^0 = \frac{(-1)^k}{k!}. \quad (2.15)$$

Завершая описание свойств решения $N_0(t, \lambda)$ уравнения (1.1), отметим, что в силу (2.11) предельное равенство (2.1) будет выполняться при

$$t_0 = -\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{c}{c_*(\varepsilon)} \right) \Big|_{\varepsilon=\exp(-\lambda)}, \quad c_*(\varepsilon) = 1 + v_0(0, \varepsilon). \quad (2.16)$$

Добавим еще, что согласно равенствам (2.12), (2.13) фигурирующая в (2.16) функция $c_*(\varepsilon)$ раскладывается в сходящийся при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ ряд

$$c_*(\varepsilon) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon^k, \quad (2.17)$$

где $c_1 = 1$, $c_2 = 3/2$, $c_3 = 13/6$.

2.2. Продолжение специального решения. В этом пункте, опираясь на известный метод шагов (см., например, [8]), осуществим продолжение решения (2.11) на некоторый отрезок вида $0 \leq t \leq T + 1$, где значение T впоследствии будет указано. В случае уравнения (1.1) упомянутый метод реализуется следующим образом. Зададим, например, на отрезке $t_0 - 1 \leq t \leq t_0$ начальную функцию $N_0(t)$, которую считаем непрерывной и положительной, а через $N(t)$ обозначим решение этого уравнения, совпадающее при $t_0 - 1 \leq t \leq t_0$ с $N_0(t)$. Тогда с сохранением непрерывности в точке t_0 на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + 1$ имеем

$$N(t) = N_0(t_0) \exp\left(\lambda(t - t_0) - \lambda \int_{t_0}^t N_0(s - 1) ds\right). \quad (2.18)$$

Аналогично строится решение $N(t)$ на отрезке $t_0 + 1 \leq t \leq t_0 + 2$ (начальной здесь является функция $N(t)$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + 1$, известная из предыдущего шага), и т.д. Таким образом, вопрос о существовании и единственности непрерывного при $t \geq t_0 - 1$ и непрерывно дифференцируемого при $t > t_0$ решения уравнения Хатчинсона, отвечающего заданной начальной функции, тривиален. Более того, как следует из (2.18) и аналогичных формул на отрезках $t_0 + k \leq t \leq t_0 + k + 1$, $k = 1, 2, \dots$, положительность начальной функции влечет за собой положительность решения при всех $t \geq t_0$.

Применяя описанный метод к интересующему нас решению $N_0(t, \lambda)$, убеждаемся в том, что согласно (2.11), (2.18) на отрезке $0 \leq t \leq 1$ оно задается равенством

$$N_0(t, \lambda) = \frac{u \exp(-u)}{\varepsilon} (1 + v_1(u, \varepsilon)) \Big|_{u=\exp(\lambda(t-1)), \varepsilon=\exp(-\lambda)}, \quad (2.19)$$

где

$$v_1(u, \varepsilon) = \exp\left(\varepsilon - \int_{\varepsilon}^u v_0(s, \varepsilon) ds\right) - 1. \quad (2.20)$$

Далее, подставим в (2.20) уже известный ряд (2.12) и произведем перерасложение по ε . В результате убеждаемся в том, что функция $v_1(u, \varepsilon)$ из (2.19) допускает представление в виде ряда

$$v_1(u, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k v_{k,1}(u), \quad (2.21)$$

сходящегося равномерно по $(u, \varepsilon) \in [0, 1] \times [0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 < 1/8$ (см. (2.10)). Что же касается коэффициентов этого ряда, то для них справедливы аналогичные (2.13)–(2.15) формулы

$$\begin{aligned} v_{1,1}(u) &= 1 - u + \frac{u^2}{2}, & v_{2,1}(u) &= \frac{3}{2} - \frac{5}{2}u + 2u^2 - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^4}{8}, \\ v_{3,1}(u) &= \frac{13}{6} - \frac{31}{6}u + \frac{23}{4}u^2 - \frac{13}{4}u^3 + \frac{13}{12}u^4 - \frac{5}{24}u^5 + \frac{u^6}{48}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$v_{k,1}(u) = \sum_{s=0}^{2k} \alpha_{k,s}^1 u^s, \quad \alpha_{k,2k}^1 = \frac{1}{2^k k!}, \quad k \geq 1. \quad (2.23)$$

Следующий этап связан с рассмотрением отрезка $1 \leq t \leq 2$. Снова обращаясь к равенству вида (2.18) и учитывая установленную ранее формулу (2.19), приходим к выводу, что на указанном отрезке

$$N_0(t, \lambda) = \frac{u}{\varepsilon^2} \exp \left[-\frac{1}{\varepsilon} (1 - \exp(-u)) + v_2(u, \varepsilon) \right] \Big|_{u=\exp(\lambda(t-2)), \varepsilon=\exp(-\lambda)}, \quad (2.24)$$

где

$$v_2(u, \varepsilon) = \ln(1 + v_1(1, \varepsilon)) + \frac{1 - \varepsilon - \exp(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^u \exp(-s) v_1(s, \varepsilon) ds. \quad (2.25)$$

Для выявления асимптотических свойств функции $v_2(u, \varepsilon)$ подставим ряд (2.21) вместе с формулами (2.22), (2.23) в (2.25) и переразложим результат по ε . В итоге получаем сходящийся равномерно по $(u, \varepsilon) \in [0, 1] \times [0, \varepsilon_0]$ ряд

$$v_2(u, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_{k,2}(u), \quad (2.26)$$

где

$$\begin{aligned} v_{0,2} &= -1 + \left(1 + \frac{u^2}{2}\right) \exp(-u), \\ v_{1,2} &= -1 + \left(2 + \frac{u}{2} + \frac{3}{2}u^2 - \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{8}\right) \exp(-u), \\ v_{2,2} &= -4 + \left(5 + \frac{17}{6}u + 4u^2 - \frac{7}{12}u^3 + \frac{2}{3}u^4 - \frac{u^5}{12} + \frac{u^6}{48}\right) \exp(-u), \\ v_{k,2} &= \alpha_k^2 + \exp(-u) \sum_{s=0}^{2k} \alpha_{k,s}^2 u^s, \quad \alpha_{k,2k}^2 = \frac{1}{2^k k!}, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Из проделанного выше анализа следует, что на промежутке $0 \leq t \leq 2$ интересующее нас решение претерпевает асимптотически высокий всплеск (высоты порядка ε^{-1}), подобный показанному на рис. 1. Однако уже при $t = 2$ происходит его падение до асимптотически малого по ε значения. Точнее говоря, из (2.24) вытекает, что

$$\ln N_0(2, \lambda) = -\frac{1 - \exp(-1)}{\varepsilon} + 2 \ln \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_1(\varepsilon), \quad (2.28)$$

где в силу (2.26), (2.27) величина $\gamma_1(\varepsilon) = v_2(1, \varepsilon)$ раскладывается в сходящийся при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ ряд

$$\begin{aligned} \gamma_1(\varepsilon) &= \gamma_{0,1} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \gamma_{k,1}, \\ \gamma_{0,1} &= -1 + \frac{3}{2} \exp(-1), \quad \gamma_{1,1} = -1 + \frac{95}{24} \exp(-1), \\ \gamma_{2,1} &= -4 + \frac{569}{48} \exp(-1). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Формула (2.28) наводит на мысль о целесообразности отыскания решения $N_0(t, \lambda)$ на очередном отрезке времени $2 \leq t \leq 3$ в логарифмической шкале. В связи с этим прологарифмируем равенство вида (2.18), соответствующее данному промежутку изменения t , и учтем уже известную информацию (2.24), (2.28), (2.29). В результате убеждаемся в том, что при $2 \leq t \leq 3$

$$\ln N_0(t, \lambda) = \left(-\frac{1 - \exp(-1)}{\varepsilon} + 3 \ln \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_1(\varepsilon) + \ln u - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\varepsilon}^u \exp \left[-\frac{1}{\varepsilon} (1 - \exp(-s)) + v_2(s, \varepsilon) \right] ds \right) \Big|_{u=\exp(\lambda(t-3)), \varepsilon=\exp(-\lambda)} . \quad (2.30)$$

Отдельно остановимся на асимптотических свойствах фигурирующего в (2.30) интеграла. С этой целью зафиксируем некоторое $\delta_0 \in (0, 1)$ и заметим, что

$$\max_{\delta_0 \leq u \leq 1} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\delta_0}^u \exp \left[-\frac{1}{\varepsilon} (1 - \exp(-s)) + v_2(s, \varepsilon) \right] ds \leq \frac{M}{\varepsilon^2} \exp \left[-\frac{1}{\varepsilon} (1 - \exp(-\delta_0)) \right], \quad (2.31)$$

где через M здесь и ниже будем обозначать различные универсальные (не зависящие от λ, t) положительные постоянные, точные значения которых несущественны. Оставшийся же интеграл допускает асимптотическое представление

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\varepsilon}^{\delta_0} \exp \left[-\frac{1}{\varepsilon} (1 - \exp(-s)) + v_2(s, \varepsilon) \right] ds = \frac{\exp(-1)}{\varepsilon} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{\gamma}_k, \quad (2.32)$$

где

$$\tilde{\gamma}_0 = \frac{3}{2} \exp(-1), \quad \tilde{\gamma}_1 = \frac{95}{24} \exp(-1), \quad \tilde{\gamma}_2 = \frac{569}{48} \exp(-1) \quad (2.33)$$

и т.д. Более того, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2.2. *Имеют место равенства*

$$\tilde{\gamma}_k = \int_1^{+\infty} \exp(-s) v_{k+1,1}(s) ds, \quad k \geq 0, \quad (2.34)$$

где $v_{k+1,1}(s)$ – функции, фигурирующие в разложении (2.21).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторое $\alpha \in (0, 1/2)$ и заметим, что доставляемое леммой 2.1 решение $v_0(u, \varepsilon)$ задачи Коши (2.3) при каждом фиксированном достаточно малом $\varepsilon > 0$ может быть продолжено по переменной u на асимптотически большой отрезок $0 \leq u \leq u_0(\varepsilon)$, $u_0(\varepsilon) = \varepsilon^{-\alpha}$, поскольку в этом случае условие $4(1 + u_0(\varepsilon))\varepsilon < 1$ (см. (2.10)) заведомо выполняется. Таким образом, на отрезок $0 \leq u \leq u_0(\varepsilon)$ продолжаютс я функции $v_1(u, \varepsilon)$, $v_2(u, \varepsilon)$ из (2.19), (2.24), а значит, для вычисления $N_0(t, \lambda)$ при $t = 2 + \alpha$ мы можем пользоваться как формулами (2.24), (2.25), так и соотношением (2.30).

Первый из отмеченных выше способов нахождения $N_0(2 + \alpha, \lambda)$ приводит к следующей цепочке равенств:

$$\begin{aligned} \ln N_0(2 + \alpha, \lambda) &= \left(-\frac{1}{\varepsilon}(1 - \exp(-u)) + \ln u + 2 \ln \frac{1}{\varepsilon} + v_2(u, \varepsilon) \right) \Big|_{u=u_0(\varepsilon)} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} + (2 + \alpha) \ln \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_1(\varepsilon) \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{u_0(\varepsilon)} \exp(-s) v_1(s, \varepsilon) ds + O\left(\frac{1}{\varepsilon} \exp(-\varepsilon^{-\alpha})\right), \end{aligned} \quad (2.35)$$

а второй – к равенствам

$$\begin{aligned} \ln N_0(2 + \alpha, \lambda) &= \left(-\frac{1 - \exp(-1)}{\varepsilon} + 3 \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln u + \gamma_1(\varepsilon) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\varepsilon}^u \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}(1 - \exp(-s)) + v_2(s, \varepsilon)\right] ds \right) \Big|_{u=\varepsilon^{1-\alpha}} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} + (2 + \alpha) \ln \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_1(\varepsilon) + \frac{\exp(-1)}{\varepsilon} \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon^{1-\alpha}} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}(1 - \exp(-s)) + v_2(s, \varepsilon)\right] ds. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Далее, сравнивая между собой получившиеся соотношения (2.35), (2.36) и учитывая оценку

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\varepsilon^{1-\alpha}}^{\delta_0} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}(1 - \exp(-s)) + v_2(s, \varepsilon)\right] ds \leq \frac{M}{\varepsilon^2} \exp(-\varepsilon^{-\alpha}),$$

приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\varepsilon}^{\delta_0} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}(1 - \exp(-s)) + v_2(s, \varepsilon)\right] ds \\ &= \frac{\exp(-1)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{u_0(\varepsilon)} \exp(-s) v_1(s, \varepsilon) ds + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \exp(-\varepsilon^{-\alpha})\right). \end{aligned}$$

Отсюда требуемые равенства (2.34) вытекают уже очевидным образом. Лемма 2.2 доказана.

Отметим, что в отличие от (2.29) и всех других встречающихся выше разложений ряд (2.32) носит лишь асимптотический характер и, вообще говоря, расходится.

Из проделанных построений следует, что на отрезке $2 \leq t \leq 3$ падение решения $N_0(t, \lambda)$ завершается и начинается последующий достаточно медленный его рост. В частности, при $t = 3$ имеем

$$\ln N_0(3, \lambda) = -\frac{1}{\varepsilon} + 3 \ln \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_2(\varepsilon), \quad (2.37)$$

где согласно формулам (2.29) – (2.33) для функции

$$\gamma_2(\varepsilon) = \gamma_1(\varepsilon) + \frac{\exp(-1)}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\varepsilon}^1 \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}(1 - \exp(-s)) + v_2(s, \varepsilon)\right] ds$$

справедливо асимптотическое представление

$$\gamma_2(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \gamma_{k,2}, \quad \gamma_{0,2} = -1, \quad \gamma_{k,2} = \gamma_{k,1} - \tilde{\gamma}_k, \quad k \geq 1. \quad (2.38)$$

На следующем временном промежутке $3 \leq t \leq 4$ для $N_0(t, \lambda)$ в силу (2.30), (2.37), (2.38) выполняется равенство

$$\ln N_0(t, \lambda) = \left(-\frac{1}{\varepsilon} + 4 \ln \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_2(\varepsilon) + \ln u \right) \Big|_{u=\exp(\lambda(t-4)), \varepsilon=\exp(-\lambda)} + \Delta_1(t, \lambda), \quad (2.39)$$

где остаток $\Delta_1 = -\lambda \int_3^t N_0(\tau - 1, \lambda) d\tau$ удовлетворяет оценке

$$\max_{3 \leq t \leq 4} |\Delta_1(t, \lambda)| \leq \frac{M}{\varepsilon^3} \exp\left(-\frac{1 - \exp(-1)}{\varepsilon}\right). \quad (2.40)$$

Отсюда, в свою очередь, заключаем, что

$$\ln N_0(4, \lambda) = -\frac{1}{\varepsilon} + 4 \ln \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_3(\varepsilon), \quad (2.41)$$

где функция $\gamma_3(\varepsilon) = \gamma_2(\varepsilon) + \Delta_1(4, \lambda)$ допускает асимптотическое представление вида (2.38) с теми же самыми коэффициентами $\gamma_{k,2}$, $k \geq 0$.

При $4 \leq t \leq 5$ рассматриваемое нами решение $N_0(t, \lambda)$ задается вытекающей из (2.18), (2.39), (2.41) формулой

$$\ln N_0(t, \lambda) = \left(-\frac{1}{\varepsilon} + 5 \ln \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_3(\varepsilon) + \ln u \right) \Big|_{u=\exp(\lambda(t-5)), \varepsilon=\exp(-\lambda)} + \Delta_2(t, \lambda), \quad (2.42)$$

где остаток $\Delta_2 = -\lambda \int_4^t N_0(\tau - 1, \lambda) d\tau$ удовлетворяет улучшенному варианту оценки (2.40), а именно, неравенству

$$\max_{4 \leq t \leq 5} |\Delta_2(t, \lambda)| \leq \frac{M}{\varepsilon^4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (2.43)$$

На завершающем этапе введем в рассмотрение момент времени $T = T(\lambda)$, где

$$\lambda T(\lambda) = \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_3(\varepsilon) + \ln c_*(\varepsilon) \right) \Big|_{\varepsilon=\exp(-\lambda)}, \quad (2.44)$$

$c_*(\varepsilon)$ — функция (2.17). Далее заметим, что в силу (2.11), (2.12), (2.44) для $N_0(t - T, \lambda)$ при $t \in [4, 5]$ справедливо аналогичное (2.42) равенство

$$\ln N_0(t - T, \lambda) = \left(-\frac{1}{\varepsilon} + 5 \ln \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_3(\varepsilon) + \ln u \right) \Big|_{u=\exp(\lambda(t-5)), \varepsilon=\exp(-\lambda)} + \Delta_3(t, \lambda),$$

где остаток Δ_3 также удовлетворяет оценке вида (2.43). Отсюда очевидным образом следует, что

$$N_0(t, \lambda) = N_0(t - T, \lambda)(1 + h_0(t, \lambda)), \quad 4 \leq t \leq 5, \quad (2.45)$$

причем

$$\max_{4 \leq t \leq 5} |h_0(t, \lambda)| \leq \frac{M}{\varepsilon^4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (2.46)$$

Соотношения (2.45), (2.46) свидетельствуют о том, что при $4 \leq t \leq 5$ начальные условия двух решений $N_0(t, \lambda)$ и $N_0(t - T, \lambda)$ одного и того же уравнения (1.1) асимптотически близки. Как будет показано чуть ниже, такого типа близость сохраняется между этими решениями и при всех $5 \leq t \leq T + 1$.

ЛЕММА 2.3. *На отрезке $5 \leq t \leq T + 1$ имеет место асимптотическое представление*

$$N_0(t, \lambda) = N_0(t - T, \lambda)(1 + h(t, \lambda)), \quad (2.47)$$

в котором

$$\max_{5 \leq t \leq T+1} |h(t, \lambda)| \leq \frac{M}{\varepsilon^4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \max_{5 \leq t \leq T+1} |\dot{h}(t, \lambda)| \leq \frac{M \ln(1/\varepsilon)}{\varepsilon^4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (2.48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что эволюция во времени относительного отклонения $h = N_0(t, \lambda)/N_0(t - T, \lambda) - 1$ решения $N_0(t, \lambda)$ от $N_0(t - T, \lambda)$ описывается уравнением

$$\dot{h} = -\lambda N_0(t - T - 1, \lambda) h(t - 1)(1 + h), \quad (2.49)$$

получающимся из (1.1) в результате замены $N = N_0(t - T, \lambda)(1 + h)$. В связи с этим обозначим через $h(t, \lambda)$ решение данного уравнения на промежутке $5 \leq t \leq T + 1$ с начальной функцией $h_0(t, \lambda)$, $4 \leq t \leq 5$, заимствованной из (2.45), и будем последовательно оценивать величины

$$\begin{aligned} \bar{h}_k(\varepsilon) &= \max_{k+4 \leq t \leq k+5} |h(t, \lambda)|, \quad k = 1, \dots, k_0, \\ \bar{h}_{k_0+1}(\varepsilon) &= \max_{k_0+5 \leq t \leq T} |h(t, \lambda)|, \quad \bar{h}_{k_0+2}(\varepsilon) = \max_{T \leq t \leq T+1} |h(t, \lambda)|, \end{aligned}$$

где $k_0 = [T] - 5$, $[\cdot]$ – целая часть числа.

Для удобства дальнейшего анализа введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \beta_k &= \lambda \int_{k+4}^{k+5} N_0(\tau - T - 1, \lambda) d\tau, \quad k = 1, \dots, k_0, \\ \beta_{k_0+1} &= \lambda \int_{k_0+5}^T N_0(\tau - T - 1, \lambda) d\tau, \\ \beta_{k_0+2} &= \lambda \int_T^{T+1} N_0(\tau - T - 1, \lambda) d\tau, \quad \bar{h}_0(\varepsilon) = \max_{4 \leq t \leq 5} |h_0(t, \lambda)|. \end{aligned}$$

Обратимся затем к отрезку $5 \leq t \leq 6$, на котором уравнение (2.49) эквивалентно интегральному уравнению

$$h(t, \lambda) = h_0(5, \lambda) - \lambda \int_5^t N_0(\tau - T - 1, \lambda) h_0(\tau - 1, \lambda)(1 + h(\tau, \lambda)) d\tau. \quad (2.50)$$

Нетрудно увидеть, что из (2.50) вытекает неравенство

$$\bar{h}_1(\varepsilon) \leq \bar{h}_0(\varepsilon)(1 + \beta_1) + \beta_1 \bar{h}_1(\varepsilon) \bar{h}_0(\varepsilon), \quad (2.51)$$

из которого, в свою очередь, имеем

$$\bar{h}_1(\varepsilon) \leq \frac{\bar{h}_0(\varepsilon)(1 + \beta_1)}{1 - \bar{h}_0(\varepsilon)\beta_1} \leq \frac{\bar{h}_0(\varepsilon)(1 + \beta_1)}{1 - \bar{h}_0(\varepsilon)(1 + \beta_1)}. \quad (2.52)$$

Подчеркнем, что при переходе от (2.51) к (2.52), а также во втором неравенстве из (2.52) использовалось условие $(1 + \beta_1)\bar{h}_0(\varepsilon) < 1$, которое в данном случае оказывается верным. В самом деле, для $\bar{h}_0(\varepsilon)$ выполняется оценка (2.46), а для величины β_1 в силу вытекающих из (2.11)–(2.13) свойств

$$N_0(t, \lambda) \leq c_*(\varepsilon) \exp(\lambda t), \quad 0 < \dot{N}_0(t, \lambda) \leq c_*(\varepsilon) \lambda \exp(\lambda t), \quad t \leq 0, \quad (2.53)$$

имеем

$$\beta_1 \leq \lambda \int_{-\infty}^0 N_0(\tau, \lambda) d\tau \leq \lambda c_*(\varepsilon) \int_{-\infty}^0 \exp(\lambda \tau) d\tau = c_*(\varepsilon),$$

где, напомним, $c_*(\varepsilon)$ – функция (2.17).

Предположим теперь, что уже пройдены первые k шагов и установлены неравенства

$$\bar{h}_s(\varepsilon) \leq \frac{\bar{h}_0(\varepsilon) \prod_{m=1}^s (1 + \beta_m)}{1 - \bar{h}_0(\varepsilon) \sum_{r=1}^s \prod_{m=1}^r (1 + \beta_m)}, \quad \bar{h}_0(\varepsilon) \sum_{r=1}^s \prod_{m=1}^r (1 + \beta_m) < 1, \quad (2.54)$$

$$s = 1, \dots, k.$$

Тогда при $t \in [k + 5, k + 6]$ для $h(t, \lambda)$ из аналогичного (2.50) интегрального уравнения

$$h(t, \lambda) = h(k + 5, \lambda) - \lambda \int_{k+5}^t N_0(\tau - T - 1, \lambda) h(\tau - 1, \lambda) (1 + h(\tau, \lambda)) d\tau$$

с учетом уже известной информации (2.54) последовательно выводим, что

$$\bar{h}_{k+1}(\varepsilon) \leq \bar{h}_k(\varepsilon)(1 + \beta_{k+1}) + \beta_{k+1} \bar{h}_k(\varepsilon) \bar{h}_{k+1}(\varepsilon), \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_{k+1}(\varepsilon) &\leq \frac{\bar{h}_k(\varepsilon)(1 + \beta_{k+1})}{1 - \beta_{k+1} \bar{h}_k(\varepsilon)} \leq \frac{\bar{h}_k(\varepsilon)(1 + \beta_{k+1})}{1 - \bar{h}_k(\varepsilon)(1 + \beta_{k+1})} \\ &\leq \frac{\bar{h}_0(\varepsilon) \prod_{m=1}^{k+1} (1 + \beta_m)}{1 - \bar{h}_0(\varepsilon) \sum_{r=1}^{k+1} \prod_{m=1}^r (1 + \beta_m)}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Обратим внимание на то, что, как и в предыдущем случае, переход от (2.55) к (2.56) базируется на априорной оценке

$$\bar{h}_0(\varepsilon) \sum_{r=1}^{k+1} \prod_{m=1}^r (1 + \beta_m) < 1, \quad (2.57)$$

нуждающейся в отдельной проверке. Но условие (2.57) действительно выполняется, поскольку

$$\begin{aligned}
 \bar{h}_0(\varepsilon) \sum_{r=1}^{k+1} \prod_{m=1}^r (1 + \beta_m) &\leq \bar{h}_0(\varepsilon)(k_0 + 2) \prod_{m=1}^{k_0+2} (1 + \beta_m) \\
 &= \bar{h}_0(\varepsilon)(k_0 + 2) \exp \left\{ \sum_{m=1}^{k_0+2} \ln(1 + \beta_m) \right\} \leq \bar{h}_0(\varepsilon)(k_0 + 2) \exp \left\{ \sum_{m=1}^{k_0+2} \beta_m \right\} \\
 &= \bar{h}_0(\varepsilon)(k_0 + 2) \exp \left\{ \lambda \int_5^{T+1} N_0(\tau - T - 1, \lambda) d\tau \right\} \\
 &\leq \bar{h}_0(\varepsilon)(k_0 + 2) \exp \left\{ \lambda \int_{-\infty}^0 N_0(\tau, \lambda) d\tau \right\} \leq \frac{M}{\varepsilon^5 \ln(1/\varepsilon)} \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (2.58)
 \end{aligned}$$

(при получении второго неравенства цепочки (2.58) использовано очевидное свойство $\ln(1 + x) \leq x$, $x \geq 0$, а последнее из них базируется на оценках (2.46), (2.53) и том обстоятельстве, что $k_0 \sim (\varepsilon \ln(1/\varepsilon))^{-1}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$).

Итак, неравенства (2.54) оказываются справедливыми при замене k на $k + 1$. Отсюда на основании метода математической индукции заключаем, что они сохраняют силу вплоть до асимптотически большого номера $k = k_0 + 2$.

На основе проведенного исследования приходим к выводу, что

$$\begin{aligned}
 \max_{5 \leq t \leq T+1} |h(t, \lambda)| &= \max_{1 \leq k \leq k_0+2} \bar{h}_k(\varepsilon) \leq \max_{1 \leq k \leq k_0+2} \frac{\bar{h}_0(\varepsilon) \prod_{m=1}^k (1 + \beta_m)}{1 - \bar{h}_0(\varepsilon) \sum_{r=1}^k \prod_{m=1}^r (1 + \beta_m)} \\
 &= \frac{\bar{h}_0(\varepsilon) \prod_{m=1}^{k_0+2} (1 + \beta_m)}{1 - \bar{h}_0(\varepsilon) \sum_{r=1}^{k_0+2} \prod_{m=1}^r (1 + \beta_m)}. \quad (2.59)
 \end{aligned}$$

Далее, проводя те же рассуждения, что и при выводе цепочки (2.58), убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned}
 \bar{h}_0(\varepsilon) \prod_{m=1}^{k_0+2} (1 + \beta_m) &\leq \bar{h}_0(\varepsilon) \exp \left\{ \lambda \int_{-\infty}^0 N_0(\tau, \lambda) d\tau \right\} \leq \frac{M}{\varepsilon^4} \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right), \\
 \bar{h}_0(\varepsilon) \sum_{r=1}^{k_0+2} \prod_{m=1}^r (1 + \beta_m) &\leq (k_0 + 2) \bar{h}_0(\varepsilon) \prod_{m=1}^{k_0+2} (1 + \beta_m) \leq \frac{M}{\varepsilon^5 \ln(1/\varepsilon)} \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.59) очевидным образом следует, что для фигурирующей в (2.47) функции $h(t, \lambda)$ действительно выполняется первая оценка (2.48). Что же касается аналогичной оценки для $\dot{h}(t, \lambda)$, то она вытекает из (2.49) с учетом уже установленной оценки на $|h(t, \lambda)|$ и неравенств (2.53). Лемма 2.3 доказана.

Подводя некоторый итог, отметим, что асимптотическое поведение правой части из (2.47) нам известно, поскольку при $5 \leq t \leq T$ и $T \leq t \leq T + 1$ решение $N_0(t - T, \lambda)$ задается формулами (2.11) и (2.19) (с заменой в них t на $t - T$).

2.3. Существование и единственность релаксационного цикла. Из соотношений (2.47), (2.48) вытекает следующее интересное свойство, ради которого, собственно, и были проделаны все описанные выше предварительные

построения. А именно, на отрезке $-1 \leq t \leq 0$ с экспоненциальной по ε точностью (т.е. с точностью до $\exp(-c/\varepsilon)$, $c = \text{const} > 0$) выполняется равенство $N_0(t+T, \lambda) = N_0(t, \lambda)$. Иными словами, решение уравнения (1.1) с начальной функцией $N_0(t, \lambda)$, $-1 \leq t \leq 0$, по прошествии времени $t = T$ практически повторяет свое начальное условие, т.е. является приближенно периодическим. В такой ситуации естественно возникает вопрос о существовании аналогичного точного периодического решения. Ответ на него дается чуть ниже.

Зафиксируем произвольно некоторое $c \in (0, 1)$ и рассмотрим замкнутое, ограниченное и выпуклое множество $\Omega(\lambda, c) \subset C[-1, 0]$, состоящее из функций $h(t)$, $h(0) = 0$, удовлетворяющих оценке

$$\max_{-1 \leq t \leq 0} |h(t)| \leq \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}\right). \quad (2.60)$$

Далее, для произвольной функции $h \in \Omega(\lambda, c)$ рассмотрим решение $N = N_h(t, \lambda)$, $t \geq 0$, уравнения (1.1) с начальным условием

$$N = N_0(t, \lambda)(1 + h(t)), \quad -1 \leq t \leq 0, \quad (2.61)$$

а через $t = T_h$ обозначим второй положительный корень уравнения $N_h(t, \lambda) = 1$ (если он существует). Наконец, на множестве $\Omega(\lambda, c)$ зададим оператор V посредством равенства

$$V(h) = \frac{N_h(t + T_h, \lambda)}{N_0(t, \lambda)} - 1, \quad -1 \leq t \leq 0. \quad (2.62)$$

Справедливо следующее утверждение, уточняющее аналогичный результат из работы [4].

ТЕОРЕМА 2.1. *Для любого фиксированного $c \in (0, 1)$ найдется такое $\lambda_0 = \lambda_0(c) > 0$, что при всех $\lambda \geq \lambda_0$ оператор (2.62) определен на множестве $\Omega(\lambda, c)$, преобразует его в себя и имеет в $\Omega(\lambda, c)$ единственную неподвижную точку.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы состоит из двух частей. Сначала мы установим асимптотические формулы для $N_h(t, \lambda)$ на различных промежутках изменения t , из которых будет следовать, что оператор (2.62) действительно преобразует множество $\Omega(\lambda, c)$ в себя. После этого проведем анализ уравнения в вариациях на решении $N_h(t, \lambda)$ и покажем, что V является сжимающим.

В первую очередь убедимся в том, что на отрезках $k \leq t \leq k+1$, $k = 0, \dots, 4$, справедливы асимптотические представления вида

$$N_h(t, \lambda) = N_0(t, \lambda)(1 + \omega_h^k(t, \lambda)), \quad k \leq t \leq k+1, \quad k = 0, \dots, 4, \quad (2.63)$$

в которых величины $\max_t |\omega_h^k(t, \lambda)|$, $0 \leq k \leq 4$, экспоненциально малы по ε и эта малость равномерна по всем $h \in \Omega(\lambda, c)$.

В соответствии с описанным выше методом шагов на отрезке $0 \leq t \leq 1$ для $N_h(t, \lambda)$ из формул (2.18), (2.61) получаем явное выражение

$$N_h(t, \lambda) = \exp\left[\lambda t - \lambda \int_0^t N_0(\tau - 1, \lambda)(1 + h(\tau - 1)) d\tau\right]. \quad (2.64)$$

Учитывая, далее, в (2.64) очевидное равенство

$$N_0(t, \lambda) = \exp \left[\lambda t - \lambda \int_0^t N_0(\tau - 1, \lambda) d\tau \right], \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.65)$$

для функции $\omega_h^0(t, \lambda)$ из (2.63) имеем

$$\omega_h^0(t, \lambda) = \exp \left(-\lambda \int_0^t N_0(\tau - 1, \lambda) h(\tau - 1) d\tau \right) - 1.$$

Остается заметить, что в силу известных асимптотических свойств $N_0(t, \lambda)$ при $t \leq 0$ (см. (2.11)) и оценки (2.60) эта функция удовлетворяет неравенству

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |\omega_h^0(t, \lambda)| \leq M \exp \left(-\frac{c}{\varepsilon} \right); \quad (2.66)$$

здесь и ниже одной и той же буквой M обозначаются различные положительные константы, не зависящие как от t , λ , так и от $h \in \Omega(\lambda, c)$.

При $1 \leq k \leq 4$, отталкиваясь от формул, аналогичных (2.64), (2.65), приходим к равенствам вида (2.63), в которых

$$\omega_h^k(t, \lambda) = (1 + \omega_h^{k-1}(k, \lambda)) \exp \left[-\lambda \int_k^t N_0(\tau - 1, \lambda) \omega_h^{k-1}(\tau - 1, \lambda) d\tau \right] - 1, \quad (2.67)$$

$$k \leq t \leq k + 1.$$

Что же касается оценки $\max_t |\omega_h^k(t, \lambda)|$, то для ее получения используются уже установленная оценка на $\max_t |\omega_h^{k-1}(t, \lambda)|$ и асимптотические свойства $N_0(t, \lambda)$ при $k - 1 \leq t \leq k$ (см. (2.19), (2.24), (2.30), (2.39)). Проводя соответствующие вычисления, последовательно убеждаемся в том, что

$$\max_{1 \leq t \leq 2} |\omega_h^1(t, \lambda)| \leq \frac{M}{\varepsilon} \exp \left(-\frac{c}{\varepsilon} \right), \quad \max_{k \leq t \leq k+1} |\omega_h^k(t, \lambda)| \leq \frac{M}{\varepsilon^2} \exp \left(-\frac{c}{\varepsilon} \right), \quad (2.68)$$

$$k = 2, 3, 4.$$

Для асимптотического анализа решения $N_h(t, \lambda)$ при $t \geq 5$ нам потребуется детализированная информация о функции $\omega_h^4(t, \lambda)$, $4 \leq t \leq 5$. В связи с этим обратим внимание на то, что из асимптотического представления (2.39) и соответствующей оценки для $\omega_h^3(t, \lambda)$ (см. (2.68)) вытекает неравенство

$$\max_{4 \leq t \leq 5} \left| \lambda \int_4^t N_0(\tau - 1, \lambda) \omega_h^3(\tau - 1, \lambda) d\tau \right| \leq \frac{M}{\varepsilon^6} \exp \left(-\frac{c+1}{\varepsilon} \right).$$

Отсюда и из (2.67), в свою очередь, следует, что интересующая нас функция $\omega_h^4(t, \lambda)$ представима в виде

$$\omega_h^4(t, \lambda) = (1 + \omega_h^3(4, \lambda)) \left[1 + O \left(\frac{1}{\varepsilon^6} \exp \left(-\frac{c+1}{\varepsilon} \right) \right) \right] - 1, \quad (2.69)$$

где остаток имеет указанный порядок малости равномерно по $t \in [4, 5]$, $h \in \Omega(\lambda, c)$.

Соотношение (2.69) и равенство (2.63) при $k = 4$ позволяют заключить, что

$$N_h(t, \lambda) = (1 + \omega_h^3(4, \lambda))N_0(t, \lambda) \left[1 + O\left(\frac{1}{\varepsilon^6} \exp\left(-\frac{c+1}{\varepsilon}\right)\right) \right], \quad 4 \leq t \leq 5. \quad (2.70)$$

Далее, рассмотрим момент времени $\tilde{T} = T - (1/\lambda) \ln(1 + \omega_h^3(4, \lambda))$ и заметим, что в силу установленных в предыдущем пункте свойств решения $N_0(t, \lambda)$ равномерно по $t \in [4, 5]$ справедлива аналогичная (2.45) формула

$$(1 + \omega_h^3(4, \lambda))N_0(t, \lambda) = N_0(t - \tilde{T}, \lambda) \left[1 + O\left(\frac{1}{\varepsilon^4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \right]. \quad (2.71)$$

Таким образом, подставляя (2.71) в (2.70), приходим к выводу, что

$$N_h(t, \lambda) = N_0(t - \tilde{T}, \lambda)(1 + \tilde{h}_0(t, \lambda)), \quad 4 \leq t \leq 5, \quad (2.72)$$

а функция $\tilde{h}_0(t, \lambda)$ удовлетворяет неравенству

$$\max_{4 \leq t \leq 5} |\tilde{h}_0(t, \lambda)| \leq \frac{M}{\varepsilon^4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (2.73)$$

Для получения асимптотического представления $N_h(t, \lambda)$ на отрезке $5 \leq t \leq \tilde{T} + 1$ сравним (2.72), (2.73) с аналогичными соотношениями (2.45), (2.46), установленными в предыдущем пункте. В итоге убеждаемся в том, что при $5 \leq t \leq \tilde{T} + 1$ к двум решениям $N_h(t, \lambda)$ и $N_0(t - \tilde{T}, \lambda)$ одного и того же уравнения (1.1) применима лемма 2.3. На основании этой леммы мы можем утверждать, что

$$N_h(t, \lambda) = N_0(t - \tilde{T}, \lambda)(1 + \tilde{h}(t, \lambda)), \quad 5 \leq t \leq \tilde{T} + 1, \quad (2.74)$$

где функция $\tilde{h}(t, \lambda)$, являющаяся решением аналогичного (2.49) уравнения

$$\dot{h} = -\lambda N_0(t - \tilde{T} - 1, \lambda)h(t - 1)(1 + h)$$

с начальным условием $\tilde{h}_0(t, \lambda)$, $4 \leq t \leq 5$, заимствованным из (2.72), допускает оценки

$$\max_{5 \leq t \leq \tilde{T} + 1} |\tilde{h}| \leq \frac{M}{\varepsilon^4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \max_{5 \leq t \leq \tilde{T} + 1} \left| \frac{d}{dt} \tilde{h} \right| \leq \frac{M \ln(1/\varepsilon)}{\varepsilon^4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (2.75)$$

Подведем некоторые итоги. Из свойств (2.53), (2.74), (2.75) и равенства $N_0(0, \lambda) = 1$ очевидным образом следует, что интересующий нас корень $t = T_h$ уравнения $N_h(t, \lambda) = 1$ определяется однозначно, причем

$$\begin{aligned} |\tilde{T} - T_h| &\leq \frac{M}{\varepsilon^4 \ln(1/\varepsilon)} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right), \\ \max_{-1 \leq t \leq 0} \left| \frac{N_0(t + T_h - \tilde{T}, \lambda)}{N_0(t, \lambda)} - 1 \right| &\leq \frac{M}{\varepsilon^4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Далее, объединяя оценки (2.76) с (2.74), (2.75), приходим к выводу, что функция

$$\bar{h}(t, \lambda) = \frac{N_h(t + T_h, \lambda)}{N_0(t, \lambda)} - 1 = \frac{N_0(t + T_h - \tilde{T}, \lambda)}{N_0(t, \lambda)} (1 + \tilde{h}(t + T_h, \lambda)) - 1, \\ -1 \leq t \leq 0,$$

являющаяся результатом действия оператора (2.62) на произвольную функцию $h \in \Omega(\lambda, c)$, удовлетворяет неравенству

$$\max_{-1 \leq t \leq 0} |\bar{h}(t, \lambda)| \leq \frac{M}{\varepsilon^4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (2.77)$$

Наконец, сравнивая (2.77) и (2.60), убеждаемся в справедливости требуемого свойства $V\Omega(\lambda, c) \subset \Omega(\lambda, c)$.

Итак, оператор V , являющийся очевидным образом компактным, преобразует в себя замкнутое, ограниченное и выпуклое множество $\Omega(\lambda, c)$. Отсюда в соответствии с известным принципом Шаудера заключаем, что этот оператор имеет в $\Omega(\lambda, c)$, по крайней мере, одну неподвижную точку $h = h_*(t, \lambda)$. Ясно также, что решение $N_*(t, \lambda)$ уравнения (1.1) с начальной функцией

$$N_*(t, \lambda) = N_0(t, \lambda)(1 + h_*(t, \lambda)), \quad -1 \leq t \leq 0, \quad (2.78)$$

оказывается периодическим с периодом $T_*(\lambda) = T_h|_{h=h_*}$.

Перейдем теперь ко второй части обоснования теоремы 2.1. Из явного вида (2.62) оператора V следует, что он непрерывно дифференцируем по h , а его производная Фреше $V'(h)$ задается равенством

$$V'(h)g_0 = \frac{N_h(t + T_h, \lambda)}{N_0(t, \lambda)} \left(g(t + T_h, \lambda) - l(g_0) \frac{\dot{N}_h(t + T_h, \lambda)}{N_h(t + T_h, \lambda)} \right), \quad -1 \leq t \leq 0. \quad (2.79)$$

Здесь $g_0(t)$ – произвольный элемент пространства

$$C_0 = \{g_0(t) \in C[-1, 0], g_0(0) = 0\},$$

$g(t, \lambda)$, $0 \leq t \leq T_h$, – решение линейного уравнения

$$\dot{g} = -\lambda N_h(t - 1, \lambda)g(t - 1) \quad (2.80)$$

с начальной функцией

$$g(t) = \frac{N_0(t, \lambda)}{N_h(t, \lambda)} g_0(t), \quad -1 \leq t \leq 0, \quad (2.81)$$

а линейный функционал $l: C_0 \rightarrow \mathbb{R}$ определяется равенством

$$l(g_0) = g(T_h, \lambda) \frac{N_h(T_h, \lambda)}{\dot{N}_h(T_h, \lambda)}. \quad (2.82)$$

Из формул (2.79), (2.82) следует, что проблема оценки нормы линейного оператора $V'(h)$ в пространстве C_0 с нормой

$$\|g_0\| = \max_{-1 \leq t \leq 0} |g_0(t)| \quad (2.83)$$

сводится к анализу введенного выше решения $g(t, \lambda)$ уравнения (2.80). В связи с этим уместно отметить, что для коэффициента $N_h(t-1, \lambda)$ из (2.80) в силу равенств (2.63), (2.74), (2.47) справедливо равномерное по $t \in [0, T_h]$, $h \in \Omega(\lambda, c)$, асимптотическое представление

$$N_h(t-1, \lambda) = N_0(t-1, \lambda) \left[1 + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}\right)\right) \right]. \quad (2.84)$$

Рассмотрим сначала отрезок $0 \leq t \leq 1$, на котором из (2.80), (2.81) для интересующего нас решения $g(t, \lambda)$ получаем явную формулу

$$g(t, \lambda) = -\lambda \int_0^t N_0(\tau-1, \lambda) g_0(\tau-1) d\tau, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.85)$$

Несложный ее анализ с учетом свойств (2.53) решения $N_0(\tau-1, \lambda)$ приводит к оценке

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |g(t, \lambda)| \leq M \|g_0\|, \quad (2.86)$$

где $\|g_0\|$ – норма (2.83), а одной и той же буквой M здесь и ниже обозначаются положительные постоянные, не зависящие ни от t, λ , ни от $h \in \Omega(\lambda, c)$, $g_0 \in C_0$.

При $k \leq t \leq k+1$, $k = 1, \dots, 4$, рассуждения однотипны. А именно, используя установленное на предыдущем шаге неравенство вида (2.86), свойство (2.84) и соответствующую формулу для $N_0(t-1, \lambda)$ (см. (2.19), (2.24), (2.30), (2.39)), из аналогичного (2.85) явного выражения

$$g(t, \lambda) = g(k, \lambda) - \lambda \int_k^t N_h(\tau-1, \lambda) g(\tau-1, \lambda) d\tau, \quad k \leq t \leq k+1, \quad (2.87)$$

выводим оценку на $\max_{k \leq t \leq k+1} |g(t, \lambda)|$. В результате убеждаемся в том, что

$$\max_{1 \leq t \leq 2} |g(t, \lambda)| \leq \frac{M}{\varepsilon} \|g_0\|, \quad \max_{k \leq t \leq k+1} |g(t, \lambda)| \leq \frac{M}{\varepsilon^2} \|g_0\|, \quad k = 2, 3, 4. \quad (2.88)$$

Последующий анализ требует более детальной информации о функции $g(t, \lambda)$ при $4 \leq t \leq 5$. Для ее получения заметим, что в силу известных свойств $N_h(t-1, \lambda)$ при $4 \leq t \leq 5$ (см. (2.84), (2.39)) и уже установленных неравенств (2.88) справедлива оценка

$$\max_{4 \leq t \leq 5} \left| \lambda \int_4^t N_h(\tau-1, \lambda) g(\tau-1, \lambda) d\tau \right| \leq \frac{M}{\varepsilon^6} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) \|g_0\|. \quad (2.89)$$

Далее, снова привлекая формулы (2.84), (2.39), замечаем, что

$$\frac{\dot{N}_h(t, \lambda)}{\lambda N_h(t, \lambda)} = 1 - N_h(t-1, \lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\varepsilon^4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \quad (2.90)$$

равномерно по $4 \leq t \leq 5$, $h \in \Omega(\lambda, c)$. Наконец, учитывая свойства (2.89), (2.90) в соответствующем равенстве (2.87), приходим к выводу, что

$$g(t, \lambda) = g(4, \lambda) \frac{\dot{N}_h(t, \lambda)}{\lambda N_h(t, \lambda)} + \tilde{g}_0(t, \lambda), \quad 4 \leq t \leq 5, \quad (2.91)$$

где

$$\max_{4 \leq t \leq 5} |\tilde{g}_0(t, \lambda)| \leq \frac{M}{\varepsilon^6} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) \|g_0\|. \quad (2.92)$$

Обращаем внимание на то, что первое слагаемое из (2.91) является решением уравнения (2.80). Это обстоятельство делает возможным отыскание интересующей нас функции $g(t, \lambda)$ при $5 \leq t \leq T_h$ в следующем виде:

$$g(t, \lambda) = g(4, \lambda) \frac{\dot{N}_h(t, \lambda)}{\lambda N_h(t, \lambda)} + \tilde{g}(t, \lambda), \quad (2.93)$$

где $\tilde{g}(t, \lambda)$ – решение уравнения (2.80) с начальной функцией $\tilde{g}_0(t, \lambda)$, $4 \leq t \leq 5$, взятой из (2.91). Наша ближайшая задача заключается в том, чтобы установить для $\tilde{g}(t, \lambda)$ оценку

$$\max_{5 \leq t \leq T_h} |\tilde{g}(t, \lambda)| \leq \frac{M}{\varepsilon^6} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) \|g_0\|. \quad (2.94)$$

Как и при обосновании леммы 2.3, положим

$$\beta_k = \lambda \int_{k+4}^{k+5} N_h(\tau - 1, \lambda) d\tau, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad \beta_{k_0+1} = \lambda \int_{k_0+5}^{T_h} N_h(\tau - 1, \lambda) d\tau,$$

где $k_0 = [T_h] - 5$, и будем последовательно оценивать модуль $\tilde{g}(t, \lambda)$ на отрезках $k + 4 \leq t \leq k + 5$, $k = 1, \dots, k_0$, и $k_0 + 5 \leq t \leq T_h$.

На первом из указанных промежутков, т.е. при $5 \leq t \leq 6$, интересующее нас решение задается вытекающей из (2.80) явной формулой

$$\tilde{g}(t, \lambda) = \tilde{g}_0(5, \lambda) - \lambda \int_5^t N_h(\tau - 1, \lambda) \tilde{g}_0(\tau - 1, \lambda) d\tau. \quad (2.95)$$

Учитывая затем в (2.95) известное неравенство (2.92), убеждаемся в том, что

$$\max_{5 \leq t \leq 6} |\tilde{g}(t, \lambda)| \leq \bar{g}_0(\varepsilon)(1 + \beta_1) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{g}_1(\varepsilon), \quad (2.96)$$

где $\bar{g}_0(\varepsilon) = (M/\varepsilon^6) \exp(-1/\varepsilon) \|g_0\|$.

Предположим, далее, что мы уже прошли первые k шагов и на отрезке $k+4 \leq t \leq k+5$ установили аналогичную (2.96) оценку

$$\max_{k+4 \leq t \leq k+5} |\tilde{g}(t, \lambda)| \leq \bar{g}_k(\varepsilon), \quad (2.97)$$

где

$$\bar{g}_s(\varepsilon) = \bar{g}_{s-1}(\varepsilon)(1 + \beta_s), \quad s = 1, \dots, k. \quad (2.98)$$

Тогда при $t \in [k + 5, k + 6]$ для $\tilde{g}(t, \lambda)$ из аналогичной (2.95) явной формулы

$$\tilde{g}(t, \lambda) = \tilde{g}(k + 5, \lambda) - \lambda \int_{k+5}^t N_h(\tau - 1, \lambda) \tilde{g}(\tau - 1, \lambda) d\tau$$

с учетом известной оценки (2.97) выводим

$$\max_{k+5 \leq t \leq k+6} |\tilde{g}(t, \lambda)| \leq \bar{g}_k(\varepsilon)(1 + \beta_{k+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{g}_{k+1}(\varepsilon).$$

Проделанный анализ показывает, что неравенство (2.97) и рекуррентные формулы (2.98) сохраняют силу при замене k на $k + 1$. Следовательно, на основании метода математической индукции они справедливы при всех $1 \leq k \leq k_0 + 1$. Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$\begin{aligned} \max_{5 \leq t \leq T_h} |\tilde{g}(t, \lambda)| &\leq \max_{1 \leq k \leq k_0+1} \bar{g}_k(\varepsilon) = \bar{g}_{k_0+1}(\varepsilon) = \bar{g}_0(\varepsilon) \prod_{k=1}^{k_0+1} (1 + \beta_k) \\ &= \bar{g}_0(\varepsilon) \exp\left(\sum_{k=1}^{k_0+1} \ln(1 + \beta_k)\right) \leq \bar{g}_0(\varepsilon) \exp\left(\sum_{k=1}^{k_0+1} \beta_k\right) \\ &= \bar{g}_0(\varepsilon) \exp\left(\lambda \int_5^{T_h} N_h(\tau - 1, \lambda) d\tau\right) \leq \frac{M}{\varepsilon^6} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) \|g_0\|. \quad (2.99) \end{aligned}$$

Действительно, первые два неравенства цепочки (2.99) очевидны, а третье базируется на оценке вида

$$\lambda \int_5^{T_h} N_h(\tau - 1, \lambda) d\tau \leq M,$$

имеющей место в силу асимптотических представлений (2.84), (2.47).

Итак, мы установили, что для фигурирующей в (2.93) функции $\tilde{g}(t, \lambda)$ действительно выполняется неравенство (2.94). Далее, подставляя соотношения (2.93), (2.94) в формулы (2.79), (2.82) и опираясь на известные асимптотические свойства $N_h(t, \lambda)$ и $N_0(t, \lambda)$, приходим к выводу, что

$$\sup_{h \in \Omega(\lambda, c)} \|V'(h)\| \leq \frac{M}{\varepsilon^6} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (2.100)$$

Остается заметить, что оценка (2.100) обеспечивает сжимаемость оператора V , а значит, и единственность его неподвижной точки $h = h_*(t, \varepsilon)$ в множестве $\Omega(\lambda, c)$. Теорема 2.1 доказана.

2.4. Итоговые результаты. Остановимся на некоторых следствиях из установленной выше теоремы 2.1, которые, собственно говоря, и являются основными достижениями этого параграфа.

ТЕОРЕМА 2.2. *Для периодического решения $N_*(t, \lambda)$ периода $T_*(\lambda)$, доставляемого теоремой 2.1, справедливы следующие утверждения:*

а) имеет место асимптотическое равенство

$$N_*(t, \lambda) = N_0(t, \lambda)(1 + \omega(t, \lambda)), \quad 0 \leq t \leq T_*, \quad (2.101)$$

в котором

$$\max_{0 \leq t \leq T_*} |\omega(t, \lambda)| \leq \frac{M}{\varepsilon^6} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right); \quad (2.102)$$

б) цикл $N_*(t, \lambda)$ уравнения (1.1) экспоненциально орбитально устойчив;

в) выполняется серия асимптотических равенств

$$\max_{0 \leq t \leq T_*} N_*(t, \lambda) = \frac{\exp(-1)}{\varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{11}{24}\varepsilon^2 + \frac{19}{48}\varepsilon^3 + \dots\right) \Big|_{\varepsilon=\exp(-\lambda)}, \quad (2.103)$$

$$\min_{0 \leq t \leq T_*} N_*(t, \lambda) = \exp\left\{-1 + \ln \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} + \frac{u_0}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{u_0} + O\left(\varepsilon \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right)\right\} \Big|_{\varepsilon=\exp(-\lambda)}, \quad (2.104)$$

$$\lambda T_*(\lambda) = \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 + 2\varepsilon + 5\varepsilon^2 + \dots\right) \Big|_{\varepsilon=\exp(-\lambda)}, \quad (2.105)$$

где функция $u_0 = u_0(\varepsilon)$ определяется из уравнения

$$u_0 = 2\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \ln u_0$$

и допускает асимптотику

$$u_0 = \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} + O\left(\varepsilon \frac{\ln^2(\ln(1/\varepsilon))}{\ln^2(1/\varepsilon)}\right). \quad (2.106)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы убедиться в справедливости свойств (2.101), (2.102), напомним, что функция $h_*(t, \lambda)$ из (2.78) удовлетворяет неравенству вида (2.77), более сильному, чем (2.60). Далее, повторяя с учетом этого обстоятельства соответствующий фрагмент доказательства теоремы 2.1, связанный с выводом формул (2.63) и оценок (2.66), (2.68), получаем требуемые соотношения.

Утверждение об устойчивости цикла $N_*(t, \lambda)$ очевидным образом вытекает из факта сжимаемости оператора (2.62). Более того, оценка (2.100) свидетельствует о том, что все мультипликаторы μ этого цикла (за исключением простого единичного) лежат в круге $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq (M/\varepsilon^6) \exp(-1/\varepsilon)\}$. Следует также добавить, что под мультипликаторами цикла здесь понимаются собственные значения оператора сдвига в фазовом пространстве $C[-1, 0]$ по решениям уравнения в вариациях (2.80) (при $h = h_*(t, \varepsilon)$) за время от $t = 0$ до $t = T_*(\lambda)$. Заметим также, что все мультипликаторы, отличные от единичного, являются одновременно и собственными значениями оператора $V'(h)|_{h=h_*}$ (см. (2.79)).

Перейдем теперь к обоснованию равенств (2.103)–(2.106). В силу уже установленных свойств (2.101), (2.102) степенная асимптотика периодического решения $N_*(t, \lambda)$ по параметру $\varepsilon = \exp(-\lambda)$ совпадает с построенной в пунктах

2.1, 2.2 асимптотикой специального решения $N_0(t, \lambda)$. Обыгрывая это обстоятельство, уточним асимптотические характеристики (1.2)–(1.4) цикла $N_*(t, \lambda)$, полученные в [4].

Заметим в первую очередь, что локальные экстремумы функции $N_*(t, \lambda)$ на отрезке $0 \leq t \leq T_*$ реализуются в точках, являющихся корнями уравнения $N_*(t-1, \lambda) = 1$. Отсюда и из общих характерных особенностей графика $N_*(t, \lambda)$ (см. рис. 1) заключаем, что

$$\max_{0 \leq t \leq T_*} N_*(t, \lambda) = N_*(1, \lambda), \quad \min_{0 \leq t \leq T_*} N_*(t, \lambda) = N_*(1 + t_0, \lambda), \quad (2.107)$$

где t_0 – первый положительный корень уравнения $N_*(t, \lambda) = 1$.

Для получения уточненного варианта формулы (1.2) обратимся к первому равенству из (2.107) и учтем в нем соотношения (2.101), (2.19)–(2.23). В результате убеждаемся в том, что $\max_t N_*(t, \lambda)$ раскладывается в асимптотический ряд (2.103).

Обратимся, далее, к формуле для $\min_t N_*(t, \lambda)$ и заметим, что момент времени $t_0 \in (1, 2)$ вычисляется с помощью асимптотических представлений (2.101), (2.24), а само значение $N_*(1 + t_0, \lambda)$ – с использованием соотношений (2.101), (2.30). Проводя соответствующий подсчет, получаем уточненный вариант равенства (1.3), имеющий вид (2.104), (2.106). Добавим еще, что после подстановки выражения (2.106) в (2.104) и некоторых упрощений получаем прежнюю формулу (1.3).

Для выявления асимптотических свойств периода $T_*(\lambda)$ цикла $N_*(t, \lambda)$ обратимся к доказательству теоремы 2.1, из которого следует, что $T_*(\lambda)$ с точностью до экспоненциально малой по ε величины совпадает с $T(\lambda)$ (см. (2.44)). Напомним, далее, что $\gamma_3(\varepsilon)$ допускает то же самое асимптотическое разложение по ε , что и функция $\gamma_2(\varepsilon)$ (см. (2.38)), а $c_*(\varepsilon)$ раскладывается в ряд (2.17). Учитывая эти факты, приходим к требуемому асимптотическому представлению (2.105), уточняющему формулу (1.4). Теорема 2.2 доказана.

Подводя итог, отметим, что формулы (2.103)–(2.106) допускают и дальнейшее уточнение. В частности, развитая в пп. 2.1, 2.2 методика позволяет вычислить любое наперед заданное количество коэффициентов рядов (2.103), (2.105).

§ 3. Приложение полученных результатов к цепочке уравнений Хатчинсона

3.1. Существование специальных решений. В этом параграфе развитая выше методика асимптотического интегрирования применяется для изучения вопроса о существовании и устойчивости релаксационных автоколебаний в системе (1.5) при условиях (1.6).

Для удобства дальнейшего анализа выполним в (1.5) серию замен: $N_j = (1 + a_j)x_j$, $b_j = a_j(1 + a_{j-1})/(1 + a_j)$, $j = 1, \dots, n$, где $a_0 = a_n$, и будем считать, что

$$b_j = b_j^0 \exp(-2\lambda), \quad b_j^0 = \text{const} > 0, \quad \lambda \gg 1. \quad (3.1)$$

Тогда интересующая нас система запишется в следующем виде:

$$\dot{x}_j = \lambda[1 - b_j x_{j-1} - x_j(t-1)]x_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

где $x_0 = x_n$.

Как и в случае уравнения (1.1), отправной точкой для исследования аттракторов системы (3.2) является наличие у нее некоторых специальных решений. А именно, зафиксируем произвольно вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, и покажем существование у рассматриваемой системы при условиях (3.1) n -параметрического семейства решений

$$(x_1(t, \alpha, \lambda), \dots, x_n(t, \alpha, \lambda)) : \quad x_j(t, \alpha, \lambda) > 0 \quad \forall t \in (-\infty, 0], \quad x_j(0, \alpha, \lambda) = \alpha_j, \\ x_j(t, \alpha, \lambda) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow -\infty, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Для нахождения решений (3.3) положим в (3.2)

$$u = \exp(\lambda t), \quad x_j = \alpha_j u(1 + v_j(u)), \quad v_j(1) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

В результате для функций $v_j = v_j(u)$, $j = 1, \dots, n$, приходим к аналогичной (2.3) задаче Коши:

$$v'_j = -\varepsilon[\varepsilon b_j^0 \alpha_{j-1}(1 + v_{j-1}) + \alpha_j(1 + v_j(\varepsilon u))](1 + v_j), \quad v_j(1) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.5)$$

где $v_0 = v_n$, $\alpha_0 = \alpha_n$, $\varepsilon = \exp(-\lambda)$, штрих означает дифференцирование по u .

Как и в п. 2.1, анализ задачи (3.5) опирается на процедуру комплексификации всех входящих в нее переменных и параметров. В данном случае эта процедура осуществляется следующим образом.

Зафиксируем произвольно постоянные $u_0 > 1$, $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, а также вектор $\alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0)$, $\alpha_j^0 > 0$, $j = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Omega = \Omega(u_0, \alpha_0, \varepsilon_0)$ множество векторов $(u, \alpha, \varepsilon) \in \mathbb{C}^{n+2}$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, координаты которых подчинены условиям $|u| \leq u_0$, $|\alpha_j| \leq \alpha_j^0$, $j = 1, \dots, n$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Далее, рассмотрим банахово пространство $H(\Omega)$ (над полем действительных чисел), состоящее из вектор-функций $v(u, \alpha, \varepsilon) = (v_1(u, \alpha, \varepsilon), \dots, v_n(u, \alpha, \varepsilon))$ с комплексными компонентами, непрерывных на Ω , аналитических по (u, α, ε) во внутренних точках Ω и удовлетворяющих следующим требованиям, аналогичным (2.5):

$$\operatorname{Im} v_j(u, \alpha, \varepsilon) \equiv 0 \quad \forall (u, \alpha, \varepsilon) \in [0, u_0] \times [0, \alpha_1^0] \times \dots \times [0, \alpha_n^0] \times [0, \varepsilon_0], \quad j = 1, \dots, n.$$

Норму в $H(\Omega)$ зададим посредством равенства, аналогичного (2.6):

$$\|v\| = \max_{1 \leq j \leq n} \max_{(u, \alpha, \varepsilon) \in \Omega} |v_j(u, \alpha, \varepsilon)|.$$

Наконец, перейдем от (3.5) к соответствующей системе интегральных уравнений

$$v_j(u, \alpha, \varepsilon) = -\varepsilon \int_{\gamma_{[1, u]}} [\varepsilon b_j^0 \alpha_{j-1}(1 + v_{j-1}) + \alpha_j(1 + v_j(\varepsilon s, \alpha, \varepsilon))](1 + v_j) ds, \quad (3.6) \\ j = 1, \dots, n,$$

где $\gamma_{[1, u]}$ — тот же самый путь, что и в (2.7).

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3.1. *Для любых фиксированных $u_0 > 1$, $\alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0)$, $\alpha_j^0 > 0$, $j = 1, \dots, n$, найдется такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(u_0, \alpha_0) \in (0, 1)$, что система интегральных уравнений (3.6) имеет в пространстве $H(\Omega)$, где $\Omega = \Omega(u_0, \alpha_0, \varepsilon_0)$, единственное решение*

$$(v_1^0(u, \alpha, \varepsilon), \dots, v_n^0(u, \alpha, \varepsilon)), \quad v_j^0(1, \alpha, \varepsilon) \equiv 0, \quad v_j^0(u, \alpha, 0) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

На доказательстве сформулированной леммы не останавливаемся, так как оно с некоторыми несущественными изменениями повторяет обоснование леммы 2.1. Отметим только, что здесь соответствующий оператор Π является сжимающим в замкнутом единичном шаре $S \subset H(\Omega)$ с центром в нуле при выполнении следующего условия, аналогичного (2.10):

$$4(1 + u_0)\varepsilon_0 \max_j \alpha_j^0 (1 + \varepsilon_0 \max_j b_j^0) < 1. \quad (3.8)$$

Из формул (3.4), (3.7) следует, что интересующее нас семейство решений (3.3) системы (3.2) задается равенствами

$$x_j(t, \alpha, \lambda) = \alpha_j u(1 + v_j^0(u, \alpha, \varepsilon)) \Big|_{u=\exp(\lambda t), \varepsilon=\exp(-\lambda)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.9)$$

Отметим также, что согласно лемме 3.1 функции $v_j^0(u, \alpha, \varepsilon)$ раскладываются в сходящиеся равномерно по $(u, \varepsilon) \in [0, u_0] \times [0, \varepsilon_0]$ ряды,

$$v_j^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k v_{j,k}^0(u, \alpha), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.10)$$

коэффициенты которых вычисляются рекуррентно по правилу, описанному в п. 2.1. Проводя соответствующий подсчет, убеждаемся в том, что

$$v_{j,1}^0 = \alpha_j(1-u), \quad v_{j,2}^0 = \alpha_j^2 \left(\frac{3}{2} - 2u + \frac{u^2}{2} \right) + \alpha_{j-1} b_j^0(1-u), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.11)$$

В общем же случае $v_{j,k}^0$ представляет собой многочлен переменной u степени k со старшим коэффициентом $(-1)^k \alpha_j^k / k!$.

Обратим внимание на то, что семейство решений (3.3) может быть параметризовано несколько иным способом. А именно, новые параметры $c_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, зададим посредством равенств

$$c_j = \alpha_j(1 + v_j^0(0, \alpha, \varepsilon)), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.12)$$

и положим $c = (c_1, \dots, c_n)$. В результате наше семейство запишется в следующем виде:

$$(x_1(t, c, \lambda), \dots, x_n(t, c, \lambda)) : \quad x_j(t, c, \lambda) > 0 \quad \forall t \in (-\infty, 0], \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.13)$$

причем в силу (3.9), (3.12) будут выполняться предельные соотношения

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_j(t, c, \lambda) \exp(-\lambda t) = c_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.14)$$

3.2. Продолжение решений. В настоящем пункте с помощью уже применявшегося ранее метода шагов продолжим семейство решений (3.9) на отрезок вида $0 \leq t \leq T+1$, где величиной $T > 0$ распорядимся позже. В связи с этим обратим внимание на то, что в случае системы (3.2) специфика упомянутого метода заключается в следующем.

Пусть на отрезке $t_0 - 1 \leq t \leq t_0$ задан набор неотрицательных и непрерывных начальных функций $x_j^0(t)$, $j = 1, \dots, n$. Тогда при $t_0 \leq t \leq t_0 + 1$ соответствующее этому набору решение $\{x_j(t), j = 1, \dots, n\}$ системы (3.2) определяется из задачи Коши

$$\dot{x}_j = \lambda[1 - b_j x_{j-1} - x_j^0(t-1)]x_j, \quad x_j|_{t=t_0} = x_j^0(t_0), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

Подчеркнем, что в силу очевидных априорных оценок

$$x_j(t) \leq x_j^0(t_0) \exp[\lambda(t - t_0)], \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.16)$$

решение задачи (3.15) заведомо существует при всех $t_0 \leq t \leq t_0 + 1$. А это значит, что мы можем взять его в качестве нового начального условия и продвинуться на очередной отрезок $t_0 + 1 \leq t \leq t_0 + 2$. Ясно также, что описанный процесс продолжается неограниченно.

Указанный выше способ действий и формулы (3.9) приводят к выводу, что на отрезке $0 \leq t \leq 1$ интересующее нас семейство решений допускает следующее представление:

$$x_j(t, \alpha, \lambda) = \frac{\alpha_j u \exp(-\alpha_j u)}{\varepsilon} (1 + v_j^1(u, \alpha, \varepsilon)) \Big|_{u=\exp(\lambda(t-1)), \varepsilon=\exp(-\lambda)}, \quad (3.17)$$

где $\{v_j^1, j = 1, \dots, n\}$ – решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{dv_j^1}{du} &= -[\varepsilon b_j^0 \alpha_{j-1} (1 + v_{j-1}^1) \exp(-\alpha_{j-1} u) + \alpha_j v_j^0] (1 + v_j^1), \\ v_j^1|_{u=\varepsilon} &= \exp(\alpha_j \varepsilon) - 1, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.18)$$

на отрезке $0 \leq u \leq 1$. Подставляя, далее, в правые части из (3.18) разложения (3.10), убеждаемся в том, что функции v_j^1 , $j = 1, \dots, n$, в свою очередь, раскладываются в сходящиеся равномерно по $(u, \varepsilon) \in [0, 1] \times [0, \varepsilon_0]$ ряды

$$v_j^1 = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k v_{j,k}^1(u, \alpha), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.19)$$

где ε_0 подходящим образом мало. Добавим еще, что, как показывает несложный подсчет с использованием уже известной информации (3.11), для коэффициентов $v_{j,1}^1$ из (3.19) справедливы формулы

$$v_{j,1}^1 = -b_j^0 (1 - \exp(-\alpha_{j-1} u)) + \alpha_j^2 \left(\frac{u^2}{2} - u \right) + \alpha_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.20)$$

Для дальнейшего анализа существенно то обстоятельство, что равенства (3.17) сохраняют силу вплоть до значения $t = 1 + \delta_0$, где $\delta_0 \in (0, 1/2)$ произвольно фиксировано. Действительно, этому моменту времени отвечает значение $u = u_0(\varepsilon)$, $u_0(\varepsilon) = \varepsilon^{-\delta_0}$, переменной u , для которого при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняется условие, аналогичное (3.8), а именно,

$$4(1 + u_0(\varepsilon))\varepsilon \max_j \alpha_j^0 (1 + \varepsilon \max_j b_j^0) < 1,$$

гарантирующее применимость асимптотических представлений (3.10), (3.19) равномерно по $0 \leq u \leq u_0(\varepsilon)$ (подчеркнем, что речь здесь идет именно об асимптотических формулах, а не о сходимости соответствующих рядов). Таким образом, из (3.17), (3.19), (3.20) имеем

$$x_j(t, \alpha, \lambda) \Big|_{t=1+\delta_0} \leq \frac{M}{\varepsilon^{1+\delta_0}} \exp\left(-\frac{\alpha_j}{\varepsilon^{\delta_0}}\right), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.21)$$

где, как обычно, через M обозначаются некоторые не зависящие от t , λ положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

Сделанные построения свидетельствуют о том, что на отрезке $0 \leq t \leq 1 + \delta_0$ происходит всплеск высоты порядка ε^{-1} каждой из компонент x_j семейства решений (3.3). Но уже при $t = 1 + \delta_0$ все x_j становятся экспоненциально малыми по ε (см. (3.21)) и в силу априорных оценок (3.16) заведомо остаются таковыми при $1 + \delta_0 \leq t \leq 5$. В дальнейшем, однако, нам потребуется более точная информация о поведении компонент $x_j(t, \alpha, \lambda)$ на промежутке $3 \leq t \leq 5$.

Для оценки x_j на указанном выше промежутке времени привлечем вытекающие из (3.2) равенства

$$\begin{aligned} x_j(t, \alpha, \lambda) = \alpha_j \exp \left\{ \lambda t - \lambda \exp(-2\lambda) b_j^0 \int_0^t x_{j-1}(\tau, \alpha, \lambda) d\tau \right. \\ \left. - \lambda \int_{-1}^{t-1} x_j(\tau, \alpha, \lambda) d\tau \right\}, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.22)$$

из которых, в свою очередь, имеем

$$\begin{aligned} x_j(t, \alpha, \lambda) \leq \alpha_j \exp \left\{ \lambda t - \lambda \int_{-1}^0 x_j(\tau, \alpha, \lambda) d\tau - \lambda \int_0^{1+\delta_0} x_j(\tau, \alpha, \lambda) d\tau \right. \\ \left. - \lambda \int_{1+\delta_0}^{t-1} x_j(\tau, \alpha, \lambda) d\tau \right\}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Заметим далее, что первые два интеграла из (3.23) вычисляются с использованием формул (3.9)–(3.11) и (3.17), (3.19), (3.20). Несложный подсчет показывает, что на этом пути для них получаются следующие асимптотические представления:

$$\begin{aligned} \lambda \int_{-1}^0 x_j(\tau, \alpha, \lambda) d\tau = (\alpha_j + O(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=\exp(-\lambda)}, \\ \lambda \int_0^{1+\delta_0} x_j(\tau, \alpha, \lambda) d\tau = \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 - \alpha_j - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j + \alpha_{j-1}} b_j^0 + O(\varepsilon) \right) \Big|_{\varepsilon=\exp(-\lambda)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Отметим, что третий из фигурирующих в (3.23) интегралов в силу оценок (3.16), (3.21) имеет равномерно по $t \in [3, 5]$ порядок малости $\varepsilon^{-4} \exp(-\alpha_j/\varepsilon^{\delta_0})$.

Суммируя перечисленные факты, приходим к выводу, что справедливы оценки

$$x_j(t, \alpha, \lambda) \leq \frac{M}{\varepsilon^3} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} + \lambda(t-3)\right), \quad t \geq 3, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.25)$$

носящие предварительный характер. Для получения же более точной информации о поведении решений (3.3) при $t \in [4, 5]$ рассмотрим момент времени $t = T$, где $T = (\exp \lambda + 1)/\lambda$, и вектор $c = (c_1, \dots, c_n)$ с компонентами

$$c_j = \alpha_j \exp\left\{\exp \lambda + 1 - \lambda \exp(-2\lambda) b_j^0 \int_0^4 x_{j-1}(\tau, \alpha, \lambda) d\tau - \lambda \int_{-1}^3 x_j(\tau, \alpha, \lambda) d\tau\right\},$$

$$j = 1, \dots, n, \quad (3.26)$$

для которых из (3.21), (3.24), (3.25) вытекают следующие асимптотические представления:

$$c_j = \alpha_j \exp\left(\frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j + \alpha_{j-1}} b_j^0\right) + O(\varepsilon), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.27)$$

Обратимся теперь к формулам (3.22) при $4 \leq t \leq 5$ и с учетом введенных обозначений перепишем их так:

$$x_j(t, \alpha, \lambda) = c_j \exp\{\lambda(t-T) + \tilde{\Delta}_j(t, \alpha, \lambda)\}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.28)$$

где остатки

$$\tilde{\Delta}_j = -\lambda \exp(-2\lambda) b_j^0 \int_4^t x_{j-1}(\tau, \alpha, \lambda) d\tau - \lambda \int_3^{t-1} x_j(\tau, \alpha, \lambda) d\tau$$

в силу (3.25) допускают следующие оценки:

$$\max_{4 \leq t \leq 5} |\tilde{\Delta}_j| \leq \frac{M}{\varepsilon^4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \max_{4 \leq t \leq 5} \left|\frac{d}{dt} \tilde{\Delta}_j\right| \leq \frac{M \ln(1/\varepsilon)}{\varepsilon^4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

$$j = 1, \dots, n. \quad (3.29)$$

С другой стороны, из соотношений (3.9)–(3.14) следует, что на отрезке $4 \leq t \leq 5$ для функций $x_j(t-T, c, \lambda)$, где c – вектор с координатами (3.26), (3.27), имеют место аналогичные (3.28) представления, а именно,

$$x_j(t-T, c, \lambda) = c_j \exp\{\lambda(t-T) + \tilde{\tilde{\Delta}}_j(t, \alpha, \lambda)\}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.30)$$

остатки $\tilde{\tilde{\Delta}}_j$ в которых также удовлетворяют оценкам вида (3.29). Отсюда очевидным образом заключаем, что при $4 \leq t \leq 5$ справедливы равенства

$$x_j(t, \alpha, \lambda) = x_j(t-T, c, \lambda)(1 + h_j(t, \alpha, \lambda)), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.31)$$

и соответствующие оценки

$$\max_t |h_j| \leq \frac{M}{\varepsilon^4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \max_t \left| \frac{d}{dt} h_j \right| \leq \frac{M \ln(1/\varepsilon)}{\varepsilon^4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.32)$$

Итак, мы пришли к уже неоднократно встречавшейся выше ситуации: при $t \in [4, 5]$ начальные условия двух различных решений $\{x_j(t, \alpha, \lambda), j = 1, \dots, n\}$ и $\{x_j(t - T, c, \lambda), j = 1, \dots, n\}$ одной и той же системы (3.2) экспоненциально близки. Заметим, что здесь сохраняется аналог леммы 2.3 (вместе с доказательством, которое претерпевает несущественные технические изменения). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3.2. *Асимптотические представления (3.31) и неравенства (3.32) остаются в силе на отрезке $5 \leq t \leq T + 1$.*

На заключительном этапе рассмотрим момент времени $t = \tilde{T}$, являющийся вторым положительным корнем уравнения $x_1(t, \alpha, \lambda) = \alpha_1$. Из формул (3.30), (3.31) и свойств (3.32) вытекает, что этот корень определяется однозначно, причем для $\bar{t} = \lambda(\tilde{T} - T)$ справедливо асимптотическое равенство

$$\bar{t} = \ln \alpha_1 - \ln c_1 + O(\varepsilon). \quad (3.33)$$

Подчеркнем, что порядок остатка в (3.33) продиктован тем обстоятельством, что при значениях t , близких к T , функции $\tilde{\Delta}_j$ из (3.30) в силу равенств (3.9)–(3.12) приобретают порядок ε . Учитывая затем в (3.33) уже установленные свойства (3.27), окончательно получаем

$$\bar{t} = -\frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \alpha_n} b_1^0 + O(\varepsilon). \quad (3.34)$$

Подведем итоги. Из проделанного анализа следует, что на отрезке $-1 \leq t \leq 0$ компоненты $x_j(t + \tilde{T}, \alpha, \lambda)$, $j = 1, \dots, n$, решения (3.3) с экспоненциальной по ε точностью совпадают с функциями $x_j(t + \tilde{T} - T, c, \lambda)$, где c – вектор с координатами (3.26). Далее, обратим внимание на то, что

$$x_j(t + \tilde{T} - T, c, \lambda) = x_j(t, \bar{c}, \lambda) = x_j(t, \bar{\alpha}, \lambda), \quad -1 \leq t \leq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.35)$$

Здесь $\bar{c} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n)$, $\bar{c}_j = c_j \exp(\bar{t})$, $j = 1, \dots, n$, $\bar{t}$ – величина (3.33), $c_j = c_j(\alpha, \varepsilon)$ – координаты (3.26), а компоненты вектора $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1(\alpha, \varepsilon), \dots, \bar{\alpha}_n(\alpha, \varepsilon))$ определяются как неявные функции из системы уравнений (3.12), в левых частях которой c_j заменены на $\bar{c}_j$.

Равенства (3.35) свидетельствуют о том, что по прошествии времени $t = \tilde{T}$ решение (3.3) системы (3.2) с любым фиксированным значением векторного параметра α будет практически совпадать с решением того же самого семейства, но с параметром $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\alpha, \varepsilon)$. Добавим еще, что для компонент $\bar{\alpha}_j$ вектора $\bar{\alpha}$ справедливы вытекающие из (3.27), (3.34) следующие асимптотические формулы:

$$\bar{\alpha}_1(\alpha, \varepsilon) = \alpha_1, \quad \bar{\alpha}_j(\alpha, \varepsilon) = \alpha_j \exp\left\{ \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j + \alpha_{j-1}} b_j^0 - \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \alpha_n} b_1^0 \right\} + O(\varepsilon), \quad (3.36)$$

$$j = 2, \dots, n.$$

Для того чтобы придать описанным построениям строгий смысл, положим в (3.36) $\varepsilon = 0$, $z_j = \alpha_{j+1}/\alpha_1$, $j = 1, \dots, n-1$. В результате приходим к $(n-1)$ -мерному отображению

$$z_j \rightarrow \bar{z}_j = z_j \exp \left\{ b_{j+1}^0 \frac{z_{j-1}}{z_j + z_{j-1}} - b_1^0 \frac{z_{n-1}}{1 + z_{n-1}} \right\}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (3.37)$$

где $z_0 = 1$. Методика, развитая при доказательстве теоремы 2.1, позволяет установить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. Любому циклу отображения (3.37), экспоненциально устойчивому или дихотомичному, в исходной системе (3.2) при условиях (3.1) и при всех достаточно больших λ соответствует релаксационный цикл с теми же свойствами устойчивости.

3.3. Заключение. В первую очередь скажем несколько слов о возможных аттракторах отображения (3.37) при $n = 2$. Начнем с простейшего варианта $b_1^0 = b_2^0 = b_0$, в котором оно записывается в следующем виде:

$$z \rightarrow \bar{z} = f(z), \quad f(z) = z \exp \left\{ b_0 \left(\frac{2}{1+z} - 1 \right) \right\}, \quad b_0 > 0. \quad (3.38)$$

Характерная особенность рассматриваемого случая состоит в том, что при всех $z > 0$ выполняется равенство

$$f(z)f\left(\frac{1}{z}\right) = 1. \quad (3.39)$$

Далее, опираясь на это свойство, нетрудно увидеть, что любой корень $z = z_0 \in (0, 1)$ уравнения

$$g(z) = 1, \quad (3.40)$$

где $g(z) = zf(z)$, порождает цикл отображения (3.38) периода два с компонентами $z_0, 1/z_0$. Более того, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.2. При значениях $b_0 \in (0, 4)$ экспоненциально устойчива неподвижная точка $z = 1$ отображения (3.38), а при каждом $b_0 > 4$ оно имеет экспоненциально устойчивый цикл периода два с компонентами $z_0, 1/z_0$, где z_0 — единственный корень уравнения (3.40) на интервале $(0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы, относящееся к неподвижной точке $z = 1$, непосредственно следует из равенств $f(1) = 1$, $f'(1) = 1 - b_0/2$. Что же касается уравнения (3.40), то при $b_0 < 4$ в силу очевидных свойств

$$g'(z) = 2f(z) \left(1 - \frac{b_0 z}{(1+z)^2} \right) > 0, \quad z > 0, \quad g(1) = 1, \quad (3.41)$$

у него нет корней на интервале $(0, 1)$.

Предположим теперь, что $b_0 > 4$. Тогда, как нетрудно заметить, $g'(z) < 0$ при $z \in (z_*, z_{**})$, $g'(z) > 0$ при $z \in (0, z_*) \cup (z_{**}, +\infty)$, $g'(1) = 2(1 - b_0/4) < 0$, где $z_* < 1$, $z_{**} > 1$ — корни многочлена $z^2 + (2 - b_0)z + 1 = 0$. Отсюда очевидным

образом следует, что в этом случае у уравнения (3.40) появляется единственный корень $z_0 = z_0(b_0)$, $z_0(4) = 1$, на интервале $(0, z_*)$ и по-прежнему нет корней на промежутке $[z_*, 1)$.

Итак, мы установили существование у отображения (3.38) при каждом $b_0 > 4$ цикла периода два с компонентами z_0 , $1/z_0$, бифурцирующего из неподвижной точки $z = 1$ при $0 < b_0 - 4 \ll 1$. Устойчивость же этого цикла определяется по абсолютной величине соответствующего мультипликатора

$$\mu = f'(z_0)f'\left(\frac{1}{z_0}\right). \quad (3.42)$$

Для упрощения формулы (3.42) продифференцируем по z тождество (3.39) и подставим затем в получившееся выражение $z = z_0$. В результате убеждаемся в том, что

$$f'\left(\frac{1}{z_0}\right) = z_0^4 f'(z_0). \quad (3.43)$$

Далее, для $f'(z_0)$ из явного вида функции f (см. (3.38)) с учетом соотношения $f(z_0) = 1/z_0$ имеем

$$f'(z_0) = \frac{1}{z_0^2} \left(1 - \frac{2b_0 z_0}{(1 + z_0)^2}\right). \quad (3.44)$$

Наконец, обратим внимание на то, что в точке $z = z_0$ справедливо неравенство $g'(z_0) > 0$, которое в силу (3.41) эквивалентно условию

$$\frac{b_0 z_0}{(1 + z_0)^2} < 1. \quad (3.45)$$

На заключительном этапе учтем информацию (3.43)–(3.45) в (3.42). В итоге приходим к выводу, что

$$\mu = \left(1 - \frac{2b_0 z_0}{(1 + z_0)^2}\right)^2 < 1.$$

Теорема 3.2 доказана.

Обратимся теперь к исходной системе (3.2) при $n = 2$, $b_1 = b_2 = b_0 \exp(-2\lambda)$ и заметим, что неподвижной точке $z = 1$ отображения (3.38) в ней отвечает так называемый синхронный цикл, для которого $x_1 = x_2$. Как следует из теорем 3.1, 3.2, этот цикл устойчив (неустойчив) при $b_0 < 4$ ($b_0 > 4$) и при всех достаточно больших λ . Что же касается цикла периода два, о котором говорится в теореме 3.2, то ему в системе (3.2) соответствует более сложный устойчивый релаксационный цикл. Эволюция во времени компонент $x_1(t)$, $x_2(t)$ этого цикла при $\lambda = 3$, $b_1 = b_2 = 0.0136$ показана на рис. 2 (сплошной линией изображен график x_1 , а пунктирной – x_2).

В несимметричном случае $b_2^0 \neq b_1^0$ отображение (3.37) при $n = 2$ приобретает следующий вид:

$$z \rightarrow \bar{z} = z \exp \left\{ \frac{b_1^0 + b_2^0}{1 + z} - b_1^0 \right\}.$$

Рис. 2

В отличие от предыдущего случая поведение его траекторий может оказаться достаточно сложным.

В заключение отметим, что развитая нами асимптотическая теория применима к системе, более общей чем (3.2), имеющей следующей вид:

$$\dot{x}_j = \lambda \left[1 - \sum_{k=1}^n b_{j,k} x_k - x_j(t-1) \right] x_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.46)$$

А именно, при условиях $b_{j,k} = b_{j,k}^0 \exp(-2\lambda)$, $b_{j,k}^0 = \text{const} > 0$ и при всех достаточно больших λ для системы (3.46) удастся выписать аналогичное (3.37) модельное отображение и установить аналог теоремы 3.1.

Авторы выражают глубокую признательность рецензенту за внимательное ознакомление с рукописью статьи и высказанные конструктивные замечания, существенно способствовавшие улучшению содержания статьи.

Список литературы

- [1] Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, “Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным”, *Докл. АН СССР*, **102**:5 (1955), 889–891.
- [2] Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*, Наука, М., 1975; англ. пер.: Е. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, *Differential equations with small parameters and relaxation oscillations*, Math. Concepts Methods Sci. Engrg., **13**, Plenum Press, New York, 1980.
- [3] Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Колесов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах*, Физматлит, М., 1995; англ. пер.: Е. F. Mishchenko, Yu. S. Kolesov, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, *Asymptotic methods in singularly perturbed systems*, Monogr. Contemp. Math., Consultants Bureau, New York, 1994.
- [4] А. Ю. Колесов, Ю. С. Колесов, “Релаксационные колебания в математических моделях экологии”, *Тр. МИАН*, **199**, Наука, М., 1993, 3–124; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, Yu. S. Kolesov, “Relaxation oscillations in mathematical models of ecology”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **199** (1995), 1–126.

- [5] G. E. Hutchinson, “Circular causal systems in ecology”, *Ann. N. Y. Acad. of Sci.*, **50**:4 (1948), 221–246.
- [6] E. M. Wright, “A non-linear difference-differential equation”, *J. Reine Angew. Math.*, **194** (1955), 66–87.
- [7] G. S. Jones, “Asymptotic behavior and periodic solutions of a nonlinear differential-difference equation”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **47** (1961), 879–882.
- [8] J. Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.

А. Ю. Колесов (A. Yu. Kolesov)

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию

17.11.2009 и 18.06.2010

Н. Х. Розов (N. Kh. Rozov)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета им.

М. В. Ломоносова

E-mail: rozov@rozov.mccme.ru