Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ошемков, Классификация гиперболических особенностей ранга нуль интегрируемых гамильтоновых систем, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 8, 63–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7654>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:08:50

УДК 517.938.5+515.164.15

А. А. Ошемков

Классификация гиперболических особенностей ранга нуль интегрируемых гамильтоновых систем

Построен полный инвариант, являющийся решением задачи полулокальной классификации седловых особенностей интегрируемых гамильтоновых систем. А именно, каждой невырожденной седловой особенности ранга нуль сопоставляется некоторый комбинаторный объект (f_n -граф), в результате чего задача полулокальной классификации седловых особенностей ранга нуль сводится к задаче перечисления f_n -графов. Это позволяет описать простой алгоритм получения списков седловых особенностей ранга нуль для заданного числа степеней свободы и данной сложности.

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: интегрируемые гамильтоновы системы, отображение момента, невырожденные особенности, топологические инварианты.

Введение

Топологические свойства интегрируемой гамильтоновой системы тесно связаны со структурой особенностей соответствующего ей отображения момента. Прообразы регулярных значений этого отображения являются инвариантными многообразиями системы, диффеоморфными фактору $\mathbb{R}^n$ по некоторой решетке. Например, если фазовое пространство системы компактно, то, как следует из классической теоремы Лиувилля, такие инвариантные многообразия диффеоморфны n -мерным торами (называемым торами Лиувилля), на которых траектории системы являются условно периодическими.

Если рассматривать прообразы всех точек при отображении момента, то соответствующее слоение на фазовом пространстве системы (называемое слоением Лиувилля) имеет особенности. Кроме торов Лиувилля, у него имеются слои, содержащие особые точки отображения момента. Слоение Лиувилля в окрестности этих особых слоев устроено более сложно как с топологической точки зрения, так и с точки зрения динамики.

Локальная классификация невырожденных особенностей для интегрируемых гамильтоновых систем хорошо известна (см. теорему Элиассона в п. 1.3). А именно, тип особенности полностью определяется количеством ее гиперболических, эллиптических и фокусных компонент. Однако для описания топологии конкретной интегрируемой системы необходимо исследовать структуру

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №10-01-00748), Программы Президента РФ "Поддержка ведущих научных школ" (грант №НШ-3224.2010.1), Программы развития научного потенциала высшей школы (грант №РНП-2.1.1.3704) и Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России (грант №02.740.11.5213)".

особенности не в малой окрестности особой точки, а в окрестности всего особого слоя, содержащего эту точку. Иногда такое исследование особенности называют полулокальным.

Отметим, что под решением задачи полулокальной классификации особенностей мы понимаем описание алгоритма перечисления (составления списка) особенностей данного типа. Имеется теорема Н. Т. Зунга [1] (см. теорему 3), описывающая топологию слоения Лиувилля в окрестности особых слоев на языке почти прямых произведений. Однако сам по себе этот подход не дает ответа на вопрос о том, как получить список особенностей данного типа и данной сложности (см. п. 2.5).

Полный ответ в задаче полулокальной классификации особенностей известен лишь для систем с одной и двумя степенями свободы. Иными словами, для каждого типа особенностей таких систем имеется алгоритм их перечисления. Подробное описание этих алгоритмов изложено в книге [2] (см. также обзор [3]). Следует отметить, что наиболее сложным является случай гиперболических особенностей ранга нуль (в случае двух степеней свободы они также называются особыми точками типа седло-седло). В отличие от эллиптических и фокусных особенностей структура особенности типа седло-седло не определяется однозначно ее сложностью (т.е. количеством особых точек на слое). Например, имеется четыре различные особенности сложности один, а для сложности два число неэквивалентных особенностей типа седло-седло равно тридцати девяти.

В настоящей работе мы рассматриваем гиперболические особенности ранга нуль (седловые особенности) для систем с любым числом степеней свободы. В § 1 содержатся необходимые определения и формулировка задачи. В § 2 кратко изложены известные результаты о классификации седловых особенностей.

Новый подход, предлагаемый для классификации седловых особенностей ранга нуль, описан в § 3. Цель этого подхода – сопоставить каждой седловой особенности некоторый простой (комбинаторный) объект, содержащий всю информацию о полулокальной структуре особенности. Такой объект (f_n -граф) построен в работе. Он может быть представлен в виде графа со специальными свойствами (см. пп. 3.1, 3.2). В результате задача полулокальной классификации седловых особенностей ранга нуль сводится к задаче перечисления f_n -графов, т.е. некоторых чисто комбинаторных объектов. Это позволяет предъявить простой алгоритм перечисления седловых особенностей ранга нуль данного типа (т.е. для данного числа степеней свободы и данной сложности). Некоторые результаты таких вычислений приведены в предложениях 3 и 8.

В п. 3.3 дано доказательство теоремы классификации (теорема 6), утверждающей, что связный f_n -граф, рассматриваемый с точностью до эквивалентности, является полным инвариантом для задачи полулокальной классификации седловых особенностей интегрируемых гамильтоновых систем. Доказательство основано на том, что построенное соответствие между невырожденными седловыми особенностями ранга нуль и f_n -графами является естественным в следующем смысле: операция прямого произведения простейших особенностей (атомов) соответствует операции произведения f -графов (определение 21), а факторизация прямых произведений особенностей по свободному покомпонентному действию конечной группы соответствует аналогичной

факторизации f_n -графов. В силу теоремы Зунга все особенности, удовлетворяющие условию нерасщепляемости (определение 9), могут быть получены из атомов при помощи этих двух операций.

В п. 3.4 описан один из возможных алгоритмов перечисления седловых особенностей ранга ноль (терема 7). Для этого используется представление f_n -графов в виде набора перестановок, удовлетворяющих некоторым условиям коммутирования (краткое изложение этого подхода для случая двух степеней свободы см. также в [4]).

§ 1. Основные определения

Напомним кратко основные определения, связанные с интегрируемыми гамильтоновыми системами и их особенностями (подробнее см., например, [2], [3]).

1.1. Интегрируемые гамильтоновы системы и слоение Лиувилля.

Симплектическое многообразие (M, ω) – это гладкое $2n$ -мерное многообразие M с заданной на нем невырожденной замкнутой 2-формой ω , которая называется *симплектической формой* (или *симплектической структурой*).

Любая гладкая функция H на симплектическом многообразии (M, ω) задает на нем векторное поле, называемое *косым градиентом* функции H (обозначение: $\text{sgrad } H$). Это поле двойственно дифференциалу функции H относительно симплектической формы ω .

Если поле $\text{sgrad } H$ является полным на M , то оно задает однопараметрическую группу диффеоморфизмов $\Phi_H^t: M \rightarrow M$, являющихся сдвигами на время t вдоль траекторий поля $\text{sgrad } H$ (*гамильтонов поток*). Эта динамическая система называется *гамильтоновой системой с гамильтонианом H на фазовом пространстве M* . Если $\dim M = 2n$, то говорят, что гамильтонова система имеет n степеней свободы. В локальных координатах $(x^1, \dots, x^{2n})$ гамильтонова система задается уравнениями $\dot{x}^i = (\omega^{-1})^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}$, где ω^{-1} – матрица, обратная к матрице симплектической формы ω .

Для симплектического многообразия (M, ω) можно задать билинейную кососимметрическую операцию на пространстве $C^\infty(M)$ гладких функций на M по формуле

$$\{f, g\} = (\omega^{-1})^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

Эта операция называется *скобкой Пуассона* и задает структуру алгебры Ли на $C^\infty(M)$. В терминах скобки Пуассона гамильтонова система с гамильтонианом H записывается в виде $\dot{x}^i = \{x^i, H\}$.

Функция F на фазовом пространстве M называется *первым интегралом* (или просто *интегралом*) гамильтоновой системы с гамильтонианом H , если F постоянна вдоль траекторий системы (т.е. вдоль траекторий векторного поля $v = \text{sgrad } H$). Это означает, что $v(F) = 0$. В терминах скобки Пуассона это условие переписывается следующим образом: $\{F, H\} = 0$.

Если скобка Пуассона двух функций тождественно равна нулю, то говорят, что функции *коммутируют* (относительно данной скобки Пуассона). Таким образом, интегралы гамильтоновой системы – это в точности функции, коммутирующие с ее гамильтонианом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Гамильтонова система на $2n$ -мерном симплектическом многообразии (M, ω) (т.е. система с n степенями свободы) называется *интегрируемой по Лиувиллю* (или просто *интегрируемой*), если для нее существует n попарно коммутирующих функционально независимых интегралов $F_1, \dots, F_n$, для которых соответствующие векторные поля $\text{sgrad } F_i$ полны на M .

Отметим, что условие полноты векторных полей на многообразии M автоматически выполнено, если M компактно.

Функциональная независимость интегралов $F_1, \dots, F_n$ означает, что для почти всех точек $x \in M$ дифференциалы функций $dF_1(x), \dots, dF_n(x)$ в точке x линейно независимы. Точки, в которых интегралы зависимы, называются *особыми точками* системы.

Смысл определения 1 проясняет следующая классическая теорема.

ТЕОРЕМА 1 (теорема Лиувилля). Пусть $v = \text{sgrad } H$ – интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) с интегралами $F_1, \dots, F_n$. Пусть $\mathcal{L}$ – неособая (т.е. не содержащая особых точек) связная компонента совместной поверхности уровня интегралов $F_1, \dots, F_n$. Тогда $\mathcal{L}$ диффеоморфно прямому произведению k -мерного тора T^k и $\mathbb{R}^{n-k}$.

Более того, если многообразие $\mathcal{L}$ компактно, то оно диффеоморфно n -мерному тору T^n , и некоторая окрестность U этого тора диффеоморфна прямому произведению T^n и n -мерного диска D^n , причем существуют координаты $s_1, \dots, s_n$ на диске D^n и угловые координаты $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ на торе T^n , в которых симплектическая структура ω на U имеет вид $\sum_{i=1}^n ds_i \wedge d\varphi_i$, а гамильтонова система записывается в виде $\dot{s}_i = 0$, $\dot{\varphi}_i = c_i(s_1, \dots, s_n)$.

Торы T^n , описанные в теореме 1, называются *торами Лиувилля* (или *лиувиллевыми торами*). Координаты $s_1, \dots, s_n$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ называются координатами *действие-угол*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Хотя выбор интегралов для конкретной гамильтоновой системы неоднозначен, обычно мы будем считать, что они фиксированы. Более того, как правило, мы не будем выделять гамильтониан среди набора интегралов. Таким образом, говоря об интегрируемой гамильтоновой системе, мы будем иметь в виду набор данных $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$, подразумевая, что гамильтониан H есть некоторая функция от $F_1, \dots, F_n$.

Отметим, что выбор гамильтониана важен, если мы интересуемся динамикой на инвариантных многообразиях системы. Однако в настоящей работе мы рассматриваем лишь топологические свойства слоения, порождаемого этими инвариантными многообразиями, и игнорируем динамику на них (см. определение 6).

С любой интегрируемой гамильтоновой системой $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$ связано следующее действие коммутативной группы $\mathbb{R}^n$ на фазовом пространстве M , порожденное гамильтоновыми потоками первых интегралов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Любой элемент $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ группы $\mathbb{R}^n$ задает диффеоморфизм $\Phi_{F_\lambda}^1 : M \rightarrow M$, являющийся сдвигом на единицу вдоль траекторий косоугольного градиента функции $F_\lambda = \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_n F_n$. Поскольку векторные поля $\text{sgrad } F_1, \dots, \text{sgrad } F_n$ коммутируют и полны на M , отображение $\lambda \mapsto \Phi_{F_\lambda}^1$

является гомоморфизмом $\mathbb{R}^n \rightarrow \text{Diff } M$ и, следовательно, определяет действие группы $\mathbb{R}^n$ на многообразии M . Мы будем называть это действие *гамильтоновым действием*¹ группы $\mathbb{R}^n$, порожденным функциями $F_1, \dots, F_n$ (или соответствующим интегрируемой системе $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$).

Как видно из этого определения, интегрируемая гамильтонова система $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$ однозначно определяет соответствующее гамильтоново действие группы $\mathbb{R}^n$. Переход от гамильтонова действия группы $\mathbb{R}^n$ на симплектическом многообразии (M, ω) к интегрируемой гамильтоновой системе $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$ эквивалентен выбору базиса в $\mathbb{R}^n$ (если, конечно, нам не важен выбор гамильтониана; см. замечание 1). В этом смысле понятия интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы и гамильтонова действия группы $\mathbb{R}^n$ эквивалентны.

Интегрируемой гамильтоновой системе $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$ соответствует отображение $\mathbf{F}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемое формулой $\mathbf{F}(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$. Оно называется *отображением момента*.

Основным объектом исследования при изучении топологии интегрируемых гамильтоновых систем является слоение (с особенностями), определяемое следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Слоение на фазовом пространстве M интегрируемой гамильтоновой системы $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$, образованное связными компонентами прообразов $\mathbf{F}^{-1}(y)$ при отображении момента (т.е. связными компонентами совместных поверхностей уровня первых интегралов $F_1, \dots, F_n$) называется *слоением Лиувилля*, соответствующим этой системе.

Обозначим множество критических точек отображения момента $\mathbf{F}$ через

$$K = \{x \in M \mid \text{rank } d\mathbf{F}(x) < n\}.$$

Множество критических значений $\Sigma = \mathbf{F}(K)$ (образ множества K при отображении $\mathbf{F}$) называется *бифуркационной диаграммой* отображения момента $\mathbf{F}$.

Слои слоения Лиувилля, не содержащие критических точек отображения момента, называются *регулярными*. Все остальные слои называются *особыми* (или *сингулярными*).

По теореме Лиувилля все компактные регулярные слои являются торами Лиувилля. Если точка y в образе отображения момента движется по гладкой кривой, не пересекая бифуркационную диаграмму Σ , то торы Лиувилля в ее прообразе гладко трансформируются. Если же точка y пересекает Σ , то происходит некоторая бифуркация этих торов.

1.2. Невырожденные особенности. Критические точки отображения момента $\mathbf{F}$, соответствующего интегрируемой системе $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$, являются ее особыми точками. Если $\text{rank } d\mathbf{F}(x) = r$, то говорят, что x является *особой точкой ранга r* (или *особой точкой коранга $n - r$*). Это условие равносильно тому, что орбита $\mathcal{O}_x$ соответствующего гамильтонова действия группы $\mathbb{R}^n$, проходящая через точку x , имеет размерность r .

¹По-видимому, здесь нет единой терминологии. В различных работах это действие называют как “гамильтоновым”, так и “пуассоновым”.

Ясно, что каждый регулярный слой слоения Лиувилля для интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы является n -мерной орбитой соответствующего гамильтонова действия. Особый слой L может быть объединением нескольких орбит (разных размерностей). Если $r = \min_{x \in L} \dim \mathcal{O}_x$, то говорят, что L является *особенностью ранга r* (коранга $n - r$).

Как обычно, чтобы говорить о классификации особенностей, необходимо выделить некоторый класс “особенностей общего положения”. Напомним сначала определение невырожденности для особенностей ранга нуль (см. [2], [3]).

Пусть $x \in M$ – особая точка ранга нуль интегрируемой гамильтоновой системы $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$, т.е. $dF_i(x) = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда для каждой функции F_i можно определить линейный оператор $A_{F_i} : T_x M \rightarrow T_x M$ по формуле $A_{F_i} = \omega^{-1} d^2 F_i(x)$. Этот оператор является линеаризацией векторного поля $\text{sgrad } F_i$ в точке x и может быть интерпретирован как элемент алгебры Ли $\text{sp}(T_x M)$ (т.е. алгебры Ли группы линейных симплектических преобразований касательного пространства $T_x M$).

Легко проверяется, что если $\{F_i, F_j\} = 0$, то $[A_{F_i}, A_{F_j}] = 0$. Поскольку интегралы $F_1, \dots, F_n$ попарно коммутируют, мы получаем, что каждая особая точка x ранга нуль задает коммутативную подалгебру $\mathfrak{h}_x$ в $\text{sp}(T_x M)$, порожденную операторами $A_{F_1}, \dots, A_{F_n}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Особая точка $x \in M^{2n}$ ранга нуль называется *невырожденной*, если $\mathfrak{h}_x$ является подалгеброй Картана в алгебре Ли $\text{sp}(T_x M)$.

Определение 4 можно также переформулировать следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4'. Особая точка $x \in M^{2n}$ ранга нуль называется *невырожденной*, если билинейные формы $d^2 F_1(x), \dots, d^2 F_n(x)$ линейно независимы и существует линейная комбинация $\lambda_1 d^2 F_1(x) + \dots + \lambda_n d^2 F_n(x)$, для которой корни ее “характеристического многочлена”

$$\chi(t) = \det \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i d^2 F_i(x) - t\omega \right) \quad (1)$$

попарно различны.

Теперь сформулируем определение невырожденности в общем случае.

Пусть $x \in M$ – особая точка ранга r интегрируемой гамильтоновой системы $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$. Тогда орбита $\mathcal{O}_x$ соответствующего гамильтонова действия, проходящая через точку x , имеет размерность r .

Рассмотрим следующие два линейных подпространства в касательном пространстве $T_x M$: подпространство $L_x = T_x \mathcal{O}_x$ (порожденное косыми градиентами функций $F_1, \dots, F_n$ в точке x) и его косо-ортогональное дополнение L'_x . Поскольку функции $F_1, \dots, F_n$ коммутируют, L_x есть ядро ограничения симплектической структуры ω на L'_x . Отсюда следует, что ω индуцирует симплектическую форму $\tilde{\omega}$ на фактор-пространстве L'_x / L_x .

Размерность стабилизатора St_x точки x (при гамильтоновом действии, порожденном функциями $F_1, \dots, F_n$) равна $n - r$. Связная компонента единицы группы St_x изоморфна $\mathbb{R}^{n-r}$ и ее действие на M порождает действие на $T_x M$

линейными симплектическими преобразованиями. Поскольку L_x и L'_x инвариантны относительно этого действия, мы получаем симплектическое (относительно формы $\tilde{\omega}$) действие группы $\text{St}_x = \mathbb{R}^{n-r}$ на пространстве L'_x/L_x размерности $2(n-r)$.

Таким образом, после описанной редукции ситуация становится аналогичной случаю особенностей ранга нуль. В частности, мы получаем коммутативную подалгебру $\tilde{\mathfrak{h}}_x$ в алгебре Ли $\text{sp}(L'_x/L_x, \tilde{\omega})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Особая точка $x \in M^{2n}$ ранга r называется *невыврожденной*, если $\tilde{\mathfrak{h}}_x$ является подалгеброй Картана в алгебре Ли $\text{sp}(L'_x/L_x, \tilde{\omega})$.

Особый слой L слоения Лиувилля $\mathcal{L}$ будем называть *невыврожденным*, если все его точки являются невырожденными.

1.3. Локальная и полулокальная классификации особенностей. Основная задача при топологическом (качественном) исследовании интегрируемой гамильтоновой системы состоит в том, чтобы описать топологию соответствующего слоения Лиувилля. Теорема Лиувилля дает полный ответ на этот вопрос в окрестности лиувиллевых тором, но не содержит почти никакой информации о структуре слоения Лиувилля в окрестности особых слоев.

Чтобы “классифицировать” интегрируемые гамильтоновы системы в каком-нибудь смысле, необходимо определить для них некоторое отношение эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Две интегрируемые гамильтоновы системы на U_1 и U_2 называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует диффеоморфизм $\Psi: U_1 \rightarrow U_2$, отображающий каждый слой слоения Лиувилля на U_1 в слой слоения Лиувилля на U_2 .

Рассматривая другие классы отображений Ψ , мы получим другие отношения эквивалентности. Например, можно заменить “диффеоморфизм” в определении 6 на “симплектоморфизм” (см. [3]).

Кроме того, можно по-разному выбирать множества U_1 и U_2 в определении 6. При изучении “глобальных” свойств интегрируемых систем в качестве такого множества естественно рассматривать все фазовое пространство или изоэнергетическую поверхность системы (т.е. поверхность уровня гамильтониана). Например, для изоэнергетических поверхностей имеется полный топологический инвариант (дающий решение задачи классификации в этом случае), построенный в работе [5].

Выбирая в качестве множеств U_1 и U_2 окрестности особых точек или окрестности особых слоев соответствующих слоений Лиувилля, мы фактически говорим об “эквивалентности особенностей” интегрируемых систем. Более точно, *локальная* и *полулокальная* классификации особенностей интегрируемых гамильтоновых систем означают их классификацию относительно следующих отношений эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть x_1 и x_2 – критические точки отображений момента для интегрируемых гамильтоновых систем на (M_1, ω_1) и (M_2, ω_2) соответственно, а $L_1 \ni x_1$ и $L_2 \ni x_2$ – особые слои соответствующих слоений Лиувилля. Будем говорить, что эти *особенности локально* (соответственно *полулокально*) *лиувиллево эквивалентны*, если существуют такие окрестности U_1 и U_2 точек

x_1 и x_2 (соответственно слоев L_1 и L_2), что системы на U_1 и U_2 лиувиллево эквивалентны, причем отображение Ψ из определения 6 отображает точку x_1 в точку x_2 (соответственно слой L_1 в слой L_2).

Как и в определении 6, здесь можно определять другие отношения эквивалентности, рассматривая различные классы отображений Ψ . В настоящей статье мы говорим о классификации особенностей только с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Поэтому в дальнейшем мы иногда будем называть “лиувиллеву эквивалентность” просто “эквивалентностью”.

Для невырожденных особенностей интегрируемых гамильтоновых систем задача локальной классификации решена (даже с точностью до симплектической эквивалентности). Ответ содержится в следующей теореме (см. [6]).

ТЕОРЕМА 2 (теорема Элиассона). *Пусть x – невырожденная особая точка ранга r интегрируемой гамильтоновой системы $(M, \omega, F_1, \dots, F_n)$. Тогда в некоторой окрестности точки $x \in M$ существуют симплектические координаты $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ и интегралы $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_n$ (задающие то же слое-ние Лиувилля, что и интегралы $F_1, \dots, F_n$) такие, что функции $\tilde{F}_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ при $i = 1, \dots, r$ задаются формулой*

$$\tilde{F}_i = p_i,$$

а при $i > r$ – одной из следующих формул:

- 1) $\tilde{F}_i = p_i^2 + q_i^2$ (эллиптический случай);
- 2) $\tilde{F}_i = p_i q_i$ (гиперболический случай);
- 3) $\begin{aligned} \tilde{F}_i &= p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i \\ \tilde{F}_{i+1} &= p_i q_i + p_{i+1} q_{i+1} \end{aligned}$ (случай фокус-фокус).

Из теоремы Элиассона следует, что локальная структура невырожденной особенности однозначно характеризуется ее *типом*, т.е. ее (ко)рангом и количеством эллиптических, гиперболических и фокусных компонент.

Задача полулокальной классификации особенностей гораздо сложнее. Даже “малые” окрестности особых слоев могут иметь сложную топологию и не задаются однозначно простыми числовыми характеристиками (такими как ранг, количество особых точек на слое и т.п.).

1.4. Почти прямые произведения. Опишем теперь некоторый метод, позволяющий конструировать “сложные” особенности из “простых”.

Пусть $(M^{2k}, \omega, F_1, \dots, F_k)$ и $(\tilde{M}^{2l}, \tilde{\omega}, \tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_l)$ – интегрируемые гамильтоновы системы. Рассмотрим прямое произведение $M^{2k} \times \tilde{M}^{2l}$. Интегралы $F_i, \tilde{F}_j$ и 2-формы $\omega, \tilde{\omega}$ естественным образом поднимаются на многообразие $M^{2k} \times \tilde{M}^{2l}$ (сохраним для них прежние обозначения). В результате мы получаем новую интегрируемую систему (с $k + l$ степенями свободы)

$$(M^{2k} \times \tilde{M}^{2l}, \omega + \tilde{\omega}, F_1, \dots, F_k, \tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_l).$$

Точка $(x, \tilde{x}) \in M^{2k} \times \tilde{M}^{2l}$ является особой точкой системы тогда и только тогда, когда хотя бы одна из точек $x, \tilde{x}$ является особой. Более того, особая

точка $(x, \tilde{x})$ является невырожденной тогда и только тогда, когда x и $\tilde{x}$ являются невырожденными (или неособыми), причем ранг особой точки $(x, \tilde{x})$ равен сумме рангов точек x и $\tilde{x}$.

Интегрируемая гамильтонова система, полученная описанным способом, называется *прямым произведением*. Аналогичным образом эту операцию можно определить для произвольного числа сомножителей.

Особенность интегрируемой гамильтоновой системы, рассматриваемая с локальной (соответственно полулокальной) точки зрения, называется *особенностью типа прямого произведения*, если она локально (соответственно полулокально) эквивалентна прямому произведению систем на некоторых окрестностях соответствующих точек (соответственно слоев).

Из теоремы Лиувилля следует, что любую интегрируемую гамильтонову систему с n степенями свободы в окрестности тора Лиувилля можно рассматривать как прямое произведение n тривиальных систем с одной степенью свободы. Теорема Элиассона говорит о том, что локально каждая невырожденная особенность может быть разложена в прямое произведение базисных невырожденных особенностей (двумерных и четырехмерных).

Замечательным фактом, доказанным Зунгом (см. теорему 3), является то, что аналогичное описание топологии невырожденных особенностей существует и в полулокальном случае. Это описание дается в терминах “почти прямых произведений”, которые определяются следующим образом.

Рассмотрим особенность $U = W_1 \times \cdots \times W_m$, являющуюся прямым произведением особенностей, и действия $\rho_1, \dots, \rho_m$ конечной группы G на ее сомножителях, удовлетворяющие следующим условиям:

- а) каждое отображение $\rho_i(g): W_i \rightarrow W_i$ является симплектоморфизмом, сохраняющим функции, которые определяют слоение Лиувилля на W_i ;
- б) действие ρ группы G на $U = W_1 \times \cdots \times W_m$, заданное формулой

$$\rho(g)(x_1, \dots, x_m) = (\rho_1(g)(x_1), \dots, \rho_m(g)(x_m)),$$

свободно.

Факторизуя пространство $U = W_1 \times \cdots \times W_m$ по действию ρ группы G , мы получаем гладкое многообразие U/G , причем симплектическая структура и коммутирующие функции, определяющие слоение Лиувилля, переносятся естественным образом с U на U/G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Особенности вида $(W_1 \times \cdots \times W_m)/G$ называются *почти прямыми произведениями*. Особенности, лиувиллево эквивалентные почти прямым произведениям, будем называть *особенностями типа почти прямого произведения*.

Оказывается, что все невырожденные особенности, удовлетворяющие некоторому естественному “условию нерасщепляемости”, лиувиллево эквивалентны почти прямым произведениям простейших (двумерных и четырехмерных) особенностей.

Поскольку далее в статье рассматриваются только гиперболические особенности ранга нуль, мы сформулируем “условие нерасщепляемости” (определение 9) и “теорему о разложении” (теорема 3) лишь для этого случая (соответствующие определения и формулировки в общем случае см. в [1], [2], [3; раздел 4.3]).

Пусть L – невырожденная гиперболическая особенность ранга нуль интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы. Это означает, что все особые точки $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$, лежащие на слое L , являются гиперболическими особыми точками ранга нуль (будем предполагать, что число особых точек конечно; см. п. 1.5). Рассмотрим “локальную бифуркационную диаграмму” для точки $x^{(j)}$, т.е. бифуркационную диаграмму отображения момента $\mathbf{F}$, ограниченного на малую окрестность точки $x^{(j)}$. Она имеет стандартный вид, поскольку в силу теоремы Элиассона она задается уравнением $\tilde{F}_1^{(j)} \dots \tilde{F}_n^{(j)} = 0$, где $\tilde{F}_1^{(j)}, \dots, \tilde{F}_n^{(j)}$ можно рассматривать как координаты в окрестности образа точки $x^{(j)}$ при отображении момента $\mathbf{F}$. Ясно, что $\mathbf{F}$ отображает все точки $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ в одну и ту же точку. Однако локальные бифуркационные диаграммы для точек $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$, вообще говоря, могут быть различны. “Условие нерасщепляемости” заключается в том, чтобы они были в точности одни и те же для всех точек $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$. Более точно это условие можно сформулировать следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Будем говорить, что невырожденная гиперболическая особенность ранга нуль для системы с n степенями свободы удовлетворяет *условию нерасщепляемости*, если для некоторой окрестности U особого слоя L бифуркационная диаграмма отображения момента $\mathbf{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ может быть переведена некоторым диффеоморфизмом $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ в объединение координатных гиперплоскостей.

Отметим, что для всех известных нам примеров интегрируемых гамильтоновых систем, возникающих в механике и физике, условие нерасщепляемости выполнено. “Искусственный” пример системы, для которой это условие не выполнено, можно построить уже в случае двух степеней свободы (см. [3; раздел 5.3, пример 4]).

Теперь мы можем сформулировать “теорему о разложении” (отметим еще раз, что мы приводим формулировку не для произвольных невырожденных особенностей, а лишь для гиперболических особенностей ранга нуль).

ТЕОРЕМА 3 (Зунг; см. [1]). *Любая невырожденная гиперболическая особенность ранга нуль (для системы с n степенями свободы), удовлетворяющая условию нерасщепляемости, полулокально эквивалентна почти прямому произведению гиперболических особенностей систем с одной степенью свободы.*

1.5. Постановка задачи. В настоящей работе исследуются невырожденные особенности ранга нуль, имеющие только гиперболические компоненты. Основная цель – получить полулокальную классификацию таких особенностей с точностью до Лиувиллевой эквивалентности.

Опишем более точно класс особенностей, для которых будет решаться задача классификации.

Полулокальная классификация означает классификацию в окрестности особого слоя слоения Лиувилля (см. определение 7). Поскольку мы говорим о гиперболических особенностях ранга нуль, первое условие можно сформулировать следующим образом.

1. Рассматриваемый особый слой невырожден (т.е. все его особые точки являются невырожденными) и содержит лишь конечное число особых точек

ранга нуль, причем все они “чисто гиперболические”. (Их количество называется *сложностью* особенности.)

“Гиперболичность” особой точки означает, что в некоторой ее окрестности слоение Лиувилля можно задать набором функций $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_n$ вида 2) из теоремы 2. Отметим также, что это условие эквивалентно тому, что все собственные значения многочлена (1) вещественны.

2. Мы будем предполагать, что в некоторой окрестности рассматриваемого особого слоя все слои слоения Лиувилля компактны. В частности, все регулярные слои являются торами Лиувилля.

Отметим, что из компактности слоев следует, что количество невырожденных особых точек ранга нуль на особом слое конечно (т.е. можно не требовать этого в условии 1).

3. Рассматриваемая особенность удовлетворяет условию нерасщепляемости (см. определение 9).

В силу теоремы о разложении (теорема 3) особенность, удовлетворяющую условию 3, можно рассматривать как почти прямое произведение двумерных особенностей. Именно это свойство особенности мы будем использовать, и можно было бы потребовать его выполнения вместо условия 3. Однако при исследовании конкретных систем удобнее проверять условие 3.

В дальнейшем, говоря об особенностях, мы будем всегда предполагать, что для них выполнены перечисленные выше условия 1–3. Поэтому (для краткости) будем называть их просто *седловыми особенностями*.

Ясно, что имеется бесконечное число неэквивалентных седловых особенностей. Поскольку n (число степеней свободы) и k (сложность, т.е. количество особых точек ранга нуль на слое) являются инвариантами седловой особенности относительно лиувиллевой эквивалентности, имеет смысл говорить о классификации особенностей для данной пары чисел n и k . Таким образом, бесконечный “список” всех особенностей можно разбить на конечные части.

Задача полулокальной классификации седловых особенностей с точностью до лиувиллевой эквивалентности может быть сформулирована следующим образом: описать алгоритм, позволяющий для данных n и k получить полный список неэквивалентных седловых особенностей сложности k для систем с n степенями свободы.

Отметим, что кроме алгоритма, необходим “простой язык” для описания самих списков особенностей, а также особенностей конкретных систем. Представление особенностей в виде почти прямых произведений достаточно удобно для такого описания. Однако теорема о разложении не дает ответа на вопрос о том, как получить список особенностей данного типа и данной сложности.

§ 2. Известные результаты о классификации седловых особенностей

В этом параграфе дано краткое описание методов и инвариантов, использованных ранее при исследовании некоторых классов седловых особенностей. Отметим, что здесь мы обсуждаем только случай особенностей ранга нуль, который рассматривается в данной статье. Имеется также теория, в рамках которой подробно исследован случай особенностей коранга один. Эта теория, основы которой были заложены в работах А. Т. Фоменко [7]–[11], связана

с исследованием топологии изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем. В частности, в результате развития этого подхода была получена полулокальная и глобальная классификация систем на изоэнергетических поверхностях (см. [2]).

2.1. Одна степень свободы (атомы). Простейшими седловыми особенностями являются особенности систем с одной степенью свободы. Все такие системы являются интегрируемыми по определению и задаются просто функцией (гамильтонианом H) на симплектическом многообразии (M^2, ω) . Слоями соответствующего слоения Лиувилля являются связные компоненты линий уровня гамильтониана H .

Особые точки системы (M^2, ω, H) – это критические точки функции H . Их невырожденность (как особых точек системы) означает невырожденность второго дифференциала функции H в этих точках.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Класс полулокальной лиувиллевой эквивалентности невырожденной особенности для системы с одной степенью свободы называется *атомом*.

Представителей класса эквивалентности мы также будем называть *атомами*. Иными словами, атом можно рассматривать как гамильтонову систему (V, ω, H) с особенностью, где H – функция Морса с одним критическим значением нуль, а $V = H^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ – (замкнутая) связная окрестность особого слоя.

Очевидно, что для систем с одной степенью свободы существует лишь одна эллиптическая особенность (с точностью до лиувиллевой эквивалентности). Все остальные невырожденные особенности являются *седловыми атомами*. Для краткости будем называть их просто *атомами*. Количество седловых точек на особом слое (они также называются *вершинами атома*) называется *сложностью атома*.

Рис. 1. Эллиптический атом A и седловой атом B сложности один

ПРИМЕР 1. На рис. 1 и рис. 2 изображены все атомы сложности один и два соответственно. Они изображены в виде пары (V, L) , где L – особый слой. Очевидно, что пара (V, L) однозначно определяет атом как класс полулокальной лиувиллевой эквивалентности.

Различные свойства атомов подробно изложены в книге [2]. В частности, там указаны некоторые алгоритмы их перечисления. Один из удобных способов классификации атомов (при помощи так называемых “ f -графов”) приведен также в п. 3.1. Отметим, что список атомов данной сложности необходим нам

Рис. 2. Список атомов сложности два

для того, чтобы описывать (многомерные) седловые особенности на языке почти прямых произведений.

Начиная с двух степеней свободы, классификация седловых особенностей становится нетривиальной. Приведем некоторые результаты, полученные в этом направлении (см. также [2] и [3; раздел 5.2]).

2.2. Две степени свободы, сложность один. Первые результаты о полулокальной классификации седловых особенностей были получены в работах Л. М. Лермана и Я. Л. Уманского [12]–[14], где рассматривались особенности сложности один для систем с двумя степенями свободы.

Ясно, что топология особого слоя является инвариантом особенности. Особый слой представляет из себя двумерный комплекс, клетками которого являются орбиты гамильтонова действия. В случае особенностей сложности один особый слой содержит одну нульмерную клетку (особая точка), четыре одномерные клетки и четыре двумерные. При этом каждая двумерная клетка является “квадратом”, т.е. ее граница разбита на четыре отрезка, внутренность каждого из которых гомеоморфно отображается на одномерную клетку при характеристическом отображении.

Лерман и Уманский показали, что в случае двух степеней свободы седловые особенности сложности один полулокально эквивалентны тогда и только тогда, когда их особые слои гомеоморфны. Исследовав все возможные варианты, они получили полный список, состоящий из четырех попарно неэквивалентных особенностей.

Имеется другой естественный инвариант седловой особенности (в случае двух степеней свободы), называемый “круговой молекулой”. Этот инвариант можно кратко описать следующим образом (подробнее см. в [1]–[3]). Пусть образ особого слоя при отображении момента $\mathbf{F}$ есть точка $P \in \mathbb{R}^2$. Бифуркационная диаграмма в окрестности точки P состоит из двух гладких кривых, трансверсально пересекающихся в точке P , которые можно считать координатными линиями (см. определение 9). Рассмотрим маленькую окружность γ с центром в точке P и ее прообраз при отображении момента. *Круговая молекула* – это инвариант, описывающий топологию слоения Лиувилля в трехмерном многообразии $\mathbf{F}^{-1}(\gamma)$.

Круговые молекулы для всех четырех особенностей сложности один были вычислены в работе А. В. Болсинова [15]. Как оказалось, все они различны и

поэтому также дают классификацию особенностей сложности один для систем с двумя степенями свободы.

В силу теоремы о разложении каждая из четырех особенностей сложности один может быть представлена в виде почти прямого произведения атомов. Оказывается, для этого достаточно использовать лишь атомы сложности один и два (см. рис. 1 и рис. 2). Ответ получается следующий:

$$B \times B, \quad (B \times C_2)/\mathbb{Z}_2, \quad (B \times D_1)/\mathbb{Z}_2, \quad (C_2 \times C_2)/(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2). \quad (2)$$

Здесь $\mathbb{Z}_2$ действует на сомножителях как центральная симметрия, а $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (в последнем случае) действует следующим образом: одна образующая действует на первом сомножителе как центральная симметрия, а на втором – как инволюция, оставляющая вершины атома на месте; вторая образующая, наоборот, действует на первом сомножителе как инволюция, а на втором – как центральная симметрия.

Описание четырех особенностей сложности один с помощью инварианта, предлагаемого в настоящей статье, см. на рис. 5.

2.3. Две степени свободы, сложность два. Полулокальная классификация особенностей сложности два для систем с двумя степенями свободы была получена А. В. Болсиновым в работе [15]. Он получил их полный список, состоящий из тридцати девяти особенностей.

Оказалось, что для особенностей сложности два топология особого слоя уже не является полным топологическим инвариантом, т.е. некоторые из тридцати девяти попарно неэквивалентных особенностей имеют гомеоморфные особые слои. Поэтому в работе [15] был введен еще один инвариант седловой особенности, называемый “*l*-типом”. Как уже отмечалось (см. п. 2.2), бифуркационная диаграмма в окрестности образа особого слоя состоит из двух трансверсально пересекающихся кривых γ_1 и γ_2 . Для каждой из этих кривых критические точки отображения момента в ее прообразе образуют двумерное симплектическое подмногообразие. Слоение Лиувилля исходной системы индуцирует на этих подмногообразиях слоение, которое можно рассматривать как слоение Лиувилля для системы с одной степенью свободы. При этом особые точки ранга нуль исходной системы будут седловыми особыми точками для индуцированных слоений. Таким образом, мы получаем два атома V_1 и V_2 , соответствующие кривым γ_1 и γ_2 (см. определение 10). Эта пара атомов (V_1, V_2) называется *l*-типом особенности (см. также [2]). (Отметим, что атомы V_1, V_2 , задающие *l*-тип особенности, могут быть несвязными, т.е., строго говоря, они являются наборами атомов.)

Круговые молекулы для всех тридцати девяти особенностей сложности два были построены В. С. Матвеевым в работе [16] (см. также [17]). Как и в случае сложности один, оказалось, что все они различны. Поэтому для седловых особенностей сложности два круговая молекула является полным инвариантом полулокальной эквивалентности.

Представление тридцати девяти особенностей сложности два в виде почти прямых произведений атомов было получено в работе В. В. Корнеева [18] (см. также [3; таблица 4]). Отметим, что для некоторых из тридцати девяти особенностей порядок группы, по которой необходимо проводить факторизацию

прямого произведения, равен восьми, причем эта группа не обязательно коммутативна.

2.4. Три степени свободы, сложность один. Этот случай был исследован В. В. Калашниковым [19]. Он использует подход, основанный на разложении особенностей в почти прямое произведение (отметим, что классификация особенностей сложности один и два для систем с двумя степенями свободы, описанная в пп. 2.2, 2.3, была получена без использования теоремы о разложении).

В работе [19] сформулирована теорема о том, что количество особенностей сложности один для случая трех степеней свободы равно тридцати двум, и приведен их список. Список особенностей, составленный Калашниковым, содержит тридцать две особенности, представленные в виде почти прямых произведений атомов (см. также [2] и [3; таблица 5]). Как выяснилось недавно, в этом списке пропущены некоторые особенности, а некоторые из почти прямых произведений, указанных в списке, на самом деле задают эквивалентные особенности.

Правильный список седловых особенностей сложности один для трех степеней свободы можно получить, используя подход, предлагаемый в настоящей работе. Для особенностей сложности один общая конструкция (изложенная в § 3) упрощается. Кроме того, как оказалось, особенности сложности один обладают интересными алгебраическими свойствами. Результаты, связанные с исследованием особенностей сложности один (для любого числа степеней свободы), и, в частности, их список для трех степеней свободы будут опубликованы автором отдельно (см. [20]).

Отметим, что рассуждения, использованные в работе [19], правильны, но доказательство теоремы о классификации сводится к некоторому перебору, который в работе не приведен. По-видимому, ошибки в списке возникли именно на этом последнем этапе доказательства.

2.5. Общий случай. Приведем некоторые результаты более общего характера, чем классификация особенностей данной сложности и данного типа.

1) Для систем с двумя степенями свободы ни топология особого слоя, ни l -тип особенности не являются полными инвариантами (уже для особенностей сложности два). Однако, оказывается, что пара {топология особого слоя, l -тип} (этот инвариант называется также C - l -типом особенности) однозначно определяет седловую особенность с точностью до полулокальной эквивалентности. Этот факт был доказан Матвеевым в [21] (см. также [17]).

Отметим, что C - l -тип особенности можно рассматривать и в случае любого числа степеней свободы. Неизвестно, будет ли этот инвариант полным для систем с числом степеней свободы больше двух.

Отметим также, что круговая молекула, которая является полным инвариантом для особенностей сложности один и два, в общем случае таковым не является. Примеры неэквивалентных особенностей с одинаковыми круговыми молекулами были построены А. В. Грабежным (см. [3; раздел 7.3]). Простейший из них имеет сложность четыре.

2) Несколько полезных утверждений об особенностях сложности один было доказано Калашниковым в [19] для любого числа степеней свободы. Например,

он доказал, что особенности сложности один полулокально эквивалентны тогда и только тогда, когда их особые слои гомеоморфны.

3) Одним из важных результатов о полулокальной структуре особенности безусловно является теорема Зунга о разложении любой седловой особенности в почти прямое произведение атомов (теорема 3). Задача классификации тесно связана с вопросом о единственности такого разложения. Очевидно, что любую особенность можно представить в виде почти прямого произведения атомов различными способами, поскольку каждый атом V можно представить как фактор другого атома $\tilde{V}$ по действию конечной группы. Поэтому естественным является вопрос о существовании некоторого “канонического” представления особенности в виде почти прямого произведения.

В работе [1] Зунг вводит понятие “минимальной модели” особенности (он также называет ее “канонической моделью”).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. *Минимальная модель* – это такое почти прямое произведение атомов $(V_1 \times \cdots \times V_n)/G$, что каждый (нетривиальный) элемент группы G действует нетривиально не менее чем на двух компонентах произведения $V_1 \times \cdots \times V_n$.

Как легко понять, любое почти прямое произведение атомов сводится к минимальной модели. Действительно, если некоторая подгруппа G_i группы G действует нетривиально лишь на одном сомножителе V_i , то она действует на нем свободно и мы можем заменить сомножитель V_i на V_i/G_i , а группу G – на G/G_i . Поступая так со всеми сомножителями, мы получим в результате минимальную модель.

Далее Зунг доказывает утверждение о том, что для каждой особенности существует единственная минимальная модель [1; предложение 7.4]. Это утверждение было сформулировано в работе [1] для особенностей произвольного типа и ранга. В такой общей формулировке оно заведомо неверно (контрпример легко строится уже для особенностей ранга один; см. [3; раздел 5.1]). В варианте работы [1], появившемся позднее в электронном архиве препринтов [22], некоторые ошибки в формулировках и доказательствах были отмечены в подстрочных примечаниях.

Тем не менее, для седловых особенностей ранга нуль утверждение о единственности минимальной модели (и его доказательство, приведенное в работе [1]) верно. Отметим, что это утверждение следует также из результатов настоящей работы (см. предложение 5).

§ 3. Классификация особенностей при помощи f -графов

В этом параграфе мы строим новый инвариант, позволяющий эффективно решить задачу классификации седловых особенностей.

Подчеркнем, что основная цель настоящей работы – построение простого инварианта и описание простого алгоритма перечисления для седловых особенностей, а не доказательство существования такого алгоритма, которое можно получить и другими методами.

3.1. Функции Морса и f -графы. В работе [23] рассматривалась задача классификации функций Морса на замкнутых двумерных поверхностях, имеющих единственный седловой критический уровень, с точностью до послыйного гомеоморфизма. Как легко понять, для ориентируемых поверхностей эта задача эквивалентна задаче полулокальной классификации седловых особенностей систем с одной степенью свободы, т.е. атомов (см. п. 2.1).

В работе [23] было введено понятие f -графа и построен инвариант, позволяющий решить указанную задачу классификации (как для ориентируемых, так и для неориентируемых поверхностей). Поскольку при классификации особенностей интегрируемых систем нас интересует только ориентируемый случай, общую конструкцию можно упростить. Приведем некоторые определения и результаты из [23] с учетом этих упрощений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Конечный граф Γ , некоторые из ребер которого ориентированы, называется f -графом, если все его вершины имеют степень три и в окрестности каждой вершины он имеет следующую структуру: среди трех ребер, инцидентных вершине, имеется одно неориентированное, одно входящее и одно выходящее (при этом одно и то же ориентированное ребро может быть одновременно входящим и выходящим для некоторой вершины, т.е. граф Γ может иметь ориентированные петли).

Из определения f -графа следует, что его ориентированные ребра образуют непересекающиеся циклы, а каждое неориентированное ребро соединяет пару различных вершин. *Сложностью* f -графа называется число его неориентированных ребер. Очевидно, любой f -граф сложности k имеет $2k$ вершин и $3k$ ребер.

Рассмотрим седловую особенность гамильтоновой системы с одной степенью свободы, т.е. гамильтонову систему (V, ω, H) , где H – функция Морса с одним критическим значением нуль, а $V = H^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ – замкнутая связная окрестность особого слоя. Опишем конструкцию, сопоставляющую этой седловой особенности некоторый связный f -граф Γ .

Рассмотрим уровень $H^{-1}(-\varepsilon)$ как набор циклов, ориентированных потоком $\text{sgrad } H$. Рассмотрим также сепаратрисы векторного поля $\text{grad } H$ (относительно любой метрики), начинающиеся на этих циклах и входящие в седловые точки на особом слое $L = H^{-1}(0)$. Вершинами f -графа Γ будут концы сепаратрис, лежащие на уровне $H^{-1}(-\varepsilon)$. Каждая пара сепаратрис, входящих в одну и ту же особую точку, образует неориентированное ребро f -графа Γ . Ориентированными ребрами будут отрезки циклов $H^{-1}(-\varepsilon)$ между вершинами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Будем говорить, что построенный f -граф Γ *соответствует* гамильтоновой системе (V, ω, H) (или седловой особенности, заданной этой системой).

Подчеркнем, что f -граф Γ , соответствующий атому (V, ω, H) , не предполагается вложенным в V , а является абстрактным графом, удовлетворяющим условиям определения 12.

Два f -графа считаются *одинаковыми* (или *изоморфными*), если существует биекция множества вершин одного f -графа на множество вершин другого, при которой неориентированные ребра переходят в неориентированные, а ориентированные – в ориентированные с сохранением ориентации.

Если f -графы Γ и Γ' , соответствующие гамильтоновым системам (V, ω, H) и (V', ω', H') , одинаковы, то эти системы эквивалентны. Обратное утверждение “почти верно”. А именно, если система (V', ω', H') эквивалентна системе (V, ω, H) , то соответствующий ей f -граф Γ' совпадает с одним из четырех f -графов, соответствующих четырем системам $(V, \pm\omega, \pm H)$.

Это приводит к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Два f -графа Γ и Γ' называются *эквивалентными*, если Γ' можно получить из Γ , применяя одну из следующих двух операций (или их композицию):

- изменение ориентации f -графа*, т.е. изменение ориентации у всех его ориентированных ребер;
- переворачивание f -графа*, т.е. замена окрестностей всех его неориентированных ребер по правилу

Отметим, что изменение ориентации f -графа соответствует изменению знака у ω , а операция переворачивания – изменению знака у H и у ω . Обе операции, очевидно, являются инволюциями.

Рис. 3. Список f -графов сложности один и два

ПРИМЕР 2. На рис. 3 изображены все f -графы сложности один и два. Они соответствуют атомам B , C_1 , C_2 , D_1 , D_2 , приведенным на рис. 1 и 2. При этом f -графы сложности один переходят друг в друга при операции переворачивания. Два из пяти f -графов сложности два (они соответствуют атому D_1) также переходят друг в друга при переворачивании, а остальные три при переворачивании не меняются. Отметим, что минимальная сложность f -графа, который не переходит в себя при изменении ориентации, равна четырем.

Теперь соответствие между седловыми особенностями гамильтоновых систем с одной степенью свободы и f -графами можно сформулировать в виде следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 4 (см. [23]). *Седловые особенности гамильтоновых систем с одной степенью свободы полулокально лиувиллево эквивалентны тогда и только*

тогда, когда эквивалентны соответствующие им f -графы. При этом любой связный f -граф соответствует некоторой седловой особенности.

Теорема 4 означает, что связный f -граф, рассматриваемый с точностью до переворачивания и изменения ориентации, является полным инвариантом для задачи классификации атомов. Поскольку f -граф является комбинаторным объектом, можно предъявить простой алгоритм для составления списка всех f -графов данной сложности k . Приведем один из возможных способов алгебраического описания f -графов, который удобен для их перечисления с помощью компьютера.

Пусть Γ – f -граф сложности k . Рассмотрим некоторую нумерацию его вершин $1, 2, \dots, 2k$. Тогда ориентированные ребра f -графа Γ задают перестановку $\mu_\Gamma \in S_{2k}$ (где S_m – симметрическая группа степени m), которая переводит i в j , если существует ориентированное ребро, идущее из вершины с номером i в вершину с номером j . Аналогично, неориентированные ребра задают перестановку $\tau_\Gamma \in S_{2k}$, переставляющую местами i и j , если существует неориентированное ребро, соединяющее вершины с номерами i и j .

По паре перестановок $\tau_\Gamma, \mu_\Gamma \in S_{2k}$ исходный f -граф Γ однозначно восстанавливается. А именно, в качестве множества вершин рассмотрим множество $\{1, 2, \dots, 2k\}$, неориентированные ребра задаются (неупорядоченными) парами $\{i, \tau_\Gamma(i)\}$, а ориентированные ребра – упорядоченными парами $\{i, \mu_\Gamma(i)\}$, где $i = 1, 2, \dots, 2k$. Очевидно, что эта процедура (построение f -графа по паре перестановок $\tau, \mu \in S_{2k}$) корректно определена, если перестановка τ “разбивает вершины на пары”, т.е. является инволюцией без неподвижных точек.

Итак, каждая пара перестановок $\tau, \mu \in S_{2k}$, для которой τ – инволюция без неподвижных точек, однозначно задает некоторый f -граф $\Gamma(\tau, \mu)$. При этом различные пары могут задавать одинаковые f -графы, поскольку перенумерация вершин не влияет на топологию f -графа. Любую перенумерацию можно рассматривать как сопряжение пары перестановок τ, μ при помощи некоторой перестановки $g \in S_{2k}$, т.е. как замену перестановок τ, μ на $g\tau g^{-1}, g\mu g^{-1}$. Получаем следующее простое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Два f -графа $\Gamma(\tau, \mu)$ и $\Gamma(\tau', \mu')$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\tau' = g\tau g^{-1}$ и $\mu' = g\mu g^{-1}$ для некоторой перестановки $g \in S_{2k}$.

Очевидно, что все перестановки, являющиеся инволюциями без неподвижных точек, сопряжены. Поэтому нумерацию вершин можно выбрать так, чтобы перестановка τ приняла некоторый стандартный вид τ^* . Будем считать, что $\tau^*(2i - 1) = 2i$ и $\tau^*(2i) = 2i - 1$, где $i = 1, \dots, k$. Зафиксировав таким образом перестановку τ , получаем, что каждая перестановка $\mu \in S_{2k}$ однозначно задает некоторый f -граф $\Gamma(\mu) = \Gamma(\tau^*, \mu)$. Следующее утверждение также легко проверяется.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Два f -графа $\Gamma(\mu)$ и $\Gamma(\mu')$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\mu' = g\mu g^{-1}$ для некоторой перестановки $g \in Z_{\tau^*}$, где Z_{τ^*} – централизатор перестановки τ^* в группе S_{2k} .

Предложение 2 означает, что f -графы сложности k “нумеруются” орбитами действия группы Z_{τ^*} сопряжениями на S_{2k} . Поскольку нас интересуют не сами f -графы, а атомы, которые им соответствуют, необходимо еще провести факторизацию по операциям изменения ориентации и переворачивания.

Легко понять, что при изменении ориентации f -графа $\Gamma(\tau, \mu)$ получается f -граф $\Gamma(\tau, \mu^{-1})$, а при переворачивании f -графа $\Gamma(\tau, \mu)$ – f -граф $\Gamma(\tau, \tau\mu)$. Здесь мы считаем, что при операции переворачивания соответствие между “старыми” и “новыми” вершинами f -графа устанавливается следующим образом:

т.е. для каждого ориентированного ребра сохраняется номер вершины, являющейся его началом.

Таким образом, для перестановки μ имеются еще две операции (кроме сопряжений элементами из Z_{τ^*}), не меняющие f -граф $\Gamma(\mu) = \Gamma(\tau^*, \mu)$: замена μ на μ^{-1} и замена μ на $\tau^*\mu$. Легко проверить, что обе эти операции коммутируют с любым сопряжением (элементом из Z_{τ^*}), а их коммутатор переводит μ в $\tau^*\mu\tau^*$, т.е. является сопряжением перестановкой τ^* . В результате получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Перестановки μ и μ' из S_{2k} задают эквивалентные f -графы (а значит, в силу теоремы 4 и одинаковые атомы) тогда и только тогда, когда либо $\mu' = g\mu^{\pm 1}g^{-1}$, либо $\mu' = g\tau^*\mu^{\pm 1}g^{-1}$ для некоторой перестановки $g \in Z_{\tau^*}$, где Z_{τ^*} – центральныйizer перестановки τ^* в группе S_{2k} .*

Как видно из теорем 4 и 5, описание особенностей при помощи f -графов (или перестановок) позволяет легко составлять списки атомов (т.е. седловых особенностей для систем с одной степенью свободы). При увеличении сложности их количество растет довольно быстро. Приведем следующий результат, полученный с помощью компьютера.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ количество (седловых) атомов сложности k равно соответственно 1, 4, 10, 58, 322, 3044, 33917.*

3.2. Построение инварианта. В этом пункте мы определяем инвариант седловых особенностей интегрируемых гамильтоновых систем для произвольного числа степеней свободы. Он является обобщением инварианта (описанного в п. 3.1) для систем с одной степенью свободы.

Как было показано в п. 3.1, каждому f -графу сложности k соответствует пара перестановок $\tau, \mu \in S_{2k}$, причем τ является инволюцией без неподвижных точек. Перестановки τ, μ определены с точностью до сопряжения в S_{2k} (предложение 1), но эта неоднозначность связана лишь с нумерацией вершин f -графа. Если же рассматривать τ, μ как перестановки на самом множестве вершин соответствующего f -графа (без нумерации), то они определены однозначно структурой этого f -графа. Чтобы различать эти две ситуации, мы будем обозначать перестановки из S_{2k} через τ, μ (как и выше), а аналогичные перестановки на множестве вершин f -графа (без нумерации) – через τ, μ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пусть Θ – конечный граф, множество ребер которого разбито на n непересекающихся семейств, причем некоторые из ребер ориентированы. Будем называть такой граф f -графом степени n или f_n -графом, если для него выполнены следующие условия:

- а) каждый из n подграфов графа Θ , образованных ребрами одного семейства и всеми вершинами, является f -графом (обозначим эти f -графы через $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, а соответствующие им пары перестановок через $\tau_1, \mu_1, \dots, \tau_n, \mu_n$);
- б) перестановки из разных пар коммутируют, т.е. для любых $i \neq j$

$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, \quad \tau_i \mu_j = \mu_j \tau_i, \quad \mu_i \mu_j = \mu_j \mu_i; \quad (3)$$

- с) действие группы $\mathbb{Z}_2^n$ на множестве вершин графа Θ , порожденное перестановками $\tau_1, \dots, \tau_n$, свободно, т.е. любая комбинация перестановок $\tau_1, \dots, \tau_n$ (которые коммутируют в силу условия б)) является инволюцией без неподвижных точек.

Набор из n перестановок, порождающих свободное действие группы $\mathbb{Z}_2^n$, будем для краткости называть *базисным* (или говорить, что эти n перестановок являются *базисными*).

Разбиение ребер f_n -графа на семейства мы также будем называть *раскраской*, а о ребрах, принадлежащих одному и тому же семейству, будем говорить как о ребрах *одного цвета*.

Отметим, что в определении f_n -графа мы не предполагаем, что нумерация семейств фиксирована. Иными словами, говоря, что два f_n -графа “одинаковы” (или “изоморфны”), мы имеем в виду следующее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. *Морфизмом f_n -графа Θ в f_n -граф Θ' называется отображение множества вершин графа Θ в множество вершин графа Θ' , при котором ребра одного графа переходят в ребра другого (неориентированные – в неориентированные, а ориентированные – в ориентированные с сохранением ориентации) так, что образы ребер из одного семейства f_n -графа Θ принадлежат одному семейству f_n -графа Θ' . В частности, морфизм, являющийся биекцией, будем называть *изоморфизмом*, а изоморфизм f_n -графа на себя – *автоморфизмом*.*

С топологической точки зрения морфизм f_n -графов можно рассматривать как накрытие, которое согласовано с их структурой (т.е. с раскраской и ориентацией ребер). Поэтому морфизмы f_n -графов мы также будем называть *накрытиями*.

Из условия с) определения 15 следует, что любой f_n -граф имеет $2^n k$ вершин. Число k будем называть *сложностью f_n -графа*. Из условия а) ясно, что каждый из f -графов $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ имеет сложность $2^{n-1}k$, т.е. каждое семейство ребер графа Θ содержит $2^{n-1}k$ неориентированных и $2^n k$ ориентированных ребер. Степень каждой вершины графа Θ равна $3n$. Очевидно, что f_n -графы при $n = 1$ являются обычными f -графами (в смысле определения 12).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условия, накладываемые на граф Θ в определении 15, можно описать в геометрических терминах следующим образом. Множество всех неориентированных ребер f_n -графа сложности k можно рассматривать как k экземпляров одномерного остова n -мерного куба, где все ребра одного семейства параллельны. Ориентированные ребра каждого семейства образуют непересекающиеся циклы так, что выполнено условие б) определения 15. Геометрически это условие означает, что “сдвиг” всех вершин f -графа Γ_i вдоль

ориентированных ребер j -го семейства, а также аналогичный “сдвиг” вдоль неориентированных ребер j -го семейства, где $i \neq j$, являются автоморфизмами f -графа Γ_i .

Теперь, как и в случае одной степени свободы, мы сопоставим каждой седловой особенности интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы некоторый f_n -граф. Это сопоставление можно провести аналогично тому, как это делалось для случая одной степени свободы (см. п. 3.1), т.е. с помощью сепаратрис градиентных потоков для интегралов системы. Однако при таком подходе возникают некоторые технические трудности, связанные с выбором метрики. Мы опишем другой способ построения f_n -графа по данной седловой особенности, не задавая его вложение в фазовое пространство, а определяя для него множество вершин и множество ребер.

Рассмотрим седловую особенность $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ сложности k , где W – окрестность особого слоя L , содержащего особые точки $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ ранга нуль. Пусть точка $P \in \mathbb{R}^n$ – образ особого слоя L при отображении момента $\mathbf{F}$, заданном интегралами $F_1, \dots, F_n$. Поскольку для рассматриваемой особенности выполнено условие нерасщепляемости (см. определение 9), бифуркационная диаграмма в некоторой окрестности точки P состоит из n гиперповерхностей, разбивающих эту окрестность на 2^n областей (будем называть их *камерами*) точно так же, как n координатных гиперплоскостей разбивают окрестность начала координат.

Выберем одну из 2^n камер Q . Отметим, что процесс построения f_n -графа (описанный ниже) для данной седловой особенности $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ зависит от выбора камеры, но в остальном определен однозначно.

Шаг 1. Определим множество вершин f_n -графа Θ , соответствующего рассматриваемой седловой особенности.

По теореме Элиассона для каждой точки $x^{(j)}$ в некоторой ее окрестности $O^{(j)}$ можно выбрать симплектические координаты $q_1^{(j)}, \dots, q_n^{(j)}, p_1^{(j)}, \dots, p_n^{(j)}$ и заменить интегралы $(F_1, \dots, F_n) \mapsto (\tilde{F}_1^{(j)}, \dots, \tilde{F}_n^{(j)})$ так, что $\tilde{F}_i^{(j)} = p_i^{(j)} \cdot q_i^{(j)}$. После этой замены локальная бифуркационная диаграмма для точки $x^{(j)}$ будет образована координатными гиперплоскостями. При этом функции $\tilde{F}_1^{(j)}, \dots, \tilde{F}_n^{(j)}$ можно выбрать так, что камера Q соответствует области отрицательных значений всех этих функций. Тогда прообраз камеры Q при отображении момента есть множество $\Delta^{(j)}$, заданное в окрестности $O^{(j)}$ неравенствами

$$\tilde{F}_1^{(j)} < 0, \quad \dots, \quad \tilde{F}_n^{(j)} < 0. \quad (4)$$

Отметим, что для каждой особой точки $x^{(j)}$ имеется естественное соответствие между функциями $\tilde{F}_1^{(j)}, \dots, \tilde{F}_n^{(j)}$ и n ребрами на границе камеры Q , которые являются прообразами координатных полуосей при диффеоморфизме $(F_1, \dots, F_n) \mapsto (\tilde{F}_1^{(j)}, \dots, \tilde{F}_n^{(j)})$. Используя это соответствие, мы будем считать, что нумерации функций $\tilde{F}_i^{(j)}$ для всех особых точек слоя $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ согласованы (т.е. функции $\tilde{F}_i^{(j)}$ и $\tilde{F}_i^{(j')}$ соответствуют одному и тому же ребру камеры Q).

Пусть окрестность $O^{(j)}$ в координатах $q_i^{(j)}, p_i^{(j)}$ имеет вид $(-\varepsilon, \varepsilon)^{2n}$. Тогда $\Delta^{(j)}$ имеет 2^n связных компонент, каждая из которых также является $2n$ -мерным (открытым) кубом. Таким образом, множество Π всех связных

компонент подмножеств $\Delta^{(j)}$ для всех особых точек $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ состоит из $2^n k$ элементов. Рассмотрим множество Π как множество вершин f_n -графа Θ .

Шаг 2. Опишем теперь множество неориентированных ребер f_n -графа Θ .

Каждая вершина $v \in \Pi$ (т.е. связная компонента множества $\Delta^{(j)}$) соответствует прямому произведению $Y_1^{(j)} \times \dots \times Y_n^{(j)}$, где $Y_i^{(j)}$ – один из двух квадратов $(-\varepsilon, 0) \times (0, \varepsilon)$ или $(0, \varepsilon) \times (-\varepsilon, 0)$ на плоскости с координатами $q_i^{(j)}, p_i^{(j)}$ (см. рис. 4). Каждое неориентированное ребро, принадлежащее i -му семейству f_n -графа Θ , соединяет пару вершин следующего вида:

$$\begin{aligned} Y_1^{(j)} \times \dots \times Y_{i-1}^{(j)} \times ((-\varepsilon, 0) \times (0, \varepsilon)) \times Y_{i+1}^{(j)} \times \dots \times Y_n^{(j)}, \\ Y_1^{(j)} \times \dots \times Y_{i-1}^{(j)} \times ((0, \varepsilon) \times (-\varepsilon, 0)) \times Y_{i+1}^{(j)} \times \dots \times Y_n^{(j)}. \end{aligned}$$

Шаг 3. Осталось задать ориентированные ребра f_n -графа Θ . Для этого напомним сначала операцию сдвига вдоль орбиты, введенную в работе [1].

Пусть γ_i – одномерная орбита гамильтонова действия, заданная потоком $\text{sgrad } \tilde{F}_i^{(j)}$ в окрестности особой точки $x^{(j)}$ и идущая из точки $x^{(j)}$ в точку $x^{(j')}$. Тогда для любой одномерной орбиты γ_m , которая в окрестности точки $x^{(j)}$ задана потоком $\text{sgrad } \tilde{F}_m^{(j)}$, где $m \neq i$, можно определить сдвиг этой орбиты вдоль орбиты γ_i . Действительно, из теоремы 3 следует, что имеется двумерная орбита гамильтонова действия (лежащая в особом слое L), которая является произведением орбит γ_i и γ_m . Поэтому можно определить сдвиг орбиты γ_m вдоль орбиты γ_i как сторону “квадрата” $\gamma_i \times \gamma_m$, противоположную стороне γ_m .

Рис. 4. Квадраты $Y_m^{(j)}$ и одномерные орбиты γ_m на поверхности $V_m^{(j)}$

Поскольку для рассматриваемой особенности выполнено условие нерасщепляемости, операция сдвига вдоль орбиты γ_i каждой орбиты, заданной потоком $\text{sgrad } \tilde{F}_m^{(j)}$ в окрестности точки $x^{(j)}$, однозначно сопоставляет одну из орбит, заданных потоком $\text{sgrad } \tilde{F}_m^{(j')}$ в окрестности точки $x^{(j')}$ (где $m \neq i$). В окрестности особой точки $x^{(j')}$ имеется две входящие (вдоль оси $p_m^{(j')}$) и две выходящие (вдоль оси $q_m^{(j')}$) одномерные орбиты, заданные потоком $\text{sgrad } \tilde{F}_m^{(j)}$ (см. рис. 4). Поэтому для каждого $m \neq i$ орбита γ_i действует на соответствующих орбитах одним из двух возможных способов, отличающихся на центральную симметрию.

Рассмотрим теперь вершину $v \in \Pi$, заданную в виде произведения квадратов

$$Y_1^{(j)} \times \cdots \times Y_n^{(j)}.$$

Для каждого $i = 1, \dots, n$ нам надо определить ориентированное ребро (для i -го семейства f_n -графа Θ), выходящее из вершины v . Для этого достаточно сопоставить каждому квадрату $Y_m^{(j)}$ один из двух квадратов $\pm Y_m^{(j')}$. При $m \neq i$ описанная операция сдвига орбит вдоль орбиты γ_i естественным образом индуцирует требуемое соответствие $Y_m^{(j)} \mapsto \pm Y_m^{(j')}$. При $m = i$ соответствие задается так: квадрат $Y_i^{(j)}$, замыкание которого содержит начало орбиты γ_i , переходит в тот из двух квадратов $\pm Y_i^{(j')}$, замыкание которого содержит конец орбиты γ_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Пусть $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ – седловая особенность интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы, а Q – одна из камер в окрестности образа особого слоя при отображении момента. Будем говорить, что f_n -граф Θ , построение которого описано выше (шаги 1–3), *соответствует седловой особенности* $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ *при выборе камеры* Q .

Будем также говорить, что f_n -граф *соответствует особенности*, если он соответствует ей при выборе одной из камер.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Каждой одномерной орбите γ_m соответствует квадрат $Y_m^{(j)}$, замыкание которого содержит ее начало (см. рис. 4). Любую n -мерную орбиту, лежащую в особом слое, можно рассматривать как произведение некоторых одномерных орбит $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Таким образом, имеется естественное взаимно-однозначное соответствие между произведениями квадратов $Y_1^{(j)} \times \cdots \times Y_n^{(j)}$ и n -мерными орбитами, лежащими в особом слое. Это означает, что множество вершин построенного f_n -графа можно рассматривать также как множество n -мерных орбит, лежащих в особом слое.

При $n = 1$, когда имеется лишь одна функция $F_1 = H$, выбор камеры означает выбор одного из двух интервалов, разделенных критическим значением функции H . Поэтому в этом случае можно устранить неоднозначность, выбирая, например, тот интервал, где значения функции H меньше критического (что и было сделано в определении 13). Таким образом, определение 13 фактически является частным случаем определения 17. Однако, говоря об f -графе, соответствующем атому (V, ω, H) , мы (как и выше) будем подразумевать тот из двух f -графов, который соответствует седловой особенности (V, ω, H) при выборе камеры $H < 0$.

Отметим, что для особенностей сложности один (при любом n) камеру можно выбрать однозначно, т.е. независимо от набора интегралов, задающих данную особенность (см. [20]).

В общем случае мы не можем выбрать камеру для данной особенности каким-то “каноническим” образом. Кроме того, при построении f_n -графа использовалась симплектическая структура (для определения ориентации на одномерных орбитах). Изучим, как меняется f_n -граф, соответствующий седловой особенности, при изменении симплектической структуры и при замене камеры.

ЛЕММА 1. Пусть $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ – седловая особенность интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы, а Θ – f_n -граф, соответствующий ей при выборе камеры Q . Пусть ω' – симплектическая структура на W , относительно которой функции $F_1, \dots, F_n$ также попарно коммутируют. Тогда f_n -граф Θ' , соответствующий седловой особенности $(W, \omega', F_1, \dots, F_n)$ при выборе той же камеры Q , можно получить из f_n -графа Θ , изменяя ориентацию на всех ориентированных ребрах некоторых его семейств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определение вершин (шаг 1) и определение неориентированных ребер (шаг 2) в процессе построения f_n -графа, соответствующего особенности, не зависят от симплектической структуры. При определении ориентированных ребер (шаг 3) симплектическая структура используется лишь для задания ориентации на них. При этом фактически использовалась не сама симплектическая структура, а ориентация одномерных орбит гамильтонова действия при помощи потоков $\text{sgrad } \tilde{F}_i^{(j)}$. Более того, ориентация на ребрах i -го семейства f_n -графа задается ориентацией одномерных орбит, соответствующих функциям $\tilde{F}_i^{(j)}$.

Изменение ориентации на одной одномерной орбите γ_i приводит к изменению ориентации на всех одномерных орбитах, которые можно получить из γ_i , сдвигая ее вдоль некоторых орбит. Поэтому из связности особого слоя (и теоремы 3) следует, что изменение ориентации на одной орбите γ_i влечет изменение ориентации на всех орбитах, соответствующих функциям $\tilde{F}_i^{(j)}$, а значит, и на всех ребрах i -го семейства f_n -графа.

ЛЕММА 2. Пусть Θ – f_n -граф, соответствующий седловой особенности $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ при выборе камеры Q , а $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ – f -графы, образованные семействами его ребер. Тогда f_n -граф Θ' , соответствующий той же седловой особенности при выборе камеры Q' , которая имеет общую $(n-1)$ -мерную грань с камерой Q , можно получить из f_n -графа Θ , применяя к одному из f -графов Γ_i композицию операций переворачивания и изменения ориентации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для каждой точки $x^{(j)}$ выбраны нужные координаты $q_1^{(j)}, \dots, q_n^{(j)}, p_1^{(j)}, \dots, p_n^{(j)}$ и интегралы $\tilde{F}_1^{(j)}, \dots, \tilde{F}_n^{(j)}$, соответствующие камере Q (см. шаг 1 построения f_n -графа). Пусть камера Q' граничит с камерой Q по i -й $(n-1)$ -мерной грани, т.е. прообраз камеры Q' при отображении момента задается в окрестности точки $x^{(j)}$ неравенствами

$$\tilde{F}_1^{(j)} < 0, \quad \dots, \quad \tilde{F}_{i-1}^{(j)} < 0, \quad \tilde{F}_i^{(j)} > 0, \quad \tilde{F}_{i+1}^{(j)} < 0, \quad \dots, \quad \tilde{F}_n^{(j)} < 0.$$

Для того чтобы прообраз камеры Q' был задан неравенствами вида (4), достаточно изменить знак у функции $\tilde{F}_i^{(j)} = p_i^{(j)} \cdot q_i^{(j)}$. Это можно сделать с помощью замены координат

$$(q_i^{(j)}, p_i^{(j)}) \mapsto \pm(p_i^{(j)}, -q_i^{(j)}),$$

сохраняющей симплектическую структуру. В результате в окрестности каждой точки $x^{(j)}$ пара квадратов $\pm Y_i^{(j)}$ и ориентации одномерных орбит, заданные потоком $\text{sgrad } \tilde{F}_i^{(j)}$, изменятся следующим образом (см. также рис. 4):

Согласно определению ориентированных ребер (шаг 3 построения f_n -графа) такое преобразование приводит к переворачиванию и изменению ориентации (см. определение 14) f -графа Γ_i , образованного ребрами i -го семейства f_n -графа Θ . Лемма доказана.

Ясно, что выбор камеры и симплектической структуры не влияет на класс лиувиллевой эквивалентности седловой особенности. Поскольку при изменении камеры или симплектической структуры f_n -граф, соответствующий особенности, меняется так, как описано в леммах 1 и 2, естественно ввести следующее отношение эквивалентности для f_n -графов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Два f_n -графа Θ и Θ' называются *эквивалентными*, если Θ' можно получить из Θ , применяя следующие операции:

- а) изменение ориентации любого из f -графов Γ_i ,
- б) переворачивание любого из f -графов Γ_i ,

где $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ – f -графы, образованные n семействами ребер f_n -графа Θ .

Операции, указанные в определении 18, могут быть описаны на языке перестановок следующим образом. Пусть f_n -граф задан набором перестановок $\tau_1, \mu_1, \dots, \tau_n, \mu_n$. Это означает, что $\tau_1, \dots, \tau_n$ образуют базисный набор (т.е. порождают свободное действие группы $\mathbb{Z}_2^n$), и выполнены условия коммутирования (3). Тогда операции из определения 18 означают замену μ_i на μ_i^{-1} и замену μ_i на $\tau_i \mu_i$ соответственно.

Теперь мы можем сформулировать теорему классификации. Ее доказательство приведено в п. 3.3.

ТЕОРЕМА 6. *Две седловые особенности интегрируемых гамильтоновых систем с n степенями свободы полулокально лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им f_n -графы эквивалентны. При этом любой связный f_n -граф соответствует некоторой седловой особенности.*

3.3. Доказательство теоремы классификации. Изложим кратко план доказательства.

1) Сначала мы определяем “морфизмы” особенностей (определение 19). Затем для каждого морфизма особенностей строится соответствующий ему морфизм f_n -графов (см. определения 16 и 20). Это соответствие согласовано с операцией композиции (лемма 3). Отсюда следует первая часть теоремы 6, т.е. утверждение об эквивалентности f_n -графов, соответствующих эквивалентным особенностям.

2) Далее мы рассматриваем случай особенностей, являющихся прямыми произведениями. Для f -графов также можно определить операцию “умножения” (определение 21). Тогда любой f_n -граф, соответствующий особенности типа прямого произведения, можно представить в виде произведения f -графов (лемма 4). Используя эту конструкцию и теорему 4, мы доказываем утверждение теоремы 6 для прямых произведений (см. лемму 5).

3) Для любого f_n -графа Θ мы строим “минимальное накрытие” $\bar{\Theta}$ (определение 22), являющееся аналогом минимальной модели для особенностей (определение 11). После этого мы доказываем, что если f_n -граф Θ соответствует особенности W , то его минимальное накрытие $\bar{\Theta}$ соответствует любой минимальной модели U/G этой особенности (лемма 9). Это позволяет свести общий случай к уже исследованному случаю прямых произведений (лемма 10).

В частности, из этой конструкции легко следует утверждение о единственности минимальной модели (предложение 5).

4) Последнее утверждение теоремы 6 (о реализуемости любого связного f_n -графа как инварианта некоторой особенности) также доказывается с помощью перехода к накрытиям.

Приступим теперь к реализации этого плана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Пусть $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ и $(W', \omega', F'_1, \dots, F'_n)$ – седловые особенности интегрируемых гамильтоновых систем. Отображение $\Phi: W \rightarrow W'$ назовем *морфизмом особенностей*, если $\Phi^*(\omega') = \omega$ и $\Phi^*(F'_i) = F_i$.

Отметим, что из условия $\Phi^*(\omega') = \omega$ следует, что любой морфизм особенностей является локальным диффеоморфизмом, т.е. задает некоторое накрытие.

Пусть $\Phi: (W, \omega, F_1, \dots, F_n) \rightarrow (W', \omega', F'_1, \dots, F'_n)$ – некоторый морфизм особенностей. Поскольку $\Phi^*(F'_i) = F_i$, бифуркационные диаграммы для этих особенностей совпадают. Выберем одну и ту же камеру Q для обеих особенностей и рассмотрим соответствующие им f_n -графы Θ и Θ' .

Покажем, что морфизм Φ естественным образом “индуцирует” морфизм f_n -графов $\Theta \rightarrow \Theta'$. Это следует из определения вершин и ребер f_n -графа, соответствующего особенности (см. описание процесса построения f_n -графа перед определением 17). Действительно, n двумерных координатных поверхностей $V_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, n$, соответствующих парам координат $q_i^{(j)}, p_i^{(j)}$ в окрестности особой точки $x^{(j)}$, инвариантно определяются самим слоением Лиувилля, поскольку они состоят из точек ранга один (в силу теоремы Элиассона точки разного ранга локально не эквивалентны). Координатные оси $q_i^{(j)}, p_i^{(j)}$ также определены однозначно как одномерные орбиты, содержащие в своем замыкании особые точки ранга нуль. Таким образом, морфизм Φ отображает квадраты $Y_i^{(j)}$ одной системы в такие же квадраты другой. Это означает, что отображение Φ задает отображение $\hat{\Phi}$ вершин f_n -графа Θ в вершины f_n -графа Θ' . То, что $\hat{\Phi}$ является морфизмом f_n -графов, также следует из процесса построения f_n -графа, соответствующего особенности (см. шаг 2 и шаг 3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Пусть $\Phi: (W, \omega, F_1, \dots, F_n) \rightarrow (W', \omega', F'_1, \dots, F'_n)$ – морфизм седловых особенностей интегрируемых гамильтоновых систем, а Q – камера (одна и та же для обеих особенностей) в окрестности образа особых слоев. Будем говорить, что построенный выше морфизм f_n -графов $\hat{\Phi}: \Theta \rightarrow \Theta'$ *индуцирован морфизмом* Φ при выборе камеры Q .

Следующее утверждение сразу следует из процесса построения индуцированного морфизма.

ЛЕММА 3. *Если $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$ – композиция морфизмов седловых особенностей, то для индуцированных морфизмов соответствующих f_n -графов (при выборе некоторой общей камеры Q) верно равенство $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_1 \circ \tilde{\Phi}_2$. Кроме того, тождественный морфизм любой особенности индуцирует тождественный морфизм соответствующего f_n -графа.*

Утверждение о том, что эквивалентным особенностям соответствуют эквивалентные f_n -графы, теперь можно доказать стандартным методом.

Пусть $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ и $(W', \omega', F'_1, \dots, F'_n)$ – лиувиллево эквивалентные особенности интегрируемых гамильтоновых систем, $\Psi: W \rightarrow W'$ – диффеоморфизм, устанавливающий эту эквивалентность (см. определение 6), а Θ и Θ' – соответствующие f_n -графы.

Рассмотрим особенность $(W, \Psi^*\omega', \Psi^*F'_1, \dots, \Psi^*F'_n)$. Согласно лемме 1 соответствующий этой особенности f_n -граф $\tilde{\Theta}$ эквивалентен f_n -графу Θ . Ясно, что $\Psi: (W, \Psi^*\omega', \Psi^*F'_1, \dots, \Psi^*F'_n) \rightarrow (W', \omega', F'_1, \dots, F'_n)$ – морфизм особенностей, для которого существует обратный. По лемме 3 индуцированный морфизм соответствующих f_n -графов $\hat{\Psi}: \tilde{\Theta} \rightarrow \Theta'$ является изоморфизмом.

Итак, первое утверждение теоремы 6 доказано.

Для доказательства обратного утверждения (об эквивалентности особенностей, которым соответствуют эквивалентные f_n -графы) рассмотрим сначала случай особенностей типа прямого произведения.

Для f -графов (любой степени) можно определить естественную операцию “умножения”. Ее результатом является одномерный остов прямого произведения f -графов, рассматриваемых как одномерные комплексы. Ясно, что каждое ребро этого одномерного остова соответствует некоторому ребру одного из сомножителей. Это определяет типы ребер (ориентированное или нет) и их раскраску. Легко понять, что в результате получается f -граф, степень которого равна сумме степеней сомножителей.

Мы будем использовать эту операцию для перемножения обычных f -графов (т.е. f -графов степени один). Дадим ее формальное определение для этого случая на языке перестановок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ – f -графы. Для каждого из f -графов Γ_i определены перестановки τ_{Γ_i} и μ_{Γ_i} на множестве его вершин Π_i . Произведением f -графов $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ называется f_n -граф Θ с множеством вершин $\Pi = \Pi_1 \times \dots \times \Pi_n$, для которого перестановки $\tau_1, \mu_1, \dots, \tau_n, \mu_n$, определяющие его структуру, имеют вид

$$\begin{aligned}\tau_i(u_1, \dots, u_n) &= (u_1, \dots, u_{i-1}, \tau_{\Gamma_i}(u_i), u_{i+1}, \dots, u_n), \\ \mu_i(u_1, \dots, u_n) &= (u_1, \dots, u_{i-1}, \mu_{\Gamma_i}(u_i), u_{i+1}, \dots, u_n),\end{aligned}$$

где $u_i \in \Pi_i$, $i = 1, \dots, n$. Произведение f -графов $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ будем обозначать через $\Gamma_1 \odot \dots \odot \Gamma_n$.

Отметим, что для седловой особенности, являющейся прямым произведением атомов $(V_1, \omega_1, F_1), \dots, (V_n, \omega_n, F_n)$, бифуркационная диаграмма отображения момента $\mathbf{F}: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданного интегралами $F_1, \dots, F_n$, является объединением координатных гиперплоскостей. Поэтому в этом случае

камеру Q , используемую для построения соответствующего f_n -графа, можно однозначно задать условиями $F_1 < 0, \dots, F_n < 0$.

Следующее утверждение показывает, что операция прямого произведения атомов и операция произведения f -графов согласованы относительно соответствия $\{\text{седловые особенности}\} \rightarrow \{f_n\text{-графы}\}$, введенного в определении 17.

ЛЕММА 4. Пусть U – седловая особенность интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы, которая является прямым произведением атомов $(V_1, \omega_1, F_1), \dots, (V_n, \omega_n, F_n)$. Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ – f -графы, соответствующие этим атомам (в смысле определения 13). Тогда f_n -граф соответствующий особенностям U при выборе камеры, заданной условиями $F_1 < 0, \dots, F_n < 0$, является произведением f -графов $\Gamma_1 \odot \dots \odot \Gamma_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Операция сдвига вдоль одномерной орбиты гамильтонова действия, описанная в шаге 3 процесса построения f_n -графа по данной особенности, в случае прямого произведения атомов действует “тождественно”. Поэтому, осуществляя шаги 1–3, мы получим f_n -граф, описанный в определении 21.

Докажем теперь утверждение теоремы 6 для прямых произведений атомов.

ЛЕММА 5. Две седловые особенности, являющиеся прямыми произведениями атомов, полулокально лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им f_n -графы эквивалентны. При этом любой связный f_n -граф, являющийся произведением f -графов, соответствует некоторой особенности, являющейся прямым произведением атомов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть две седловые особенности U и U' , являющиеся прямыми произведениями атомов, полулокально эквивалентны. Тогда они являются прямыми произведениями одних и тех же атомов (рассматриваемых с точностью до лиувиллевой эквивалентности). Действительно, из теоремы Элиассона следует, что множество особых точек ранга меньше или равного единице в окрестности особого слоя седловой особенности представляет собой объединение двумерных подмногообразий, трансверсально пересекающихся в особых точках ранга нуль. Таким образом, сомножители прямого произведения однозначно (с точностью до полулокальной лиувиллевой эквивалентности) определены как n таких подмногообразий, трансверсально пересекающиеся в некоторой особой точке ранга нуль.

Аналогично, если связный f_n -граф Θ является произведением некоторых f -графов $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, то каждый из сомножителей Γ_i однозначно определен как связная компонента подграфа, образованного ребрами i -го семейства f_n -графа Θ .

Учитывая эти два замечания, получаем, что доказываемое утверждение сводится к случаю одной степени свободы, т.е. следует из теоремы 4.

Для того чтобы обобщить лемму 5 на случай произвольных седловых особенностей, нужно перейти от прямых произведений к почти прямым произведениям (в силу теоремы 3 это и есть общий случай).

Сначала упростим формулировку доказываемого утверждения. Мы должны доказать следующее: если особенностям соответствуют эквивалентные f_n -графы, то они эквивалентны. Здесь можно заменить “эквивалентные f_n -графы”

на “один и тот же f_n -граф”. Действительно, в леммах 1 и 2 было показано, что при изменении камеры или симплектической структуры f_n -граф, соответствующий особенности, заменяется на эквивалентный. Докажем, что любой f_n -граф, эквивалентный данному, может быть получен таким образом.

ЛЕММА 6. Пусть Θ – f_n -граф, соответствующий седловой особенности $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ при выборе камеры Q . Если Θ' – f_n -граф, эквивалентный Θ , то существуют симплектическая структура ω' на W и камера Q' такие, что f_n -граф Θ' соответствует особенности $(W, \omega', F_1, \dots, F_n)$ при выборе камеры Q' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ – f -графы, образованные семействами ребер f_n -графа Θ . Из доказательства леммы 2 ясно, что выбирая подходящим образом камеру, мы можем реализовать переворачивание любого из них. Осталось доказать, что симплектическую структуру ω можно изменить так, чтобы изменилась ориентация ровно одного из f -графов $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$.

Представим рассматриваемую особенность в виде почти прямого произведения U/G (см. определение 8), где $U = (V_1, \omega_1, H_1) \times \dots \times (V_n, \omega_n, H_n)$. Изменяя знак у любой из форм ω_i , мы изменяем ориентацию соответствующих одномерных орбит гамильтонова действия, а значит, и ориентацию одного из f -графов Γ_i (см. доказательство леммы 1). Лемма доказана.

Итак, после замены (если необходимо) симплектической структуры и камеры для одной из особенностей доказываемое утверждение можно переформулировать следующим образом: если особенностям $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ и $(W', \omega', F'_1, \dots, F'_n)$ соответствует один и тот же f_n -граф Θ , то они эквивалентны.

Для того чтобы доказать это утверждение, мы будем использовать представление особенностей в виде минимальной модели (см. определение 11) и аналогичное представление f_n -графов с помощью “минимального накрытия”, определяемого ниже.

Как уже отмечалось, морфизмы f_n -графов можно рассматривать как накрытия, сохраняющие ориентацию и раскраску ребер. Говоря о *регулярном* накрытии (или просто о действии группы на f_n -графе), мы всегда будем подразумевать, что группа действует автоморфизмами f_n -графа, т.е. при действии любого элемента группы ориентация ребер сохраняется и ребра одного цвета переходят в ребра одного цвета.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Накрытие f_n -графа Θ связным f_n -графом Θ' , являющимся произведением f -графов, будем называть *минимальным накрытием*, если не существует связного f_n -графа Θ'' , который также является произведением f -графов и покрывает f_n -граф Θ , и для которого существует морфизм $\Theta' \rightarrow \Theta''$, не являющийся изоморфизмом.

Иными словами, если рассматривать существование морфизма между f_n -графами как отношение частичного порядка, то минимальное накрытие задается минимальным элементом среди всех связных f_n -графов, являющихся произведениями f -графов и покрывающих данный f_n -граф Θ . Как будет показано ниже (см. предложение 4), для любого связного f_n -графа Θ такой минимальный элемент существует и единствен. Прежде чем доказывать это утверждение, введем следующие обозначения.

Путь в связном f_n -графе Θ можно задавать начальной вершиной и последовательностью символов из набора $\{a_1, b_1, b_1^{-1}, \dots, a_n, b_n, b_n^{-1}\}$, где a_i означает движение вдоль неориентированного ребра i -го семейства, а b_i и b_i^{-1} означают движения вдоль ориентированного ребра i -го семейства в направлении, заданном ориентацией, и в противоположном направлении соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. “Путь” в графе можно понимать как в топологическом, так и в комбинаторном смысле (т.е. как непрерывный образ отрезка или как последовательность ребер). Каждому комбинаторному пути естественным образом соответствует непрерывный путь, если ввести параметризацию на ребрах и считать, что движение вдоль ребра задано этой параметризацией. Далее, говоря о путях, заданных последовательностью ребер, мы понимаем под этим именно такой непрерывный путь.

Последовательности символов из набора $\{a_1, b_1, b_1^{-1}, \dots, a_n, b_n, b_n^{-1}\}$ будем называть *словами*. При этом слово будем называть *несократимым*, если оно не содержит двухсимвольных фрагментов вида $a_i a_i$, $b_i b_i^{-1}$, $b_i^{-1} b_i$. Ясно, что любой путь в связном f_n -графе (с началом и концом в вершинах) однозначно с точностью до гомотопии задается начальной вершиной и некоторым несократимым словом.

Таким образом, если v_0 – некоторая фиксированная вершина связного f_n -графа Θ , то фундаментальную группу $\pi_1(\Theta, v_0)$ можно рассматривать как группу, в которой элементами являются несократимые слова, а операция умножения заключается в приписывании одного слова к другому и последовательном сокращении фрагментов вида $a_i a_i$, $b_i b_i^{-1}$, $b_i^{-1} b_i$ (при этом пустое слово соответствует единичному элементу).

Любое (связное) накрытие задается подгруппой в фундаментальной группе базы. В частности, любой морфизм связных f_n -графов $\varphi: \Theta' \rightarrow \Theta$ задается подгруппой в $\pi_1(\Theta, v_0)$. Эта подгруппа имеет вид $\varphi_*(\pi_1(\Theta', v'_0))$, где $v'_0 \in \varphi^{-1}v_0$, причем разным прообразам точки v_0 соответствуют сопряженные подгруппы. (По поводу свойств накрытий см., например, [24].)

Рассмотрим в фундаментальной группе f_n -графа $\pi_1(\Theta, v_0)$ подгруппу H_{Θ, v_0} , порожденную всеми коммутаторами вида

$$a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1}, \quad b_i b_j b_i^{-1} b_j^{-1}, \quad a_i b_j a_i^{-1} b_j^{-1}, \quad b_i a_j b_i^{-1} a_j^{-1}$$

при $i \neq j$ и всеми сопряженными им элементами. Из определения f_n -графа следует, что такая подгруппа корректно определена. Более того, для любого морфизма связных f_n -графов $\varphi: \Theta' \rightarrow \Theta$ имеем $\varphi_*(H_{\Theta', v'_0}) = H_{\Theta, v_0}$. Отсюда получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 7. Если связный f_n -граф Θ' накрывает f_n -граф Θ (т.е. существует морфизм $\Theta' \rightarrow \Theta$), то подгруппа в $\pi_1(\Theta, v_0)$, соответствующая этому накрытию, содержит подгруппу H_{Θ, v_0} .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Любая подгруппа в $\pi_1(\Theta, v_0)$ определяет некоторое накрытие f_n -графа. При этом раскраска и ориентация ребер естественным образом переносятся с базы Θ на накрывающий граф. Поэтому окрестность каждой вершины накрывающего графа устроена так же, как окрестность вершины любого f_n -графа, т.е. можно считать, что для накрывающего графа всегда выполнено условие а) определения 15. Легко показать, что условие б) определения 15

выполнено тогда и только тогда, когда накрытие определяется подгруппой, содержащей H_{Θ, v_0} , а условие с) всегда выполнено, если выполнено условие b).

Таким образом, если в определении f_n -графа не требовать его конечности, то верно и обратное утверждение к лемме 7: для любой подгруппы, содержащей H_{Θ, v_0} , соответствующий накрывающий граф является f_n -графом. В частности, накрытие, определяемое подгруппой H_{Θ, v_0} , является “универсальным” (бесконечным) f_n -графом, накрывающим любой f_n -граф. Отметим, что при $n = 1$ “универсальный” f -граф является просто деревом, поскольку в этом случае подгруппа H_{Θ, v_0} тривиальна.

Выделим теперь среди накрытий, описанных в лемме 7, накрытия, являющиеся произведениями f -графов.

Назовем *одноцветным циклом* любой замкнутый путь в f_n -графе, заданный последовательностью символов из набора $\{a_i, b_i, b_i^{-1}\}$ при некотором фиксированном $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим в фундаментальной группе f_n -графа $\pi_1(\Theta, v_0)$ подгруппу G_{Θ, v_0} , порожденную всеми элементами группы H_{Θ, v_0} , а также всеми одноцветными циклами и всеми сопряженными им элементами.

ЛЕММА 8. *Если связный f_n -граф Θ' , накрывающий f_n -граф Θ , является произведением f -графов, то подгруппа в $\pi_1(\Theta, v_0)$, соответствующая этому накрытию, содержится в подгруппе G_{Θ, v_0} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Theta' = \Gamma'_1 \odot \dots \odot \Gamma'_n$ и $\varphi: \Theta' \rightarrow \Theta$ – накрытие. Фиксируем некоторые вершины $v_0 \in \Theta$ и $v'_0 \in \Theta'$, для которых $\varphi(v'_0) = v_0$. Утверждение леммы означает, что образ любого замкнутого пути γ с началом в v'_0 содержится в G_{Θ, v_0} .

Пусть путь γ задается словом w в $\pi_1(\Theta', v'_0)$. Если $w = w_1 c_i c_j w_2$, где w_1 и w_2 – некоторые слова, $c_j \in \{a_j, b_j, b_j^{-1}\}$, $c_i \in \{a_i, b_i, b_i^{-1}\}$ и $i \neq j$, то

$$w = w_1 c_i c_j w_2 = w_1 c_i c_j c_i^{-1} c_j^{-1} w_1^{-1} w_1 c_j c_i w_2 = h w_1 c_j c_i w_2,$$

где $h \in H_{\Theta', v'_0}$. Действуя таким образом, мы можем переставлять в слове w любые соседние символы, соответствующие ребрам разного цвета. Поэтому слово w можно представить в виде

$$w = h \nu_1 \dots \nu_n, \quad (5)$$

где $h \in H_{\Theta', v'_0}$, а каждое из слов ν_i составлено из символов a_i, b_i, b_i^{-1} .

Получаем, что слово $\nu_1 \dots \nu_n$ задает замкнутый путь в $\Theta' = \Gamma'_1 \odot \dots \odot \Gamma'_n$. Из определения произведения f -графов и того, что каждое из слов ν_i содержит лишь символы a_i, b_i, b_i^{-1} , следует, что каждое из слов ν_i задает замкнутый путь в Θ' , т.е. является одноцветным циклом.

Образ пути γ при отображении φ задается тем же самым словом w в $\pi_1(\Theta, v_0)$. При этом φ переводит H_{Θ', v'_0} в H_{Θ, v_0} , а одноцветные циклы в одноцветные циклы. Значит, образ γ при отображении φ лежит в G_{Θ, v_0} .

Леммы 7 и 8 показывают, что все накрытия данного f_n -графа Θ произведениями f -графов задаются подгруппами в $\pi_1(\Theta, v_0)$, расположенными “между” H_{Θ, v_0} и G_{Θ, v_0} . Для одного крайнего случая мы получаем “универсальный” f_n -граф (см. замечание 5). Докажем, что другой крайний случай дает минимальное накрытие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для любого f_n -графа Θ существует единственное минимальное накрытие $\bar{\Theta} \rightarrow \Theta$. Это накрытие является регулярным и задается подгруппой G_{Θ, v_0} в $\pi_1(\Theta, v_0)$. При этом f_n -граф $\bar{\Theta}$ изоморфен произведению $\Gamma_1^0 \odot \cdots \odot \Gamma_n^0$, где Γ_i^0 – связная компонента f -графа Γ_i , образованного ребрами i -го семейства f_n -графа Θ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим, что f_n -граф $\Gamma_1^0 \odot \cdots \odot \Gamma_n^0$ покрывает Θ . Пусть вершина v_0 в f_n -графе Θ соответствует вершине $(u_1, \dots, u_n)$ в произведении f -графов, где u_i – вершина в f -графе Γ_i^0 (см. определение 21).

Существование накрытия $\Gamma_1^0 \odot \cdots \odot \Gamma_n^0 \rightarrow \Theta$ эквивалентно следующему: если слово w задает замкнутый путь в $\Gamma_1^0 \odot \cdots \odot \Gamma_n^0$ с началом в $(u_1, \dots, u_n)$, то это же слово w задает замкнутый путь в Θ с началом в v_0 . Это утверждение можно доказать, рассуждая так же, как при доказательстве леммы 8. Представив слово w в виде (5), получаем, что замкнутость соответствующего пути в $\Gamma_1^0 \odot \cdots \odot \Gamma_n^0$ означает замкнутость каждого из (одноцветных) путей, соответствующих словам $\nu_1, \dots, \nu_n$. Замкнутость пути, соответствующего слову ν_i , с началом u_i в Γ_i^0 , очевидно, эквивалентна замкнутости пути, соответствующего слову ν_i , с началом v_0 в Γ_i , т.е. в Θ .

Мы доказали, что накрытие $\varphi: \Gamma_1^0 \odot \cdots \odot \Gamma_n^0 \rightarrow \Theta$ существует. В силу леммы 8 имеем $\varphi_*(\pi_1(\Gamma_1^0 \odot \cdots \odot \Gamma_n^0)) \subset G_{\Theta, v_0}$. Для проверки обратного включения надо доказать следующее: если слово w задает элемент из подгруппы G_{Θ, v_0} в $\pi_1(\Theta, v_0)$, то это же слово w задает замкнутый путь в $\Gamma_1^0 \odot \cdots \odot \Gamma_n^0$ с началом в $(u_1, \dots, u_n)$. Доказательство этого утверждения для образующих группы G_{Θ, v_0} легко следует из определения 21.

Таким образом, мы доказали, что накрывающий f_n -граф $\bar{\Theta}$, соответствующий подгруппе G_{Θ, v_0} , имеет вид $\Gamma_1^0 \odot \cdots \odot \Gamma_n^0$.

По определению подгруппа G_{Θ, v_0} является нормальной в $\pi_1(\Theta, v_0)$. Поэтому соответствующее ей накрытие $\bar{\Theta} \rightarrow \Theta$ регулярно.

Из леммы 8 следует, что если связный f_n -граф Θ' накрывает f_n -граф Θ и является произведением f -графов, то существует накрытие $\Theta' \rightarrow \bar{\Theta}$. Это означает, что $\bar{\Theta} \rightarrow \Theta$ – единственное минимальное накрытие. Предложение 4 доказано.

Покажем теперь, что переход к минимальному накрытию для f_n -графов соответствует переходу к минимальной модели (см. определение 11) для седловых особенностей.

ЛЕММА 9. *Пусть $(W, \omega, F_1, \dots, F_n)$ – седловая особенность и U – ее минимальная модель. Если f_n -граф Θ соответствует особенности W , то его минимальное накрытие $\bar{\Theta}$ соответствует особенности U .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4 следует, что f_n -граф $\bar{\Theta}$, соответствующий особенности $U = V_1 \times \cdots \times V_n$, является произведением f -графов $\Gamma_1 \odot \cdots \odot \Gamma_n$, где Γ_i соответствует атому V_i . Накрытие $\Phi: U \rightarrow W$ регулярно и задается свободным покомпонентным действием ρ некоторой конечной группы G на U (определение 8). Действие ρ индуцирует действие $\hat{\rho}$ группы G на $\bar{\Theta}$ (см. определение 20), которое задает регулярное накрытие $\hat{\Phi}: \bar{\Theta} \rightarrow \Theta$.

Из лемм 7 и 8 следует, что $H_{\Theta, v_0} \subset \widehat{\Phi}_*(\pi_1(\tilde{\Theta}, \tilde{v}_0)) \subset G_{\Theta, v_0}$, где $\widehat{\Phi}(\tilde{v}_0) = v_0$. Предположим, что $\widehat{\Phi}_*(\pi_1(\tilde{\Theta}, \tilde{v}_0)) \neq G_{\Theta, v_0}$. Тогда в силу того, что подгруппа G_{Θ, v_0} порождена всеми элементами из H_{Θ, v_0} и одноцветными циклами, существует одноцветный цикл $\nu \in G_{\Theta, v_0} \setminus \widehat{\Phi}_*(\pi_1(\tilde{\Theta}, \tilde{v}_0))$ (пусть ν имеет цвет i).

Ясно, что при действии фундаментальной группы f_n -графа на накрытии, являющемся произведением f -графов, любой одноцветный цикл действует тождественно на всех сомножителях другого цвета. Поэтому для элемента $g \in G$, соответствующего одноцветному циклу ν при каноническом изоморфизме $\pi_1(\Theta, v_0)/\widehat{\Phi}_*(\pi_1(\tilde{\Theta}, \tilde{v}_0)) \rightarrow G$, действие автоморфизма $\widehat{\rho}(g)$ является тождественным на всех Γ_j при $j \neq i$ и нетривиальным на Γ_i .

Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 5, получаем, что действие морфизма $\rho(g)$ на прямом произведении U является тождественным для всех атомов V_j при $j \neq i$ и нетривиальным для V_i . Это противоречит тому, что U – минимальная модель. Значит, $\widehat{\Phi}_*(\pi_1(\tilde{\Theta}, \tilde{v}_0)) = G_{\Theta, v_0}$. В силу предложения 4 это означает, что $\tilde{\Theta} = \overline{\Theta}$.

Перейдем, наконец, к почти прямым произведениям.

ЛЕММА 10. Пусть U/G и U'/G' – седловые особенности, являющиеся минимальными моделями, такие, что им соответствует один и тот же f_n -граф Θ . Тогда группы G и G' изоморфны и существует диффеоморфизм $\Psi: U \rightarrow U'$, который задает мувилизацию эквивалентности прямых произведений U и U' и сопрягает действия группы $G = G'$ на них.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 9 следует, что обоим прямым произведениям $U = (V_1, \omega_1, H_1) \times \dots \times (V_n, \omega_n, H_n)$ и $U' = (V'_1, \omega'_1, H'_1) \times \dots \times (V'_n, \omega'_n, H'_n)$ соответствует один и тот же f_n -граф $\overline{\Theta} = \Gamma_1 \odot \dots \odot \Gamma_n$, являющийся минимальным накрытием для Θ . В силу леммы 5 особенности U и U' эквивалентны. Более того, используя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 5, можно считать, что атомам (V_i, ω_i, H_i) и (V'_i, ω'_i, H'_i) соответствует один и тот же f -граф Γ_i .

Из процесса построения индуцированного морфизма (см. определение 20) и предложения 4 следует, что действие ρ группы G на U и действие ρ' группы G' на U' индуцируют одно и то же действие $\widehat{\rho} = \widehat{\rho}'$ группы $\pi_1(\Theta, v_0)/G_{\Theta, v_0}$ на $\overline{\Theta}$. В частности, группы G и G' изоморфны и их действия на атомах (V_i, ω_i, H_i) и (V'_i, ω'_i, H'_i) индуцируют одно и то же действие на f -графе Γ_i .

Таким образом, для доказательства леммы достаточно доказать следующее утверждение для атомов (а потом определить диффеоморфизм $\Psi: U \rightarrow U'$ покомпонентно): если действия ρ и ρ' конечной группы G на атомах (V, ω, H) и (V', ω', H') индуцируют одно и то же действие $\widehat{\rho} = \widehat{\rho}'$ на f -графе Γ (соответствующем обоим атомам), то существует диффеоморфизм $\psi: V \rightarrow V'$ такой, что $\psi^*(H') = H$ и $\psi \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \psi$ для любого $g \in G$.

Можно считать, что на вершинах атома (т.е. особых точках) диффеоморфизм ψ уже определен. Введем на атомах метрики, инвариантные относительно рассматриваемых действий. Тогда можно определить ψ и на сепаратрисах. Сепаратрисы разрезают каждый из атомов на “шестиугольные” области. Ясно, что ψ можно продолжить на эти области так, что условие $\psi^*(H') = H$ будет выполнено.

Рассмотрим одну из шестиугольных областей D в атоме V . Поскольку отображение ψ уже задано на сепаратрисах, аналогичная шестиугольная область D' , в которую должна перейти область D при отображении ψ , однозначно определена. Если отображение $\psi: D \rightarrow D'$ уже задано, то для любой области $\rho(g)D$ отображение ψ однозначно определено из условия $\psi \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \psi$.

Так как группа G конечна, то $\rho(g)D \neq D$ для любого нетривиального элемента g группы G . Поэтому мы можем продолжить ψ на все области вида $\rho(g)D$. Действуя таким образом, мы продолжим ψ на весь атом V . Рассматриваемые шестиугольные области можно считать “стандартными”, что позволяет строить ψ на каждом шаге так, что конечное отображение $\psi: V \rightarrow V'$ будет диффеоморфизмом. Лемма доказана.

Отметим, что для бесконечных групп утверждение о сопряженности действий на атомах, индуцирующих одинаковые действия на f -графах, вообще говоря, неверно. Например, для любого атома (V, ω, H) тождественное отображение и сдвиг вдоль траекторий $\text{sgrad } H$ индуцируют тождественный автоморфизм на соответствующем f -графе, но, очевидно, не могут быть сопряжены никаким диффеоморфизмом.

Из леммы 10 сразу следует утверждение о единственности минимальной модели для седловых особенностей (см. комментарий в конце § 2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Минимальная модель U/G для седловой особенности определена однозначно с точностью до лувиллеовой эквивалентности, сопрягающей действия группы.*

Для завершения доказательства теоремы 6 осталось показать, что любой связный f_n -граф Θ соответствует некоторой седловой особенности. Это легко сделать при помощи накрытий. Действительно, минимальное накрытие $\bar{\Theta} \rightarrow \Theta$ задается свободным действием группы $G = \pi_1(\Theta, v_0)/G_{\Theta, v_0}$ на $\bar{\Theta}$. По лемме 5 существует прямое произведение $U = V_1 \times \dots \times V_n$, которому соответствует f_n -граф $\bar{\Theta}$. При этом атомы V_i можно выбрать так, что на них определено действие группы G , соответствующее действию группы G на $\bar{\Theta}$. Тогда f_n -граф Θ соответствует особенности $W = U/G$.

Теорема 6 полностью доказана.

3.4. Алгоритм перечисления f_n -графов. Как и в случае одной степени свободы, мы можем описывать f_n -графы с помощью перестановок. Из определения 15 следует, что каждый f_n -граф Θ однозначно задается набором перестановок $\tau_1, \mu_1, \dots, \tau_n, \mu_n$ на множестве его вершин, где $\tau_1, \dots, \tau_n$ являются базисными и выполнены условия коммутирования (3). Для описания алгоритма перечисления f_n -графов сложности k удобнее другое (эквивалентное) описание с помощью перестановок, являющихся элементами симметрической группы S_{2nk} .

Если на множестве вершин фиксирована нумерация, то любой набор перестановок $\tau_1, \mu_1, \dots, \tau_n, \mu_n \in S_{2nk}$, где $\tau_1, \dots, \tau_n$ – базисные и выполнены условия (3), задает некоторый f_n -граф сложности k . Перенумерация вершин означает сопряжение перестановок τ_i, μ_i элементом группы S_{2nk} . Кроме того, мы не предполагаем, что нумерация семейств в f_n -графе фиксирована (см. определение 16). Получаем следующее простое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Два f_n -графа Θ и Θ' , заданные наборами перестановок $\tau_1, \mu_1, \dots, \tau_n, \mu_n$ и $\tau'_1, \mu'_1, \dots, \tau'_n, \mu'_n$ соответственно, изоморфны тогда и только тогда, когда существуют $\sigma \in S_n$ и $g \in S_{2^nk}$, для которых при всех $i = 1, \dots, n$

$$\tau'_i = g\tau_{\sigma(i)}g^{-1}, \quad \mu'_i = g\mu_{\sigma(i)}g^{-1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Чтобы составить список попарно неизоморфных f_n -графов сложности k , достаточно выписать все наборы $\tau_1, \mu_1, \dots, \tau_n, \mu_n \in S_{2^nk}$, для которых $\tau_1, \dots, \tau_n$ – базисные, а $\mu_1, \dots, \mu_n$ удовлетворяют условиям коммутирования (3), и затем убрать “лишние” наборы, учитывая предложение 6. Отметим, что алгоритм, основанный на непосредственном применении предложения 6, требует очень большого количества операций. Действительно, для проверки изоморфности двух f_n -графов Θ и Θ' нужно сравнить соответствующие перестановки для всех $\sigma \in S_n$ и $g \in S_{2^nk}$, т.е. рассмотреть $n!(2^nk)!$ вариантов. Ниже описан один из способов сократить этот перебор до $n!2^nk!$ вариантов (например, при $n = 3$ и $k = 2$ это означает уменьшение более чем в 10^{11} раз).

Поскольку все базисные наборы перестановок в S_{2^nk} сопряжены, можно рассматривать только те нумерации вершин f_n -графа, для которых базисные перестановки $\tau_1, \dots, \tau_n$ имеют некоторый стандартный вид $\tau_1^*, \dots, \tau_n^* \in S_{2^nk}$. После того как набор базисных перестановок τ_i^* фиксирован, любой набор перестановок $\mu_1, \dots, \mu_n \in S_{2^nk}$, удовлетворяющий условиям (3), задает некоторый f_n -граф $\Theta(\mu_1, \dots, \mu_n)$ (и любой f_n -граф сложности k задается таким образом).

Обозначим через T подгруппу в S_{2^nk} , порожденную перестановками $\tau_1^*, \dots, \tau_n^*$, а через Z_T – ее централизатор в S_{2^nk} , т.е. множество перестановок из S_{2^nk} , коммутирующих со всеми перестановками $\tau_1^*, \dots, \tau_n^*$. Отметим, что группа T изоморфна $\mathbb{Z}_2^n$, а группа Z_T изоморфна полупрямому произведению $(\mathbb{Z}_2^n)^k \rtimes S_k$.

Поскольку базисный набор фиксирован, мы должны рассматривать только те перенумерации вершин, которые сохраняют набор перестановок $\tau_1^*, \dots, \tau_n^*$ (но могут менять местами перестановки τ_i^*). Любая такая перенумерация задается перестановкой $g \in S_{2^nk}$, для которой существует такая перестановка $\sigma \in S_n$, что

$$g\tau_i^*g^{-1} = \tau_{\sigma(i)}^*, \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

(см. предложение 6). Очевидно, множество всех перестановок, удовлетворяющих условию (6), образует подгруппу в S_{2^nk} . Обозначим ее через H_T .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Определенные выше подгруппы $T \subset Z_T \subset H_T$ группы S_{2^nk} имеют простой геометрический смысл. Как уже отмечалось (см. замечание 2), неориентированные ребра f_n -графа сложности k образуют k экземпляров n -мерного остова n -мерного куба, где все ребра одного семейства параллельны. Группа T действует на каждом кубе как группа симметрий относительно координатных подпространств (любой размерности). При этом каждый элемент группы T действует одинаково на всех k экземплярах этих кубов (и переводит каждый куб в себя). Элементы группы Z_T действуют на множестве этих кубов аналогичным образом, т.е. сохраняют “направление” ребер, но они могут действовать на разных кубах по-разному и могут переставлять кубы. Наконец, элементы группы H_T могут переставлять и “вращать” эти k кубов, но переводят параллельные ребра в параллельные.

Соответствие $g \mapsto \sigma$, определяемое соотношением (6), задает эпиморфизм $\lambda: H_T \rightarrow S_n$, ядром которого является подгруппа Z_T . Иначе говоря, λ есть действие группы H_T на множестве перестановок $\tau_1^*, \dots, \tau_n^*$, а ядром неэффективности этого действия является подгруппа Z_T . Для каждой перестановки $\sigma \in S_n$ выберем элемент h_σ в группе H_T , для которого $\lambda(h_\sigma) = \sigma$, т.е.

$$h_\sigma \tau_i^* h_\sigma^{-1} = \tau_{\sigma(i)}^*, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Ясно, что этот выбор неоднозначен. Один из явных способов зафиксировать элементы h_σ приведен в замечании 8.

Следующее утверждение является обобщением предложения 2 на случай n степеней свободы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Два f_n -графа $\Theta(\mu_1, \dots, \mu_n)$ и $\Theta(\mu'_1, \dots, \mu'_n)$ изоморфны тогда и только тогда, когда существуют $\sigma \in S_n$ и $h \in Z_T \subset S_{2^nk}$, для которых $\mu'_i = h h_\sigma^{-1} \mu_{\sigma(i)} h_\sigma h^{-1}$ при всех $i = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu'_i = (h h_\sigma^{-1}) \mu_{\sigma(i)} (h h_\sigma^{-1})^{-1}$, где $h \in Z_T$, а h_σ удовлетворяет соотношениям (7). Применяя то же самое сопряжение к перестановкам τ_i^* , получаем

$$(h h_\sigma^{-1}) \tau_{\sigma(i)}^* (h h_\sigma^{-1})^{-1} = h (h_\sigma^{-1} \tau_{\sigma(i)}^* h_\sigma) h^{-1} = h \tau_i^* h^{-1} = \tau_i^*.$$

В силу предложения 6 это означает, что f_n -графы $\Theta(\mu_1, \dots, \mu_n)$ и $\Theta(\mu'_1, \dots, \mu'_n)$ изоморфны.

Наоборот, пусть f_n -графы $\Theta(\mu_1, \dots, \mu_n)$ и $\Theta(\mu'_1, \dots, \mu'_n)$ изоморфны. Тогда из предложения 6 следует, что для некоторого $g \in S_{2^nk}$ выполнено

$$\tau_i^* = g \tau_{\sigma(i)}^* g^{-1}, \quad \mu'_i = g \mu_{\sigma(i)} g^{-1}.$$

Подставляя выражение для $\tau_{\sigma(i)}^*$ из (7) в первое из этих равенств, получаем, что $g h_\sigma \in Z_T$, т.е. g имеет вид $h h_\sigma^{-1}$, где $h \in Z_T$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Перестановки $h_\sigma \in H_T$ можно выбрать так, что соответствие $\sigma \mapsto h_\sigma$ задает гомоморфизм $S_n \rightarrow H_T$, т.е. группа H_T изоморфна полупрямому произведению $Z_T \ltimes S_n$. Это можно сделать, например, следующим образом. Каждый элемент N множества $\{1, \dots, 2^nk\}$ (множество номеров вершин f_n -графа) будем записывать в виде пары $(m; \bar{\alpha})$, где $m = \lfloor (N-1)/2^n \rfloor + 1$, а $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – набор из нулей и единиц, являющийся двоичной записью числа $N - 2^n \lfloor (N-1)/2^n \rfloor$. Определим перестановки τ_i^* и h_σ следующими формулами:

$$\begin{aligned} \tau_i^* : (m; \alpha_1, \dots, \alpha_n) &\mapsto (m; \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + 1 \pmod{2}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n), \\ h_\sigma : (m; \alpha_1, \dots, \alpha_n) &\mapsto (m; \alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(n)}). \end{aligned} \quad (8)$$

Легко проверить, что тогда соотношение (7) выполнено, причем соответствие $\sigma \mapsto h_\sigma$ задает гомоморфизм, являющийся (правым) обратным к λ .

Согласно теореме 6, для того чтобы описать седловые особенности в терминах перестановок, нужно выписать условия эквивалентности f_n -графов $\Theta(\mu_1, \dots, \mu_n)$ и $\Theta(\mu'_1, \dots, \mu'_n)$, т.е. добавить к сопряжениям, указанным в предложении 7, операции, соответствующие переворачиваниям и изменениям ориентации f -графов, образованных семействами ребер этих f_n -графов (см. определение 18). В результате получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. Два f_n -графа $\Theta(\mu_1, \dots, \mu_n)$ и $\Theta(\mu'_1, \dots, \mu'_n)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие $\sigma \in S_n$ и $h \in Z_T$, что для каждого $i = 1, \dots, n$ либо $\mu'_i = h h_{\sigma(i)}^{-1} \mu_{\sigma(i)}^{\pm 1} h_{\sigma(i)} h^{-1}$, либо $\mu'_i = h h_{\sigma(i)}^{-1} \tau_{\sigma(i)}^* \mu_{\sigma(i)}^{\pm 1} h_{\sigma(i)} h^{-1}$.

Итак, действуя по схеме, изложенной в этом разделе, список седловых особенностей сложности k для систем с n степенями свободы можно получить следующим образом:

- 1) фиксируем перестановки τ_i^* и h_{σ} из S_{2^nk} (например, определяем их формулами (8));
- 2) строим список наборов $(\mu_1, \dots, \mu_n)$, где μ_i удовлетворяют условиям коммутирования (3);
- 3) применяя теорему 7, устраним из полученного списка лишние наборы, оставляя лишь попарно неэквивалентные.

Приведем результат вычислений по этому алгоритму в случае двух степеней свободы для особенностей малой сложности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Для интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы количество попарно неэквивалентных седловых особенностей сложности $k = 1, 2, 3$ равно соответственно 4, 39, 147.

Отметим, что программа, реализующая указанный алгоритм, выдает не только количество, но и список особенностей. Для сложности один и два эти списки, конечно, совпадают с известными ранее (см. пп. 2.2, 2.3).

Рис. 5. Список f_2 -графов, соответствующих особенностям сложности один

Например, для особенностей сложности один получаем список из четырех f_n -графов ($n = 2$), изображенных на рис. 5. В частности, для каждой из этих особенностей видны сомножители ее минимальной модели (см. (2), а также предложение 4 и лемму 9).

Автор благодарен А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе.

Список литературы

- [1] Nguyen Tien Zung, “Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I: Arnold–Liouville with singularities”, *Compositio Math.*, **101**:2 (1996), 179–215.
- [2] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, РХД, Ижевск, 1999; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall, CRC, Boca Raton, FL, 2004.

- [3] A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, “Singularities of integrable Hamiltonian systems”, *Topological methods in the theory of integrable systems*, Cambridge Sci. Publ., Cambridge, 2006, 1–67.
- [4] В. С. Матвеев, А. А. Ошемков, “Алгоритмическая классификация инвариантных окрестностей точек типа седло-седло”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1999, № 2, 62–65; англ. пер.: V. S. Matveev, A. A. Oshemkov, “Algorithmic classification of invariant neighborhoods for points of saddle-saddle type”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **54**:2 (1999), 44–47.
- [5] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:3 (1990), 546–575; англ. пер.: А. Т. Fomenko, Kh. Tsishang, “A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:3 (1991), 567–596.
- [6] L. H. Eliasson, “Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals – elliptic case”, *Comment. Math. Helv.*, **65**:1 (1990), 4–35.
- [7] А. Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, *Докл. АН СССР*, **287**:5 (1986), 1071–1075; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “Morse theory of integrable Hamiltonian systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **33**:2 (1986), 502–506.
- [8] А. Т. Фоменко, “Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:6 (1986), 1276–1307; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability”, *Math. USSR-Izv.*, **29**:3 (1987), 629–658.
- [9] А. В. Браилов, А. Т. Фоменко, “Топология интегральных подмногообразий вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, **134**(176):3(11) (1987), 375–385; англ. пер.: A. V. Brailov, A. T. Fomenko, “The topology of integral submanifolds of completely integrable Hamiltonian systems”, *Math. USSR-Sb.*, **62**:2 (1989), 373–383.
- [10] А. Т. Фоменко, “Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:4 (1988), 38–51; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “Topological invariants of Liouville integrable Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.*, **22**:4 (1988), 286–296.
- [11] А. Т. Фоменко, “Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:4 (1991), 747–779; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “A bordism theory for integrable nondegenerate Hamiltonian systems with two degrees of freedom. A new topological invariant of higher-dimensional integrable systems”, *Math. USSR-Izv.*, **39**:1 (1992), 731–759.
- [12] Л. М. Лерман, Я. Л. Уманский, “Классификация четырехмерных интегрируемых гамильтоновых систем и пуассоновских действий $\mathbb{R}^2$ в расширенных окрестностях простых особых точек. I”, *Матем. сб.*, **183**:12 (1992), 141–176; англ. пер.: L. M. Lerman, Ya. L. Umanskii, “Classification of four-dimensional integrable Hamiltonian systems and Poisson actions of $\mathbb{R}^2$ in extended neighborhoods of simple singular points. I”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **77**:2 (1994), 511–542.
- [13] Л. М. Лерман, Я. Л. Уманский, “Классификация четырехмерных интегрируемых гамильтоновых систем и пуассоновских действий $\mathbb{R}^2$ в расширенных окрестностях простых особых точек. II”, *Матем. сб.*, **184**:4 (1993), 105–138; англ. пер.: L. M. Lerman, Ya. L. Umanskii, “Classification of four-dimensional integrable Hamiltonian systems and Poisson actions of $\mathbb{R}^2$ in extended neighborhoods of simple singular points. II”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **78**:2 (1994), 479–506.
- [14] Л. М. Лерман, Я. Л. Уманский, “Классификация четырехмерных интегрируемых гамильтоновых систем и пуассоновских действий $\mathbb{R}^2$ в расширенных окрестностях простых особых точек. III. Реализация”, *Матем. сб.*, **186**:10 (1995), 89–102; англ.

- пер.: L. M. Lerman, Ya. L. Umanskii, "Classification of four-dimensional integrable Hamiltonian systems and Poisson actions of $\mathbb{R}^2$ in extended neighbourhoods of simple singular points. III. Realization", *Sb. Math.*, **186**:10 (1995), 1477–1491.
- [15] A. V. Bolsinov, "Methods of calculation of the Fomenko–Zieschang invariant", *Topological classification of integrable systems*, Adv. Soviet Math., **6**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 147–183.
- [16] В. С. Матвеев, "Вычисление значений инварианта Фоменко для точки типа седло-седло интегрируемой гамильтоновой системы", *Труды сем. по вект. и тенз. анализу*, **25**:1 (1993), 75–104.
- [17] A. V. Bolsinov, V. S. Matveev, "Integrable Hamiltonian systems: Topological structure of saturated neighborhoods of nondegenerate singular points", *Tensor and vector analysis. Geometry, mechanics and physics*, Gordon and Breach, Reading, 1998, 31–56.
- [18] В. В. Корнеев, "Представление четырехмерной особенности типа седло-седло в виде почти прямого произведения двумерных атомов. Случай сложности два", *Топологические методы в теории гамильтоновых систем*, Факториал, М., 1998, 127–135.
- [19] В. В. Калашников, "Простые гиперболические особенности пуассоновых действий", *Топологические методы в теории гамильтоновых систем*, Факториал, М., 1998, 115–126.
- [20] А. А. Ошемков, "Седловые особенности сложности 1 интегрируемых гамильтоновых систем", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2010 (в печати).
- [21] В. С. Матвеев, "Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа фокус-фокус и седло-седло", *Матем. сб.*, **187**:4 (1996), 29–58; англ. пер.: V. S. Matveev, "Integrable Hamiltonian system with two degrees of freedom. The topological structure of saturated neighbourhoods of points of focus-focus and saddle-saddle type", *Sb. Math.*, **187**:4 (1996), 495–524.
- [22] Nguyen Tien Zung, *Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I: Arnold–Liouville with singularities*, arXiv:math/0106013.
- [23] А. А. Ошемков, "Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей", *Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем*, Тр. МИАН, **205**, Наука, М., 1994, 131–140; англ. пер.: A. A. Oshemkov, "Morse functions on two-dimensional surfaces. Encoding of singularities", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **4** (1995), 119–127.
- [24] С.-Ц. Ху, *Теория гомотопий*, Мир, М., 1964; пер. с англ.: S.-T. Hu, *Homotopy theory*, Academic Press, New York–London, 1959.

А. А. Ошемков (A. A. Oshemkov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: oshemkov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
18.11.2009