Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. М. Афанасьев, Об усилении инвариантов виртуальных узлов с помощью четности, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 6, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7655>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 12:56:52

УДК 515.162+519.1

Д. М. Афанасьев

Об усилении инвариантов виртуальных узлов с помощью четности

В работе построены два новых инварианта виртуальных зацеплений: четный полином Александера и четный квандл. Общая идея построения заключается в том, чтобы разделить классические перекрестки на два типа – четные и нечетные, и в перекрестках разных типов задать разные операции. С другой стороны, предложенное построение – это реализация одной идеи на двух близких языках: языке квандлов и языке полиномов Александера.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: узел, виртуальный узел, четность, полином Александера, минимальность, квандл.

§ 1. Введение

Понятие четности в теории узлов было введено В.О. Мантуровым в связи с доказательством теоремы Виро–Мантурова (см. [1], [2]). Четность – это функция на классических перекрестках всех виртуальных диаграмм, принимающая значение “чет” или “нечет” и удовлетворяющая ряду условий, которые возникают из движений Рейдемейстера. В случае виртуальных узлов основным примером четности является четность числа хорд, которые зацеплены с данной хордой на гауссовой диаграмме узла. Недавно (см. [2]) с помощью понятия четности было построено усиление скобки Кауфмана.

В настоящей работе с помощью понятия четности построены еще два новых инварианта виртуальных узлов. Первый из них строится по известному обобщенному полиному Александера для виртуальных узлов (так называемый *кси-полином*) путем использования дополнительной переменной q в нечетных классических перекрестках.

Второй инвариант получен из виртуального квандла добавлением дополнительной операции, соответствующей нечетным классическим перекресткам. Мы назвали его *четным квандлом (группоидом)*. Аксиомы четного квандла являются частью аксиом *длинного квандла (группоида)* (см. [3]).

Автор благодарен В.О. Мантурову за идею инвариантов, построенных в настоящей статье, и многие полезные замечания при подготовке настоящего текста.

§ 2. Основные понятия

Для конструкции четного полинома Александера и четного квандла потребуются следующие понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Виртуальной диаграммой* называется 4-валентный граф на плоскости, определенный с точностью до изотопии плоскости, в каждом

перекрестке которого либо задана структура классического перекрестка (т.е. указано, какая пара противоположных полуребер образует переход; другие два полуребра, инцидентные перекрестку, образуют проход), либо задана структура виртуального перекрестка (виртуальный перекресток на диаграмме помечается кружочком).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество *обобщенных движений Рейдемейстера* состоит из семи движений $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3, \Omega'$, где $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ – классические движения Рейдемейстера, $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3$ – виртуальные версии этих движений, в которых все классические перекрестки заменены виртуальными, Ω' – такая версия движения Ω_3 , в которой два виртуальных перекрестка лежат на нити, пронесимой через классический перекресток (см. рис.1). Область на плоскости, в которой происходит преобразование Рейдемейстера виртуальной диаграммы, назовем *областью преобразования Рейдемейстера*.

Рис. 1. Обобщенные преобразования Рейдемейстера

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Виртуальным зацеплением* называется класс эквивалентности виртуальных диаграмм, которые получаются друг из друга композициями обобщенных преобразований Рейдемейстера.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Каждое преобразование Рейдемейстера порождает естественную биекцию множеств классических перекрестков, которые лежат вне области преобразования. Для преобразований $\Omega_3, \Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3, \Omega'$ определена также и естественная биекция множеств классических перекрестков, которые лежат внутри области преобразования. Действительно, для $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3, \Omega'$ это очевидно (для первых трех преобразований это – пустое множество). Для Ω_3 в области преобразования одна нить пронесится над классическим перекрестком, а две другие остаются неподвижными, поэтому естественным образом определено соответствие между нитями, а значит, и соответствие между их пересечениями, т.е. классическими перекрестками, лежащими в области преобразования Ω_3 (см. рис. 2).

Обозначим через $V = V(D)$ множество всех классических перекрестков виртуальной диаграммы D . Будем считать, что $V(D_1) \cap V(D_2) = \emptyset$ для различных (в смысле определения 1) виртуальных диаграмм $D_1 \neq D_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $p: \bigsqcup_D V(D) \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, где $\bigsqcup_D V(D)$ – множество всех классических перекрестков всех виртуальных диаграмм, называется *четностью*, если она обладает следующими двумя свойствами:

 Рис. 2. Соответствие перекрестков при движении Ω_3

1) для любой виртуальной диаграммы D и любой области $W \subset \mathbb{R}^2$ некоторого классического преобразования Рейдемейстера диаграммы D сумма значений функции p по всем классическим перекресткам, лежащим в W , равна нулю;

2) биекции множеств классических перекрестков, порожденные всеми преобразованиями Рейдемейстера, сохраняют функцию p .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В связи с определением четности заметим следующее. Виртуальной диаграммой назван класс вложенных в плоскость 4-валентных графов со структурой классических и виртуальных перекрестков в вершинах, которые переводятся один в другой с помощью изотопии плоскости (см. определение 1). Следовательно, перекрестки виртуальной диаграммы не индивидуализированы. Поэтому, строго говоря, для виртуальной диаграммы D не определено корректно множество $V(D)$ ее классических перекрестков. Значит, для того чтобы дать корректное определение четности $p: \bigsqcup_D V(D) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, нужно либо рассматривать виртуальные диаграммы с индивидуализированными (например, занумерованными) классическими перекрестками, либо дополнительно требовать в определении 4 симметричность функции p , т.е. чтобы функция p сохранялась при биекциях множества классических перекрестков на себя, которые порождаются изотопиями плоскости, переводящими в себя 4-валентный граф со структурой классических и виртуальных перекрестков.

Приведем следующие два примера четностей (см. [2]).

ПРИМЕР 1. Пусть D – диаграмма виртуального узла, $H = H(D)$ – соответствующая ей хордовая диаграмма. Четность $p = p(v)$ классического перекрестка v диаграммы D полагаем равной четности числа хорд $H(D)$, зацепленных с хордой, соответствующей перекрестку v . Непосредственно проверяется, что p – четность для виртуальных узлов.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для классических диаграмм функция четности примера 1 равна нулю на всех классических перекрестках. По виртуальной диаграмме строится двумерная поверхность, называемая *атомом* (см. [3], [4], а также первоисточники понятия атом: [13]–[15]). Можно доказать (см. [2]), что диаграмма D имеет ориентированный атом тогда и только тогда, когда функция p равна нулю на всех классических перекрестках D .

ПРИМЕР 2. Пусть D – диаграмма 2-компонентного виртуального зацепления. Классический перекресток v считаем четным, если он инцидентен ровно одной компоненте зацепления, в противном случае считаем v нечетным. Легко видеть, что аксиомы четности выполняются.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Дугой* виртуальной диаграммы назовем связную компоненту множества, которое получено из диаграммы путем удаления всех виртуальных перекрестков (в классических перекрестках ребра разделены между собой так, как это принято изображать).

Другими словами, *дугой* виртуальной диаграммы можно назвать максимальный по включению класс ребер 4-валентного графа диаграммы (см. определение 1) такой, что для любых двух ребер r и r' из этого класса найдутся последовательности ребер $r = r_0, \dots, r_l = r'$ и классических перекрестков $v_1, \dots, v_l$ такие, что пара ребер r_{i-1} и r_i образует переход в перекрестке v_i , $i = 1, \dots, l$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Длинной дугой* виртуальной диаграммы назовем максимальный по включению класс дуг такой, что для любых двух дуг a и a' из этого класса найдутся последовательности дуг $a = a_0, \dots, a_l = a'$ и виртуальных перекрестков $c_1, \dots, c_l$ такие, что a_{i-1} и a_i инцидентны c_i с противоположных сторон, $i = 1, \dots, l$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Длинную дугу виртуальной диаграммы назовем *циклической*, если оба конца любой принадлежащей ей дуги являются виртуальными перекрестками.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Назовем виртуальную диаграмму без циклических длинных дуг *правильной*.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. На ориентированной правильной виртуальной диаграмме имеется естественное взаимно однозначное соответствие между классическими перекрестками и длинными дугами: классическому перекрестку ставится в соответствие выходящая из него длинная дуга.

В дальнейшем будем предполагать, что все диаграммы ориентированные и правильные. Последнее не ограничивает общности, так как любое виртуальное зацепление имеет правильную диаграмму, а любые две эквивалентные правильные диаграммы эквивалентны посредством цепочки обобщенных движений Рейдемейстера, в которой все промежуточные диаграммы правильные. Это следует из того, что к кусочку циклической длинной дуги, если она есть, можно применить первое классическое движение Рейдемейстера Ω_1 , которое разбивает ее на две нециклические, причем это можно согласовать с любой цепочкой движений Рейдемейстера.

§ 3. Четный полином Александра

В случае длинных виртуальных узлов имеется естественный способ разбиения классических перекрестков на два типа – ранние проходы и ранние переходы (см. [3]). Поэтому, как впервые заметил Мантуров (см. [8]), для построения инвариантов длинных виртуальных узлов можно использовать две операции в классических перекрестках разных типов. В случае (компактных) виртуальных узлов на классических перекрестках нельзя ввести понятий “ранний проход” и “ранний переход”, зато можно вместо этого использовать четность, которая разделяет классические перекрестки на четные и нечетные.

Итак, по аналогии с обобщенными полиномами Александра для виртуальных зацеплений (см. [9], [10], [3]) и для длинных виртуальных узлов (см. [11]) построим инвариантный полином для виртуальных зацеплений, предполагая, что задана некоторая четность p на виртуальных зацеплениях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть v и a – классический перекресток и дуга виртуальной диаграммы D соответственно. Определим их коэффициент инцидентности так:

$$[v : a] = \varepsilon_1 1 + \varepsilon_2 (z^{\text{sgn } v} - 1) + \varepsilon_3 (-z^{\text{sgn } v}) \in T,$$

$$T = \mathbb{Z}[t, t^{-1}, q, q^{-1}] / ((q-1)(t-q)), \quad \varepsilon_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, 3;$$

$z = t$, если $p(v) = 0$, и $z = q$, если $p(v) = 1$, $\text{sgn } v = \pm 1$ – знак классического перекрестка v (напомним, что знак классического перекрестка равен 1 для $\nearrow \searrow$ и -1 для $\nwarrow \swarrow$). Мы полагаем, что $\varepsilon_1 = 1$ тогда и только тогда, когда дуга a выходит из v , а $\varepsilon_2 = 1$ тогда и только тогда, когда a идет над v , и $\varepsilon_3 = 1$ тогда и только тогда, когда a входит в v .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. *Степенью дуги* виртуальной диаграммы D назовем функцию $\deg : \{\text{дуги } D\} \rightarrow \mathbb{Z}$, заданную по следующим правилам:

1) если дуга a является первой на длинной дуге по ходу движения согласно ориентации, то полагаем $\deg a = 0$;

2) если дуги a и b – соседние на длинной дуге, a предшествует b , то $\deg b = \deg a + 1$, если дуга a расположена слева от трансверсальной дуги, b – справа, и $\deg b = \deg a - 1$ в противном случае (см. рис. 3). В первом случае пару соседних дуг a и b (или, что менее точно, общий для a и b виртуальный перекресток) назовем *повышающей* (*повышающим*), во втором случае – *понижающей* (*понижающим*).

Рис. 3. Определение степени дуги

Пусть D – ориентированная правильная виртуальная диаграмма, $v_1, \dots, v_n$ – классические перекрестки диаграммы D , занумерованные числами $1, \dots, n$. Обозначим через γ^i длинную дугу, выходящую из v_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. *Четный полином Александера* $\zeta_*(D)$ равен определителю $\det A(D)$ матрицы $A(D)$, которая записывается в следующем виде:

$$A_{ij} = \sum_{a \subset \gamma^j} [v_i : a] s^{\deg a} \in T[s, s^{-1}], \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где суммирование ведется по всем дугам a , которые лежат на длинной дуге γ^j .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Здесь мы получим известный *обобщенный полином Александера* (см. [9], [10], [3]), если в качестве коэффициента инцидентности $[v : a]$ возьмем величину $\varepsilon_1 1 + \varepsilon_2 (t^{\text{sgn } v} - 1) + \varepsilon_3 (-t^{\text{sgn } v})$ (см. обозначения в определении 9).

Легко видеть, что $\zeta_*(D) = \det A(D)$ не зависит от нумерации классических перекрестков диаграммы D .

ТЕОРЕМА 1. Если виртуальные диаграммы D и D' эквивалентны, то

$$\zeta_*(D') = t^r \zeta_*(D)$$

для некоторого $r \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полином $\zeta_*(D)$ инвариантен относительно чисто виртуальных движений Рейдемейстера $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3$, так как они не изменяют элементов A_{ij} матрицы $A = A(D)$.

Согласно аксиомам четности классические перекрестки, участвующие во втором движении Рейдемейстера, имеют одинаковую четность. Поэтому доказательство инвариантности ζ_* -полинома относительно Ω_2 , а также относительно Ω_1 и Ω' в точности такое же, как доказательство этого для ζ -полинома (см. [3; теорема 18.9]).

Осталось рассмотреть случай движения Ω_3 . Пусть $D' = \Omega_3(D)$. Требуется доказать, что $\det A(D') = \det A(D)$ в кольце T . Заметим, что достаточно рассмотреть такой вариант движения Ω_3 , когда нити α и β сонаправлены (см. рис. 4, где через α обозначена самая нижняя из трех нитей, участвующих в Ω_3), при этом знак δ классического перекрестка $\alpha \cap \beta$ может быть равен как 1, так и -1 . Случай противоположно направленных нитей α и β сводится к случаю сонаправленных нитей с помощью второго классического движения Рейдемейстера Ω_2 (см. рис. 5).

Рис. 4. Обозначения дуг при движении Ω_3

Рис. 5. Сведение к одному из двух случаев движения Ω_3

Направление нити γ задано числом $\varepsilon = \text{sgn}(\alpha \cap \gamma) = \text{sgn}(\beta \cup \gamma)$.

На рис. 4 через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \gamma$ обозначены длинные дуги диаграмм D и D' (то, что дуги разных диаграмм обозначены одной буквой, не приводит к двусмысленности). Может оказаться, что некоторые из длинных дуг (глобально) совпадают, например, $\alpha_3 = \beta_1, \beta_2 = \gamma$ или $\alpha_3 = \beta_1 = \gamma$.

Рассмотрим только случай, когда длинные дуги $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \gamma$ попарно различны (случаи совпадающих длинных дуг легко к нему сводятся, как будет видно из дальнейших рассуждений). Для определенности переставим столбцы матриц $A = A(D)$ и $A' = A(D')$ так, чтобы столбцы, соответствующие этим шести длинным дугам, шли в порядке $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \gamma$. Получим соответственно матрицы $\tilde{A}$ и $\tilde{A}'$:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -t_{\alpha\beta}^\delta & 1 & 0 & t_{\alpha\beta}^\delta - 1 & 0 \\ -t_{\alpha\gamma}^\varepsilon s^\mu & 1 & 0 & 0 & 0 & (t_{\alpha\gamma}^\varepsilon - 1)s^\tau \\ 0 & 0 & 0 & -t_{\beta\gamma}^\varepsilon s^\nu & 1 & (t_{\beta\gamma}^\varepsilon - 1)s^\tau \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}' = \begin{bmatrix} -t_{\alpha\beta}^\delta s^\mu & 1 & 0 & (t_{\alpha\beta}^\delta - 1)s^\nu & 0 & 0 \\ 0 & -t_{\alpha\gamma}^\varepsilon & 1 & 0 & 0 & (t_{\alpha\gamma}^\varepsilon - 1)s^\tau \\ 0 & 0 & 0 & -t_{\beta\gamma}^\varepsilon s^\nu & 1 & (t_{\beta\gamma}^\varepsilon - 1)s^\tau \end{bmatrix},$$

где через $t_{\alpha\beta}, t_{\alpha\gamma}$ и $t_{\beta\gamma}$ обозначены переменные t или q кольца T в зависимости от четности или нечетности классических перекрестков $\alpha \cap \beta, \alpha \cap \gamma$ и $\beta \cup \gamma$. Здесь в квадратных скобках выписаны те элементы матриц $\tilde{A}$ и $\tilde{A}'$, которые стоят на пересечении трех строк, соответствующих классическим перекресткам $\alpha \cap \beta, \alpha \cap \gamma$ и $\beta \cup \gamma$, и шести столбцов, соответствующих длинным дугам $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \gamma$; при этом все остальные соответственные элементы матриц $\tilde{A}$ и $\tilde{A}'$ совпадают, т.е. $\tilde{A}_{ij} = \tilde{A}'_{ij}$.

Заметим, что $\det A = \pm \det \tilde{A}$, $\det A' = \mp \det \tilde{A}'$, так как порядки столбцов в матрицах A и A' отличаются нечетной перестановкой в силу того, что на диаграмме D длинные дуги α_2 и α_3 выходят соответственно из $\alpha \cap \gamma$ и $\alpha \cap \beta$, а на D' эти длинные дуги выходят соответственно из $\alpha \cap \beta$ и $\alpha \cap \gamma$, причем остальные длинные дуги, участвующие в преобразовании Рейдемейстера (т.е. $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma$), выходят из соответствующих друг другу классических перекрестков диаграмм D и D' (см. замечание 1).

Таким образом, достаточно доказать, что $\det \tilde{A} = -\det \tilde{A}'$. Используем для этого теорему Лапласа об определителях. Достаточно доказать, что соответствующие миноры матриц $\tilde{A}$ и $\tilde{A}'$ размера 3×3 , расположенные в строках, соответствующих классическим перекресткам $\alpha \cap \beta, \alpha \cap \gamma$ и $\beta \cup \gamma$, отличаются умножением на -1 , так как алгебраические дополнения к минорам равны в силу того, что $\tilde{A}$ и $\tilde{A}'$ имеют одинаковые элементы вне этих трех строк.

Вне этих трех строк элементы столбца α_2 равны нулю, так как длинная дуга α_2 расположена в области преобразования Рейдемейстера целиком. Поэтому необходимо вычислить только $C_5^2 = 10$ пар миноров. Обозначим миноры матриц $\tilde{A}$ и $\tilde{A}'$ через M_{ijk} и M'_{ijk} , где $i, j, k = 1, \dots, 6$ – номера столбцов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \gamma$ соответственно. Имеем

$$\begin{aligned} M_{123} &= 0 = M'_{123}, & M_{124} &= t_{\alpha\beta}^\delta t_{\alpha\gamma}^\varepsilon t_{\beta\gamma}^\varepsilon s^{\mu+\nu} = -M'_{124}, \\ M_{125} &= -t_{\alpha\beta}^\delta t_{\alpha\gamma}^\varepsilon s^\mu = -M'_{125}, & M_{126} &= -t_{\alpha\beta}^\delta t_{\alpha\gamma}^\varepsilon (t_{\beta\gamma}^\varepsilon - 1)s^{\mu+\tau} = -M'_{126}, \\ M_{234} &= t_{\beta\gamma}^\varepsilon s^\nu = -M'_{234}, \\ M_{235} &= -1 = -M'_{235}, & M_{236} &= -(t_{\beta\gamma}^\varepsilon - 1)s^\tau = -M'_{236}; \end{aligned}$$

в случае миноров $M_{245} = -(t_{\alpha\beta}^\delta - 1)t_{\beta\gamma}^\varepsilon s^\nu$ и $M'_{245} = (t_{\alpha\beta}^\delta - 1)t_{\alpha\gamma}^\varepsilon s^\nu$ имеем

$$M'_{245} + M_{245} = (t_{\alpha\beta}^\delta - 1)(t_{\alpha\gamma}^\varepsilon - t_{\beta\gamma}^\varepsilon)s^\nu.$$

Согласно первому свойству четности (см. определение 4) при третьем движении Рейдемейстера Ω_3 требуется, чтобы число нечетных перекрестков было четным. Поэтому среди переменных $t_{\alpha\beta}$, $t_{\alpha\gamma}$, $t_{\beta\gamma}$ имеется четное число букв q . Следовательно, если переменные $t_{\alpha\gamma}$ и $t_{\beta\gamma}$ различны, то $t_{\alpha\beta} = q$. Поэтому из соотношения $(q-1)(t-q) = 0$ следует равенство

$$(t_{\alpha\beta}^\delta - 1)(t_{\alpha\gamma}^\varepsilon - t_{\beta\gamma}^\varepsilon) = 0, \quad (1)$$

так как переменные $t_{\alpha\gamma}$ и $t_{\beta\gamma}$ имеют одну и ту же степень $\varepsilon = \pm 1$.

Таким образом, $M'_{245} + M_{245} = 0$.

Далее имеем

$$M_{246} = -t_{\alpha\beta}^\delta(t_{\alpha\gamma}^\varepsilon - 1)t_{\beta\gamma}^\varepsilon s^{\nu+\tau}, \quad M'_{246} = \begin{vmatrix} 1 & (t_{\alpha\beta}^\delta - 1)s^\nu & 0 \\ -t_{\alpha\gamma}^\varepsilon & 0 & (t_{\alpha\gamma}^\varepsilon - 1)s^\tau \\ 0 & -t_{\beta\gamma}^\varepsilon s^\nu & (t_{\beta\gamma}^\varepsilon - 1)s^\tau \end{vmatrix},$$

поэтому

$$\begin{aligned} M'_{246} + M_{246} &= s^{\nu+\tau}((t_{\alpha\gamma}^\varepsilon - 1)t_{\beta\gamma}^\varepsilon + t_{\alpha\gamma}^\varepsilon(t_{\alpha\beta}^\delta - 1)(t_{\beta\gamma}^\varepsilon - 1) - t_{\alpha\beta}^\delta(t_{\alpha\gamma}^\varepsilon - 1)t_{\beta\gamma}^\varepsilon) \\ &= s^{\nu+\tau}((t_{\alpha\beta}^\delta - 1)t_{\alpha\gamma}^\varepsilon(t_{\beta\gamma}^\varepsilon - 1) - (t_{\alpha\beta}^\delta - 1)(t_{\alpha\gamma}^\varepsilon - 1)t_{\beta\gamma}^\varepsilon) \\ &= s^{\nu+\tau}(t_{\alpha\beta}^\delta - 1)(t_{\beta\gamma}^\varepsilon - t_{\alpha\gamma}^\varepsilon). \end{aligned}$$

Следовательно, $M'_{246} + M_{246} = 0$ в силу равенства (1).

Наконец,

$$M_{256} = \begin{vmatrix} -t_{\alpha\beta}^\delta & t_{\alpha\beta}^\delta - 1 & 0 \\ 1 & 0 & (t_{\alpha\gamma}^\varepsilon - 1)s^\tau \\ 0 & 1 & (t_{\beta\gamma}^\varepsilon - 1)s^\tau \end{vmatrix}, \quad M'_{256} = -(t_{\alpha\gamma}^\varepsilon - 1)s^\tau,$$

поэтому

$$\begin{aligned} M'_{256} + M_{256} &= s^\tau(t_{\alpha\beta}^\delta(t_{\alpha\gamma}^\varepsilon - 1) - (t_{\alpha\beta}^\delta - 1)(t_{\beta\gamma}^\varepsilon - 1) - (t_{\alpha\gamma}^\varepsilon - 1)) \\ &= s^\tau(t_{\alpha\beta}^\delta - 1)(t_{\alpha\gamma}^\varepsilon - t_{\beta\gamma}^\varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

в силу равенства (1).

Итак, по теореме Лапласа об определителях $\det A(\Omega_3(D)) = \det A(D)$ в кольце $T = \mathbb{Z}[t, t^{-1}, q, q^{-1}]/((q-1)(t-q))$. Теорема доказана.

С помощью ζ_* -полинома можно оценивать число виртуальных перекрестков у виртуальной диаграммы. Имеет место следующая теорема, которая полностью аналогична теореме для ζ -полинома (см. замечание 5) как в отношении формулировки, так и в отношении доказательства (см. [9]–[11]).

Обозначим через $\deg_s f$ и $\text{mdeg}_s f$ старшую и младшую степени полинома Лорана $f \in T[s, s^{-1}]$ по переменной s .

ТЕОРЕМА 2. Число виртуальных перекрестков в правильной виртуальной диаграмме D не меньше максимума из чисел $\deg_s \zeta_*(D)$ и $(-\text{mdeg}_s \zeta_*(D))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из определений полинома $\zeta \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}][s, s^{-1}]$ (см. замечание 5, а также [9], [10]) и полинома $\zeta_* \in T[s, s^{-1}]$ непосредственно следует, что $\zeta_*|_{q=t} = \zeta$ в кольце $\mathbb{Z}[t, t^{-1}][s, s^{-1}]$, так как $(q-1)(t-q)|_{q=t} = 0$ в кольце $\mathbb{Z}[t, t^{-1}, q, q^{-1}]$. Поэтому $\text{mdeg}_s \zeta_*(D) \leq \text{mdeg}_s \zeta(D)$, $\deg_s \zeta(D) \leq \deg_s \zeta_*(D)$. Следовательно, числа $\deg_s \zeta_*(D)$ и $-\text{mdeg}_s \zeta_*(D)$ дают более точную (по крайней мере, не менее точную) нижнюю оценку для числа виртуальных перекрестков в диаграмме D , чем числа $\deg_s \zeta(D)$ и $-\text{mdeg}_s \zeta(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Каждый виртуальный перекресток виртуальной диаграммы разделяет две пары дуг, соседних на длинных дугах. Заметим, что поскольку виртуальная диаграмма является правильной, т.е. не имеет циклических длинных дуг, то пара соседних дуг состоит из двух разных дуг. Напомним (см. определение 10), что пара соседних в виртуальном перекрестке дуг названа повышающей, если переход от одной из дуг к другой согласно ориентации виртуальной диаграммы увеличивает степень дуги на единицу, в противном случае пара соседних дуг была названа понижающей. Очевидно, что в каждом виртуальном перекрестке одна из пар соседних в нем дуг повышающая, другая – понижающая.

Пусть n – число классических перекрестков на диаграмме D , $\zeta_*(D) = \det A$, $A = A(D)$ (см. определение 11). Имеем следующие оценки:

$$\deg_s A_{ij} = \deg_s \left(\sum_{a \in \gamma^j} [v_i : a] s^{\deg a} \right) \leq \max_{a \in \gamma^j} \deg a,$$

$$\deg_s \zeta_*(D) = \deg_s \left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \prod_{j=1}^n A_{\sigma_j j} \right) \leq \max_{\sigma \in S_n} \sum_{j=1}^n \deg_s A_{\sigma_j j}.$$

Следовательно, $\deg_s \zeta_*(D) \leq \sum_{j=1}^n \max_{a \in \gamma^j} \deg a$. Из определения степени дуги (см. определение 10) следует, что величина $\max_{a \in \gamma^j} \deg a$ не превосходит числа повышающих пар соседних дуг на длинной дуге γ^j . Поэтому сумма $\sum_{j=1}^n \max_{a \in \gamma^j} \deg a$, взятая по всем длинным дугам, не превосходит числа всех повышающих пар соседних дуг на диаграмме D , которое равно числу виртуальных перекрестков, так как в каждом виртуальном перекрестке ровно одна из двух пар соседних в нем дуг является повышающей.

Таким образом, число виртуальных перекрестков не меньше, чем $\deg_s \zeta_*(D)$. Доказательство того, что оно не меньше, чем $(-\text{mdeg}_s \zeta_*(D))$, проводится аналогично с помощью рассмотрения понижающих пар соседних дуг. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 легко получается следующее достаточное условие минимальности виртуальной диаграммы по числу виртуальных перекрестков. Предположим, что для виртуальной диаграммы D мы имеем равенство в одном из двух неравенств теоремы 2. Пусть, например, число виртуальных перекрестков $k = \deg \zeta_*(D)$. Тогда для числа k' виртуальных перекрестков любой другой правильной виртуальной диаграммы D' , которая эквивалентна D , имеем оценку: $k' \geq \deg_s \zeta_*(D') = \deg_s (t^r \zeta_*(D)) = \deg_s (\zeta_*(D)) = k$. Таким образом, $k' \geq k$. Эта оценка справедлива и для тех виртуальных диаграмм, которые эквивалентны диаграмме D , но не являются правильными, так как от диаграммы с циклическими длинными дугами можно перейти к правильной диаграмме с помощью нескольких первых классических преобразований Рейдемейстера Ω_1 , что не меняет числа виртуальных перекрестков. Таким образом, диаграмма D является минимальной по числу виртуальных перекрестков.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если число виртуальных перекрестков в правильной виртуальной диаграмме D равно $\deg \zeta_*(D)$ или $(-\text{mdeg}_s \zeta_*(D))$, то диаграмма является минимальной по числу виртуальных перекрестков.

Для удобства проверки минимальности виртуальной диаграммы с помощью следствия 1 нужен такой способ вычисления коэффициентов при s^{-k} и s^k в полиноме Лорана $\zeta_*(D)$, где k – число виртуальных перекрестков в D , который не требовал бы вычисления всего полинома $\zeta_*(D) = \det A(D)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть D – правильная виртуальная диаграмма с k виртуальными перекрестками. Тогда если на каждой длинной дуге γ^j найдется дуга a_j такая, что ее степень $\deg a_j$ равна числу повышающих виртуальных перекрестков на γ^j , то коэффициент при s^k в полиноме $\zeta_*(D)$ равен $\det B$, где $B_{ij} = [v_i : a_j]$; в противном случае коэффициент при s^k равен нулю. Аналогичное верно для коэффициента при s^{-k} : если для любого γ^j существует $a_j^- \subset \gamma^j$ такая, что величина $-\deg a_j^-$ равна числу понижающих виртуальных перекрестков на γ^j , то коэффициент при s^{-k} равен $\det B^-$, где $B_{ij}^- = [v_i : a_j^-]$; в противном случае коэффициент при s^{-k} равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k_j – число повышающих пар соседних дуг на длинной дуге γ^j (см. определение 10). Тогда для любого $a \subset \gamma^j$ выполнено $\deg a \leq k_j$. Представим элементы $A_{ij} = \sum_{a \subset \gamma^j} [v_i : a] s^{\deg a}$ матрицы $A(D)$ в следующем виде: $A_{ij} = B_{ij} s^{k_j} + \tilde{A}_{ij}$, где $\deg_s \tilde{A}_{ij} < k_j$, $B_{ij} \in T$, так как $\deg_s A_{ij} \leq k_j$. Если на длинной дуге γ^j найдется дуга со степенью, равной k_j , то эта дуга единственна. Поэтому $B_{ij} = [v_i : a_j]$, если существует $a_j \subset \gamma^j$ такая, что $\deg a_j = k_j$, и $B_{ij} = 0$ в противном случае.

Как было замечено в доказательстве теоремы 2, число виртуальных перекрестков $k = \sum k_j$. Поэтому

$$\begin{aligned} \zeta_*(D) = \det A(D) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \prod_{j=1}^n (B_{\sigma_j j} s^{k_j} + \tilde{A}_{\sigma_j j}) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \prod_{j=1}^n B_{\sigma_j j} \right) s^{k_1 + \dots + k_n} + \tilde{\zeta} = (\det B) s^k + \tilde{\zeta}, \end{aligned}$$

где $\deg_s \tilde{\zeta} < k$, так как $\deg_s \tilde{A}_{\sigma_j j} < k_j$. Таким образом, коэффициент при s^k в полиноме $\zeta_*(D)$ равен $\det B$, $B = (B_{ij})$.

Коэффициент при s^{-k} вычисляется аналогично. Пусть k'_j – число понижающих пар соседних дуг на длинной дуге γ^j . Тогда в силу неравенства $\text{mdeg}_s A_{ij} \geq -k'_j$ имеем $A_{ij} = B_{ij}^- s^{-k'_j} + \tilde{A}_{ij}$, где $\text{mdeg}_s \tilde{A}_{ij} > -k'_j$, причем $B_{ij}^- = [v_i : a_j^-]$, если существует $a_j^- \subset \gamma^j$ такая, что $\deg a_j^- = -k'_j$, и $B_{ij}^- = 0$ в противном случае. Поэтому

$$\zeta_*(D) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \prod_{j=1}^n (B_{\sigma_j j}^- s^{-k'_j} + \tilde{A}_{\sigma_j j}) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \prod_{j=1}^n B_{\sigma_j j}^- \right) s^{-k'_1 - \dots - k'_n} + \tilde{\zeta},$$

где $\text{mdeg}_s \tilde{\zeta} > -k$. Но число виртуальных перекрестков $k = k'_1 + \dots + k'_n$, поэтому коэффициент при s^{-k} равен $\det B^-$. Теорема доказана.

§ 4. Четный квандл

Понятие квандла было впервые введено С. В. Матвеевым (см. [12]) и Д. Джойсом (см. [13]). Квандл – это алгебраическая структура, которая построена исходя из преобразований Рейдемейстера так, чтобы она была относительно

них инвариантна. Мы усилим квандл, взяв вместо одной операции две: одну в четных перекрестках, другую – в нечетных.

Идея использования двух операций для двух различных типов классических перекрестков была впервые предложена Мантуровым при построении длинного виртуального квандла (см. [8], [14], [3]). *Длинный виртуальный квандл* – это инвариант длинных виртуальных узлов. Два типа классических перекрестков – это ранние проходы и ранние переходы. В случае (компактных) виртуальных узлов таких двух естественных типов классических перекрестков нет. Но, как и в случае четного полинома Александра (см. определение 9), мы можем использовать какую-нибудь четность для разделения классических перекрестков на два типа.

Пусть задана произвольная четность p на виртуальных зацеплениях. Поскольку пока не известно нетривиальной четности на классических узлах, мы в настоящей статье имеем дело с виртуальными узлами, так как на них есть нетривиальная гауссова четность (см. пример 1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Множество Q с двумя бинарными операциями $\circ$ и $*$: $Q \times Q \rightarrow Q$ назовем *четным квандлом*, если

- 1) операция $\circ$ идемпотентна, т.е. для любого $a \in Q$ выполнено $a \circ a = a$;
- 2) операции $\circ$ и $*$ обратимы справа, т.е.

$$\forall b, c \quad \exists! a : a \circ b = c, \quad \forall b, c \quad \exists! a : a * b = c;$$

3) для любых $a, b, c \in Q$ выполнены следующие четыре правые дистрибутивности:

$$\begin{aligned} (a \circ b) \circ c &= (a \circ c) \circ (b \circ c) \text{ (самодистрибутивность операции } \circ), \\ (a \circ b) * c &= (a * c) \circ (b * c) \text{ (дистрибутивность } * \text{ относительно } \circ), \\ (a * b) \circ c &= (a \circ c) * (b * c), \\ (a * b) * c &= (a * c) * (b \circ c) \text{ (две странные дистрибутивности).} \end{aligned}$$

По второй аксиоме четного квандла для любых $b, c \in Q$ найдутся единственные элементы $a, a' \in Q$ такие, что $a \circ b = c$, $a' * b = c$. Обозначим a и a' через $b \bar{\circ} c$ и $b \bar{*} c$ соответственно. Как и классический квандл, четный квандл имеет *двойственный четный квандл*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если тройка $(Q, \circ, *)$ является четным квандлом, то тройка $(Q, \bar{\circ}, \bar{*})$ также является четным квандлом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что для тройки $(Q, \bar{\circ}, \bar{*})$ первая и вторая аксиомы четного квандла выполнены. Проверим аксиомы дистрибутивности. Дистрибутивности исходного четного квандла $(Q, \circ, *)$ записываются в следующем виде:

$$(a \circ_1 b) \circ_2 c = (a \circ_2 c) \circ_1 (b \circ_3 c), \quad (2)$$

где среди операций $\circ_1, \circ_2, \circ_3$ четное число операций $*$. Дистрибутивности, которые надо проверить для тройки $(Q, \bar{\circ}, \bar{*})$, записываются так:

$$(a \bar{\circ}_1 b) \bar{\circ}_2 c = (a \bar{\circ}_2 c) \bar{\circ}_1 (b \bar{\circ}_3 c), \quad (3)$$

где $\bar{\circ}_i = \bar{\circ}$, если $\circ_i = \circ$, и $\bar{\circ}_i = \bar{*}$, если $\circ_i = *$, $i = 1, 2, 3$.

В силу второй аксиомы четного квандла равенство (3) равносильно равенству

$$a \bar{\otimes}_1 b = ((a \bar{\otimes}_2 c) \bar{\otimes}_1 (b \bar{\otimes}_3 c)) \otimes_2 c. \quad (4)$$

Докажем, что

$$(u \bar{\otimes}_1 v) \otimes_2 c = (u \otimes_2 c) \bar{\otimes}_1 (v \otimes_3 c). \quad (5)$$

В силу второй аксиомы равенство (5) равносильно равенству вида

$$((u \bar{\otimes}_1 v) \otimes_2 c) \otimes_1 (v \otimes_3 c) = u \otimes_2 c.$$

Но последнее верно, так как в силу равенства (2) имеем

$$((u \bar{\otimes}_1 v) \otimes_2 c) \otimes_1 (v \otimes_3 c) = ((u \bar{\otimes}_1 v) \otimes_1 v) \otimes_2 c = u \otimes_2 c.$$

Наконец, для доказательства равенства (4) преобразуем его правую часть с помощью равенства (5):

$$((a \bar{\otimes}_2 c) \bar{\otimes}_1 (b \bar{\otimes}_3 c)) \otimes_2 c = ((a \bar{\otimes}_2 c) \otimes_2 c) \bar{\otimes}_1 ((b \bar{\otimes}_3 c) \otimes_3 c) = a \bar{\otimes}_1 b.$$

Утверждение доказано.

По виртуальной диаграмме D можно построить новый инвариант, названный нами *универсальный четный квандл*, подобно тому, как построен универсальный квандл (см. [3; гл. 5]). Универсальный четный квандл тоже задается через образующие и соотношения. Образующими являются длинные дуги виртуальной диаграммы. Соотношения разделяются на два типа: общие и специальные, т.е. зависящие от диаграммы D . Общие соотношения просто выписываются по аксиомам четного квандла. Специальные соотношения выписываются по одному для каждого классического перекрестка v диаграммы D согласно правилу, изображенному на рис. 6. Если классический перекресток v четный, то для него выписываем соотношение $a \circ b = c$ (или эквивалентное ему соотношение $a = c \bar{\circ} b$), где длинная дуга b переходит v , длинные дуги a и c расположены справа и слева от b соответственно; если же перекресток v является нечетным, то выписываем соотношение $a * b = c$ (или эквивалентное ему соотношение $a = c \bar{*} b$). Обозначим получившийся универсальный четный квандл через $Q(D)$.

Рис. 6. Определение четного квандла

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Полагая $*$ = $\circ$ в универсальном четном квандле, мы получим универсальный квандл.

ТЕОРЕМА 4. *Универсальный четный квандл является инвариантом виртуальных зацеплений, т.е. эквивалентные виртуальные диаграммы D и D' имеют изоморфные четные квандлы $Q(D) \simeq Q(D')$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что достаточно доказать инвариантность универсального четного квандла только для классических преобразований Рейдемейстера, так как преобразования Рейдемейстера $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3, \Omega'$ не меняют ни множества образующих (т.е. длинных дуг), ни множества соотношений.

По определению четности (см. определение 4) в первом движении Рейдемейстера Ω_1 участвует только четный классический перекресток, поэтому в силу идемпотентности операции $\circ$ универсальный четный квандл инвариантен относительно Ω_1 .

Классические перекрестки, участвующие во втором преобразовании Рейдемейстера Ω_2 , имеют одинаковую четность, поэтому в силу второй аксиомы четного квандла (см. определение 12) доказательство инвариантности относительно Ω_2 в точности такое же, как в случае универсального квандла.

Осталось рассмотреть случай Ω_3 . Пусть α, β и γ – соответственно нижняя, средняя и верхняя нити, участвующие в третьем движении Рейдемейстера (см. рис. 7). Можно считать, что нить γ пронесится над теми четвертями, где кратчайший поворот β к α происходит против часовой стрелки, так как можно дополнительно применить второе движение Рейдемейстера (см. рис. 5). При выписывании соотношений четного квандла для классических перекрестков, лежащих в области преобразования Ω_3 , нам неважно направление нити α . Следовательно, остается четыре варианта Ω_3 (см. рис. 7), определяемых направлениями нитей β и γ .

Рис. 7. Инвариантность четного квандла при движении Ω_3

Заметим, что если в представлении универсального четного квандла через образующие, являющиеся длинными дугами, и соотношения некоторая образующая выражается через другие, то ее можно исключить из числа образующих, сделав подстановку ее выражения в соотношения, ее содержащие. При этом получится изоморфный четный квандл. В нашем случае такой образующей является дуга a_2 . Следовательно, a_2 можно рассматривать как промежуточную, вспомогательную переменную.

Для определенности будем выражать все дуги, участвующие в преобразовании Ω_3 , через дуги a, b и c . Заметим, что в каждом из четырех случаев на

верхней и нижней диаграммах дуга b_2 одинаково выражается через b и c . Следовательно, для изоморфности универсальных четных квандлов, отвечающих верхней и нижней диаграммам, достаточно иметь одинаковые выражения для дуги a_3 . Приравнявая выражения для дуги a_3 в каждом из четырех случаев, получаем следующие соотношения:

- 1) $(a \circledast_{ab} b) \circledast_{ac} c = (a \circledast_{ac} c) \circledast_{ab} (b \circledast_{bc} c),$
- 2) $(a \bar{\circledast}_{ab} b) \circledast_{ac} c = (a \circledast_{ac} c) \bar{\circledast}_{ab} (b \circledast_{bc} c),$
- 3) $(a \circledast_{ab} b) \bar{\circledast}_{ac} c = (a \bar{\circledast}_{ac} c) \circledast_{ab} (b \bar{\circledast}_{bc} c),$
- 4) $(a \bar{\circledast}_{ab} b) \bar{\circledast}_{ac} c = (a \bar{\circledast}_{ac} c) \bar{\circledast}_{ab} (b \bar{\circledast}_{bc} c).$

По определению четности среди операций $\circledast_{ab}$, $\circledast_{ac}$, $\circledast_{bc}$ четное число операций $\circledast$. Поэтому соотношение 1) эквивалентно третьей аксиоме, входящей в определение четного квандла (см. определение 12), а соотношения 2) и 4) совпадают с тождествами (5) и (3) из доказательства утверждения 1. Осталось доказать соотношение 3). По второй аксиоме из определения четного квандла 3) эквивалентно соотношению $a \circledast_{ab} b = ((a \bar{\circledast}_{ac} c) \circledast_{ab} (b \bar{\circledast}_{bc} c)) \circledast_{ac} c$, но в силу третьей аксиомы из определения четного квандла последнее выражение преобразуется к виду

$$((a \bar{\circledast}_{ac} c) \circledast_{ab} (b \bar{\circledast}_{bc} c)) \circledast_{ac} c = ((a \bar{\circledast}_{ac} c) \circledast_{ac} c) \circledast_{ab} ((b \bar{\circledast}_{bc} c) \circledast_{ac} c) = a \circledast_{ab} b.$$

Теорема доказана.

Можно значительно усилить инвариантный универсальный четный квандл, рассматривая в качестве образующих не длинные дуги, а просто дуги, и выписывая соотношения в виртуальных перекрестках, используя фиксированный автоморфизм четного квандла. Этим способом был усилен универсальный квандл для виртуальных зацеплений (см. [15], [14; с. 118], [3]); полученный инвариант был назван *виртуальным квандлом*.

Итак, по виртуальной диаграмме через задание образующих и соотношений построим пару $Q_f = (Q, f)$, где Q – четный квандл, $f: Q \rightarrow Q$ является автоморфизмом четного квандла Q (т.е. f – биекция, сохраняющая операции $\circ$ и $\ast$). По аналогии со случаем квандла назовем этот объект Q_f *универсальным виртуальным четным квандлом*.

Пусть D – ориентированная правильная виртуальная диаграмма (см. определение 8). Образующими $Q_f = Q_f(D)$ являются дуги диаграммы D . Соотношения, аналогично случаю универсального четного квандла, разделяем на *общие* и *специальные*. Общие соотношения выписываются по аксиомам из определения четного квандла (так же, как и в случае универсального четного квандла) и на основании того, что f – автоморфизм четного квандла. Специальные соотношения выписываются по одному для каждого классического перекрестка и по два для каждого виртуального перекрестка диаграммы D . Для классических перекрестков соотношения такие же, как в случае универсального четного квандла. Для виртуальных перекрестков соотношения выписываются по правилу, изображенному на рис. 6. Легко видеть, что сопоставление слов $a \mapsto f(a)$, которые составлены из скобок $(\cdot)$, букв, отвечающих дугам диаграммы D , и операций $\circ, \ast, \bar{\circ}, \bar{\ast}, f, f^{-1}$, является автоморфизмом четного квандла Q_f в силу общих соотношений. Таким образом, построен универсальный виртуальный четный квандл $Q_f(D) = (Q, f)$.

ТЕОРЕМА 5. *Эквивалентные правильные виртуальные диаграммы D и D' имеют изоморфные универсальные виртуальные четные квандлы $Q_f(D) = (Q, f) \simeq Q_f(D') = (Q', f')$, т.е. существует изоморфизм четных квандлов $\varphi: Q \rightarrow Q'$ такой, что $\varphi \circ f = f' \circ \varphi$, где $f: Q \rightarrow Q$, $f': Q' \rightarrow Q'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство инвариантности относительно классических движений Рейдемейстера $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ совпадает с доказательством этого в случае универсального четного квандла.

Доказательство инвариантности относительно $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3, \Omega'$ полностью аналогично доказательству этого в случае виртуального квандла (см. [15], [14; с. 121]). Доказательство инвариантности Q_f относительно чисто виртуальных движений $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3$ непосредственно следует из специальных соотношений для виртуальных перекрестков. Инвариантность Q_f относительно смешанного движения Рейдемейстера Ω' сразу получается из общих соотношений, выписанных исходя из условия, что f – изоморфизм.

Универсальные четный и виртуальный четный квандлы интересны не только сами по себе, но и как вспомогательные объекты для построения инвариантов раскрасок.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть C – конечный (виртуальный) четный квандл, D – правильная виртуальная диаграмма. Тогда величина $\lambda(D)$, равная числу гомоморфизмов $Q(D) \rightarrow C$, является инвариантом виртуальных зацеплений, где $Q(D)$ – универсальный (виртуальный) четный квандл диаграммы D .*

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Величина $\lambda(D)$ конечна, так как гомоморфизм $\varphi: Q(D) \rightarrow C$ однозначно определяется образами (длинных) дуг диаграммы D .

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Вместо теорем 4 и 5 можно было бы сформулировать и доказать теоремы об инвариантности количества правильных раскрасок $\lambda(D)$ (длинных) дуг диаграммы D элементами произвольного конечного (виртуального) четного квандла C . При этом определение понятия “правильная раскраска” соответствует конструкции универсального (виртуального) четного квандла на (длинных) дугах диаграммы D .

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Отображение $\varphi: Q \rightarrow Q'$ мы называем *гомоморфизмом виртуальных четных квандлов* $X = (Q, f)$ и $X' = (Q', f')$, если φ – гомоморфизм четных квандлов и $\varphi \circ f = f' \circ \varphi$.

Для применения инварианта раскрасок $\lambda = \lambda(D)$ полезно использовать следующее семейство конечных четных квандлов. Пусть $\mathbb{Z}_m$ – кольцо вычетов по модулю $m \in \mathbb{N}$, вычеты t и μ взаимно просты с m , вычет ν такой, что выполнены равенства $\nu(t - \mu) = 0$, $\nu^2 = (t - 1)(\mu - 1) \pmod{m}$. Полагаем $x \circ y = tx + (1 - t)y$, $x * y = \mu x + \nu y$. Тогда непосредственно проверяется, что $C = (\mathbb{Z}_m, \circ, *)$ – четный квандл. Заметим, что операция $*$ идемпотентна тогда и только тогда, когда $\mu + \nu = 1 \pmod{m}$, так как $x * x = (\mu + \nu)x$. Как выяснилось на примерах, инвариант раскрасок $\lambda(D)$ более эффективен, если $*$ не идемпотентна.

Для построения конечного виртуального четного квандла $X = (C, f)$ в качестве автоморфизма $f: C \rightarrow C$ можно взять умножение на любой обратимый элемент кольца $\mathbb{Z}_m$.

Список литературы

- [1] D. P. Pytko, V. O. Manturov, “Introduction to graph-link theory”, *J. Knot Theory Ramifications*, **18**:6, (2009), 791–823.
- [2] В. О. Мантуров, “Четность в теории узлов”, *Матем. сб.*, **201**:5, (2010), 65–110.
- [3] В. О. Мантуров, *Теория узлов*, РХД, М.–Ижевск, 2005; англ. пер.: V. O. Manturov, *Knot theory*, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2004.
- [4] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, РХД, Ижевск, 1999; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall, CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [5] А. Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, *Докл. АН СССР*, **287**:5, (1986), 1071–1075; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “Morse theory of integrable Hamiltonian systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **33**:2, (1986), 502–506.
- [6] А. В. Браилов, А. Т. Фоменко, “Топология интегральных подмногообразий вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, **134(176)**:3(11), (1987), 375–385; англ. пер.: A. V. Brailov, A. T. Fomenko, “The topology of integral submanifolds of completely integrable Hamiltonian systems”, *Math. USSR-Sb.*, **62**:2, (1989), 373–383.
- [7] А. Т. Фоменко, “Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:6, (1986), 1276–1307; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability”, *Math. USSR-Izv.*, **29**:3, (1987), 629–658.
- [8] V. O. Manturov, “Long virtual knots and their invariants”, *J. Knot Theory Ramifications*, **13**:8, (2004), 1029–1039.
- [9] D. M. Afanasiev, V. O. Manturov, “On virtual crossing number estimates for virtual links”, *J. Knot Theory Ramifications*, **18**:6, (2009), 757–772.
- [10] Д. М. Афанасьев, В. О. Мантуров, “О минимальных диаграммах виртуальных зацеплений”, *Докл. РАН*, **426**:1, (2009), 7–10; англ. пер.: D. M. Afanasiev, V. O. Manturov, “On minimal virtual link diagrams”, *Dokl. Math.*, **79**:3, (2009), 301–304.
- [11] D. Afanasiev, “On a generalization of the Alexander polynomial for long virtual knots”, *J. Knot Theory Ramifications*, **18**:10, (2009), 1329–1333.
- [12] С. В. Матвеев, “Дистрибутивные группоиды в теории узлов”, *Матем. сб.*, **119(161)**:1(9), (1982), 78–88; англ. пер.: S. V. Matveev, “Distributive groupoids in knot theory”, *Math. USSR-Sb.*, **47**:1, (1984), 73–83.
- [13] D. Joyce, “A classifying invariant of knots, the knot quandle”, *J. Pure Appl. Algebra*, **23**:1, (1982), 37–65.
- [14] L. H. Kauffman, V. O. Manturov, “Virtual biquandles”, *Fund. Math.*, **188**, (2005), 103–146.
- [15] V. O. Manturov, “On invariants of virtual links”, *Acta Appl. Math.*, **72**:3, (2002), 295–309.

Д. М. Афанасьев (D. M. Afanas'ev)
 Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: denisafanasev@yandex.ru

Поступила в редакцию
 18.11.2009