Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. К. Козлов, Классификация лагранжевых расслоений,
Матем. сб., 2010, том 201, номер 11, 89–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7656>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 12:10:32

УДК 514.763.33+515.145.2

И. К. Козлов

Классификация лагранжевых расслоений

В работе получена классификация лагранжевых расслоений над двумерными поверхностями с компактными тотальными пространствами с точностью до послойных симплектоморфизмов, тождественных на базе.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: лагранжево расслоение, бутылка Клейна.

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена классификации лагранжевых расслоений. Напомним, что расслоение $\pi: (M^{2n}, \omega) \rightarrow B$ называется *лагранжевым*, если тотальное пространство (M^{2n}, ω) является симплектическим многообразием и каждый его слой $F^n \subset M^{2n}$ является лагранжевым подмногообразием, т.е. $\omega|_{F^n} \equiv 0$. В работе рассматриваются только лагранжевы расслоения со связными слоями.

Лагранжевы расслоения – часто встречающийся в математике и физике объект. В частности, отображение момента любой интегрируемой гамильтоновой системы задает лагранжево расслоение с особенностями (об особенностях отображения момента см., например, [1]). В настоящей работе изучается глобальное устройство лагранжевых расслоений без особенностей.

В работе [2] Дж. Дюйстермаат предложил классифицировать лагранжевы расслоения при помощи теории пучков. В частности, он ввел инварианты, классифицирующие лагранжевы расслоения – решетку на базе лагранжева расслоения и лагранжев класс Черна (см. [2], [3], а также краткое описание в пп. 2.4.2, 2.4.3). Однако даже в случае малой размерности получение полного списка лагранжевых расслоений (например, для данной базы) с помощью инвариантов, описанных Дюйстермаатом является, как правило, нетривиальной задачей. Тем не менее К. Н. Мишачёв в работе [4] удалось получить такой список для лагранжевых расслоений над ориентируемыми двумерными поверхностями. Там же Мишачёв показал, что среди двумерных поверхностей только тор $\mathbb{T}^2$ и бутылка Клейна $\mathbb{K}^2$ могут быть базой лагранжева расслоения.

В этой работе получен полный список лагранжевых расслоений над неориентируемыми двумерными поверхностями. В частности, доказано что любое

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00748-а), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3224.2010.1) и Программы развития научного потенциала высшей школы (грант № РНП 2.1.1.3704).

лагранжево расслоение над бутылкой Клейна может быть получено в результате склейки некоторого расслоения $\pi: (I^2 \times \mathbb{T}^2, \omega) \rightarrow I^2$ над параллелограммом I^2 по послойным симплектоморфизмам g и h , отождествляющим расслоения над противоположными парами сторон. Опишем явно параллелограмм I^2 , форму ω и послойные симплектоморфизмы g и h .

База I^2 – параллелограмм с вершинами $(0, 0)$, $(x_0, 0)$, $(\frac{m-\delta}{2}y_0, y_0)$ и $(x_0 + \frac{m-\delta}{2}y_0, y_0)$ для некоторых $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $m, \delta \in \mathbb{Z}$. Форма ω стандартная, т.е. имеет вид $d\alpha \wedge dx + d\beta \wedge dy$, где x, y – координаты на базе, а $\alpha, \beta \pmod{1}$ – координаты на слое. Послойные симплектоморфизмы g, h задаются следующими формулами:

$$h(x, y, \alpha, \beta) = \left(x + my + \frac{m-\delta}{2}y_0, y + y_0, \alpha + \frac{m_0}{x_0}x + \left(\frac{mm_0}{x_0} + \frac{n_0}{x_0} \right)y, \right. \\ \left. - m\alpha + \beta + \frac{n_0}{x_0}x \right), \quad (1)$$

$$g(x, y, \alpha, \beta) = \left(x + (\delta - m)y + \frac{m-\delta}{2}y_0 + x_0, -y + y_0, \alpha, (\delta - m)\alpha - \beta \right) \quad (2)$$

для некоторых $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$.

В работе доказано, что любое лагранжево расслоение над бутылкой Клейна послойно симплектоморфно одному из описанных выше расслоений

$$\pi: (M_{m_0, n_0}^4, \omega) \rightarrow \mathbb{K}_{m, y_0; \delta, x_0}^2$$

(см. лемму 14).

Подчеркнем, что в приведенном списке присутствуют послойно симплектоморфные между собой расслоения.

Этот список может быть легко получен при помощи проведенной в настоящей работе классификации лагранжевых расслоений над двумерными поверхностями с точностью до лагранжевой эквивалентности, т.е. с точностью до послойного симплектоморфизма, тождественного на базе. Точнее, сделано следующее. Построена классификация лагранжевых расслоений, основанная на теории препятствий, после чего возникающие в этой классификации инварианты явно найдены для расслоений над двумерными поверхностями.

Сформулируем основные полученные результаты (теоремы 1–5). Начнем с классификации при помощи теории препятствий. Опишем участвующие в ней инварианты.

Важный инвариант лагранжева расслоения $\pi: (M^{2n}, \omega) \rightarrow B^n$ – это замкнутая решетка P (ранга k) в кокасательном расслоении T^*B^n , т.е. P – многозначная замкнутая 1-форма, пересекающая каждое кокасательное пространство $T_x^*B^n$ по дискретной подгруппе (ранга k). При этом корректно определено факторрасслоение T^*B/P (пересечение P с каждым слоем дискретно) и для любого сечения $\alpha: B^n \rightarrow T^*B/P$ корректно определен дифференциал $d\alpha$ (многозначная форма P замкнута, поэтому $d\alpha$ не зависит от выбора локального представителя).

Вкратце опишем построение решетки (подробнее см. определение 9). Напомним, для любого ковектора $\alpha \in T_x^*B^n$ определено отображение $s_\alpha: F_x \rightarrow F_x$ соответствующего слоя F_x , заданное следующей формулой: если $\alpha = df|_x$, то

s_α – сдвиг за единичное время вдоль векторного поля $\text{sgrad}(\pi^*f)$. Решетка P состоит из ковекторов α , задающих тождественное отображение s_α . Легко показать, что если ранг решетки равен k , то слой расслоения диффеоморфен $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

Как локально тривиальное расслоение над B^n решетка P естественным образом отождествляется с группой локальных коэффициентов $\{\pi_1(F)\}$. Поэтому в этой работе пространство препятствий к построению сечений $H^2(B^n, \{\pi_1(F)\})$ обозначается через $H^2(B, P)$. В частности, если у двух лагранжевых расслоений $\pi_i: (M_i^{2n}, \omega_i) \rightarrow B^n$ над одной и той же базой B^n соответствующие решетки P_i совпадают, то их препятствия к построению сечения можно сравнивать, как элементы одной и той же группы $H^2(B^n, P)$ (подробнее см. п. 2.4.1).

Оказывается, что решетка P вместе с первым препятствием к продолжению сечения $\gamma \in H^2(B, P)$ определяет почти лагранжево расслоение с точностью до поднятия 2-формы с базы. А именно, доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Для любых двух лагранжевых расслоений $\pi_i: (M_i^{2n}, \eta_i) \rightarrow B^n$, $i = 1, 2$, с одинаковыми соответствующими решетками $P_i \subset T^*B$ и препятствиями к построению сечения $\gamma_i \in H^2(B, P_i)$ существует такая 2-форма φ на базе B , что расслоение $\pi_1: (M_1^{2n}, \eta_1 + \pi_1^*\varphi) \rightarrow B^n$ лагранжево эквивалентно второму расслоению $\pi_2: (M_2^{2n}, \eta_2) \rightarrow B^n$.*

Следующее простое утверждение говорит о том, когда поднятие 2-формы с базы не меняет лагранжево расслоение.

ТЕОРЕМА 2. 1) *Для любого лагранжева расслоения $\pi: (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$ расслоение $\pi: (M^{2n}, \eta + \pi^*\varphi) \rightarrow B^n$ является лагранжевым тогда и только тогда, когда 2-форма φ является замкнутой.*

2) *Два лагранжевых расслоения $\pi: (M^{2n}, \eta + \pi^*\varphi_i) \rightarrow B^n$, $i = 1, 2$, с соответствующей решеткой P лагранжево эквивалентны тогда и только тогда, когда $\varphi_1 - \varphi_2 = d\alpha$ для некоторого сечения $\alpha: B^n \rightarrow T^*B^n/P$.*

Однако, вообще говоря, не все решетки $P \subset T^*B^n$ и препятствия $\gamma \in H^2(B, P)$ соответствуют лагранжевым расслоениям. Доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Любая замкнутая решетка $P \subset T^*B^n$ и любое препятствие $\gamma \in H^2(B, P)$ могут быть реализованы некоторым расслоением $\pi: (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$, у которого ограничение формы η на каждый слой тривиально, т.е. $\eta|_{F_x} \equiv 0$, и $d\eta = \pi^*\psi$ для некоторой 3-формы ψ на базе B^n .*

Класс $[\psi] \in H^3(B^n, \mathbb{R})$ при этом определен однозначно.

Из теоремы 3 вытекает, что расслоение $\pi: (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$ может быть выбрано лагранжевым тогда и только тогда, когда отсутствует препятствие к построению симплектической структуры $[\psi] \in H^3(B^n, \mathbb{R})$.

Класс $[\psi]$ не всегда тривиален (см. пример 8). Поэтому в этой работе классификация при помощи теории препятствий сразу проведена для более широкого класса почти лагранжевых расслоений $\pi: (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$, для которых слои не обязательно компактны и форма η не обязательно замкнута (см. определение 5). Итоговый результат сформулирован в теореме 11, обобщающей теоремы 1, 2 и 3.

Из приведенных выше теорем вытекает, что если $H^2(B, \mathbb{R}) = H^3(B, \mathbb{R}) = 0$, то лагранжевы расслоения над базой B классифицируются соответствующей решеткой и препятствием к построению сечения.

Опишем эти инварианты для лагранжевых расслоений над двумерными поверхностями. Начнем с решетки. В этой работе получена классификация замкнутых решеток ранга 2 на компактных двумерных поверхностях с точностью до изоморфизма, т.е. с точностью до действия группы автоморфизмов базы (см. теорему 15). Выпишем все решетки на бутылке Клейна $\mathbb{K}^2$.

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathbb{R}^2$ – двумерное аффинное подпространство, а группа $G_{m,y;\delta,x} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^2 \subset \mathrm{Aff}_2$ порождается элементами

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right), \quad m, \delta \in \mathbb{Z}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad x, y > 0.$$

Тогда факторпространство $\mathbb{R}^2/G_{m,y;\delta,x}$ диффеоморфно бутылке Клейна $\mathbb{K}^2$. Обозначим через $\mathbb{K}_{m,y;\delta,x}^2$ решетку на факторпространстве $\mathbb{R}^2/G_{m,y;\delta,x} \simeq \mathbb{K}^2$, индуцированную стандартной целочисленной решеткой $\mathbb{Z}^2$ на плоскости.

ТЕОРЕМА 4. *Для любой замкнутой решетки P ранга 2 на бутылке Клейна $\mathbb{K}^2$ существуют и единственны такие $m, \delta \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $m \geq 0$, $x, y > 0$, и δ , равное 0 или 1, и m , четное при $\delta = 1$, что решетка P и решетка $\mathbb{K}_{m,y;\delta,x}$ изоморфны.*

Для каждой замкнутой решетки P (ранга 2) остальные инварианты вычислены в п.4.3 (см. теорему 16). В частности, показано, что существуют серии решеток на $\mathbb{K}^2$, для которых число различных лагранжевых расслоений конечно. Эти решетки описаны в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 5. *Для любой решетки P , изоморфной решетке $\mathbb{K}_{n,y;\delta,x}$, где $n > 0$, существует ровно $2n$ попарно лагранжево неэквивалентных лагранжевых расслоений $\pi: (M^4, \omega) \rightarrow \mathbb{K}^2$ с соответствующей решеткой P .*

Отметим, что для любой решетки P , изоморфной решетке $\mathbb{K}_{0,y;\delta,x}$, число попарно лагранжевых неэквивалентных лагранжевых расслоений $\pi: (M^4, \omega) \rightarrow \mathbb{K}^2$ с соответствующей решеткой P счетно.

Автор благодарит своего научного руководителя А. А. Ошемкова за постановку задачи и помощь при написании работы.

§ 2. Основные понятия

2.1. Почти лагранжевы расслоения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть η – невырожденная 2-форма на многообразии M^{2n} . Подмногообразие $L \subset (M^{2n}, \eta)$ будем называть *максимально изотропным*, если $\dim L = n$ и $\eta|_L = 0$.

Таким образом, максимально изотропное подмногообразие является обобщением понятия максимально изотропного, в частности лагранжева, подпространства из линейной алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Локально тривиальное расслоение $\pi: (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$ назовем *максимально изотропным расслоением*, если каждый слой является (связным) максимально изотропным подмногообразием.

Таким образом, понятие максимально изотропного расслоения обобщает понятие лагранжева расслоения на случай незамкнутости формы η .

ПРИМЕР 2. Пусть $\pi: T^*B \rightarrow B$ – кокасательное расслоение над многообразием B . Обозначим через ξ каноническую 1-форму на кокасательном расслоении T^*B , которая принимает на векторе $v \in T_{(x,\alpha)}(T^*B)$, где $x \in B$, $\alpha \in T_x^*B$, значение, равное $\alpha(\pi_*(v))$. Тогда кокасательное расслоение $\pi: (T^*B, \omega_0) \rightarrow B$, где $\omega_0 = d\xi$, является максимально изотропным (и даже лагранжевым) расслоением.

Легко проверить, что в канонических координатах (p_i, q^i) , где q^i – координаты базы, а p_i – координаты ковектора в базисе dq^i , эта форма имеет вид $\sum_i dp_i \wedge dq^i$.

ПРИМЕР 3. Пусть $\pi: (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$ – максимально изотропное расслоение, а φ – это 2-форма на B^n . Максимально изотропное расслоение $\pi: (M^{2n}, \eta + \pi^*\varphi) \rightarrow B^n$ назовем расслоением, *подкрученным формой φ* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть заданы два расслоения $\pi_i: (M_i^{2n}, \eta_i) \rightarrow B_i^n$, $i = 1, 2$. Послойный диффеоморфизм $f: M_1^{2n} \rightarrow M_2^{2n}$ называется *лагранжевым изоморфизмом*, если $f^*\eta_2 = \eta_1$. Лагранжев изоморфизм расслоений над одной и той же базой называется *лагранжевой эквивалентностью*, если он тождествен на базе.

В настоящей работе показано, как может быть проведена классификация лагранжевых расслоений с точностью до лагранжевой эквивалентности. Подчеркнем, что основное свойство, на котором основана эта классификация, заключается в том, что любому ковектору $\alpha \in T_x^*B$ можно каноническим образом сопоставить векторное поле v_α на соответствующем слое $F_x = \pi^{-1}(x)$ (почти) лагранжева расслоения. Этот факт для лагранжевых расслоений был доказан Дюйстермаатом в [2]. Опишем его конструкцию в более общей ситуации.

Конструкция Дюйстермаата. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ – сюръективное отображение, и пусть на пространстве E задан бивектор ν . Иными словами, в каждой кокасательной плоскости T_z^*E задана кососимметрическая билинейная форма, гладко зависящая от точки $z \in E$ (например, ν может быть бивектором Пуассона, если на E задана структура пуассонова многообразия).

Пусть $\alpha \in T_x^*B$ – ковектор. Тогда ему может быть сопоставлен вектор $v_\alpha(z) \in T_zE$ в каждой точке z соответствующего слоя $F_x = \pi^{-1}(x)$. А именно, $v_\alpha(z)$ – векторное поле, двойственное относительно ν к ковектору $(\pi^*\alpha)(z)$ в точке $z \in F_x$. Иными словами, вектор $v_\alpha(z) \in T_zE$ действует на ковекторе $\beta \in T_z^*E$ по правилу $\langle v_\alpha(z), \beta \rangle = \nu((\pi^*\alpha)(z), \beta)$.

Если слой F_x является подмногообразием тотального пространства E и ограничение бивектора ν на подпространство $\pi^*(T_x^*B) \subset T_z^*E$ тождественно равно нулю, то вектор $v_\alpha(z)$ будет лежать в касательном пространстве к соответствующему слою F_x . Таким образом, каждому ковектору α в этом случае сопоставляется векторное поле v_α на слое F_x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Построенное векторное поле, соответствующее ковектору α , назовем *полем сдвига* и будем в дальнейшем обозначать через v_α . Через s_α^t будем обозначать сдвиг вдоль векторного поля v_α за время t (если этот сдвиг корректно определен). Для краткости будем обозначать s_α^1 через s_α .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Покажем, что существует естественный аналог конструкции Дюйстермаата для расслоений $\pi: E \rightarrow B$, на тотальном пространстве которых задана невырожденная 2-форма η . Действительно, как известно из линейной алгебры, любой невырожденной билинейной форме Φ на векторном пространстве V естественным образом соответствует билинейная форма $\tilde{\Phi}$ на двойственном пространстве V^* . Поэтому по 2-форме η может быть канонически построен бивектор ν , для которого уже применима конструкция Дюйстермаата.

Далее, заметим, что для максимально изотропных расслоений ограничение соответствующего бивектора $\nu|_{\pi^*(T^*B)}$ тождественно равно 0 (этот факт можно явно проверить в координатах). Поэтому для максимально изотропных расслоений отображение $\alpha \rightarrow v_\alpha$ устанавливает изоморфизм между кокасательным пространством $T_{\pi(z)}^*B$ в точке $\pi(z)$ и касательным пространством T_zF к слою $F = \pi^{-1}(\pi(z))$ в точке $z \in E$.

В частности, ковектору $\alpha = df|_x$, где f – функция на B , соответствует векторное поле $v_\alpha = -\text{sgrad } \pi^*f$. Напомним, что косой градиент $\text{sgrad } g$ для функции g определяется из соотношения $i_{\text{sgrad } g}\eta = -dg$, где по определению $i_{v_1}\eta(v_2) = \eta(v_1, v_2)$ для любых двух векторов v_1 и v_2 .

В этой работе классифицированы все лагранжевы расслоения, для которых поля сдвига v_α полны. Для решения этой задачи проводится классификация более широкого класса расслоений, которые локально лагранжево эквивалентны подкрученному кокасательному расслоению и для которых отображение $\alpha \rightarrow s_\alpha$ задает послойное действие кокасательного расслоения на соответствующем слое. Назовем эти расслоения *почти лагранжевыми* (см. определение 5) и покажем, что это в точности те расслоения, для которых все поля сдвига полны и дифференциал формы η может быть опущен на базу (т.е. $d\eta = \pi^*\psi$ для некоторой 3-формы ψ на базе).

Для того чтобы отображение $\alpha \rightarrow s_\alpha$ задавало послойное действие, достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия: во-первых, все поля сдвига полны; во-вторых, все поля сдвига коммутируют между собой. Первое условие гарантирует корректность определения s_α , а второе – то, что отображение $\alpha \rightarrow s_\alpha$ будет гомоморфизмом групп.

Покажем теперь, что если расслоение локально лагранжево эквивалентно подкрученному кокасательному, то все поля сдвига коммутируют между собой. (Этот факт следует из приведенных далее утверждений 1 и 2.)

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\pi: (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$ – максимально изотропное расслоение, z – точка тотального пространства M^{2n} . Тогда следующие условия эквивалентны.

- 1) В некоторой окрестности точки z все векторные поля v_α попарно коммутируют.
- 2) В некоторой окрестности точки z существуют такие локальные координаты $p_1, \dots, p_n, q^1, \dots, q^n$, где q^i постоянны на слоях, что в них

матрица формы η имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & \Omega \end{pmatrix}$, где E – единичная $(n \times n)$ -матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Возьмем произвольное (локальное) сечение $s: B \rightarrow E$ и выберем локальные координаты $q^1, \dots, q^n$ на B (и поднимем до локальных координат в окрестности точки z). Требуется дополнить выбранные координаты q^i координатами $p_1, \dots, p_n$ так, чтобы $v_{dq^i} = \frac{\partial}{\partial p_i}$. Так как векторные поля v_{dq^i} попарно коммутируют и линейно независимы в каждой точке, то они задают локальные координаты: в качестве p_i можно взять время сдвига точек сечения s вдоль векторных полей v_{dq^i} .

2) $\Rightarrow$ 1). В указанных координатах $p_1, \dots, p_n, q^1, \dots, q^n$ ковектору $\alpha = \alpha_i dq^i$ соответствует векторное поле $\alpha_i \frac{\partial}{\partial p_i}$. Поля с постоянными координатами коммутируют.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\pi: (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$ – максимально изотропное расслоение, z – точка тотального пространства M^{2n} . Тогда следующие условия эквивалентны.

- 1) Некоторая окрестность точки z лагранжеево эквивалентна окрестности точки $\pi(z)$ в подкрученном кокасательном расслоении.
- 2) Существует такая окрестность точки z , в которой $d\eta = \pi^*\psi$ для некоторой 3-формы ψ на базе.
- 3) В некоторой окрестности точки z существуют такие локальные координаты $p_1, \dots, p_n, q^1, \dots, q^n$, где q^i постоянны на слоях, что в них матрица формы η имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & \Omega \end{pmatrix}$, где E – единичная $(n \times n)$ -матрица, а Ω – матрица, зависящая от $q^1, \dots, q^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 3) $\Rightarrow$ 1). Как уже отмечалось после примера 2, $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ – это матрица ω_0 в канонических координатах кокасательного расслоения. Тогда Ω будет матрицей подкручивающей формы.

1) $\Rightarrow$ 2). Форма ψ будет дифференциалом подкручивающей формы.

2) $\Rightarrow$ 3). Вначале докажем, что существуют такие координаты $p_1, \dots, p_n, q^1, \dots, q^n$, в которых матрица η имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & \Omega \end{pmatrix}$. Для этого докажем, что поля сдвига коммутируют (см. утверждение 1). Сделаем это в два шага.

Шаг 1. Пусть $d\eta = 0$. Тогда для скобки Пуассона, соответствующей форме η , выполнено тождество Якоби, а следовательно,

$$[v_{dq^i}, v_{dq^j}] = [\text{sgrad } \pi^* q^i, \text{sgrad } \pi^* q^j] = -\text{sgrad } \{\pi^* q^i, \pi^* q^j\} = \text{sgrad } 0.$$

Чтобы сделать последнее равенство более наглядным, заметим, что если матрица 2-формы η имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & B \end{pmatrix}$, то матрица соответствующей скобки Пуассона, т.е. обратная матрица, имеет вид $\begin{pmatrix} (A^T)^{-1} B A^{-1} & -(A^T)^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

Шаг 2. Общий случай $d\eta = \pi^*\psi$. Тогда $d\psi = 0$, так как $d^2\eta = 0$, а следовательно, локально $\psi = d\varphi$ для некоторой 2-формы φ на базе B . Но поля сдвига не зависят от подкручивания расслоения (в обозначениях предыдущего шага векторные поля зависят лишь от матрицы A , а она не меняется при подкручивании). Следовательно, поля сдвига коммутируют.

Остается лишь заметить, что матрица Ω не зависит от координат p_i , так как $d\eta = \pi^*\psi$.

Покажем теперь, что если все поля сдвига полны и расслоение локально эквивалентно подкрученному кокасательному расслоению, то существует такая (глобально определенная) 3-форма ψ на базе B^n , что $d\eta = \pi^*\psi$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Рассмотрим максимально изотропное расслоение $\pi: (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$, удовлетворяющее любому из трех (эквивалентных) условий утверждения 1, у которого все поля сдвига v_α полны. Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Пусть над односвязным подмножеством U пространства B^n заданы два сечения $u_1, u_2: U \rightarrow M^{2n}$. Тогда на $U \subset B^n$ существует такая 1-форма α , что сдвиг за единичное время вдоль v_α переводит u_1 в u_2 , т.е. $\alpha(x) \in T_x^*B^n$, форма α гладко зависит от точки и $s_\alpha \circ u_1 = u_2$.
- 2) Для любой 1-формы α в окрестности точки $x \in B^n$ выполнено равенство $s_\alpha^*\eta = \eta + d(\pi^*\alpha)$.
- 3) Существует такая 3-форма ψ на базе B^n , что $d\eta = \pi^*\psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Отображение $\alpha \rightarrow s_\alpha$ задает действие $T_x^*B^n$ на слое F_x . Это действие транзитивно, так как векторные поля v_α порождают касательное пространство T_zF слоя F в каждой точке $z \in E$. Поэтому для любой точки $x \in U$ существует такой ковектор $\beta \in T_x^*B^n$, что $s_\beta(u_1(x)) = u_2(x)$. Ковектор β может быть продолжен до 1-формы α на U при помощи продолжения вдоль путей (и благодаря односвязности U).

2) Производная Ли формы η вдоль векторного поля v_α по формуле Картана есть

$$L_{v_\alpha}\eta = i_{v_\alpha}(d\eta) + d(i_{v_\alpha}\eta). \quad (3)$$

Первое слагаемое равно нулю, что легко проверить в координатах из условия 3) утверждения 2. Второе же равно $d(\pi^*\alpha)$ по построению v_α .

3) Форма ψ определяется ограничениями формы $d\eta$ на (локальные) сечения пространства M^{2n} . То, что форма ψ не зависит от выбора сечений, следует из только что доказанного факта о том, как меняется форма $d\eta$ при изменении сечений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Максимально изотропное расслоение $\pi: (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$ назовем *почти лагранжевым*, если все поля сдвига v_α полны и $d\eta = \pi^*\psi$ для некоторой 3-формы ψ на базе B^n .

Для всех рассматриваемых далее лагранжевых расслоений предполагается, что все поля сдвига тоже полны (т.е. лагранжево расслоение – это почти лагранжево расслоение с замкнутой формой).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что поля сдвига полны, если слой расслоения компактен, что, в свою очередь, заведомо выполнено, если все тотальное пространство M^{2n} компактно (все рассматриваемые многообразия не имеют границы).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Если $d\eta = \pi^*\psi$, то класс $[\psi] \in H^3(B, \mathbb{R})$ назовем *препятствием к построению симплектической структуры*.

Объясним смысл этого определения в следующем утверждении.

ЛЕММА 1. *Препятствие к построению симплектической структуры для почти лагранжева расслоения нулевое тогда и только тогда, когда это расслоение получается подкручиванием некоторого лагранжева расслоения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi = d\varphi$. Искомое лагранжево расслоение получается из данного подкручиванием на форму $-\varphi$.

2.2. Аффинные расслоения. Как уже отмечалось, основное свойство почти лагранжевых расслоений, используемое в этой работе, – это возможность сопоставить ковектору α базы преобразование слоя – сдвиг за единичное время вдоль поля сдвига v_α . Поэтому в этом пункте мы формализуем понятие расслоения, на котором существует послойное действие другого расслоения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\pi_0: V \rightarrow B$ – локально тривиальное расслоение, каждый слой которого обладает структурой абелевой группы (структура группы гладко зависит от слоя).

Скажем, что на расслоении $\pi: E \rightarrow B$ задано *послойное действие* расслоения $\pi_0: V \rightarrow B$, если для любой точки x базы B на слое $F_x = \pi^{-1}(x)$ в E задано действие соответствующего слоя $W_x = \pi_0^{-1}(x)$ из V .

Если каждое действие W_x на F_x является свободным и транзитивным, то расслоение $\pi: E \rightarrow B$ назовем *аффинным расслоением*. Расслоение $\pi_0: V \rightarrow B$ в этом случае будем называть *присоединенным* к $\pi: E \rightarrow B$.

Два расслоения с заданными на них послойными действиями одного и того же расслоения $\pi_0: V \rightarrow B$ назовем *эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм тотальных пространств, переводящий послойные действия расслоения $\pi_0: V \rightarrow B$ друг в друга.

Для любых $x \in F_x$ и $v \in W_x$ будем обозначать результат применения элемента v к точке x через $v \circ x$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В дальнейшем в роли расслоения $\pi_0: V \rightarrow B$ будет выступать T^*B , однако нигде не будет использована возможность умножения ковекторов на скаляр.

По определению аффинного расслоения для любых двух точек z_1, z_2 из одного и того же слоя $F_x \subset E$ существует и единствен элемент $v \in W_x$, переводящий z_1 в z_2 . Отсюда следует, что если в аффинном расслоении $\pi: E \rightarrow B$ с присоединенным расслоением $\pi_0: V \rightarrow B$ фиксировано сечение $s: B \rightarrow E$, то отображение, ставящее в соответствие элементу $\alpha \in W_x$ точку $\alpha \circ s(x)$, устанавливает естественную эквивалентность аффинного расслоения $\pi: E \rightarrow B$ и присоединенного расслоения $\pi_0: V \rightarrow B$. Подчеркнем, что эта эквивалентность зависит от выбора сечения $s: B \rightarrow E$.

Это позволяет дать эквивалентное определение аффинного расслоения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Назовем расслоение $\pi: E \rightarrow B$ *аффинным расслоением с присоединенным расслоением* $\pi_0: V \rightarrow B$, если существуют такое покрытие $\{U_i\}$ базы B и такие отображения $\phi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \pi_0^{-1}(U_i)$, что функции склейки $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ являются послойными сдвигами на сечение расслоения V над $U_i \cap U_j$.

Два введенных понятия аффинных расслоений эквивалентны: определение 8 получается из определения 7, если ввести набор локальных сечений; а чтобы получить определение 7 из определения 8, достаточно задать действие локально, воспользовавшись групповой структурой в $\pi_0^{-1}(U_i)$, а затем заметить, что введенное действие не зависит от выбора окрестности U_i .

Таким образом, на почти лагранжевом расслоении можно построить послойное действие расслоения T^*B . Введем теперь понятия, позволяющие описать ядро неэффективности этого действия, т.е. множество ковекторов, задающих тождественное действие на соответствующем слое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Назовем *решеткой ранга k* на многообразии B (или в T^*B) подмногообразием в T^*B , трансверсальное всем его слоям, такое, что пересечение с каждым слоем кокасательного расслоения является дискретной подгруппой ранга k .

Две решетки на B и B' *изоморфны* тогда и только тогда, когда существует диффеоморфизм $f: B \rightarrow B'$, дифференциал которого df переводит одну решетку в другую.

Назовем решетку ранга k на многообразии B *замкнутой*, если любое ее (локальное) сечение является замкнутой 1-формой.

Другими словами, задание решетки на многообразии – это фиксация решетки $\mathbb{Z}^k \subset \mathbb{R}^n$ в каждом слое кокасательного расслоения, которая гладко зависит от точки.

Обозначим через (B, P) пространство B с решеткой P на нем.

В дальнейшем часто будет использоваться следующее очевидное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть задано аффинное расслоение $\pi: E \rightarrow B$ с присоединенным расслоением $\pi_0: V \rightarrow B$. Тогда для любого непрерывного отображения $f: \tilde{B} \rightarrow B$ индуцированное расслоение $f^*\pi = \tilde{\pi}: \tilde{E} \rightarrow \tilde{B}$ будет аффинным расслоением над $\tilde{B}$ с присоединенным индуцированным расслоением $f^*\pi_0 = \tilde{\pi}_0: \tilde{V} \rightarrow \tilde{B}$.

Построенное расслоение $f^*\pi = \tilde{\pi}: \tilde{E} \rightarrow \tilde{B}$ будем называть *индуцированным (отображением f) аффинным расслоением*.

2.3. Эквивалентность понятий аффинного и почти лагранжева расслоения. В п. 2.1 для любого почти лагранжева расслоения $\pi: (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$ было построено послойное действие T^*B^n на нем: ковектору α был сопоставлен сдвиг за единичное время вдоль поля сдвига v_α . Покажем, что это действие T^*B^n определяет лагранжево расслоение с точностью до подкручивания (подкручивание определено в примере 3).

ТЕОРЕМА 6. 1) Пусть $\pi: (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$ – почти лагранжево расслоение. Тогда отображение $\alpha \rightarrow s_\alpha$ индуцирует на данном расслоении структуру аффинного расслоения с присоединенным расслоением T^*B/P , где P – некоторая замкнутая решетка на B^n .

2) Для любой замкнутой решетки P на B структура любого аффинного расслоения $\pi: E \rightarrow B$ с присоединенным расслоением T^*B/P индуцируется некоторым почти лагранжевым расслоением.

3) Два почти лагранжевых расслоения лагранжево эквивалентны с точностью до подкручивания тогда и только тогда, когда им соответствуют эквивалентные аффинные расслоения.

Иными словами, соответствие $\alpha \rightarrow s_\alpha$ позволяет отождествить категорию почти лагранжевых расслоений, профакторизованную по подкручиваниям, с категорией аффинных расслоений с присоединенным расслоением T^*B/P для всевозможных замкнутых решеток P на B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. 1) Отображение $\alpha \rightarrow s_\alpha$ задает послойное действие T^*B на данном расслоении. В утверждении 3 было показано, что это действие транзитивно (в каждом слое). Так как размерность базы совпадает с размерностью слоя, то ядро неэффективности P дискретно в каждом кокасательном пространстве T_x^*B . А так как расслоение локально тривиально, то ранг P постоянен, т.е. P – решетка. Замкнутость P следует из утверждения 3.

2) В этом пункте доказательства будем обозначать через $\tilde{\alpha}$ элемент T^*B/P , соответствующий элементу $\alpha \in T^*B$. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ – аффинное расслоение с присоединенным расслоением $\pi_0: T^*B/P \rightarrow B$. Введем на $\pi: E \rightarrow B$ структуру почти лагранжева расслоения, согласованную со структурой аффинного расслоения. А именно, построим такую 2-форму η , что все слои будут максимально изотропными, $d\eta = \pi^*\psi$ (для некоторой 3-формы ψ на базе B) и $s_\alpha z = \tilde{\alpha} \circ z$ для любой точки $z \in E$ и для любого ковектора $\alpha \in T_{\pi(z)}^*B$. Построим форму η локально, а затем продолжим на все пространство при помощи разбиения единицы. Для того чтобы построить локальную форму, рассмотрим покрытие $\{U_i\}$ базы B из определения 8. Так как решетка замкнута, то из утверждения 3 следует, что каноническая форма ω_0 корректно индуцируется на $\pi^{-1}(U_i) \simeq T^*U_i/P$ с T^*U_i . Обозначим индуцированную форму через η_i . Чтобы получить форму на всем пространстве, рассмотрим разбиение единицы ϕ_i , согласованное с покрытием $\{U_i\}$, и возьмем $\eta = \sum_i \phi_i \eta_i$.

Явно проверим в координатах, что форма η невырождена и согласована со структурой аффинного расслоения. Для этого заметим, что если в окрестности точки $z \in E$ выбрать координаты $q^1, \dots, q^n$, постоянные на слоях, а затем дополнить их координатами $p_1, \dots, p_n$, соответствующими ковекторам dq^i , то матрица формы $\phi_i \eta_i$ будет иметь вид $\begin{pmatrix} 0 & \phi_i E \\ -\phi_i E & \phi_i \Phi_i \end{pmatrix}$, где Φ_i – некоторая $(n \times n)$ -матрица, зависящая только от $q^1, \dots, q^n$. Значит, форме η соответствует матрица $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & \sum_i \phi_i \Phi_i \end{pmatrix}$.

3) Нетривиальным является лишь тот факт, что если $\pi_i: (M^{2n}, \eta_i) \rightarrow B^n$, $i = 1, 2$, – два почти лагранжевых расслоения, которым соответствует одно и то же аффинное расслоение, то существует такая 2-форма φ на базе B^n , что $\eta_1 - \eta_2 = \pi^*\varphi$. Построим явно эту форму φ , индуцировав ее с произвольного (локального) сечения. Из утверждения 3 следует, что формы η_1 и η_2 одинаково изменятся при переходе к другому сечению, поэтому форма φ корректно определена.

Выясним теперь, когда подкручивание расслоения не меняет его. Для этого дадим несколько определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Решетчатой 1-формой (на B) называется сечение расслоения T^*B/P .

Множество решетчатых 1-форм на пространстве B будем обозначать через $\Omega_P^1(B)$.

Заметим, что для замкнутой решетки P дифференциал решетчатой 1-формы α корректно определен как 2-форма на B , т.е. $d\alpha$ не зависит от выбора локального представителя α в T^*B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Решетчатая 1-форма α называется *замкнутой*, если $d\alpha = 0$.

ЛЕММА 2. Пусть $\pi: (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$ – почти лагранжеево расслоение и φ_1, φ_2 – две 2-формы на B^n . Подкрученные расслоения $\pi: (M^{2n}, \eta + \pi^*\varphi_i) \rightarrow B^n$ лагранжеево эквивалентны тогда и только тогда, когда $\varphi_2 - \varphi_1 = d\alpha$ для некоторой решетчатой 1-формы α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Leftarrow$) Пусть $\varphi_2 - \varphi_1 = d\alpha$. Расслоение, подкрученное формой φ_1 , переходит в расслоение, подкрученное формой φ_2 , при сдвиге за единичное время вдоль векторного поля $v_{\tilde{\alpha}}$, построенного по форме φ_1 и произвольной (локальной) 1-форме $\tilde{\alpha}$, соответствующей решетчатой 1-форме α (этот сдвиг не зависит от локального представителя $\tilde{\alpha}$, так как решетка P – ядро неэффективности).

($\Rightarrow$) Лагранжева эквивалентность индуцирует эквивалентность соответствующих аффинных пространств, так как подкручивание не меняет структуру аффинного расслоения. Эквивалентность аффинного расслоения с присоединенным расслоением T^*B/P – это сдвиг на решетчатую 1-форму. Из утверждения 3 следует, что $\varphi_1 - \varphi_2 = d\alpha$.

2.4. Классификация аффинных расслоений. Выясним теперь, когда два аффинных расслоения $\pi_i: E_i \rightarrow B$ с присоединенным расслоением T^*B/P эквивалентны. Опишем два подхода к решению этой задачи: при помощи теории препятствий и при помощи когомологий, определяемых функциями склеек. После этого укажем, как из второго подхода может быть получена классификация лагранжеевых расслоений при помощи когомологий Чеха (использованная К. Н. Мишачёвым в [4] и Дж. Дюйстермаатом в [2]).

2.4.1. Классификация при помощи теории препятствий. Фиксируем некоторое клеточное разбиение B . Везде в этом пункте через e_i^k будет обозначаться i -я k -мерная клетка пространства B , а через $\chi_i^k: D^k \rightarrow B$ – ее характеристическое отображение. Также здесь, если задано расслоение $\pi: E \rightarrow B$, будем обозначать через $\pi^l: E^l \rightarrow B^l$ индуцированное расслоение над l -остовом B^l .

Покажем, что аффинные расслоения с присоединенным расслоением T^*B/P классифицируются препятствием к распространению сечения на 2-остов. В теореме 7 будет показано, что если препятствия одинаковы, то расслоения эквивалентны, а в теореме 8 – что аффинными расслоениями реализуются все возможные препятствия.

Прежде чем доказывать эти теоремы, напомним вкратце понятие препятствия к построению сечения (теорию препятствий см., например, в [5], [6]), а также покажем, как сравнивать препятствия к построению сечений для различных аффинных расслоений с присоединенным расслоением T^*B/P .

Препятствия. Понятие препятствия (к продолжению отображения) основано на том, что если задано отображение $s: B^k \rightarrow Y$ из k -остова B^k в гомотопически k -простое топологическое пространство Y , то для каждой $(k+1)$ -мерной

клетки e^{k+1} отображение $s|_{\partial e^{k+1}}: S^k \rightarrow Y$, порождаемое s , задает элемент $A \in \pi_k(Y)$ (гомотопическая k -простота Y означает, что $\pi_k(Y, y_0)$ канонически изоморфны для различных точек y_0 пространства Y).

Препятствие к построению сечения основано на той же идее, но вместо отображений берутся сечения. А именно, пусть $\pi: E \rightarrow B$ – локально тривиальное расслоение с гомотопически k -простым слоем F , и пусть над B^k задано сечение $s: B^k \rightarrow E$. По теореме Фельдбау (локально тривиальное расслоение над диском тривиально) индуцированное над каждой клеткой e_i^{k+1} расслоение $(\chi_i^{k+1})^* E \rightarrow D^{k+1}$ тривиально, поэтому отображение s порождает отображение $s|_{\partial D^{k+1}}: S^k \rightarrow F$. Это значит, что любой клетке e_i^{k+1} соответствует элемент $c_i \in \pi_k(F)$ гомотопической группы слоя F над этой клеткой.

Говорят, что на многообразии B задана система локальных коэффициентов, если каждой точке $x \in B$ сопоставлена группа G_x и каждому пути s из x в y , рассматриваемому с точностью до гомотопии с фиксированными концами, соответствует гомоморфизм $\gamma_s: G_x \rightarrow G_y$. Композиции путей там, где эта операция определена, при этом должна соответствовать композиция гомоморфизмов.

Если слой гомотопически k -прост, то обозначим через $\{\pi_k(F)\}$ локальные коэффициенты, соответствующие k -й гомотопической группе слоя. Так как клетки односвязны (и даже стягиваемы), то группы $\pi_k(F)$ над каждой клеткой могут быть канонически отождествлены. Следовательно, набор c_i задает $(k+1)$ -мерную клеточную коцепь $c \in \mathcal{C}^{k+1}(B, \{\pi_k(F)\})$, называемую *препятствующей коцепью*.

По теореме Гуревича препятствующая коцепь c – коцикл. *Препятствием* (κ распространению сечения s на $(k+1)$ -остов) называется класс $[c] \in H^{k+1}(B, \{\pi_k(F)\})$. Отметим, что прибавление любой кограницы может быть реализовано сменой сечения на k -остове без изменения его на $(k-1)$ -остове. А именно, верно следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть заданы локально тривиальное расслоение $\pi: E \rightarrow B$ и сечение $s: B^k \rightarrow E^k$, которому соответствует препятствующая коцепь $c \in \mathcal{C}^{k+1}(B, \{\pi_k(F)\})$. Тогда для любой коцепи $\tilde{c}$, когомологичной препятствующей коцепи c (т.е. $\tilde{c} - c = \delta b$, где $b \in \mathcal{C}^k(B, \{\pi_k(F)\})$), существует такое сечение $\tilde{s}: B^k \rightarrow E^k$, совпадающее с s на $(k-1)$ -остове B^{k-1} , что $\tilde{c}$ является препятствующей коцепью для сечения $\tilde{s}$.

Сравнение препятствий. Пусть $\pi_i: E_i \rightarrow B$, $i = 1, 2$, – аффинные расслоения с присоединенным расслоением T^*B/P . Отметим, что их препятствия к распространению сечений на 2-остов B^2 можно сравнивать, поскольку их можно интерпретировать как элементы одной и той же группы $H^2(B, P)$: локальные коэффициенты $\{\pi_1(F)\}$ можно отождествить с решеткой P . Действительно, для каждого слоя F_x любого аффинного расслоения $\pi: E \rightarrow B$ с присоединенным расслоением T^*B/P фундаментальная группа $\pi_1(F_x)$ естественным образом изоморфна соответствующему слою P_x решетки P (поскольку $\pi_1(F_x) \simeq \pi_1(T_x^*B/P_x) \simeq P_x$).

Препятствующие коцепи сравниваются аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отметим, что слой F рассматриваемых аффинных расслоений диффеоморфен $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^{n-m}$, а следовательно, он гомотопически k -прост для любого k .

ТЕОРЕМА 7. Два аффинных расслоения $\pi_i: E_i \rightarrow B$, $i = 1, 2$, с присоединенным расслоением $\pi_0: T^*B/P \rightarrow B$, где P – замкнутая решетка на B , эквивалентны тогда и только тогда, когда им соответствует одно и то же препятствие к распространению сечения на 2-остов – один и тот же элемент $H^2(B, P)$ (первое нетривиальное препятствие).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Эквивалентность расслоений устанавливает равенство препятствий.

($\Leftarrow$) Пусть теперь препятствия у расслоений $\pi_i: E_i \rightarrow B$ совпадают. Построим эквивалентность расслоений поостовно, а для каждого остова – поклеточно.

Пусть над $(k-1)$ -остовом B^{k-1} уже построена эквивалентность

$$E_1^{k-1} \sim_{k-1} E_2^{k-1}.$$

Так как аффинное расслоение с фиксированным сечением канонически эквивалентно соответствующему присоединенному (см. п. 2.2), то для построения эквивалентности над клеткой e_j^k достаточно задать два сечения $s_i: D^k \rightarrow (\chi_j^k)^* E_i$, $i = 1, 2$, так, чтобы эквивалентность, переводящая их друг в друга, совпала с эквивалентностью $\sim_{k-1}$ на $(k-1)$ -остовах.

Таким образом, для построения эквивалентности над клеткой e_j^k достаточно найти стягиваемое сечение $s_1^k: \partial D^k \rightarrow (\chi_j^k)^* E_1$ такое, что соответствующее ему относительно $\sim_{k-1}$ сечение $s_2^k: \partial D^k \rightarrow (\chi_j^k)^* E_2$ будет стягиваемым (сечение s над границей клетки ∂e_j^k будем называть *стягиваемым*, если оно продолжается на всю клетку e_j^k). После этого достаточно перевести сечения над клетками друг в друга.

В зависимости от размерности k будем доказывать это по-разному.

Случай $k = 1$. Над 1-остовом у обоих аффинных расслоений $\pi_i: E_i \rightarrow B$ существуют сечения $s_i^1: B^1 \rightarrow E_i^1$. Более того, благодаря утверждению 5 эти сечения s_i^1 можно выбрать так, чтобы у них совпали препятствующие коцепи.

Случай $k = 2$. Пусть эквивалентность $\sim_1$ над 1-остовом определяется сечениями $s_i^1: B^1 \rightarrow E_i$, $i = 1, 2$, над 1-остовом B^1 такими, что у них совпадают препятствующие коцепи. Покажем, что тогда эквивалентность $\sim_1$ может быть продолжена на 2-остов.

Рассмотрим произвольную 2-клетку e_j^2 . Выберем произвольное сечение $s_1: D^2 \rightarrow (\chi_j^2)^* E_1$ над этой клеткой e_j^2 . Требуется доказать, что сечение $s_2: S^1 \rightarrow (\chi_j^2)^* E_2$, соответствующее сечению $s_1|_{\partial e_j^2}: S^1 \rightarrow (\chi_j^1)^* E_1$ относительно эквивалентности $\sim_1$, будет стягиваемым. Чтобы это сделать, перейдем от аффинных расслоений $(\chi_j^2)^* E_i \rightarrow D^2$ к соответствующему присоединенному расслоению $(\chi_j^2)^*(T^*B/P) \rightarrow D^2$: отождествим первое аффинное расслоение с присоединенным при помощи сечения $s_1: D^2 \rightarrow E_1^1$, а второе отождествим при помощи произвольного сечения.

Теперь задача может быть переформулирована следующим образом: заданы расслоение $(\chi_j^2)^*(T^*B/P) \rightarrow D^2$ и два сечения $\tilde{s}_i: S^1 \rightarrow (\chi_j^2)^*(T^*B/P)$, $i = 1, 2$,

над ∂D^2 , задающие один и тот же элемент фундаментальной группы тотального пространства $\pi_1((\chi_j^2)^*(T^*B/P))$ (это соответствует равенству препятствий). Требуется доказать, что сечение $\tilde{s}_2 - \tilde{s}_1$ будет стягиваемым (если сечению s_1 соответствует нулевое сечение расслоения $(\chi_j^2)^*(T^*B/P)$, то сечению s_2 соответствует $\tilde{s}_2 - \tilde{s}_1$). Это верно, так как разности $\tilde{s}_2 - \tilde{s}_1$ соответствует нулевой элемент группы $\pi_1((\chi_j^2)^*(T^*B/P))$ (это следует из того, что сечениям $\tilde{s}_1$ и $\tilde{s}_2$ соответствует один и тот же элемент этой фундаментальной группы).

Случай $k > 2$. Для локально тривиальных расслоений $(\chi_j^k|_{e_j^k})^*E_i \rightarrow D^k$ любое сечение продолжается с $\partial e_j^k \simeq S^{k-1}$ на всю клетку $e_j^k \simeq D^k$. Действительно, препятствие к продолжению этого сечения задается элементом группы $\pi_{k-1}(F) = \pi_{k-1}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^{n-m})$, которая тривиальна при $k > 2$.

Покажем теперь, что аффинными расслоениями могут быть реализованы все возможные препятствия.

ТЕОРЕМА 8. Пусть P – замкнутая решетка на многообразии B . Для любого класса $\gamma \in H^2(B, P)$ существует аффинное расслоение с присоединенным расслоением T^*B/P и препятствием γ (к продолжению сечения на 2-остов).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный представитель $c \in \gamma$. Явно построим расслоение, реализующее препятствующую коцепь $c \in \mathcal{C}^2(B, P)$. Строить расслоение будем поостовно, а для одного остова – поклеточно.

Заметим, что устройство расслоения над каждой клеткой определено однозначно. А именно, пусть $\pi: E \rightarrow B$ – некоторое аффинное расслоение с присоединенным расслоением T^*B/P . Тогда для каждой клетки e_j^k индуцированное расслоение $(\chi_j^k)^*E \rightarrow D^k$ эквивалентно $(\chi_j^k)^*(T^*B/P) \rightarrow D^k$. Действительно, по теореме Фельдбау расслоение $(\chi_j^k)^*E \rightarrow D^k$ тривиально, а следовательно, в нем существует сечение.

Пусть уже построено аффинное расслоение $\pi^{k-1}: E^{k-1} \rightarrow B^{k-1}$ с присоединенным расслоением $(T^*B/P)^{k-1}$. Остается лишь показать, как “приклеить” клетку e_j^k с заданным на ней расслоением $(\chi_j^k)^*(T^*B/P) \rightarrow D^k$ к расслоению $\pi^{k-1}: E^{k-1} \rightarrow B^{k-1}$. Для этого достаточно задать сечение над границей рассматриваемой клетки

$$s|_{\partial e_j^k}: S^{k-1} \rightarrow (\chi_j^k|_{\partial e_j^k})^*E^{k-1}.$$

В зависимости от размерности клетки k будем доказывать это по-разному.

Случай $k = 1$. Препятствие к построению сечения над ∂e_j^1 – элемент тривиальной группы $\pi_0(F)$.

Случай $k = 2$. Требуется построить расслоение над 2-остовом B^2 так, чтобы оно реализовало данную коцепь c . Выберем на границе каждой двумерной клетки ∂e_j^2 по точке b_j . В таком случае коцепь $c \in \mathcal{C}^2(B, P)$ будет сопоставлять каждой точке b_j элемент решетки $p_j \in P_{b_j}$.

Таким образом, нужно, чтобы искомое сечение

$$s|_{\partial e_j^2}: S^2 \rightarrow (\chi_j^2|_{\partial e_j^2})^*E^1$$

задавало элемент p_j над клеткой e_j^2 .

Чтобы построить это сечение, подробнее изучим строение аффинного расслоения $\pi^1: E^1 \rightarrow B^1$. Для рассматриваемого расслоения $\pi^1: E^1 \rightarrow B^1$ существует сечение $s^1: B^1 \rightarrow E^1$, поэтому это аффинное расслоение эквивалентно $(T^*B/P)^1$. Последнее же расслоение можно представить как фактор $(T^*B)^1$ по P^1 .

Перейдем теперь от построения сечения в $E^1 \simeq (T^*B/P)^1$ к построению сечения в $(T^*B)^1$. Для этого разобьем окружность $\partial e_j^2 \simeq S^1$ точкой b_j , т.е. представим ∂e_j^2 в виде отрезка $I = [b_j^1, b_j^2]$ с отождествленными концами (соответствующими точке b_j). Обозначим через $(T^*B)^I$ расслоение, индуцированное над отрезком I кокасательным расслоением T^*B . Для построения сечения над ∂e_j^2 остается лишь построить сечение $s_I: I \rightarrow (T^*B)^I$, отличающееся в граничных точках на элемент p_j , например $s_I(b_j^1) = 0$, $s_I(b_j^2) = p_j$. (Чтобы после этого получить расслоение над e_j^2 , остается профакторизовать $(T^*B)^I$ по решетке P , а затем склеить концы отрезка I .) Сечение s_I несложно построить опять же благодаря теореме Фельдбау: расслоение $(T^*B)^I \rightarrow I$ тривиально.

Случай $k = 3$. Покажем, что расслоение $\pi^2: E^2 \rightarrow B^2$ может быть продолжено с B^2 на клетку e_j^3 (т.е. что у расслоения $(\chi_j^3|_{\partial e_j^3})^* E^2 \rightarrow S^2$ существует сечение). Подчеркнем, что при построении сечения существенно использован тот факт, что препятствующая коцепь является коциклом.

Прежде всего заметим, что случай, когда образ сферы $\chi_j^3(\partial e_j^3)$ не пересекается с 1-остовом B^1 , тривиален: в таком случае $\chi_j^3(\partial e_j^3)$ содержится в какой-то открытой клетке $\text{Int } e_m^2$, над которой по теореме Фельдбау существует сечение $s: \text{Int } e_m^2 \rightarrow E^2$. Сечение s задает искомое сечение над ∂e_j^3 . Поэтому в дальнейшем можно считать, что на ∂e_j^3 существует такая точка s_0 , что $\chi_j^3(s_0) \in B^1$. Представим сферу $\partial e_j^3 \simeq S^2$ с фиксированной точкой s_0 как диск со стянутой в точку границей. Иными словами, фиксируем произвольное отображение пар пространств $g: (D^2, \partial D^2) \rightarrow (\partial e_j^3, s_0)$, диффеоморфно отображающее $\text{Int } D^2 = D^2 \setminus \partial D^2$ на $\partial e_j^3 \setminus s_0$. Соответствующее отображение диска в 2-остов обозначим через $\chi: (D^2, \partial D^2) \rightarrow (B^2, B^1)$.

Покажем теперь, что любое сечение $s^1: B^1 \rightarrow E^2$ продолжается с точки s_0 на всю сферу S^2 . Для этого рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_2(D^2, \partial D^2) & \xrightarrow{\chi^*} & \pi_2(B^2, B^1) & & \\
 h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & (4) \\
 H_3(e_j^3, \partial e_j^3; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_2(\partial e_j^3, s_0; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(\chi_j^3|_{\partial e_j^3})^*} & H_2(B^2, B^1; \mathbb{Z}) \xrightarrow{c} \{\pi_1(F)\}
 \end{array}$$

В этой диаграмме через c обозначена препятствующая коцепь, соответствующая сечению s^1 ; h_2 – гомоморфизм Гуревича; h_1 – композиция изоморфизма $g_*: \pi_2(D^2, \partial D^2) \rightarrow \pi_2(\partial e_j^3, s_0)$ с гомоморфизмом Гуревича $\pi_2(\partial e_j^3, s_0) \rightarrow H_2(\partial e_j^3, s_0; \mathbb{Z})$. Так как в данном случае гомоморфизмы Гуревича являются изоморфизмами, то h_1 и h_2 – тоже изоморфизмы. Сечение s^1 продолжается с s_0 на ∂e_j^3 тогда и только тогда, когда отображение $\pi_2(D^2, \partial D^2) \rightarrow \{\pi_1(F)\}$ тривиально. Однако при помощи изоморфизма Гуревича можно перейти от рассмотрения относительных гомотопических групп к рассмотрению относительных гомологий, или, проще говоря, перейти к изучению нижней строчки

диаграммы (4). Легко видеть, что отображение

$$\partial_* \circ (\chi_j^3|_{\partial e_j^3})_* \circ c: H_3(e_j^3, \partial e_j^3; \mathbb{Z}) \rightarrow \{\pi_1(F)\}$$

есть в точности ограничение клеточной коцепи $\delta c: \mathcal{C}^3(B, \mathbb{Z}) \rightarrow \{\pi_1(F)\}$ на подпространство $H_3(e_j^3, \partial e_j^3; \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^3(B^3, B^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathcal{C}^3(B, \mathbb{Z})$. Так как $\delta c = 0$ по построению, то композиция гомоморфизмов в нижней строчке задает нулевое отображение. Но отображение ∂_* является изоморфизмом, поэтому отображение $\pi_2(D^2, \partial D^2) \rightarrow \{\pi_1(F)\}$ тривиально. Значит, над сферой $\partial e_j^3 \simeq S^2$ существует сечение.

Случай $k > 3$. Для того чтобы построить сечение над $\partial e_j^k \simeq S^{k-1}$, разобьем сферу S^{k-1} на два полушария D_i^{k-1} , $i = 1, 2$. Над каждым из полушарий сечение существует: расслоение над D_i^{k-1} тривиально по теореме Фельдбау. Кроме того, над “экватором” $D_1^{k-1} \cap D_2^{k-1}$ разность сечений задает элемент гомотопической группы $\pi_{k-2}(F)$, которая тривиальна ($F \simeq \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$). Поэтому сечения над полушариями D_i^{k-1} можно склеить воедино, изменив их в малой окрестности “экватора” $D_1^{k-1} \cap D_2^{k-1}$.

Теорема 8 полностью доказана.

2.4.2. Классификации при помощи функций склеек. Опишем теперь другой подход, позволяющий классифицировать аффинные расслоения $\pi: E \rightarrow B$ с произвольным присоединенным расслоением $\pi_0: V \rightarrow B$ (похожую конструкцию см. в [7; т. 3, § 14]).

Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – покрытие B , над каждым элементом U_α которого существует сечение $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow E$ (например, U_α стягиваемы). Подчеркнем, что покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ не предполагается открытым, т.е. множества U_α не обязательно открыты. Тогда над каждым U_α сечение s_α устанавливает эквивалентность между аффинным расслоением $(\pi: E \rightarrow B)|_{U_\alpha}$ и индуцированным присоединенным расслоением $(\pi_0: V \rightarrow B)|_{U_\alpha}$. Поэтому аффинные расслоения $\pi: E \rightarrow B$ классифицируются множеством функций склеек $\gamma_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow V$ (т.е. $\gamma_{\alpha\beta} \circ s_\alpha = s_\beta$).

Покажем теперь, что множество функций склеек $\{\gamma_{\alpha\beta}\}$ может быть задано как 1-коцикл для нерва покрытия $N_{\{U_\alpha\}}$ с некоторым множеством коэффициентов $\mathcal{V}$. Для того чтобы описать это множество коэффициентов, напомним несколько понятий.

Нервом $N_{\{U_\alpha\}}$ покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется симплициальный комплекс, в котором каждому элементу покрытия U_α соответствует вершина $v_\alpha \in N_{\{U_\alpha\}}$; кроме того, вершины v_{α_i} , $i = 0, \dots, m$, лежат в одном m -мерном симплексе $\Delta_{\alpha_0, \dots, \alpha_m}^m$ тогда и только тогда, когда не пусто пересечение $\bigcap_{i=0}^m U_{\alpha_i}$.

Напомним также следующее обобщение понятия симплициальных когомологий. Пусть задан симплициальный комплекс K и каждому m -мерному симплексу $\Delta_{\alpha_0, \dots, \alpha_m}^m$ сопоставлена группа $G_{\alpha_0, \dots, \alpha_m}^m$. Кроме того, пусть для каждой пары пересекающихся симплексов $\Delta_{\alpha_0, \dots, \alpha_m}^m$ и $\Delta_{\alpha_0, \dots, \alpha_{m+1}}^{m+1}$ определен кограничный оператор

$$\delta_{(\alpha_0, \dots, \alpha_m; \alpha_{m+1})}^m: G_{\alpha_0, \dots, \alpha_m}^m \rightarrow G_{\alpha_0, \dots, \alpha_{m+1}}^{m+1}.$$

Тогда могут быть построены симплициальные когомологии $H^k(K, \{G_{\beta_0, \dots, \beta_m}^m\})$ с коэффициентами в $\{G_{\beta_0, \dots, \beta_m}^m\}$, единственное отличие которых от обычных

симплициальных гомологий заключается в том, что коэффициентом при симплексе $\Delta_{\alpha_0, \dots, \alpha_m}^m$ должен служить элемент $G_{\alpha_0, \dots, \alpha_m}^m$. То есть множество коцепей $C^k(K, \{G_{\beta_0, \dots, \beta_m}^m\})$ – множество линейных комбинаций

$$\sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_k} (g_{\alpha_0, \dots, \alpha_k}^k \Delta_{\alpha_0, \dots, \alpha_k}^k),$$

где $g_{\alpha_0, \dots, \alpha_k}^k \in G_{\alpha_0, \dots, \alpha_k}^k$, а кограничный оператор δ определяется по формуле

$$\begin{aligned} \delta \left(\sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_k} (g_{\alpha_0, \dots, \alpha_k}^k \Delta_{\alpha_0, \dots, \alpha_k}^k) \right) \\ = \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_k} \left(\sum_{\alpha_{k+1}} \delta_{(\alpha_0, \dots, \alpha_k; \alpha_{k+1})}^k (g_{\alpha_0, \dots, \alpha_k}^k) \Delta_{\alpha_0, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}}^{k+1} \right). \end{aligned}$$

Здесь для любой перестановки индексов $\sigma: \{\alpha_0, \dots, \alpha_m\} \rightarrow \{\alpha_0, \dots, \alpha_m\}$ по определению полагается $\Delta_{\sigma(\alpha_0, \dots, \alpha_m)}^m = (-1)^{\text{sgn } \sigma} \Delta_{\alpha_0, \dots, \alpha_m}^m$.

Опишем теперь множество коэффициентов $\mathcal{V}$. Возьмем в качестве $G_{\alpha_0, \dots, \alpha_m}^m$ группу сечений расслоения $\pi_0: V \rightarrow B$ над пересечением $\bigcap_{i=0}^m U_{\alpha_i}$. Через $\mathcal{V}$ обозначим набор этих групп $\{G_{\alpha_0, \dots, \alpha_m}^m\}$. Граничные операторы $\delta_{\alpha_0, \dots, \alpha_m; \alpha_{m+1}}^m$ задаются операцией ограничения сечения.

Заметим, что множество функций склеек $\{\gamma_{\alpha\beta}\}$ задает 1-коцепь $c \in C^1(N_{\{U_\alpha\}}, \mathcal{V})$: каждому 1-мерному симплексу нерва покрытия $N_{\{U_\alpha\}}$, т.е. пересечению $U_\alpha \cap U_\beta$, элемент $\gamma_{\alpha\beta}$ сопоставляет сечение расслоения $\pi_0: V \rightarrow B$ над $U_\alpha \cap U_\beta$, т.е. элемент $\mathcal{V}$.

ЛЕММА 3. *Множество функций склеек $\{\gamma_{\alpha\beta}\}$ задает 1-коцикл $c \in Z^1(N_{\{U_\alpha\}}, \mathcal{V})$ для нерва покрытия $N_{\{U_\alpha\}}$ с множеством коэффициентов $\mathcal{V}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что $\delta c = 0$. Для этого достаточно показать, что $\gamma_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\lambda} + \gamma_{\beta\lambda} = 0$. Чтобы доказать это равенство, достаточно рассмотреть действие этих элементов из V на s_α :

$$\gamma_{\lambda\alpha} \circ (\gamma_{\beta\lambda} \circ (\gamma_{\alpha\beta} \circ s_\alpha)) = s_\alpha.$$

ТЕОРЕМА 9. *Пусть U_α – такое покрытие B , что все U_α стягиваемы. Два аффинных расслоения $\pi_i: E_i \rightarrow B$, $i = 1, 2$, с присоединенным расслоением $\pi_0: V \rightarrow B$ эквивалентны тогда и только тогда, когда им соответствует один и тот же элемент группы $H^1(N_{\{U_\alpha\}}, \mathcal{V})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество кограниц находится во взаимно однозначном соответствии со сменами сечений над элементами покрытия $\{U_\alpha\}$. Поэтому каждому расслоению однозначно соответствует класс когомологий, и если двум расслоениям соответствует один и тот же класс, то они эквивалентны.

Выберем произвольный представитель c класса $\gamma \in H^1(N_{\{U_\alpha\}}, \mathcal{V})$. Для построения соответствующего аффинного расслоения зададим его над каждым U_α как $(\pi_0: V \rightarrow B)|_{U_\alpha}$, а затем зададим функции склейки между сечениями $\gamma_{\alpha\beta}$ как элементы представителя $c \in \gamma$.

В настоящей работе в дальнейшем, при классификации лагранжевых расслоений, будут рассматриваться аффинные расслоения с присоединенным расслоением T^*B/P . Поэтому выделим в качестве отдельного следствия теоремы 9 классификацию расслоений именно с таким присоединенным расслоением.

Через $C^\infty(T^*B/P)$ будет обозначаться множество, построенное по аналогии с $\mathcal{V}$, а именно в качестве группы $G_{\alpha_0, \dots, \alpha_m}^m$ берется группа сечений расслоения T^*B/P (т.е. решетчатые 1-формы) над пересечением $\bigcap_{i=0}^m U_{\alpha_i}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть U_α – такое покрытие B , что все U_α стягиваемы. Два аффинных расслоения $\pi_i: E_i \rightarrow B$, $i = 1, 2$, с присоединенным расслоением T^*B/P эквивалентны тогда и только тогда, когда им соответствует один и тот же элемент группы $H^1(N_{\{U_\alpha\}}, C^\infty(T^*B/P))$.

2.4.3. Классификация при помощи когомологии Чеха. Опишем теперь кратко, как может быть получена классификация лагранжевых расслоений при помощи когомологий Чеха (когомологий с коэффициентами в пучке), предложенная Дюйстермаатом в его работе [2] и использованная Мишачёвым в [4] (необходимые факты из теории пучков см. в [7; т. 3, гл. 14]).

Для получения этой классификации нужно взять прямой предел

$$\varinjlim H^1(N_{\{U_\alpha\}}, C^\infty(T^*B/P))$$

по множеству открытых покрытий $\{U_\alpha\}$, упорядоченных относительно операции измельчения (вписывания). При этом после перехода к открытым покрытиям множество коэффициентов $C^\infty(T^*B/P)$ может быть заменено на пучок $\Gamma(T^*B/P)$ (локальных) сечений факторкасательного расслоения T^*B/P .

При вычислениях когомологий Чеха переход к прямому пределу обычно заменяется теоремой Лере, утверждающей, что когомологии Чеха изоморфны когомологиям, вычисленным для абсолютно стягиваемых покрытий, определяемых следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Назовем покрытие $\{U_\alpha\}$ множества B абсолютно стягиваемым, если все U_α и все их конечные пересечения $\bigcap_{i=1}^N U_{\alpha_i}$ стягиваемы.

Для классификации же лагранжевых расслоений остается заметить, что сечение над каждым (открытым стягиваемым множеством) U_α может быть сделано лагранжевым. Тогда аналогично теореме 9 можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 10. Пусть P – замкнутая решетка на многообразии B . Два лагранжеевых расслоения $\pi_i: (M_i, \omega_i) \rightarrow B$ с соответствующей решеткой P лагранжеево эквивалентны тогда и только тогда, когда им соответствует один и тот же элемент группы $H^1(B, \Lambda(T^*B/P))$ (1-когомологий Чеха с коэффициентами в пучке $\Lambda(T^*B/P)$ лагранжеевых сечений расслоения T^*B/P).

Преимущество классификации при помощи когомологий Чеха в том, что она определена однозначно – не зависит от выбора покрытия. Однако метод, описанный в п. 2.4.2, годится для более широкого класса покрытий: метод когомологий Чеха обычно применяется к открытым покрытиям, поэтому его применение к симплициальному разбиению, как минимум, требует дополнительных объяснений.

§ 3. Вычисление инвариантов лагранжевых расслоений

Общая схема классификации почти лагранжевых и лагранжевых расслоений. Собирая воедино результаты § 2 (см. леммы 1 и 2, а также теоремы 6–8), получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 11. 1) Любая замкнутая решетка P на пространстве B^n и любое препятствие к построению сечения $\gamma \in H^2(B^n, P)$ могут быть реализованы некоторым почти лагранжевым расслоением, т.е. существует почти лагранжево расслоение $\pi: (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$ с соответствующими решеткой P и препятствием γ .

2) Решетка P и препятствие γ могут быть реализованы некоторым лагранжевым расслоением тогда и только тогда, когда почти лагранжевым расслоением, реализующим эти решетку и препятствие, соответствует нулевое препятствие к построению симплектической структуры.

3) Для любых двух (почти) лагранжевых расслоений $\pi_i: (M_i^{2n}, \eta_i) \rightarrow B^n$, $i = 1, 2$, с одинаковыми соответствующими решетками $P_i \subset T^*B$ и препятствиями к построению сечения $\gamma_i \in H^2(B, P_i)$ существует такая 2-форма φ на базе B , что подкрученное первое расслоение $\pi_1: (M_1^{2n}, \eta_1 + \pi_1^* \varphi) \rightarrow B^n$ лагранжево эквивалентно второму расслоению $\pi_2: (M_2^{2n}, \eta_2) \rightarrow B^n$.

4) Два подкрученных (почти) лагранжевых расслоения $\pi: (M^{2n}, \eta + \pi^* \varphi_i) \rightarrow B^n$, $i = 1, 2$, с соответствующей решеткой P лагранжево эквивалентны тогда и только тогда, когда $\varphi_1 - \varphi_2 = d\alpha$ для некоторой решетчатой 1-формы $\alpha \in \Omega_P^1(B)$.

Также зафиксируем следующее очевидное утверждение о том, когда подкручивание оставляет лагранжево расслоение лагранжевым.

ЛЕММА 4. Для любого лагранжева расслоения $\pi: (M^{2n}, \omega) \rightarrow B^n$ расслоение $\pi: (M^{2n}, \omega + \pi^* \varphi) \rightarrow B^n$ является лагранжевым тогда и только тогда, когда подкручивающая 2-форма φ замкнута.

Из теоремы 11 вытекает, что для классификации (с точностью до лагранжевой эквивалентности) почти лагранжевых расслоений над базой B достаточно сделать следующее.

- 1) Описать все замкнутые решетки P на B .
- 2) Для данной замкнутой решетки P на B классифицировать все аффинные расслоения с присоединенным расслоением T^*B/P . Для этого (согласно теоремам 7 и 8) достаточно найти все возможные препятствия к распространению сечения на 2-остов, т.е. вычислить группу $H^2(B, P)$.
- 3) Найти фактормножества 2-форм $\Omega^2(B, \mathbb{R})$ по множеству дифференциалов решетчатых 1-форм $d\Omega_P^1(B)$.

При классификации же лагранжевых расслоений п. 3) этой схемы может быть заменен на следующие пп. 3'), 4'):

- 3') Выделить среди всех аффинных расслоений с присоединенным расслоением T^*B/P , найденных в п. 2), все с нулевым препятствием к построению симплектической структуры (см. определение 6).

Выполнение этого шага позволит найти все лагранжевы расслоения с точностью до подкручивания. Чтобы классифицировать все подкручивания, остается найти фактормножество $Z^2(B, \mathbb{R})/d\Omega_P^1(B)$. Однако любая 1-форма является решетчатой 1-формой, поэтому можно профакторизовать оба пространства $Z^2(B, \mathbb{R})$ и $d\Omega_P^1(B)$ по дифференциалам 1-форм $d\Omega^1(B)$ (т.е. по точным 2-формам). Обозначим фактор $d\Omega_P^1(B)/d\Omega^1(B)$ через $H_P^2(B)$ – это в точности множество когомологических классов из $H^2(B, \mathbb{R})$, реализуемых дифференциалами решетчатых 1-форм. В таком случае для классификации лагранжевых расслоений остается сделать следующий шаг.

4') Найти *нетривиальные подкручивания* $H^2(B, \mathbb{R})/H_P^2(B)$.

Способы вычисления указанных инвариантов описаны в пп. 3.1–3.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из теоремы 11 вытекает, что почти лагранжевы расслоения над базой B классифицируются с точностью до подкручивания (замкнутой) решеткой $P \subset T^*B$ и препятствием к построению сечения $\gamma \in H^2(B, P)$. Подкручивания почти лагранжева расслоения классифицируются группой

$$\Omega^2(B, \mathbb{R})/d\Omega_P^1(B).$$

Если база B двумерна, то любое почти лагранжево расслоение является лагранжевым, поэтому их классификации совпадают.

ПРИМЕР 4. В качестве тривиального примера опишем классификацию (почти) лагранжевых расслоений со слоем $\mathbb{R}^n$ (эта классификация может быть получена аналогично тому, как это сделано Мишачёвым в [4]).

Любое почти лагранжево расслоение $\pi: (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$ со слоем $\mathbb{R}^n$ лагранжево эквивалентно подкрученному кокасательному расслоению $\pi_0: (T^*B^n, \omega_0 + \pi_0^*\varphi) \rightarrow B^n$.

Два подкрученных кокасательных расслоения $\pi_0: (T^*B^n, \omega_0 + \pi_0^*\varphi_i) \rightarrow B^n$, $i = 1, 2$, лагранжево эквивалентны тогда и только тогда, когда разность подкручивающих форм точна, т.е. $\varphi_2 - \varphi_1 = d\alpha$ для некоторой 1-формы α на B^n .

Подкрученное почти лагранжево расслоение $\pi_0: (T^*B^n, \omega_0 + \pi_0^*\varphi) \rightarrow B^n$ является лагранжевым тогда и только тогда, когда подкручивающая 2-форма φ замкнута.

Классификация при помощи теории пучков. Укажем, как та же самая схема классификации лагранжевых расслоений может быть сформулирована на языке когомологий Чеха (эта переформулировка не будет использована в дальнейшем). Обозначения для рассматриваемых далее пучков были введены в п. 2.4.3.

Для классификации лагранжевых расслоений (т.е. для нахождения группы $H^1(B, \Lambda(T^*B/P))$) рассмотрим следующую короткую точную последовательность пучков:

$$0 \longrightarrow \Lambda(T^*B/P) \xrightarrow{i} \Gamma(T^*B/P) \xrightarrow{d} Z^2B \longrightarrow 0,$$

где Z^2B – пучок замкнутых 2-форм на B , отображение i – это естественное вложение, а d – дифференциал. Этой короткой последовательности соответствует

длинная точная последовательность когомологий

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{i_*} H^0(B, \Gamma(T^*B/P)) \xrightarrow{d_*} H^0(B, Z^2B) \longrightarrow H^1(B, \Lambda(T^*B/P)) \xrightarrow{i_*} \\ \xrightarrow{i_*} H^1(B, \Gamma(T^*B/P)) \xrightarrow{d_*} H^1(B, Z^2B) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Оказывается, что классификация лагранжевых расслоений при помощи этой точной последовательности совпадает со схемой классификации, предложенной ранее в этом пункте. Действительно, нахождение группы $H^1(B, \Gamma(T^*B/P))$ соответствует выполнению п. 2) (см. п. 2.4.2); вычисление ядра отображения $H^1(B, \Gamma(T^*B/P)) \xrightarrow{d_*} H^1(B, Z^2B)$ – соответствует п. 3') (это утверждение становится более понятным, если проверить, что $H^1(B, Z^2B) \simeq H^3(B, \mathbb{R})$), а факторпространство $H^0(B, Z^2B)/dH^0(B, \Gamma(T^*B/P))$ – это в точности нетривиальные подкручивания $Z^2(B, \mathbb{R})/d\Omega_P^1(B)$ из п. 4'). (Здесь следует воспользоваться простым фактом из теории когомологий Чеха: нулевые когомологии Чеха с коэффициентами в пучке суть в точности глобальные сечения этого пучка. В данном случае это 2-формы на пространстве B и решетчатые 1-формы для пучков Z^2B и $\Gamma(T^*B/P)$ соответственно.)

3.1. Решетка. В этом пункте изучается следующий вопрос: как классифицировать замкнутые решетки на пространстве B с точностью до изоморфизма? Точнее, показано, как задача классификации замкнутых решеток ранга 2 на двумерных компактных поверхностях может быть сведена к изучению подгрупп $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^2$. (Этого будет достаточно для классификации компактных лагранжевых расслоений с двумерной базой в § 4.)

Сначала выделим класс решеток, которые называются полными (см. определение 13), затем докажем, что на всех рассматриваемых далее (в § 4) компактных пространствах решетки полны (см. теорему 13 и замечание 6), после чего сведем классификацию полных решеток к классификации групп $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^2$ (см. следствия 3 и 4).

Полные решетки. Обозначим через $(\mathbb{R}^n, L)$ аффинное n -мерное пространство, на котором задана решетка L ранга n (где решетка понимается в смысле определения 9), инвариантная относительно сдвигов, а через Aut_n – группу автоморфизмов решетки L . Отметим, что существует такой базис $\mathbb{R}^n$, в котором решетка L совпадает со стандартной решеткой $\mathbb{Z}^n$ (в этом базисе $\mathrm{Aut}_n \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n \subset \mathrm{Aff}_n$, где через Aff_n обозначена группа аффинных преобразований $\mathbb{R}^n$).

Введем теперь понятие индуцированной решетки. Пусть заданы два многообразия $\tilde{B}$ и B , решетка P на B и отображение $f: \tilde{B} \rightarrow B$. Назовем множество $Q = f^*P = \bigcup_{\alpha \in P} f^*\alpha$ *индуцированной (отображением f) решеткой (на $\tilde{B}$)* в том случае, если оно является решеткой. Отметим, что Q является решеткой, если f – локальный диффеоморфизм, в частности накрытие. Кроме того, индуцированная решетка Q замкнута, если P замкнута.

Назовем отображение $f: (B, P) \rightarrow (\mathbb{R}^n, L)$ *развертывающим*, если $f^*L = P$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Для любого n -мерного односвязного многообразия U^n с замкнутой n -мерной решеткой Q на нем развертывающее отображение существует и единственно с точностью до композиции с автоморфизмом решетки L , т.е. с элементом Aut_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если для какой-то точки $x \in U^n$ в решетке Q_x выбран базис, то он продолжается до n ковекторных полей $\alpha_1, \dots, \alpha_n \subset Q \subset T^*U^n$. Интегралы от этих 1-форм по путям задают искомое развертывающее отображение f . Интегралы не зависят от пути, так как решетка замкнута, а пространство U^n односвязно.

Отображение f – это единственное развертывающее отображение, переводящее базис $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$ решетки Q (в точке x) в базис $dx^1, \dots, dx^n$ решетки L и переводящее точку x в начало координат O . Поэтому любое другое развертывающее отображение $\tilde{f}$ является композицией $g \circ f$ этого развертывающего отображения f с автоморфизмом g решетки L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Замкнутая решетка P ранга n на n -мерном многообразии B^n называется *полной*, если развертывающее отображение $f: (U^n, Q) \rightarrow (\mathbb{R}^n, L)$ универсального накрывающего пространства U^n с индуцированной решеткой Q является диффеоморфизмом на все пространство $\mathbb{R}^n$.

Аффинная структура. Выясним теперь, на каких двумерных поверхностях существует замкнутая решетка ранга 2 (см. теорему 12 и следствие 2 из нее), затем покажем, что все эти замкнутые решетки полны (см. теорему 13 и замечание 6). Для этого переформулируем задачи на языке аффинных структур, а затем воспользуемся известными фактами об этих структурах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Говорят, что на многообразии M^n задана *аффинная структура*, если существует такой атлас $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, в котором все функции склейки $\varphi_\beta^{-1} \varphi_\gamma$ являются аффинными преобразованиями. Аффинная структура называется *целочисленной*, если все функции склейки $\varphi_\beta^{-1} \varphi_\gamma$ являются аффинными преобразованиями $x \rightarrow Ax + \vec{b}$ с целочисленной матрицей A (т.е. принадлежат группе $\text{GL}_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n \subset \text{Aff}_n$). Многообразие с аффинной структурой будем называть *аффинным*.

Из утверждения 6 следует, что изучение замкнутых решеток ранга n на многообразии M^n эквивалентно изучению целочисленных аффинных структур на этом многообразии. Напомним, что если M_1^n и M_2^n – два аффинных многообразия, то отображение $f: M_1^n \rightarrow M_2^n$ называется *аффинным*, если оно является аффинным преобразованием в аффинных координатах (т.е. в атласах, задающих аффинную структуру на M_1^n и M_2^n). Аффинное отображение $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *развертывающим*.

Утверждение 6 можно обобщить следующим образом: для любого односвязного аффинного многообразия *развертывающее отображение существует и единственно с точностью до аффинного автоморфизма пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. элемента Aff_n* . Поэтому по аналогии с определением 13 аффинная структура на многообразии B^n называется *полной*, если развертывающее отображение $D: U^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ универсального накрывающего пространства U^n с индуцированной аффинной структурой является диффеоморфизмом на все пространство $\mathbb{R}^n$.

Напомним также, что для любого аффинного многообразия B^n действие фундаментальной группы $\pi_1(B)$ на односвязном накрывающем пространстве U^n и развертывающее отображение $D: U^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ определяют аффинную голономию $\rho: \pi_1(B) \rightarrow \text{Aff}_n$ (задаваемую формулой $\rho(g) \circ D = D \circ g$ для любого элемента $g \in \pi_1(B^n)$).

Следующая теорема является переформулировкой одного из результатов Дж. Милнора, полученного им в [8].

ТЕОРЕМА 12. *Среди компактных ориентируемых двумерных поверхностей только на торе T^2 существует аффинная структура.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *На компактных двумерных поверхностях, отличных от тора T^2 и бутылки Клейна $\mathbb{K}^2$, не существует замкнутых решеток ранга 2.*

ТЕОРЕМА 13. 1) Пусть M^n – многообразие с нильпотентной фундаментальной группой $\pi_1(M^n)$. Тогда все замкнутые решетки ранга n на M^n полны.

2) Пусть пространство B^n накрывается пространством $\tilde{B}^n$ и все замкнутые решетки ранга n на $\tilde{B}^n$ полны. Тогда все замкнутые решетки ранга n на B^n тоже полны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В [9] было доказано, что если M^n – компактное ориентируемое аффинное многообразие с нильпотентной аффинной голономией (т.е. $\rho(\pi_1(M^n))$ нильпотентна) и аффинная голономия сохраняет объем (т.е. существует такой атлас, в котором все функции склейки $\varphi_j \varphi_i^{-1}$ принадлежат группе $\text{SL}_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$), то аффинная структура на M^n полна.

В данном случае аффинная голономия нильпотентна, так как $\pi_1(M^n)$ нильпотентна. Кроме того, у целочисленного аффинного многообразия функции склейки $\varphi_j \varphi_i^{-1}$ принадлежат группе $\text{GL}_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n$, а у ориентируемого аффинного многообразия функции склейки $\varphi_j \varphi_i^{-1}$ принадлежат группе $\text{GL}_n^+(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$. Поэтому $\varphi_j \varphi_i^{-1} \in \text{SL}_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$.

2) Достаточно индуцировать решетку на $\tilde{B}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В дальнейшем (в § 4) в качестве (компактной) базы B будет выступать либо тор, либо бутылка Клейна. Так как эти пространства удовлетворяют условию теоремы 13, то все замкнутые решетки (ранга 2) на них полны.

Классификация полных решеток. Любая полная решетка P на многообразии B индуцируется решеткой L при факторизации пространства $(\mathbb{R}^n, L)$ по (свободному) действию фундаментальной группы $\pi_1(B)$ (это просто переформулировка того, что односвязное накрывающее пространство изоморфно $(\mathbb{R}^n, L)$). Выясним теперь, когда два действия $\rho_i: \pi_1(B) \rightarrow \text{Aut}_n$, $i = 1, 2$, задают изоморфные решетки на B . Докажем даже более общее утверждение 8. При его доказательстве воспользуемся следующим простым утверждением.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть на многообразии E заданы решетка Q и действие группы G , сохраняющее решетку Q и индуцирующее накрытие $\pi: E \rightarrow E/G$. Тогда на факторпространстве E/G существует такая решетка P , что $Q = \pi^*P$. Решетка Q замкнута тогда и только тогда, когда решетка P замкнута.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Пусть на односвязном пространстве U заданы решетка Q и свободные действия групп $\rho_i: G_i \rightarrow \text{Aut}_Q$, сохраняющие решетку Q и задающие накрытия $\pi_i: U \rightarrow U/G_i$, $i = 1, 2$. Решетки P_i на U/G_i , соответствующие решетке Q , изоморфны тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $f \in \text{Aut}_Q$, переводящий ρ_1 в ρ_2 . Точнее, существует такой изоморфизм $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$, что $f \circ (\rho_1(g)) = \rho_2(\varphi(g)) \circ f$ для любого $g \in G_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Leftarrow$) Автоморфизм f тотального пространства (U, Q) индуцирует изоморфизм факторпространств.

($\Rightarrow$) Изоморфизм факторпространств $(U/G_i, P_i)$ продолжается до автоморфизма f пространства (U, Q) при помощи продолжения вдоль путей и теоремы о накрывающей гомотопии. Так как накрывающие пространства односвязны, то продолжение не будет зависеть от выбора пути.

Построим теперь изоморфизм φ . Возьмем произвольную точку $x \in U$. Тогда (так как f – послойный автоморфизм) для любого элемента $g_1 \in G_1$ существует такой элемент g_2 , что

$$f(\rho_1(g_1)x) = \rho_2(g_2)(f(x)). \quad (5)$$

Элемент g_2 определен однозначно, так как действие ρ_2 свободно. Положим $\varphi(g_1) = g_2$ и докажем, что построенный изоморфизм φ не зависит от выбора точки x . Действительно, так как $\pi_2: U \rightarrow U/G_2$ – накрытие, то элемент g_2 один и тот же для всех точек в окрестности точки x , а значит, корректно определен на всем многообразии U .

СЛЕДСТВИЕ 3. Задача классификации всех полных решеток ранга n (на всевозможных n -мерных многообразиях) эквивалентна классификации (с точностью до сопряжения элементом $g \in \text{Aut}_n$) групп $G \subset \text{Aut}_n$ таких, что G свободно действует на $(\mathbb{R}^n, L)$ и факторпространство $\mathbb{R}^n/G$ является многообразием.

СЛЕДСТВИЕ 4. Классификация полных решеток ранга n на n -многообразии B эквивалентна классификации свободных действий $\rho: \pi_1(B) \rightarrow \text{Aut}_n$ фундаментальной группы $\pi_1(B)$ на $(\mathbb{R}^n, L)$, фактор по действию которых совпадает с B .

При конкретных вычислениях можно воспользоваться тем, что

$$\text{Aut}_n \simeq \text{GL}_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n \subset \text{Aff}_n$$

(т.е. ответ может быть получен в матричном виде).

3.2. Препятствия к продолжению сечений. Пусть заданы пространство B и замкнутая решетка P на нем. Требуется классифицировать аффинные расслоения $\pi: E \rightarrow B$ с присоединенным расслоением $\pi_0: T^*B/P \rightarrow B$. Как было показано в п. 2.4, для этого достаточно найти всевозможные препятствия к построению сечений $H^2(B, P)$. Для этого в свою очередь достаточно найти пространство коциклов $\mathcal{Z}^2(B, P)$ и затем профакторизовать его по множеству кограниц $\mathcal{B}^2(B, P)$. Множество коциклов $\mathcal{Z}^2(B, P)$ находится как множество (препятствующих) коцепей $c \in \mathcal{C}^2(B, P)$ таких, что $\delta c = 0$. Для нахождения множества кограниц $\mathcal{B}^2(B, P)$ достаточно узнать, как меняется

препятствующая коцень $c \in \mathcal{C}^2(B, P)$ при изменении сечения над 1-остовом B^1 (см. утверждение 5).

Покажем на двух примерах, как это может быть сделано (эти примеры 5 и 6 еще понадобятся в § 4).

ПРИМЕР 5. Возьмем в качестве пространства B тор $\mathbb{T}^2$ и представим его как фактор плоскости $\mathbb{R}^2$ по действию подгруппы $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbb{T}^2)$ в группе аффинных преобразований Aff_2 , порожденной элементами $g = \left(\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right)$ и $h = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, где $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$.

Введем теперь на B решетку: индуцируем на B целочисленную решетку $\mathbb{Z}^2$ на $\mathbb{R}^2$ (это можно сделать, так как у матриц линейных частей элементов g и h все элементы целочисленные).

Представим тор $\mathbb{T}^2$ в виде клеточного комплекса: тор в данном случае может быть представлен в виде параллелограмма $OO_1O_2O_3$, натянутого на вершины $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $O_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$, со сторонами, отождествленными как на рис. 1, а.

Рис. 1. Препятствие к построению сечений: тор (а) и бутылка Клейна (b)

Фиксируем теперь способ задания элемента $c \in \mathcal{C}^2(B, P)$. Для этого отождествим препятствующую коцень $c \in \mathcal{C}^2(B, P)$ и соответствующий ей элемент решетки P в точке $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, а также выберем в слое P_O некоторый базис.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. В данном случае

$$\mathcal{Z}^2(\mathbb{T}^2, P) = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \mathcal{B}^2(\mathbb{T}^2, P) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ nm \end{pmatrix} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Поэтому $H^2(\mathbb{T}^2, P) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как 3-мерных клеток нет, то

$$\mathcal{Z}^2(\mathbb{T}^2, P) = \mathcal{C}^2(\mathbb{T}^2, P) = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\},$$

и поэтому для нахождения $H^2(\mathbb{T}^2, P)$ остается найти пространство кограниц $\mathcal{B}^2(\mathbb{T}^2, P)$.

Для нахождения пространства кограниц $\mathcal{B}^2(\mathbb{T}^2, P)$ возьмем два сечения $s^1, \tilde{s}^1$ над 1-остовом B^1 и изучим, как изменяется препятствующая коцепь при переходе от одного сечения к другому. Для описания отличия сечений покажем, что любому пути $s: I = [0, 1] \rightarrow B$ с началом и концом в точке x и любой решетчатой 1-форме α на s (т.е. $\alpha: I \rightarrow T^*B/P, \alpha(t) \in T_{s(t)}^*(B/P)$) может быть естественным образом сопоставлен элемент решетки P в точке x . Действительно, сечение T^*B/P может быть продолжено до сечения $\tilde{\alpha}: I \rightarrow T^*B$ вдоль пути s . Разность $p = \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0) \in P_x$ и будет искомым элементом решетки. В дальнейшем будем говорить, что 1-форма α *изменяется на (элемент решетки) p при обходе вдоль пути s* .

Опишем теперь отличие взятых сечений. Разность двух сечений $s^1, \tilde{s}^1$ задает решетчатую 1-форму α на 1-остове B^1 . Предположим, что при обходе вдоль ребра $a = OO_1$ эта форма α изменяется на $\begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$, а при обходе вдоль ребра $b = OO_3$ на $\begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$.

Найдем теперь разность препятствующих коцепей для s^1 и $\tilde{s}^1$. Для этого достаточно описать изменение формы α при обходе вдоль ∂e_i^2 (в данном случае для простоты вычислений найдено, на какие элементы $p_1, p_2 \in P$ изменяется α при обходе вдоль путей OO_1O_2 и OO_3O_2 соответственно, а затем взята разность p_1 и p_2).

Покажем для примера, как может быть произведен обход вдоль ребра O_3O_2 . Разберем вначале случай, когда $\begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Заметим, что O_3O_2 отождествляется с ребром $a = OO_1$ и получается из OO_1 под действием элемента $g = \left(\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right)$. Далее, преобразованию g соответствует линейное преобразование кокасательной плоскости $T^*\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ с матрицей $(dg)^* = \left(\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому если при обходе вдоль OO_1 форма α изменялась на $\begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$, то при обходе вдоль O_3O_2 она будет изменяться на $\begin{pmatrix} m_1 \\ -m_1n+n_1 \end{pmatrix}$.

Если же s^1 и $\tilde{s}^1$ уже отличались в точке O_3 на элемент $\begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$ решетки, то отличия просуммируются и в сумме дадут $\begin{pmatrix} m_1+m_2 \\ -m_1n+n_1+n_2 \end{pmatrix}$ – изменение формы α при обходе вдоль OO_3O_2 . Остальные вычисления довольно наглядно продемонстрированы на рис. 1, а.

В итоге получается, что разность рассматриваемых сечений s^1 и $\tilde{s}^1$ задается элементом решетки $\begin{pmatrix} 0 \\ nm_1 \end{pmatrix}$.

ПРИМЕР 6. Опять в качестве пространства B возьмем фактор плоскости по действию группы $G \subset \text{Aff}_2$. На этот раз B – бутылка Клейна $\mathbb{K}^2$, а

$$G = \left\langle g = \left(\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha y \\ y \end{pmatrix} \right), h = \left(\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\rangle,$$

где $\alpha = \frac{m-\delta}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, а δ равно 0 или 1 (как будет показано в § 4, так могут быть описаны все решетки на бутылке Клейна). Назовем индуцированную решетку P на $\mathbb{K}^2$ *решеткой из серии $\mathbb{K}_{m,y;\delta,x}^2$* .

Рассуждения аналогичны предыдущему примеру. В данном случае бутылка Клейна может быть отождествлена с параллелограммом $OQ_1Q_2Q_3$, натянутым на вершины $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} \alpha y + x \\ y \end{pmatrix}$, $Q_3 = \begin{pmatrix} \alpha y \\ y \end{pmatrix}$, со сторонами, отождествленными, как на рис. 1, b (при этом $Q_2Q_1 = gh(OQ_3)$).

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. 1) Для решетки P из серии $\mathbb{K}_{m,y;0,x}^2$ имеет место изоморфизм $H^2(\mathbb{K}^2, P) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_m$. Точнее,

$$\mathcal{X}^2(\mathbb{K}^2, P) = \left\{ \binom{k}{l} \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \mathcal{B}^2(\mathbb{K}^2, P) = \left\{ \binom{2p}{mq} \mid p, q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2) Для решетки P из серии $\mathbb{K}_{m,y;1,x}^2$ имеет место изоморфизм $H^2(\mathbb{K}^2, P) \simeq \mathbb{Z}_{2m}$. Точнее,

$$\mathcal{X}^2(\mathbb{K}^2, P) = \left\{ \binom{k}{l} \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \mathcal{B}^2(\mathbb{K}^2, P) = \left\{ \binom{2mp}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В данном случае двум различным сечениям $s^1, \tilde{s}^1$ соответствует различающая коцепь $\binom{2m_2}{(\delta-m)m_2-mm_1}$ (в обозначениях, аналогичных примеру 5), что опять же довольно наглядно продемонстрировано на рис. 1, b.

Действительно, $Q_3Q_2 = g(OQ_1)$ и $Q_2Q_1 = gh(OQ_3)$. Поэтому изменение формы α при обходе вдоль OQ_3Q_2 равно $\binom{m_2}{n_2} + \binom{1}{-m} \binom{0}{1} \binom{m_1}{n_1}$, а при обходе вдоль OQ_1Q_2 равно $\binom{m_1}{n_1} - \binom{1}{\delta-m} \binom{0}{-1} \binom{m_2}{n_2}$. Таким образом, подгруппа $\mathcal{B}^2(\mathbb{K}^2, P) \subset \mathcal{X}^2(\mathbb{K}^2, P) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ порождается векторами $(2, \delta - m)$ и $(0, -m)$. Остается заметить, что эта подгруппа изоморфна $2\mathbb{Z} \oplus m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ при $\delta = 0$ и $2m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ при $\delta = 1$.

3.3. Нетривиальные подкручивания. Пусть задано аффинное расслоение $\pi: E \rightarrow B$ с присоединенным расслоением $\pi_0: T^*B/P \rightarrow B$ для некоторой замкнутой решетки P на B . Требуется найти нетривиальные подкручивания, т.е. фактор вторых когомологий $H^2(B, \mathbb{R})$, по множеству дифференциалов решетчатых 1-форм $H_P^2(B)$. В дальнейшем (в § 4 при классификации компактных лагранжевых расслоений) понадобится решить эту задачу лишь в случае, когда база B – тор $\mathbb{T}^2$ (в остальных случаях $H^2(B, \mathbb{R})$ тривиальна). Разберем этот случай в качестве примера.

ПРИМЕР 7. Как было показано Мишачёвым в [4], существуют всего две серии замкнутых решеток ранга 2 на торе $\mathbb{T}^2$. Обе они получаются факторизацией $\mathbb{R}^2$ по действию группы $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^2 \subset \mathrm{Aff}_2$ (где $G \simeq \pi_1(\mathbb{T}^2)$, т.е. по действию группы $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, сохраняющему естественную решетку $\mathbb{Z}^2$ на плоскости).

Серия 1. Группа G порождается элементами

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right), \quad h = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \right).$$

Серия 2. Группа G порождается элементами

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad h = \left(\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Эти две серии в точности совпадают с сериями $\mathbb{T}_{u,v;w,z}^2$ и $\mathbb{T}_{n,z;u}^2$ из теоремы 15.

Для того чтобы найти все нетривиальные подкручивания $H^2(B, P)/H_P^2(B)$, возьмем произвольную решетчатую 1-форму α и найдем когомологический

класс дифференциала $d\alpha$. В двумерном случае для этого достаточно найти интеграл $\int_{\mathbb{T}^2} d\alpha$ (поэтому двумерный случай особенно прост).

Пусть $\tilde{\alpha}$ – это 1-форма на $\mathbb{R}^2$, соответствующая решетчатой 1-форме α (т.е. $\tilde{\alpha}$ – произвольный представитель решетчатой 1-формы, индуцируемой формой α на плоскости).

Для того чтобы 1-форме $\tilde{\alpha}$ соответствовала решетчатая 1-форма на торе, необходимо, чтобы под действием $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ форма $\tilde{\alpha}$ переходила в себя с точностью до (глобального) сечения решетки $\mathbb{Z}^2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. Пусть $\tilde{\alpha}$ – это 1-форма, для которой

$$(g^{-1})^*\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha} + k dx + l dy, \quad (h^{-1})^*\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha} - p dx - q dy,$$

где $k, l, p, q \in \mathbb{Z}$. Тогда для обеих серий решеток

$$\int_{\mathbb{T}^2} d\alpha = pu + qv + kw + lz$$

(для второй серии v и w формально считаются равными 0).

Для серии 1 все возможные k, l, p, q реализуются.

Для серии 2 решетчатая 1-форма α с таким представителем $\tilde{\alpha}$ существует тогда и только тогда, когда $k = 0$.

Это утверждение в иной формулировке было доказано Мишачёвым в [4] (отметим, что там нетривиальные подкручивания назывались кохомологическими инвариантами сдвига), поэтому приведем лишь

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Интеграл $\int_{\mathbb{T}^2} d\alpha$ равен интегралу от $d\tilde{\alpha}$ по параллелограмму, натянутому на вершины $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} u+w \\ v+z \end{pmatrix}$. Для подсчета последнего интеграла достаточно применить формулу Стокса.

Единственное соотношение на k, l, p, q вытекает из условия $g^*h^*\tilde{\alpha} = h^*g^*\tilde{\alpha}$.

3.4. Препятствие к построению симплектической структуры.

Пусть $\pi: (M^{2n}, \eta) \rightarrow B^n$ – почти лагранжево расслоение над многообразием B^n . Покажем, что для вычисления препятствия к построению симплектической структуры $\gamma \in H^3(B, \mathbb{R})$ (см. определение 6) достаточно знать лишь устройство соответствующего аффинного расслоения с присоединенным расслоением $\pi_0: T^*B/P \rightarrow B$ над 3-остовом. (Этот результат не будет в дальнейшем использоваться в этой работе).

Прежде всего перейдем от кохомологий де Рама к сингулярным кохомологиям, воспользовавшись следующей теоремой из алгебраической топологии.

ТЕОРЕМА 14 (теорема де Рама). Пусть отображение

$$\rho: \Omega^*(B^n, \mathbb{R}) \rightarrow C^*(B^n, \mathbb{R})$$

сопоставляет каждой k -форме ω^k k -мерную коцепь, которая принимает на любом k -мерном сингулярном симплексе $\sigma^k: \Delta^k \rightarrow B^n$ значение, равное

$$\int_{\Delta^k} (\sigma^k)^* \omega^k.$$

Отображение ρ устанавливает естественный изоморфизм (алгебр) между когомологиями де Рама и сингулярными когомологиями.

Выберем теперь представитель c_γ^3 класса γ . Чтобы это сделать, построим над каждым сингулярным k -мерным симплексом $\sigma^k: \Delta^k \rightarrow B^n$ (который для краткости далее будет обозначаться через $[\sigma^k]$) сечение $S(\sigma^k): \Delta^k \rightarrow M^{2n}$ такое, что $\pi \circ S(\sigma^k) = \sigma^k$. (В дальнейшем потребуются лишь сечения над 2-мерными и 3-мерными симплексами.)

Так как $\pi^*\gamma = [d\eta]$, то естественным представителем класса γ является коцепь c_γ^3 , сопоставляющая 3-мерному симплексу $[\sigma^3]$ интеграл от $d\eta$ по сечению $S(\sigma^3)$ над этим 3-симплексом. Однако если хочется выразить γ в терминах аффинного расслоения, то удобнее будет найти представитель, значение которого на каждой клетке выражается в терминах сечений и функций перехода между этими сечениями (без использования формы η).

Поэтому возьмем представитель $\tilde{c}_\gamma^3 = c_\gamma^3 + \delta c_\eta^2$ класса γ , где 2-коцепь c_η^2 сопоставляет каждому 2-мерному сингулярному симплексу $[\sigma^2]$ интеграл от формы η по сечению $S(\sigma^2)$. Покажем, проведя явные вычисления, что значение $\tilde{c}_\gamma^3$ на каждом 3-мерном симплексе зависит лишь от функций перехода между сечениями над 2-мерными и 3-мерными симплексами.

Пусть $\partial[\sigma^3] = \sum_{i=0}^3 (-1)^i [\sigma_i^2]$. Обозначим через $\alpha_i: \Delta^2 \rightarrow T^*B/P$ функции перехода между сечениями $S(\sigma^3)$ и $S(\sigma_i^2)$ (при этом $\pi_0 \circ \alpha_i = \sigma_i^2$).

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. Коцепь $\tilde{c}_\gamma^3$ принимает на 3-мерном симплексе $[\sigma^3]$ значение, равное

$$\sum_{i=0}^3 (-1)^i \int_{\Delta^2} (d\alpha_i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta^3} (S(\sigma^3))^* d\eta - \sum_{i=0}^3 (-1)^i \int_{\Delta^2} (S(\sigma_i^2))^* \eta &= \int_{\partial\Delta^3} (S(\sigma^3))^* \eta - \sum_{i=0}^3 (-1)^i \int_{\Delta^2} (S(\sigma_i^2))^* \eta \\ &= \sum_{i=0}^3 (-1)^i \int_{\Delta^2} (S(\sigma^3))^* \eta - (S(\sigma_i^2))^* \eta = \sum_{i=0}^3 (-1)^i \int_{\Delta^2} (d\alpha_i). \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из утверждения 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. При конкретных вычислениях можно рассматривать не все сингулярные симплексы $[\sigma^3]$, а например, лишь те, что входят в некоторое фиксированное симплициальное разбиение пространства B^n (проще говоря, иногда легче вычислить класс γ как элемент симплициальных когомологий, а не как элемент сингулярных когомологий).

§ 4. Классификация компактных лагранжевых расслоений над двумерными поверхностями

В этом параграфе классифицированы лагранжевы расслоения $\pi: (M^4, \omega) \rightarrow B^2$ с компактным тотальным пространством M^4 (такие расслоения будем называть *компактными*). Напомним (см. §3), что для классификации компактных

лагранжевых расслоений достаточно описать все замкнутые решетки P ранга 2 на пространстве B^2 , а затем найти пространство препятствий $H^2(B^2, P)$ и нетривиальные подкручивания $H^2(B^2, \mathbb{R})/H_P^2(B^2)$. Решетки описаны в п. 4.2 (см. теорему 15), остальные инварианты – в п. 4.3 (см. теорему 16).

Случай, когда база B^2 ориентируема, был разобран Мишачёвым в [4], там же он показал, что среди неориентируемых двумерных поверхностей только бутылка Клейна может быть базой компактного лагранжева расслоения (это также вытекает из следствия 2). Поэтому в п. 4.1 напомним некоторые свойства фундаментальной группы бутылки Клейна $\pi_1(\mathbb{K}^2)$.

4.1. Фундаментальная группа бутылки Клейна. Бутылка Клейна может быть реализована как четырехугольник со сторонами, склеенными, как на рис. 2. Напомним, что для любого клеточного комплекса с одной 0-мерной клеткой 1-мерные клетки задают порождающие элементы фундаментальной группы, а 2-мерные клетки – связывающие их соотношения (это изоморфизм Гуревича между гомологиями и гомотопическими группами).

Рис. 2. Бутылка Клейна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пару элементов $a, b \in \pi_1(K^2)$ назовем *главными*, если они порождают всю фундаментальную группу и связаны единственным соотношением

$$abab^{-1} = e. \quad (6)$$

Таким образом, сторонам четырехугольника a и b соответствует пара главных элементов.

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. Пусть a, b – пара главных элементов в $\pi_1(\mathbb{K}^2)$. Тогда любой элемент $x \in \pi_1(\mathbb{K}^2)$ единственным образом представляется в виде $a^k b^l$ и отображение $(k, l) \rightarrow x$ устанавливает изоморфизм между $\pi_1(\mathbb{K}^2)$ и полупрямым произведением $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}$ со следующей групповой операцией: $(k, l)(m, n) = (k + (-1)^l m, l + n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (6) вытекает, что $b^l a^k = a^{(-1)^l k} b^l$, где $k, l \in \mathbb{Z}$. Поэтому отображение $(k, l) \rightarrow x$ является гомоморфизмом. Остается доказать лишь отсутствие ядра, т.е. что $a^k b^l \neq e$.

Заметим, что достаточно доказать, что $a^k \neq e$, так как в соотношении (6) суммарная степень b равна 0. Для завершения доказательства остается сослаться на следующий факт (см. [10; теорема 4.10]): в группе, порожденной элементами $a_1, \dots, a_n$, связанными единственным циклически несократимым

соотношением, содержащим a_n , каждое нетривиальное соотношение должно содержать a_n . (Напомним, что слово называется *несократимым*, если в нем не встречаются подряд символы a_i и a_i^{-1} , и называется *циклически несократимым*, если оно несократимо и первый и последний символы не являются обратными друг к другу.)

Опишем теперь всевозможные пары главных элементов.

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. Пусть a, b – пара главных элементов в $\pi_1(\mathbb{K}^2)$. Другая пара элементов $a_1, b_1 \in \pi_1(K^2)$ является парой главных элементов тогда и только тогда, когда $a_1 = a^{\varepsilon_1}$, $b_1 = a^k b^{\varepsilon_2}$, где $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Leftarrow$) Достаточно явно проверить, что $a_1 b_1 a_1 b_1^{-1} = e$ и что пара a_1, b_1 порождает всю группу (для этого достаточно выразить через них a и b).

($\Rightarrow$) Пусть $a_1 = (k_1, l_1)$, $b_1 = (k_2, l_2)$. Для начала заметим, что из соотношения (6) следует, что $l_1 = 0$ (точнее, что $2l_1 = 0$). Далее, $k_1 = \pm 1$ и $l_2 = \pm 1$, так как любой элемент должен представляться в виде $a_1^p b_1^q$ (в частности, в таком виде должны представляться элементы a и b).

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Найденные множества для возможных элементов a_1 и b_1 могут быть также описаны в алгебраических терминах.

А именно, если a, b – пара главных элементов в $\pi_1(\mathbb{K}^2)$, то центр группы $\pi_1(\mathbb{K}^2)$ ($\simeq \mathbb{Z}$) порождается элементом b^2 , а коммутант $(\pi_1(\mathbb{K}^2))'$ ($\simeq \mathbb{Z}$) порождается элементом a^2 . Итак, если a_1, b_1 – два элемента $\pi_1(\mathbb{K}^2)$, то a_1^2 порождает коммутант тогда и только тогда, когда $a_1 = a^{\varepsilon_1}$. Аналогично, b_1^2 порождает центр группы тогда и только тогда, когда $b_1 = a^k b^{\varepsilon_2}$.

Выясним теперь, какие элементы $\pi_1(\mathbb{K}^2)$ сохраняют ориентацию. Заметим, что при склейке сторон четырехугольника, как на рис. 2, элемент $a \in \pi_1(\mathbb{K}^2)$ сохраняет ориентацию, а b не сохраняет. Утверждение 14 позволяет обобщить этот результат на случай всех главных элементов.

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. Для любых главных элементов a, b элемент a сохраняет ориентацию, а элемент b не сохраняет.

Так как любой элемент можно представить в виде $a^k b^l$, то получается следующий простой критерий для сохранения ориентации элементом фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{K}^2)$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Нормальная подгруппа в $\pi_1(\mathbb{K}^2)$, состоящая из элементов, сохраняющих ориентацию, порождается a и b^2 .

4.2. Классификация полных решеток ранга 2. Как было показано в п. 3.1, для классификации полных n -мерных решеток достаточно классифицировать все свободно действующие подгруппы $G \subset \text{Aut}_n \simeq \text{GL}_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n$, фактор по действию которых является многообразием, с точностью до автоморфизма Aut_n .

Свобода действия гарантирует наличие собственного вектора для любого элемента $g \in G \subset \text{Aut}_n$ при любой размерности n (утверждение 16). В случае размерности 2 это позволяет одновременно привести линейные части dg всех элементов $g \in G$ к верхнетреугольному виду (лемма 6). Далее задача решается простым перебором. Итоговый результат сформулирован в теореме 15.

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. Подгруппа $G \subset \text{Aff}_n \simeq \text{GL}_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ действует свободно на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $(A, \vec{b}) \in G$ уравнение $(A - E)x = -\vec{b}$ не имеет решений.

Утверждение равносильно тому, что $Ax + \vec{b} \neq x$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $(A, \vec{b}) \in G$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Линейные части всех преобразований имеют собственное значение 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Любой n -мерный вектор $v = (v_1, \dots, v_n)$ с целочисленными координатами, взаимно простыми в совокупности (т.е. для которых не существует отличного от ± 1 целого числа, делящего все координаты v_i вектора), можно включить в целочисленный базис.

Доказательство легко проводится индукцией по размерности n .

Далее в этом пункте размерность пространства n предполагается равной 2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. Для любого элемента $g \in G$ существует такой целочисленный базис $\mathbb{R}^2$, что в нем матрица линейного отображения dg имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ (если g сохраняет ориентацию), или $\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, где δ равно 0 или 1 (если g не сохраняет ориентацию). Для каждого элемента g соответствующее число n или δ определено однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале докажем существование (такого базиса). Дополним собственный вектор e_1 оператора dg с собственным значением 1 до базиса вектором e_2 . Пусть в новом базисе e_1, e_2 выполнено равенство $dg = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$. Если $m < 0$ и g сохраняет ориентацию, то остается обратить e_1 , чтобы получить $m > 0$; если же g не сохраняет ориентацию, то остается заменить e_2 на $e_2 - [\frac{m}{2}]e_1$ (где $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x), чтобы сделать m равным 0 или 1.

Теперь докажем единственность. Элемент в правом верхнем углу полностью определяется наибольшим целым числом, делящим все элементы матрицы $B = A - E$, где E – единичная матрица. А именно, наибольший общий делитель всех элементов B равен n , если g сохраняет ориентацию, и равен 1 или 2 и совпадает по четности с δ при $\det(dg) = \det(A) = -1$. Он является инвариантом, так как все элементы B в новых координатах будут целочисленными комбинациями элементов B в старых координатах.

Напомним, что репером аффинного пространства называется пара, состоящая из точки пространства и базиса присоединенного векторного пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Назовем пару, состоящую из точки аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ и целочисленного базиса присоединенного векторного пространства, целочисленным репером.

ЛЕММА 5. Для любого элемента $g \in G$, не являющегося сдвигом, существует целочисленный репер $\mathbb{R}^2$ такой, что в нем g имеет вид $((\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}))$, где $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, $y \in \mathbb{R} \setminus 0$, или вид $((\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, (\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}))$, где $x \in \mathbb{R} \setminus 0$, а δ равно 0 или 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если после применения утверждения 17 векторная часть элемента g имеет вид $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, то осталось перенести начало координат либо в точку $\begin{pmatrix} 0 \\ -z_1/n \end{pmatrix}$, если g сохраняет ориентацию, либо в точку $\begin{pmatrix} 0 \\ z_2/2 \end{pmatrix}$ в противном случае.

СЛЕДСТВИЕ 7. След dg равен $1 + \det(dg)$.

ЛЕММА 6. Существует такой базис $\mathbb{R}^2$, в котором линейные части всех элементов группы G имеют верхнетреугольный вид.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g_1, g_2 \in G$ и $dg_1 = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $m \neq 0$, а $dg_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда $\text{tr}(d(g_1 g_2)) = a_{11} + a_{22} + m a_{21}$. Но (по следствию 7) $\text{tr}(d(g_1 g_2)) = a_{11} + a_{22}$, поэтому $a_{21} = 0$.

Оставшийся случай, когда все элементы G , сохраняющие ориентацию, являются сдвигами, тривиален: достаточно привести любой элемент, не сохраняющий ориентацию, к верхнетреугольному виду.

Обозначим через T подгруппу сдвигов в G , а через H – подгруппу элементов в G , сохраняющих ориентацию. Тогда $T \triangleleft H \triangleleft G$. Подгруппа сдвигов T изоморфна $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}^2$, так как все орбиты действия группы G дискретны. В этом пункте, там, где это не вызывает путаницы, t, h, g будут обозначать элементы T, H и G соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 8. Либо $H = T$, либо $H/T \simeq \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем матрицы dg всех элементов $g \in G$ к верхнетреугольному виду. Сопоставим элементу $h \in H$ правый верхний элемент матрицы dh . Это отображение задает гомоморфизм из H в $\mathbb{Z}$ с ядром T .

Таким образом, G порождена не более чем четырьмя элементами: группа T порождается не более чем двумя элементами, а каждая из групп H/T и G/H – не более чем одним. При этом G порождена не более чем тремя элементами, если фактор $\mathbb{R}^2/G$ ориентируем. Поэтому фактор $\mathbb{R}^2$ по G заведомо не может быть замкнутой двумерной поверхностью, отличной от S^2 , $\mathbb{RP}^2$, T^2 и $\mathbb{K}^2$ (фундаментальные группы остальных ориентируемых поверхностей порождаются не менее чем четырьмя элементами, связанными единственным соотношением; каждая из оставшихся неориентируемых поверхностей двусторонне накрывается одной из не перечисленных ориентируемых двумерных поверхностей).

Но сфера и проективная плоскость не могут обладать двумерной решеткой, поскольку замкнутая решетка ранга 2 на (двумерной) сфере порождала бы вложение двумерной сферы в плоскость $\mathbb{R}^2$ (это вложение – разvertyвающее отображение, описанное в п. 3.1), а проективная плоскость накрывается сферой. Таким образом, доказана следующая лемма (этот факт также вытекает из следствия 2).

ЛЕММА 7. Только тор и бутылка Клейна могут быть компактными двумерными поверхностями, на которых существует полная решетка ранга 2.

Найдем теперь все некомпактные двумерные многообразия, на которых существуют полные решетки ранга 2 (итоговый результат сформулирован в лемме 9).

УТВЕРЖДЕНИЕ 18. *Если группа H не циклическая, то фактор по действию H – тор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что факторпространство $\mathbb{R}^2/H$ компактно. Случай, когда T порождена двумя элементами, тривиален. Остается разобрать случай, когда H порождена элементами h и t .

Сначала докажем, что H коммутативна. Если в системе координат из леммы 5 для элемента g сдвиг t имеет вид $((\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}))$, то коммутатор $[g, t] = gtg^{-1}t^{-1}$ имеет вид $((\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} nz \\ 0 \end{smallmatrix}))$. Если $z \neq 0$, то это противоречит тому, что T порождена одним элементом t .

Для доказательства компактности факторпространства достаточно показать, что для произвольного вектора $(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}) \in \mathbb{R}^2$ найдется такой элемент $g^k t^l \in H$, что $g^k t^l (\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}) = (\begin{smallmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{smallmatrix})$, где $0 \leq \tilde{u} < x$ и $0 \leq \tilde{v} < y$. Элемент $g^k t^l$ имеет вид $((\begin{smallmatrix} 1 & kn \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} lx \\ ky \end{smallmatrix}))$, поэтому $(\begin{smallmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{smallmatrix}) = (\begin{smallmatrix} u+knv+lx \\ v+ky \end{smallmatrix})$. Остается фиксировать сначала нужное k , а затем l .

Остается разобрать случай, когда H циклическая. Чтобы это сделать, докажем следующее алгебраическое утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 19. *Если бесконечная циклическая группа G_1 является подгруппой индекса 2 в группе G_2 , то G_2 либо коммутативна, либо изоморфна группе матриц*

$$\left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \varepsilon = \pm 1, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Утверждение следует из того, что у бесконечной циклической группы всего два автоморфизма.

ЛЕММА 8. *Группа G циклическая тогда и только тогда, когда H циклическая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H порождена элементом h , а g – элемент, не сохраняющий ориентацию. Тогда $g^2 \in H$, т.е. $g^2 = h^l$. Но в таком случае элемент $g' = gh^{-[l/2]}$ (где $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x) в квадрате даст либо e , либо h (по утверждению 19 либо g и h коммутируют, либо $l = 0$). Как известно из линейной алгебры, любое аффинное преобразование f такое, что $f^2 = e$, является симметрией. У симметрии есть неподвижные точки, поэтому g' порождает все G .

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Если H циклическая, то $G = H$ тогда и только тогда, когда G порождается элементом, сохраняющим ориентацию.

ЛЕММА 9. *Только плоскость, цилиндр и лист Мёбиуса могут быть некомпактными двумерными поверхностями, на которых существует полная решетка ранга 2.*

Плоскость соответствует случаю $G = e$; цилиндр соответствует случаю, когда G равна H и порождается одним элементом; лист Мёбиуса соответствует случаю, когда G порождается одним элементом, не сохраняющим ориентацию.

Доказательство следует из лемм 5 и 7.

ТЕОРЕМА 15 (классификация полных решеток). 1) Среди компактных двумерных поверхностей только на торе $\mathbb{T}^2$ и бутылке Клейна $\mathbb{K}^2$ существует замкнутая решетка ранга 2. Любая замкнутая решетка ранга 2 на этих поверхностях полна.

2) Только плоскость $\mathbb{R}^2$, цилиндр C^2 , лист Мёбиуса $\mathbb{M}^2$, тор $\mathbb{T}^2$ и бутылка Клейна $\mathbb{K}^2$ являются двумерными поверхностями, на которых существует полная решетка ранга 2.

3) В табл. 1 приведена классификация (с точностью до сопряжения элементом группы Aut_2) групп $G \subset \text{Aut}_2$, свободно действующих на $\mathbb{R}^2$, фактор по действию которых $\mathbb{R}^2/G$ является многообразием.

4) Существует естественное взаимно однозначное соответствие между группами G из п. 3) и полными решетками на двумерных поверхностях: любая такая группа G корректно определяет полную решетку на факторпространстве $\mathbb{R}^2/G$ и любая полная решетка может быть получена таким образом.

5) Решетки из разных серий попарно неизоморфны.

6) Две решетки $\mathbb{T}_{u_1, v_1; w_1, z_1}^2$ и $\mathbb{T}_{u_2, v_2; w_2, z_2}^2$ изоморфны тогда и только тогда, когда существуют такие $C, D \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$, что $\begin{pmatrix} u_2 & w_2 \\ v_2 & z_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ v_1 & z_1 \end{pmatrix} D$.

7) Две решетки C_{u_1, v_1}^2 и C_{u_2, v_2}^2 изоморфны тогда и только тогда, когда существует такой элемент $C \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$, что $\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$.

8) Решетки из остальных серий попарно неизоморфны.

ТАБЛИЦА 1. Полные решетки ранга 2

База	Серия	g	h	t_1	t_2
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	—	—	—	—
$\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^1$	$C_{u,v}^2$	—	—	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$	—
$\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^1$	$C_{n,y}^2$	—	$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$	—	—
$\mathbb{M}^2$	$\mathbb{M}_{\delta,x}^2$	$\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$	—	—	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$
$\mathbb{T}^2$	$\mathbb{T}_{u,v;w,z}^2$	—	—	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$
$\mathbb{T}^2$	$\mathbb{T}_{n,y;x}^2$	—	$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$	—
$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{K}_{0,y;\delta,x}^2$	$\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$	—	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\delta y}{2} \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$
$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{K}_{n,y;0,x}^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{ny}{2} \\ y \end{pmatrix}$	—	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$
$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{K}_{2n,y;1,x}^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(2n-1)y}{2} \\ y \end{pmatrix}$	—	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$

Пояснение к таблице. В первом столбце табл. 1 указан топологический тип получаемого факторпространства, во втором столбце вводится обозначение для данной серии решеток.

В остальных столбцах выписаны образы в Aut_2 порождающих элементов фундаментальной группы. Через g обозначен элемент, не сохраняющий ориентацию, а через h — сохраняющий ориентацию элемент, отличный от сдвига. Через t_1 и t_2 обозначены сдвиги. Для ориентируемых поверхностей выписаны

образы базиса фундаментальной группы. В случае бутылки Клейна элементы в первых трех столбцах (т.е. h, g или t_1, g) – пара главных элементов.

Для неориентируемых поверхностей $t_2 = g^2$, т.е. элементы в трех правых столбцах порождают подгруппу $H \subset G$, состоящую из элементов, сохраняющих ориентацию.

Везде $x, y, u, v, w, z \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, $n \in \mathbb{N}$, δ равно 0 или 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 15. Пункты 1), 2) и 4) уже доказаны (см. следствия 2, 3, замечание 6 и леммы 7, 9), поэтому остается проверить: во-первых, что любая группа G может быть приведена к указанному в таблице виду; во-вторых, что действие каждой группы свободно (т.е. что группа G корректно определяет решетку на факторпространстве $\mathbb{R}^2/G$); и в-третьих, что выписанные серии неизоморфны (точнее, доказать пп. 5)–8)).

Приведение к требуемому виду. Во всех случаях после применения лемм 5 и 6 с учетом условий на свободу действия и соотношений на порождающие элементы становятся очевидны те замены координат, которые остается сделать, чтобы привести порождающие элементы фундаментальной группы к одному из описанных в таблице видов.

Доведем до конца наиболее сложный из рассматриваемых случаев, когда база B – бутылка Клейна $\mathbb{K}^2$.

Возьмем пару главных элементов $a, b \in \pi_1(\mathbb{K}^2)$ (напомним, что главные элементы связаны соотношением $ab = ba^{-1}$). Элемент a сохраняет ориентацию (утверждение 15), поэтому в базисе из леммы 6 выполнено равенство $a = \left(\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)$, где $n \in \mathbb{Z}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Элемент же b имеет вид $\left(\begin{pmatrix} \sigma & m \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$, где $m \in \mathbb{Z}$, $\sigma = \pm 1$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Остается привести при помощи замены координат в $\mathbb{R}^2$ и замены главных элементов в $\mathbb{K}^2$ параметры a и b к виду, указанному в условии теоремы. Для краткости при проводимых далее заменах не будем изменять названия параметров элементов a и b (например, n будет обозначать элемент в правом верхнем углу матрицы da).

Докажем вначале, что можно выбрать базис из леммы 6, в котором $\sigma = 1$. Действительно (как нетрудно проверить), для выполнения соотношения $ab = ba^{-1}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $x_1 + y_1 + ny_2 = y_1 - \sigma x_1 + \sigma nx_2 - mx_2$ и $x_2 + y_2 = y_2 + \sigma x_2$. Поэтому при $\sigma = -1$ должно быть выполнено равенство $x_2 = 0$. Но это возможно лишь при $n = 0$ (иначе действие a не свободно). Если же a – сдвиг, то по лемме 6 можно выбрать (целочисленный) базис в $\mathbb{R}^2$, в котором $\sigma = 1$.

Приведем теперь линейные части da и db к требуемому в условии виду. Если m и n нечетные, то изменим четность m , заменив b на ba^{-1} (это корректная замена главных элементов; см. утверждение 14). Теперь сделаем замену базиса из утверждения 17: если $n < 0$, то обратим первый базисный вектор e_1 (чтобы сделать $n \geq 0$). После этого заменим второй базисный вектор e_2 на $e_2 - \left[\frac{m}{2}\right]e_1$ (чтобы сделать m равным 0 или 1).

Приведем теперь векторные части элементов a и b к требуемому виду. Чтобы сделать y_2 равным 0, можно (по аналогии с леммой 5) перенести начало координат в точку $\begin{pmatrix} 0 \\ -z_1/n \end{pmatrix}$. Затем, если $x_2 < 0$, следует заменить e_1, e_2 на $-e_1, -e_2$ (чтобы сделать $x_2 > 0$). После этого, если $y_1 < 0$, остается поменять b на

b^{-1} (после чего y_1 изменит знак). Оставшиеся условия на параметры a и b (т.е. $x_1 = \frac{n-\delta}{2}x_2$) вытекают из формулы $ab = ba^{-1}$.

Свобода действия. Для того чтобы проверить свободу действия каждой группы из табл. 1, нужно убедиться, что для любого элемента $(A, \vec{b}) \in G$ уравнение $A - E = -\vec{b}$ не имеет решений (это утверждение 16). Это делается явно. В единственном нетривиальном случае бутылки Клейна для облегчения проверки укажем, какой вид имеет образ любого элемента группы.

ЛЕММА 10. Пусть $a = \left(\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha x \\ x \end{pmatrix}\right)$ и $b = \left(\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Тогда

$$a^k b^l = \left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{1+(-1)^{l-1}}{2}\delta + (-1)^l kn \\ 0 & (-1)^l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k\alpha x + \frac{k(k-1)}{2}nx + ly \\ kx \end{pmatrix} \right). \quad (7)$$

Эта формула проверяется прямым вычислением.

Неизоморфность серий. Решетки над недиффеоморфными поверхностями попарно неизоморфны, и решетки из разных серий над ориентируемыми поверхностями попарно неизоморфны (для цилиндра и для тора одна серия состоит из сдвигов, а вторая нет).

Чтобы разобраться с оставшимися случаями, воспользуемся утверждением 8 (о том, когда решетки на факторпространствах изоморфны). Из этого утверждения сразу вытекают пп. 6), 7) теоремы: матрица C соответствует замене репера (точнее, базиса, поскольку замена начала координат не влияет на сдвиги), а D – замене базиса фундаментальной группы. (Отметим, что изменение ориентации образующей в фундаментальной группе цилиндра приводит к изменению знака в формуле из п. 7) теоремы, однако это можно не учитывать, так как в группе $GL_2(\mathbb{Z})$ есть матрица $-E$.)

Случай тора $\mathbb{T}_{n,y;x}^2$ был разобран Мишачёвым в [4], поэтому он не будет рассматриваться в этой работе (но он может быть разобран аналогично приведенному далее случаю бутылки Клейна $\mathbb{K}^2$). Рассмотрим случай бутылки Клейна. Для этого возьмем две решетки на бутылке Клейна и выясним, какие изоморфизмы $\mathbb{K}^2$ переводят эти решетки друг в друга (и существуют ли такие изоморфизмы).

ЛЕММА 11. Пусть a_1, b_1 и a_2, b_2 – две пары главных элементов, $a_i = \left(\begin{pmatrix} 1 & n_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_i y_i \\ y_i \end{pmatrix}\right)$ и, аналогично, $b_i = \left(\begin{pmatrix} 1 & \delta_i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Тогда автоморфизм плоскости f переводит решетку, соответствующую главным элементам a_1, b_1 , в решетку, соответствующую главным элементам a_2, b_2 , тогда и только тогда, когда существуют такие $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$ и $k \in \mathbb{Z}$, что

$$fa_1 f^{-1} = a_2^{\varepsilon_1}, \quad (8)$$

$$fb_1 f^{-1} = a_2^k b_2^{\varepsilon_2}. \quad (9)$$

Если $a_1 \neq a_2$ или $b_1 \neq b_2$, то таких автоморфизмов f не существует (т.е. решетки из разных серий неизоморфны). Если же $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$, то f является автоморфизмом тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- 1) $f = \left(\begin{pmatrix} \varepsilon_2 & \mu \\ 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \frac{k y}{2} \end{pmatrix} \right)$, где $\mu = \frac{-\varepsilon_1 \delta + \varepsilon_1 k n + \varepsilon_2 \delta}{2}$, $z_1 \in \mathbb{R}$;
- 2) если $n \neq 0$, то $\varepsilon_2 = 1$;
- 3) если n нечетно, то k четно;
- 4) если $\delta \neq 0$ (что возможно только при четном n), то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что f – автоморфизм тогда и только тогда, когда он удовлетворяет уравнениям (8) и (9), вытекает из утверждения 8 (о том, когда две решетки изоморфны) и утверждения 14 (о том, как выглядят все автоморфизмы $\pi_1(\mathbb{K}^2)$, точнее, куда могут перейти главные элементы).

Заметим, далее, что автоморфизм f сохраняет первый базисный вектор e_1 , так как e_1 – единственный собственный вектор с собственным значением 1 для всех элементов $\pi_1(\mathbb{K}^2)$. Выпишем теперь явно действие изоморфизма.

УТВЕРЖДЕНИЕ 20. Пусть $e = \left(\begin{pmatrix} 1 & \tilde{m} \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right)$, где $\tilde{m}, \tilde{x}, \tilde{y}, \sigma \in \mathbb{R}$. Тогда при сопряжении автоморфизмом

$$f = \left(\begin{pmatrix} \sigma_1 & \lambda \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right),$$

где $\sigma_1 = \pm 1$, $\sigma_2 = \pm 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, имеют места равенства

$$fef^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & (\sigma - 1)\sigma_2\lambda + \sigma_1\sigma_2\tilde{m} \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1\tilde{x} + \lambda\tilde{y} + (1 - \sigma)\sigma_2\lambda z_2 - \sigma_1\sigma_2\tilde{m}z_2 \\ (1 - \sigma)z_2 + \sigma_2\tilde{y} \end{pmatrix} \right). \quad (10)$$

В частности, если a и b те же, что и в лемме 11, то выполнены следующие равенства:

$$faf^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & \sigma_1\sigma_2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1\frac{n - \delta}{2}y - \sigma_1\sigma_2nz_2 + \lambda y \\ \sigma_2y \end{pmatrix} \right), \quad (11)$$

$$fbf^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -2\sigma_2\lambda + \sigma_1\sigma_2\delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1x + 2\sigma_2\lambda z_2 - \delta\sigma_1\sigma_2z_2 \\ 2z_2 \end{pmatrix} \right). \quad (12)$$

Поэтому уравнения (8) и (9) будут эквивалентны следующему набору уравнений:

$$\sigma_1\sigma_2n_1 = \varepsilon_1n_2, \quad (13)$$

$$-2\sigma_2\lambda + \sigma_1\sigma_2\delta_1 = \delta_2 - kn_2, \quad (14)$$

$$\sigma_1\frac{n_1 - \delta_1}{2}y_1 - \sigma_1\sigma_2n_1z_2 + \lambda y_1 = \frac{n_2 - \varepsilon_1\delta_2}{2}y_2, \quad (15)$$

$$\sigma_2y_1 = \varepsilon_1y_2, \quad (16)$$

$$\sigma_1x_1 + 2\sigma_2\lambda z_2 - \delta_1\sigma_1\sigma_2z_2 = k\frac{n_2 - \delta_2}{2}y_2 + \frac{k(k - 1)}{2}n_2y_2 + \varepsilon_2x_2, \quad (17)$$

$$2z_2 = ky_2. \quad (18)$$

Уравнения (13) и (14) получаются из сравнения линейных частей у элементов a_1 , a_2 и b_1 , b_2 соответственно, уравнения (15) и (16) – из сравнения векторов сдвига у элементов a_1 и a_2 , а (17) и (18) – из векторов сдвига у элементов b_1 и b_2 .

Так как $y_i > 0$, а $\sigma_i = \pm 1$ и $\varepsilon_i = \pm 1$, то из уравнения (16) вытекает, что $\sigma_2 = \varepsilon_1$ и $y_1 = y_2$. Аналогично, из уравнения (13) следует, что $n_1 = n_2$. Кроме того, если $n_i \neq 0$, то $\sigma_1 = 1$.

Уравнения (14) и (18) дают соответственно

$$\lambda = \frac{-\sigma_2 \delta_2 + k \sigma_2 n_2 + \sigma_1 \delta_1}{2}, \quad z_2 = \frac{k y_2}{2}.$$

Подставляя полученные равенства в уравнение (17), получаем, что $y_1 = y_2$, $\sigma_1 = \varepsilon_2$.

Чтобы доказать равенства $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$, остается показать, что $\delta_1 = \delta_2$. Заметим, что если $n_1 (= n_2)$ нечетно, то $\delta_1 = \delta_2 = 0$ (и k четно, так как λ целое). Если же $n_1 (= n_2)$ четно, то $\sigma_2 \delta_2 = \sigma_1 \delta_1$, так как λ целое (т.е. $\delta_1 = \delta_2$, и если $\delta_i \neq 0$, то $\sigma_1 = \sigma_2$).

Оставшееся уравнение (15) будет выполняться автоматически.

Теорема 15 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Для любой полной решетки на бутылке Клейна (выписанной в теореме 15) индуцированная решетка на торе (накрывающем бутылку Клейна) получается при факторизации $(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}^2)$ по действию подгруппы, порожденной элементами в трех правых столбцах табл. 1.

4.3. Завершение классификации. В этом пункте для каждой полной решетки P на двумерном многообразии B^2 найдены пространство препятствий $H^2(B^2, P)$ и нетривиальные подкручивания $H^2(B^2, \mathbb{R})/H_P^2(B^2)$, тем самым, завершена классификация компактных лагранжевых расслоений над двумерными поверхностями. Пространство препятствий и нетривиальные подкручивания одинаковы для изоморфных решеток и выписаны в следующей теореме в том виде, в котором они были найдены в § 3.

ТЕОРЕМА 16 (инварианты лагранжевых расслоений). 1) Для любой полной решетки P на многообразии B^2 , отличном от тора и бутылки Клейна, пространство препятствий $H^2(B^2, P)$ и нетривиальные подкручивания $H^2(B^2, \mathbb{R})/H_P^2(B)$ тривиальны.

2) Для любой полной решетки P из серии $\mathbb{T}_{u,v,w,z}^2$ пространство препятствий $H^2(\mathbb{T}^2, P)$ изоморфно пространству $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Группа $H_P^2(\mathbb{T}^2)$ является подгруппой $H^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$, порожденной числами u, v, w, z .

3) Для любой полной решетки P из серии $\mathbb{T}_{n,y;x}^2$ пространство препятствий $H^2(\mathbb{T}^2, P)$ изоморфно $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$. Группа $H_P^2(\mathbb{T}^2)$ является подгруппой $H^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$, порожденной числами x и y .

4) Для любой полной решетки P из серии $\mathbb{K}_{m,y;0,x}^2$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, пространство препятствий $H^2(\mathbb{K}^2, P)$ изоморфно $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_m$ (где $\mathbb{Z}_0$ формально полагается равным $\mathbb{Z}$). Группа $H_P^2(\mathbb{K}^2)$ тривиальна.

5) Для любой полной решетки P из серии $\mathbb{K}_{2m,y;1,x}^2$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, пространство препятствий $H^2(\mathbb{K}^2, P)$ изоморфно $\mathbb{Z}_{4m}$ (где $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$). Группа $H_P^2(\mathbb{K}^2)$ тривиальна.

Информация об инвариантах тора и бутылки Клейна собрана воедино в табл. 2.

ТАБЛИЦА 2. Инварианты компактных лагранжевых расслоений

База	Серия	Нетривиальные подкручивания		$H^2(B^2, P)$	
		$H^2(B^2, \mathbb{R})$	$H_P^2(B^2)$	$\mathcal{X}^2(B^2, P)$	$\mathcal{B}^2(B^2, P)$
$\mathbb{T}^2$	$\mathbb{T}_{u,v;w,z}^2$	$\mathbb{R}$	$u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z} + w\mathbb{Z} + z\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	0
$\mathbb{T}^2$	$\mathbb{T}_{n,y;x}^2$	$\mathbb{R}$	$x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$0 \oplus n\mathbb{Z}$
$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{K}_{m,y;0,x}^2$	0	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z} \oplus m\mathbb{Z}$
$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{K}_{2m,y;1,x}^2$	0	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$4m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 16. 1) Напомним, что полные решетки существуют только на торе, бутылке Клейна, цилиндре, листе Мёбиуса и на плоскости (см. теорему 15). Для всех этих пространств, кроме тора и бутылки Клейна, нетривиальные подкручивания отсутствуют из-за тривиальности вторых когомологий де Рама, а препятствия к построению сечения отсутствуют, так как эти базы могут быть стянуты к окружности или точке.

2), 3) Для тора препятствия к построению сечения выписаны в утверждении 9, а нетривиальные подкручивания – в примере 7.

4), 5) Для бутылки Клейна препятствия к построению сечения выписаны в утверждении 10. Нетривиальные подкручивания отсутствуют из-за тривиальности вторых когомологий де Рама.

СЛЕДСТВИЕ 9. Два лагранжевых расслоения $\pi_i: (M_i^4, \omega_i) \rightarrow B^2$ над пространством B^2 , отличным от тора и бутылки Клейна, с соответствующими полными решетками P_i лагранжево эквивалентны тогда и только тогда, когда им соответствуют одинаковые решетки P_i на базе B^2 .

Подведем итоги. В § 3 (см. теорему 11) было показано, что лагранжевы расслоения $\pi: (M^4, \omega) \rightarrow B^2$ с компактным слоем F классифицируются следующими инвариантами: (замкнутой) решеткой P (ранга 2), препятствием к построению сечения (т.е. элементом группы $H^2(B^2, P)$) и нетривиальными подкручиваниями (т.е. элементами группы $H^2(B^2, \mathbb{R})/H_P^2(B^2)$).

Любая замкнутая решетка P ранга 2 на компактной поверхности B^2 полна (см. теорему 13 и замечание 6). Полные решетки классифицированы с точностью до изоморфизма в теореме 15. Пространства

$$H^2(B^2, P), \quad H^2(B^2, \mathbb{R})/H_P^2(B^2)$$

описаны в теореме 16.

Это завершает классификацию лагранжевых расслоений $\pi: (M^4, \omega) \rightarrow B^2$ с компактным тотальным пространством M^4 с точностью до лагранжевой эквивалентности.

§ 5. Примеры лагранжевых и почти лагранжевых расслоений

В этом параграфе приведен пример нетривиального почти лагранжева расслоения, а также построен полный список лагранжевых расслоений над двумерными поверхностями с точностью до послыйного симплектоморфизма.

ПРИМЕР 8. Приведем пример почти лагранжева расслоения с нетривиальным препятствием к построению симплектической структуры (см. определение 6). А именно, построим такое расслоение $\pi: (M^6, \eta) \rightarrow \mathbb{T}^3$ над тором $\mathbb{T}^3$, что тотальное пространство M^6 компактно и $d\eta = \pi^*\psi$ для некоторой 3-формы ψ , задающей ненулевой элемент 3-когомологий базы $[\psi] \in H^3(\mathbb{T}^3, \mathbb{R})$ (см. утверждение 21).

Реализуем это расслоение как фактор подкрученного кокасательного расслоения. А именно, рассмотрим расслоение $\pi_0: (T^*\mathbb{R}^3, \omega_0 + \pi_0^*\varphi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ со стандартными координатами $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$, где x, y, z – координаты, постоянные на слоях, а на α, β, γ – координаты в слое, $\omega_0 = d\alpha \wedge dx + d\beta \wedge dy + d\gamma \wedge dz$, а $\varphi = 2x dy \wedge dz + 2y dz \wedge dx + 2z dx \wedge dy$. Введем, далее, лагранжевы изоморфизмы s_1, s_2, s_3 и f_1, f_2, f_3 , действующие на тотальном пространстве $T^*\mathbb{R}^3$ по следующим формулам:

$$s_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z, \alpha + 1, \beta, \gamma), \quad (19)$$

$$s_2(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z, \alpha, \beta + 1, \gamma), \quad (20)$$

$$s_3(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma + 1), \quad (21)$$

$$f_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = (x + 1, y, z, \alpha, \beta + z, \gamma - y), \quad (22)$$

$$f_2(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = (x, y + 1, z, \alpha - z, \beta, \gamma + x), \quad (23)$$

$$f_3(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z + 1, \alpha + y, \beta - x, \gamma). \quad (24)$$

Обозначим через $\pi: (M^6, \eta) \rightarrow B^3$ расслоение, получающееся при факторизации расслоения $\pi_0: (T^*\mathbb{R}^3, \omega_0 + \pi^*\varphi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ по описанным изоморфизмам s_i, f_j .

УТВЕРЖДЕНИЕ 21. Построенное расслоение $\pi: (M^6, \eta) \rightarrow B^3$ – это почти лагранжево расслоение с нетривиальным препятствием к построению симплектической структуры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство утверждения разобьем на три шага.

Шаг 1. Построенное расслоение $\pi: (M^6, \eta) \rightarrow B^3$ – локально тривиальное расслоение над тором $\mathbb{T}^3$ со слоем $\mathbb{T}^3$. Действительно, база является тором, так как изоморфизмы f_i действуют на $\mathbb{R}^3$ как единичные сдвиги вдоль осей. Каждый слой является тором, так как в нем отождествляются в точности координаты (α, β, γ) , отличающиеся на целочисленные векторы. Чтобы в этом убедиться, достаточно явно проверить, что каждый коммутатор $[f_i, f_j] = f_i f_j f_i^{-1} f_j^{-1}$ переводит любую точку $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ в точку $(x, y, z, \alpha + \tilde{m}_1, \beta + \tilde{m}_2, \gamma + \tilde{m}_3)$ для некоторых целых $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3$ (зависящих от i и j). Расслоение локально тривиально, так как фактор базы – многообразие.

Шаг 2. Расслоение $\pi: (M^6, \eta) \rightarrow B^3$ является почти лагранжевым. Действительно, форма $\omega_0 + \pi_0^*\varphi$ корректно индуцируется на факторрасслоение, так как s_i, f_j – послойные симплектоморфизмы.

Шаг 3. Препятствие к построению симплектической структуры нетривиально. Действительно, если ψ – такая 3-форма на B^3 , что $d\eta = \pi^*\psi$, то получаем $\int_{B^3} \psi = 6 (\neq 0)$. Это вытекает из того, что $d(\omega_0 + \pi_0^*\varphi) = \pi_0^*(6 dx \wedge dy \wedge dz)$.

ПРИМЕР 9. Выпишем теперь список, в котором содержатся все лагранжевы расслоения над двумерными поверхностями с точностью до послойного симплектоморфизма (см. леммы 12–14). Подчеркнем, что в этом списке будут послойно симплектоморфные между собой расслоения.

Расслоения над тором $\mathbb{T}^2$. Реализуем их как фактор подкрученного кокасательного расслоения. А именно, рассмотрим расслоение $\pi_0: (\mathbb{R}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{R}^2$ со стандартными координатами (x, y, α, β) , где x, y – координаты, постоянные на слоях, α, β – координаты в слое, а $\omega_\lambda = d\alpha \wedge dx + d\beta \wedge dy + \lambda dx \wedge dy$. Введем также два лагранжевых изоморфизма s_1, s_2 , действующих на тотальном пространстве по следующим формулам:

$$s_1(x, y, \alpha, \beta) = (x, y, \alpha + 1, \beta), \quad (25)$$

$$s_2(x, y, \alpha, \beta) = (x, y, \alpha, \beta + 1). \quad (26)$$

Расслоения с решеткой $\mathbb{T}_{n, y_0; x_0}^2$. Пусть t, h – лагранжевы изоморфизмы, задаваемые следующими формулами:

$$t(x, y, \alpha, \beta) = \left(x + x_0, y, \alpha, \beta + \frac{nm_0 + n_0}{y_0} y \right), \quad (27)$$

$$h(x, y, \alpha, \beta) = \left(x + ny, y + y_0, \alpha - \frac{m_0}{x_0} x, \beta - n\alpha + \frac{nm_0}{x_0} x \right). \quad (28)$$

Обозначим через $\pi: (M_{m_0, n_0}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{T}_{n, y_0; x_0}^2$ расслоение, получающееся при факторизации расслоения $\pi_0: (\mathbb{R}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{R}^2$ по изоморфизмам s_1, s_2 и t, h .

ЛЕММА 12. *Любое лагранжево расслоение $\pi: (M^4, \omega) \rightarrow \mathbb{T}^2$ с соответствующей решеткой из серии $\mathbb{T}_{n, y_0; x_0}^2$ послойно симплектоморфно одному из расслоений $\pi: (M_{m_0, n_0}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{T}_{n, y_0; x_0}^2$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ и $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение докажем за два шага.

Шаг 1. $\pi: (M_{m_0, n_0}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{T}_{n, y_0; x_0}^2$ – это лагранжево расслоение с соответствующей решеткой P из серии $\mathbb{T}_{n, y_0; x_0}^2$ и препятствием $\binom{m_0}{n_0 + n\mathbb{Z}} \in P_O$. Доказательство того, что построенное расслоение действительно является лагранжевым расслоением над тором со слоем тор, аналогично утверждению 21.

Для того чтобы убедиться, что у построенного лагранжева расслоения соответствующая решетка из серии $\mathbb{T}_{n, y_0; x_0}^2$, достаточно рассмотреть действие изоморфизмов t и h на слое F_O над началом координат O .

Проверим, что у построенного расслоения препятствие совпадает с указанным в условии. Для этого построим сечение над 1-остовом с препятствующей коцепью $\binom{m_0}{n_0}$. В данном случае 1-остов может быть отождествлен с параллелограммом $OO_1O_2O_3$, натянутым на вершины $O = (0, 0, 0, 0)$, $O_1 = (x_0, 0, 0, 0)$, $O_2 = (x_0, y_0, 0, 0)$, $O_3 = (0, y_0, 0, 0)$ (ср. с параллелограммом из п. 3.2). Возьмем сечение над 1-остовом тора, которому соответствуют отрезки OO_1 и OO_3 (над отрезками OO_1 и OO_3 соответственно). В таком случае над O_2O_3 сечение будет задаваться отрезком O_3Q_3 , где $Q_3 = (x_0, y_0, -m_0, nm_0)$. Аналогично, над O_1O_2 сечение – отрезок O_1Q_2 , где $Q_2 = (x_0, y_0, 0, nm_0 + n_0)$. Осталось заметить, что точки Q_2 и Q_3 отличаются в точности на $(0, 0, m_0, n_0)$.

Шаг 2. Докажем собственно утверждение леммы. Остается показать, что расслоения $\pi: (M_{m_0, n_0}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{T}_{n, y_0; x_0}^2$ реализуют все нетривиальные подкручивания расслоения $\pi: (M_{m_0, n_0}^4, \omega_0) \rightarrow \mathbb{T}_{n, y_0; x_0}^2$. Действительно, $\omega_\lambda - \omega_0 = \pi^*(\lambda dx \wedge dy)$ и $\int_{\mathbb{T}^2} \lambda dx \wedge dy = \lambda x_0 y_0$.

Расслоения с решеткой $\mathbb{T}_{u, v; w, z}^2$. На этот раз определим лагранжевы изоморфизмы t_1, t_2 по следующим формулам:

$$t_1(x, y, \alpha, \beta) = (x + u, y + v, \alpha - \delta x, \beta - \delta y), \quad (29)$$

$$t_2(x, y, \alpha, \beta) = (x + w, y + z, \alpha + \gamma x, \beta + \gamma y) \quad (30)$$

для некоторых $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$, так что линейные комбинации $\gamma u - \delta v$ и $\gamma v - \delta z$ целочисленные. Иными словами, $\gamma(u, v) + \delta(w, z) = (m_0, n_0)$ для некоторых целых m_0, n_0 .

Обозначим через $\pi: (M_{m_0, n_0}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{T}_{u, v; w, z}^2$ расслоение, получающееся при факторизации расслоения $\pi_0: (\mathbb{R}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{R}^2$ по изоморфизмам s_1, s_2 и t_1, t_2 .

ЛЕММА 13. Любое лагранжево расслоение $\pi: (M^4, \omega) \rightarrow \mathbb{T}^2$ с соответствующей решеткой из серии $\mathbb{T}_{u, v; w, z}^2$ послойно симплектоморфно одному из расслоений $\pi: (M_{m_0, n_0}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{T}_{u, v; w, z}^2$ для некоторых $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 12. В данном случае $\pi: (M_{m_0, n_0}^4, \omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{T}_{u, v; w, z}^2$ – это лагранжево расслоение с соответствующей решеткой P из серии $\mathbb{T}_{u, v; w, z}^2$ и препятствием $\begin{pmatrix} m_0 \\ n_0 \end{pmatrix} \in P_0$.

Расслоение над бутылкой Клейна $\mathbb{K}^2$ с решеткой $\mathbb{K}_{m, y_0; \delta, x_0}^2$. Получим каждое лагранжево расслоение над бутылкой Клейна в результате склейки некоторого расслоения $\pi: (I^2 \times \mathbb{T}^2, \omega) \rightarrow I^2$ над параллелограммом I^2 по послойным симплектоморфизмам g и h , отождествляющим расслоения над противоположными парами сторон. Опишем явно параллелограмм I^2 , форму ω и послойные симплектоморфизмы g и h .

База I^2 – параллелограмм, натянутый на вершины $(0, 0)$, $(x_0, 0)$, $(\frac{m-\delta}{2}y_0, y_0)$ и $(x_0 + \frac{m-\delta}{2}y_0, y_0)$ для некоторых $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $m, \delta \in \mathbb{Z}$. Форма ω имеет вид $d\alpha \wedge dx + d\beta \wedge dy$ в стандартных координатах (x, y, α, β) , где x, y – координаты, поднятые с базы, а $\alpha, \beta \pmod{1}$ – координаты на слое. Послойные симплектоморфизмы g, h задаются следующими формулами:

$$h(x, y, \alpha, \beta) = \left(x + my + \frac{m-\delta}{2}y_0, y + y_0, \right. \\ \left. \alpha + \frac{m_0}{x_0}x + \left(\frac{mm_0}{x_0} + \frac{n_0}{x_0} \right)y, -m\alpha + \beta + \frac{n_0}{x_0}x \right), \quad (31)$$

$$g(x, y, \alpha, \beta) = \left(x + (\delta - m)y + \frac{m-\delta}{2}y_0 + x_0, -y + y_0, \alpha, (\delta - m)\alpha - \beta \right) \quad (32)$$

для некоторых $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$.

Обозначим через $\pi: (M_{m_0, n_0}^4, \omega) \rightarrow \mathbb{K}_{m, y_0; \delta, x_0}^2$ расслоение, получающееся при склейке расслоения $\pi: (I^2 \times \mathbb{T}^2, \omega) \rightarrow I^2$ по изоморфизмам g и h (точнее, при склейке расслоений над боковыми сторонами параллелограмма I^2).

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 12.

ЛЕММА 14. *Любое лагранжево расслоение над бутылкой Клейна послойно симплектоморфно одному из расслоений $\pi: (M_{m_0, n_0}^4, \omega) \rightarrow \mathbb{K}_{m, y_0; \delta, x_0}^2$ для некоторых $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $\delta, m, m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$.*

В данном случае $\pi: (M_{m_0, n_0}^4, \omega) \rightarrow \mathbb{K}_{m, y_0; \delta, x_0}^2$ – это лагранжево расслоение с соответствующей решеткой P из серии $\mathbb{K}_{m, y_0; \delta, x_0}^2$, у которого одна из препятствующих коцепей равна $\begin{pmatrix} m_0 \\ n_0 \end{pmatrix} \in P_O$. Поэтому можно наложить следующие ограничения на параметры $x_0, y_0, \delta, m, m_0, n_0$: по классификации решеток на бутылке Клейна (см. теорему 15) достаточно взять $x_0, y_0 > 0$, $m > 0$, а δ равным 0 или 1 и m четным при $\delta = 1$; по структуре пространства препятствий $H^2(B, P)$ (см. теорему 16) при $\delta = 0$ можно рассматривать $m_0 \pmod{2}$ и $n_0 \pmod{m}$, а при $\delta = 1$ достаточно рассмотреть $m_0 \pmod{2m}$ и $n_0 = 0$.

В частности, при $m \neq 0$ достаточно рассмотреть лишь конечный набор пар целых чисел m_0, n_0 .

§ 6. Направления для дальнейших исследований

В этом параграфе предложим некоторые направления для дальнейших исследований. Вначале укажем некоторые способы обобщения полученных в этой работе результатов (пп. 6.1, 6.2), а затем сформулируем несколько конкретных задач (п. 6.3).

Есть два естественных способа обобщения описанной в этой работе классификации лагранжевых расслоений с точностью до лагранжевой эквивалентности: во-первых, можно изменить множество классифицируемых расслоений; во-вторых, можно изменить отношение эквивалентности, для которого проводится классификация. Предложим несколько способов таких обобщений.

6.1. Другие расслоения. В этой работе классифицируются расслоения $\pi: (M^{2n}, \omega) \rightarrow B^n$ над многообразием B^n такие, что ω невырожденная, $d\omega = \pi^*\psi$ (для некоторой 3-формы ψ на базе B^n) и ограничение формы ω на каждый слой $F \subset M^{2n}$ тривиально (т.е. $\omega|_F \equiv 0$). Укажем естественные способы расширения множества тотальных пространств M^{2n} , множества структур ω на тотальном пространстве, а также множества баз B^n .

Расслоение с особенностями. Можно предположить, что расслоение локально тривиально только над всюду плотным открытым множеством $O^n \subset B^n$. На дополнении B^n/O^n расслоение может допускать особенности. Начать можно с невырожденных особенностей, так как для них существует локальная классификация (теорема Элиассона; см., например, [1]). Многие результаты об этих расслоениях можно найти в работах Н. Т. Зунга (см., например, [11] и [3]).

Другие структуры. Проведенная классификация основывалась на конструкции Дюйстермаата (см. п. 2.1). Отметим, что эта конструкция применима также в следующих двух более общих ситуациях:

1) форма ω невырождена и $\omega|_F \equiv 0$ (условие $d\omega = \pi^*\psi$ не важно для конструкции Дюйстермаата, но позволяет построить рассматриваемое расслоение на основе факторкокасательного; см. теорему 6);

2) на тотальном пространстве расслоения $\pi: (M^{2n}, \nu) \rightarrow B^n$ задан бивектор ν (см. п. 2.1).

Базы – не многообразия. Введение невырожденных особенностей требует рассматривать базы, которые не являются многообразиями. Например, известная теорема Дельзанта описывает расслоения с эллиптическими особенностями, базами которых являются многообразия с углами (подробнее, см., например, [12]).

Кроме того, К. Н. Мишачёвым в [4] было предложено классифицировать расслоения над орбифолдами.

6.2. Другие классификации. Перечислим некоторые естественные классификации. Расслоения, на тотальном пространстве которых задана симплектическая структура, можно классифицировать с точностью до следующих отношений эквивалентности.

1. Лагранжева эквивалентность = послойный симплектоморфизм, тождественный на базе.
2. Лагранжев изоморфизм = послойный симплектоморфизм.
3. Послойный диффеоморфизм (не обязательно тождественный на базе).

Кроме того, можно классифицировать тотальные пространства таких расслоений с точностью до следующих отношений эквивалентности.

- A. Симплектоморфизм (не обязательно послойный).
- B. Диффеоморфизм (не обязательно послойный).

Различные классификации лагранжевых расслоений описаны, например, в [13]. Также в [13] рассматривается классификация тотальных пространств лагранжевых расслоений с невырожденными негиперболическими особенностями с точностью до диффеоморфизма (т.е. обсуждается вопрос типа B).

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Опишем вкратце результаты Мишачёва о классификации компактных лагранжевых расслоений с точностью до лагранжева изоморфизма из работы [4], а также укажем на некоторые допущенные им ошибки. Для классификация с точностью до лагранжева изоморфизма достаточно выполнить следующие два шага.

Шаг 1. Классифицировать все замкнутые решетки ранга 2 с точностью до изоморфизма.

Шаг 2. Для каждой решетки P профакторизовать множество соответствующих лагранжевых расслоений по действию группы автоморфизмов решетки Aut_P .

На языке теории пучков (см. п. 2.4.3 и § 3) шаг 2 формулируется следующим образом: профакторизовать группу $H^1(B, \Lambda(T^*B/P))$ по действию группы Aut_P . Мишачёв описал действие группы Aut_P на нормальной подгруппе $H^0(B, Z^2B)/d_*(H^0(B, \Gamma(T^*B/P)))$ и на факторгруппе, т.е. на ядре отображения $H^1(B, \Gamma(T^*B/P)) \xrightarrow{d_*} H^1(B, Z^2B)$. Однако не понятно, как можно восстановить действие на всей группе $H^1(B, \Lambda(T^*B/P))$.

Для того чтобы получить полный ответ, можно сделать следующее. Для каждого элемента из факторгруппы $\text{Ker}(H^1(B, \Gamma(T^*B/P)) \xrightarrow{d_*} H^1(B, Z^2B))$ фиксировать произвольный представитель в группе $H^1(B, \Lambda(T^*B/P))$, а затем явно указать, во что переходит этот представитель под действием группы Aut_P . Или, говоря на языке теории препятствий, для каждого препятствия взять реализующее его лагранжево расслоение, а затем явно указать, в какие лагранжевы расслоения его переводит группа Aut_P .

Кроме того заметим, что Мишачёв допустил ошибку при нахождении пространства препятствий к построению сечения (т.е. при нахождении пространства $H^1(B, \Gamma(T^*B/P))$, которое он обозначал через $H^1(\mathcal{T}^*\mathcal{B}/\mathcal{P})$), поэтому в его вычислениях вместо $H^1(\mathcal{T}^*\mathcal{B}/\mathcal{P})$ нужно подставлять не $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}$, а $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$.

6.3. Некоторые задачи.

ЗАДАЧА 1. Классифицировать все лагранжевы расслоения с невырожденными особенностями с точностью до лагранжевой эквивалентности.

Это нетривиальная задача: при ее решении, видимо, потребуется хорошее знание локального и полудлокального устройства невырожденных особенностей (см. работы Н. Т. Зунга, например, [11], а также [1]). Расслоения с двумя из трех типов невырожденных особенностей (без гиперболических) рассматриваются в различных работах о почти торических многообразиях (см., например, [12], [13]).

Объясним, почему классификация при помощи когомологий Чеха (см. п. 2.4.3) не считается окончательным ответом. Вкратце напомним общую идею этой классификации на примере лагранжевых расслоений. Так как расслоение $\pi: (M^{2n}, \omega) \rightarrow B^n$ со слоем F локально тривиально, то существует такое покрытие $\{U_\alpha\}$ базы B^n , над каждым элементом которого расслоение тривиально. Обозначим через $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ соответствующие тривиализации.

Классификация при помощи когомологий Чеха утверждает, что расслоение задается набором функций склеек $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$. Так как функции склейки φ_α определяются сечением лагранжева расслоения, то возникает пучок $\Lambda(T^*B/P)$.

Аналогично, расслоения со структурной группой G над базой B классифицируются 1-когомологиями Чеха $H^1(B, \mathcal{G})$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{G}$ сечений тривиального расслоения $G \times B \rightarrow B$.

Эта классификация хорошо работает, когда ответ тривиален, по некоторым простейшим соображениям (например, база стягивается к точке или окружности; см. [13]). Но обычно не понятно, как получить полный список всех расслоений (например, как в этой работе) с помощью такой классификации.

Сформулируем еще две задачи о лагранжевых расслоениях. Если следовать предложенной схеме классификации лагранжевых расслоения из § 3, то в обеих задачах наибольшую трудность составляет классификация решеток.

ЗАДАЧА 2. Классифицировать компактные (почти) лагранжевы расслоения над n -мерным тором $\mathbb{T}^n$.

Интересно, чем будут отличаться почти лагранжевы расслоения от лагранжевых. Например, при $n > 2$ может возникнуть препятствие к построению симплектической структуры (см. определение 6). Интересно также, все ли когомологические классы $H^3(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ могут быть реализованы препятствием к построению симплектической структуры.

ЗАДАЧА 3. Классифицировать (почти) лагранжевы расслоения над двумерными поверхностями со слоем цилиндр $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{T}^1$.

Возможно, при описании решеток в задаче 3 будет полезна многозначная теория Морса, предложенная С. П. Новиковым (см., например, [14]).

Уже после того как работа была написана, автор узнал, что классификация лагранжевых расслоений над бутылкой Клейна была независимо проведена Д. Сепе (см. [15]).

Список литературы

- [1] A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, “Singularities of integrable Hamiltonian systems”, *Topological methods in the theory of integrable systems*, Cambridge Sci. Publ., Cambridge, 2006, 1–67.
- [2] J. J. Duistermaat, “On global action-angle coordinates”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **33**:6 (1980), 687–706.
- [3] N. T. Zung, “Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. II: Topological classification”, *Compositio Math.*, **138**:2 (2003), 125–156.
- [4] K. N. Mishachev, “The classification of Lagrangian bundles over surfaces”, *Differential Geom. Appl.*, **6**:4 (1996), 301–320.
- [5] С.-Ц. Ху, *Теория гомотопий*, Мир, М., 1964; пер. с англ.: S.-Т. Ну, *Homotopy theory*, Academic Press, New York–London, 1959.
- [6] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, *Курс гомотопической топологии*, Наука, М., 1989.
- [7] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, М., 1986; англ. пер.: B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern geometry – methods and applications. Part I. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields*, Grad. Texts in Math., **93**, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [8] J. Milnor, “On the existence of a connection with curvature zero”, *Comment. Math. Helv.*, **32** (1958), 215–223.
- [9] D. Freid, W. Goldman, M. W. Hirsh, “Affine manifolds with nilpotent holonomy”, *Comment. Math. Helv.*, **56**:4 (1981), 487–523.
- [10] В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений*, Наука, М., 1974; пер. с англ.: W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations*, Interscience Publ., New York–London–Sydney, 1966.
- [11] N. T. Zung, “Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I: Arnold–Liouville with singularities”, *Compositio Math.*, **101**:2 (1996), 179–215.
- [12] M. Symington, “Four dimensions from two in symplectic topology”, *Topology and geometry of manifolds* (University of Georgia, Athens, GA, USA, 2001), Proc. Sympos. Pure Math., **71**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, 153–208.
- [13] N. C. Leung, M. Symington, “Almost toric symplectic four-manifolds”, *J. Symplectic Geom.*, **8**:2 (2010), 143–187.
- [14] С. П. Новиков, “Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса”, *УМН*, **37**:5 (1982), 3–49; англ. пер.: S. P. Novikov, “The Hamiltonian formalism and a many-valued analogue of Morse theory”, *Russian Math. Surveys*, **37**:5 (1982), 1–56.
- [15] D. Sepe, *Classification of Lagrangian fibrations over a Klein bottle*, arXiv: abs/0909.2982.

И. К. Козлов (I. K. Kozlov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ikozlov90@gmail.com

Поступила в редакцию
18.11.2009