Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. В. Базайкин, Е. Г. Малькович, $\text{Spin}(7)$ -структуры на комплексных линейных расслоениях и явные римановы метрики с группой голономии $\text{SU}(4)$, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 4, 3–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7657>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 10:04:54

УДК 514.763.3

Я. В. Базайкин, Е. Г. Малькович

Spin(7)-структуры на комплексных линейных расслоениях и явные римановы метрики с группой голономии SU(4)

Полностью исследована система дифференциальных уравнений от пяти неизвестных функций, эквивалентная существованию параллельной Spin(7)-структуры на конусе над 3-сасакиевым многообразием. В явном виде построено непрерывное однопараметрическое семейство решений этой системы, отвечающих метрикам со специальной группой голономии SU(4), обобщающих метрики Калаби.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: группа голономии, 3-сасакиево многообразие.

§ 1. Введение

1.1. Первым примером полной римановой метрики с группой голономии SU(n) явилась метрика Калаби, найденная в [1] в явном виде через алгебраические функции. Метрика Калаби строится на пространстве соответствующего линейного комплексного расслоения над произвольным многообразием Кэлера–Эйнштейна F . Если в качестве F рассмотреть комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^{n-1}$, то полученная метрика Калаби будет асимптотически локально евклидовой (АЛЕ), в остальных случаях – асимптотически конической (АК). В той же работе [1] Калаби исследовал гиперкэлеровы метрики и построил в явном виде полную риманову метрику с группой голономии Sp(m) на $T^*\mathbb{C}P^m$, являющуюся первым явным примером гиперкэлеровой метрики.

В настоящей работе мы строим в явной, алгебраической форме однопараметрическое семейство полных римановых метрик, “соединяющих” эти две метрики Калаби в пространстве специальных кэлеровых метрик в размерности восемь в случае, когда F является многообразием комплексных 3-флагов в $\mathbb{C}^3$, и полностью исследуем задачу существования метрик с группой голономии Spin(7) на соответствующем расслоении над F . В этом случае четырехмерное кватернионно-кэлерово многообразие $\mathcal{O}$, связанное с F , допускает “расщепление” касательного расслоения, что позволяет ввести дополнительный параметр деформации метрики и получить корректную систему дифференциальных уравнений.

Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-7256.2010.1), работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 09-01-00598-а, № 09-01-12130-офи-м, № 10-01-92102-ЯФ-а), работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 09-01-00598-а, № 09-01-00142-а) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (государственный контракт № 02.740.11.0429).

Интерес к явным метрикам со специальными группами голономии (и, в частности, к специальным кэлеровым метрикам) достаточно большой, поскольку таких примеров известно мало. Например, Джойс в [2; 8.2.5] высказал гипотезу, что все другие (кроме метрики Калаби для $F = \mathbb{C}P^{n-1}$) АЛЕ-метрики с группой голономии $SU(n)$ при $n \geq 3$ являются “трансцендентными”, т.е. не могут быть представлены в алгебраической форме. Отметим сразу, что метрики, которые строятся нами в статье, являются асимптотически коническими (АК), но не являются АЛЕ-метриками, поэтому наш пример не опровергает гипотезу, высказанную Джойсом.

1.2. Более точно, пусть $M = SU(3)/U(1)_{1,1,-2}$ – пространство Алоффа–Уоллаха со структурой 3-сасакиева семимерного многообразия. На $\bar{M} = M \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим риманову метрику следующего вида:

$$dt^2 + A_1(t)^2 \eta_1^2 + A_2(t)^2 \eta_2^2 + A_3(t)^2 \eta_3^2 + B(t)^2 (\eta_4^2 + \eta_5^2) + C(t)^2 (\eta_6^2 + \eta_7^2), \quad (1.1)$$

где t – координата на $\mathbb{R}_+$, $\{\eta_i\}$ – ортонормированный корепер на M , согласованный с 3-сасакиевой структурой (см. подробности в § 2). Конусную особенность (при $t = 0$) пространства $\bar{M}$ разрешим следующим образом: затынем на уровне $\{t = 0\}$ каждую отвечающую ковектору η_1 окружность в точку. Полученное многообразие, профакторизованное по $\mathbb{Z}_2$, диффеоморфно $H/\mathbb{Z}_2$ – квадрату канонического комплексного линейного расслоения над пространством флагов в $\mathbb{C}^3$.

ТЕОРЕМА 1. *При $0 \leq \alpha < 1$ каждая риманова метрика из семейства*

$$\begin{aligned} \bar{g}_\alpha = & \frac{r^4(r^2 - \alpha^2)(r^2 + \alpha^2)}{r^8 - 2\alpha^4(r^4 - 1) - 1} dr^2 + \frac{r^8 - 2\alpha^4(r^4 - 1) - 1}{r^2(r^2 - \alpha^2)(r^2 + \alpha^2)} \eta_1^2 + r^2(\eta_2^2 + \eta_3^2) \\ & + (r^2 + \alpha^2)(\eta_4^2 + \eta_5^2) + (r^2 - \alpha^2)(\eta_6^2 + \eta_7^2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

является полной гладкой римановой метрикой на $H/\mathbb{Z}_2$ с группой голономии $SU(4)$. При $\alpha = 0$ метрика (1.2) изометрична метрике Калаби (см. [1]) с группой голономии $SU(4)$; при $\alpha = 1$ метрика (1.2) изометрична метрике Калаби (см. [1]) с группой голономии $Sp(2) \subset SU(4)$ на $T^\mathbb{C}P^2$.*

Отметим, что метрика (1.2) в теореме 1 при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ имеет форму, отличную от той, которая приведена в [1]; метрики Калаби в таком виде исследовались в [3] и [4]. Метрика (1.2) была также найдена в [5] при $M = SU(3)/U(1)_{1,1,-2}$ как частное решение системы уравнений для метрик с группой голономии $Spin(7)$.

Этот результат получен нами при систематическом изучении метрик вида (1.1), имеющих группу голономии $Spin(7)$, методом, разработанным в [6] и применявшемся затем в [7], [8]: метрика (1.1) строится по произвольному семимерному 3-сасакиеву многообразию M и обладает естественной $Spin(7)$ -структурой. Условие параллельности этой структуры сводится к следующей

системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 A_1' &= \frac{(A_2 - A_3)^2 - A_1^2}{A_2 A_3} + \frac{A_1^2(B^2 + C^2)}{B^2 C^2}, \\
 A_2' &= \frac{A_1^2 - A_2^2 + A_3^2}{A_1 A_3} - \frac{B^2 + C^2 - 2A_2^2}{BC}, \\
 A_3' &= \frac{A_1^2 + A_2^2 - A_3^2}{A_1 A_2} - \frac{B^2 + C^2 - 2A_3^2}{BC}, \\
 B' &= -\frac{CA_1 + BA_2 + BA_3}{BC} - \frac{(C^2 - B^2)(A_2 + A_3)}{2A_2 A_3 C}, \\
 C' &= -\frac{BA_1 + CA_2 + CA_3}{BC} - \frac{(B^2 - C^2)(A_2 + A_3)}{2A_2 A_3 B}.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Отметим, что система (1.3) при $B = C$ полностью исследована в [6], [8]. Для получения гладкой метрики (1.1) необходимо разрешить конусную особенность на $\bar{M}$ одним из двух способов, получив пространства $\mathcal{M}_1$ или $\mathcal{M}_2$. Эта схема описана в § 2 настоящей статьи. Тогда семейство метрик (1.2) на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_2$ получается интегрированием системы (1.3) при $A_2 = -A_3$ (этому посвящен § 3).

1.3. В § 4 доказана следующая теорема, завершающая исследование системы (1.2) в случае пространства $\mathcal{M}_2$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M – семимерное компактное 3-сасакиево многообразие. Положим $p = 2$ или $p = 4$ в зависимости от того, равен общий слой 3-сасакиева слоения M $\mathrm{SO}(3)$ или $\mathrm{SU}(2)$. Тогда на орбифолде $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ существуют следующие полные регулярные римановы метрики $\bar{g}$ вида (1.2) с группой голономии $H \subset \mathrm{Spin}(7)$:

- 1) если $A_1(0) = 0$, $-A_2(0) = A_3(0) > 0$ и $2A_2^2(0) = B^2(0) + C^2(0)$, то метрика $\bar{g}$ из (1.1) имеет группу голономии $\mathrm{SU}(4) \subset \mathrm{Spin}(7)$ и гомотетична одной из метрик семейства (1.2);
- 2) если $A_1(0) = 0$, $-A_2(0) = A_3(0) < B(0) = C(0)$, то существует регулярная АЛК-метрика $\bar{g}$ вида (1.1) с группой голономии $\mathrm{Spin}(7)$, найденная в [6]. На бесконечности эти метрики стремятся к произведению конуса над твисторным пространством $\mathcal{Z}$ и окружности S^1 .

Более того, любая полная регулярная метрика на пространстве $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ вида (1.1) с рассмотренной $\mathrm{Spin}(7)$ -структурой и с группой голономии $H \subset \mathrm{Spin}(7)$ изометрична одной из указанных выше метрик.

§ 2. Описание Spin(7)-структуры на конусе над 3-сасакиевым многообразием

2.1. В этом параграфе мы кратко опишем конструкцию пространств, на которых строим метрики голономии $\mathrm{Spin}(7)$. В дальнейших обозначениях и определениях, связанных с 3-сасакиевым многообразием, мы следуем статье [6]. За более подробной информацией отсылаем к [9].

Конусом $\bar{M}$ над гладким замкнутым римановым многообразием (M, g) будем называть риманово многообразие $(\mathbb{R}_+ \times M, dt^2 + t^2 g)$, $t \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Многообразие M называется *3-сасакиевым*, если метрика на $\overline{M}$ гиперкэлерава, т.е. ее группа голономии содержится в $\mathrm{Sp}(\frac{m+1}{4})$. Тогда на $\overline{M}$ существуют три параллельные комплексные структуры J^1, J^2, J^3 , удовлетворяющие соотношениям $J^j J^i = -\delta^{ij} + \varepsilon_{ijk} J^k$. Отождествив M с “базой” конуса $\overline{M} \cap \{t = 1\}$, рассмотрим векторные поля на M : $\xi^i = J^i(\partial_t)$, $i = 1, 2, 3$. Поля ξ^i называются *характеристическими полями 3-сасакиева многообразия M* , а сопряженные им 1-формы η_i называются *характеристическими формами*. Можно показать, что поля ξ^i образуют алгебру Ли $\mathfrak{su}(2)$ относительно скобки Ли векторных полей, поэтому возникает расслоение $\pi: M \rightarrow \mathcal{O}$ с общим слоем $\mathrm{SU}(2) = S^3$ (либо $\mathrm{SO}(3) = \mathbb{R}P^3$) над некоторым четырехмерным кватернионно-кэлеровым орбифолдом $\mathcal{O}$. Обозначим через $\mathcal{H}$ расслоение горизонтальных (относительно π) векторов в M .

На многообразии M определим следующие 2-формы:

$$\omega_i = d\eta_i + \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \eta_j \wedge \eta_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

Непосредственно проверяется (см. [6]), что пространство, порожденное формами ω_i , является подпространством в $\Lambda^2 \mathcal{H}^*$, поэтому можно выбрать ортонормированную систему 1-форм $\eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_7$ на $\mathcal{H}$ таким образом, что

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2(\eta_4 \wedge \eta_5 - \eta_6 \wedge \eta_7), & \omega_2 &= 2(\eta_4 \wedge \eta_6 - \eta_7 \wedge \eta_5), \\ \omega_3 &= 2(\eta_4 \wedge \eta_7 - \eta_5 \wedge \eta_6). \end{aligned}$$

Рассмотрим стандартное евклидово пространство $\mathbb{R}^8$ с координатами $x^0, \dots, x^7$. Обозначим $e^{ijkl} = dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l$ и определим самосопряженную 4-форму на $\mathbb{R}^8$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= e^{0123} + e^{4567} + e^{0145} - e^{2345} - e^{0167} + e^{2367} + e^{0246} \\ &\quad + e^{1346} - e^{0275} + e^{1357} + e^{0347} - e^{1247} - e^{0356} + e^{1256}. \end{aligned}$$

Известно, что группа линейных преобразований $\mathbb{R}^8$, сохраняющих форму Φ_0 , изоморфна $\mathrm{Spin}(7)$, причем группа $\mathrm{Spin}(7)$ также сохраняет ориентацию и метрику $g_0 = \sum_{i=0}^7 (e^i)^2$. Пусть N – ориентированное риманово восьмимерное многообразие. Говорят, что дифференциальная форма $\Phi \in \Lambda^4 N$ задает $\mathrm{Spin}(7)$ -структуру на N , если в окрестности каждой точки $p \in N$ существует сохраняющая ориентацию изометрия $\varphi_p: T_p N \rightarrow \mathbb{R}^8$ такая, что $\varphi_p^* \Phi_0 = \Phi|_p$. Если форма Φ параллельна, то группа голономии риманова многообразия N редуцируется к подгруппе $\mathrm{Spin}(7) \subset \mathrm{SO}(8)$, т.е. $\mathrm{Hol}(N) \subset \mathrm{Spin}(7)$. Известно, что параллельность Φ равносильна ее замкнутости, т.е.

$$\nabla \Phi = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d\Phi = 0$$

(см. [10]). Мы будем строить $\mathrm{Spin}(7)$ -структуру на $\overline{M}$. В качестве Φ рассмотрим следующую форму:

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{0123} + C^2 B^2 \eta_4 \wedge \eta_5 \wedge \eta_6 \wedge \eta_7 + \frac{B^2 + C^2}{4} (e^{01} - e^{23}) \wedge \omega_1 \\ &\quad + \frac{B^2 - C^2}{4} (e^{01} - e^{23}) \wedge \omega + \frac{BC}{2} (e^{02} - e^{31}) \wedge \omega_2 + \frac{BC}{2} (e^{03} - e^{12}) \wedge \omega_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} e^0 &= dt, & e^i &= A_i \eta_i, \quad i = 1, 2, 3, & e^j &= B \eta_j, \quad j = 4, 5, \\ & & e^k &= C \eta_k, \quad k = 6, 7, \end{aligned}$$

$A_1(t), A_2(t), A_3(t), B(t), C(t)$ – некоторые гладкие функции. Нетрудно понять, что форма Φ соответствует римановой метрике вида (1.1) на $\overline{M}$.

2.2. Мы будем предполагать, что кватернионно-кэлеров орбифолд $\mathcal{O}$ является кэлеровым, поэтому базис η_i , $i = 4, 5, 6, 7$, можно выбрать таким образом, чтобы форма $\omega = 2(\eta_4 \wedge \eta_5 + \eta_6 \wedge \eta_7)$ порождала кэлерову структуру на $\mathcal{O}$ и, в частности, являлась замкнутой. Это допущение замыкает внешнюю алгебру рассматриваемых форм и позволяет получить корректную систему уравнений на функции A_i, B, C . Заметим, что без предположения кэлеровости $\mathcal{O}$ для замыкания алгебры форм (в общем случае) необходимо потребовать, чтобы $B = C$.

ЛЕММА 1. *Параллельность формы Φ эквивалентна следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\begin{aligned} A_1' &= \frac{(A_2 - A_3)^2 - A_1^2}{A_2 A_3} + \frac{A_1^2(B^2 + C^2)}{B^2 C^2}, \\ A_2' &= \frac{A_1^2 - A_2^2 + A_3^2}{A_1 A_3} - \frac{B^2 + C^2 - 2A_2^2}{BC}, \\ A_3' &= \frac{A_1^2 + A_2^2 - A_3^2}{A_1 A_2} - \frac{B^2 + C^2 - 2A_3^2}{BC}, \\ B' &= -\frac{CA_1 + BA_2 + BA_3}{BC} - \frac{(C^2 - B^2)(A_2 + A_3)}{2A_2 A_3 C}, \\ C' &= -\frac{BA_1 + CA_2 + CA_3}{BC} - \frac{(B^2 - C^2)(A_2 + A_3)}{2A_2 A_3 B}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя соотношения на внешнюю алгебру форм из работы [6]

$$\begin{aligned} de^0 &= 0, \\ de^i &= \frac{A_i'}{A_i} e^0 \wedge e^i + A_i \omega_i - \frac{2A_i}{A_{i+1} A_{i+2}} e^{i+1} \wedge e^{i+2}, \quad i = 1, 2, 3 \pmod{3}, \\ d\omega_i &= \frac{2}{A_{i+2}} \omega_{i+1} \wedge e^{i+2} - \frac{2}{A_{i+1}} e^{i+1} \wedge \omega_{i+2}, \quad i = 1, 2, 3 \pmod{3}, \end{aligned}$$

а также соотношения $d\omega = 0$ и $\omega_1 \wedge \omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_2 = \omega_3 \wedge \omega_3$, после непосредственных вычислений получаем

$$\begin{aligned} d\Phi &= \left[\frac{B^2 - C^2}{2A_2 A_3} A_1 - \frac{BB' - CC'}{2} - \frac{B^2 - C^2}{4A_2} A_2' - \frac{B^2 - C^2}{4A_3} A_3' \right] e^{023} \wedge \omega \\ &+ \left[-A_1 - \frac{BC}{A_3} - \frac{BC}{A_2} + \frac{B^2 + C^2}{2A_2 A_3} A_1 - \frac{BB' + CC'}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{B^2 + C^2}{4A_2} A_2' - \frac{B^2 + C^2}{4A_3} A_3' \right] e^{023} \wedge \omega_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[A_2 + \frac{BC}{A_1} - \frac{BCA_2}{A_1A_3} + \frac{B^2 + C^2}{2A_3} + \frac{B'C + BC'}{2} + \frac{BCA'_1}{2A_1} + \frac{BCA'_3}{2A_3} \right] e^{013} \wedge \omega_2 \\
& - \left[A_3 + \frac{BC}{A_1} - \frac{BCA_3}{A_1A_2} + \frac{B^2 + C^2}{2A_2} + \frac{B'C + BC'}{2} + \frac{BCA'_1}{2A_1} + \frac{BCA'_2}{2A_2} \right] e^{012} \wedge \omega_3 \\
& - \frac{1}{4} \left[2BCA_2 + BCA_3 + (B^2 + C^2)A_1 + C^2BB' + B^2CC' \right] e^0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_1.
\end{aligned}$$

Решив систему из пяти линейных уравнений относительно “неизвестных” A'_1, A'_2, A'_3, B', C' , получим (2.1). Лемма доказана.

При $B = C$ мы получаем следующую систему, исследованную в [6]:

$$\begin{aligned}
A'_1 &= \frac{2A_1^2}{B^2} + \frac{(A_2 - A_3)^2 - A_1^2}{A_2A_3}, & A'_2 &= \frac{2A_2^2}{B^2} + \frac{(A_3 - A_1)^2 - A_2^2}{A_1A_3}, \\
A'_3 &= \frac{2A_3^2}{B^2} + \frac{(A_1 - A_2)^2 - A_3^2}{A_1A_2}, & B' &= -\frac{A_1 + A_2 + A_3}{B}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Чтобы получить гладкую риманову метрику на многообразии (орбиформе), надо задать краевые условия для системы (2.1). В [6] описаны пространства $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, отвечающие двум различным способам разрешения конусной особенности $\bar{M}$. Далее мы опишем пространство $\mathcal{M}_2$, на котором будем искать метрику с группой голономии $H \subset \text{Spin}(7)$.

Пусть $S \simeq S^1$ – подгруппа в $\text{SU}(2)$ (либо $\text{SO}(3)$), интегрирующая одно из киллинговых полей, например ξ^1 . Возникает главное расслоение $\pi': M \rightarrow \mathcal{Z}$ со структурной группой S , где $\mathcal{Z} = M/S$ – твисторное пространство. Рассмотрим естественное действие S на $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$: $e^{i\varphi} \in S: z \rightarrow ze^{i\varphi}$ и ассоциируем с π' расслоенное пространство $\mathcal{M}_2$ со слоем $\mathbb{C}$ относительно рассмотренного действия. Таким образом, орбиформ $\mathcal{Z}$ вложен в $\mathcal{M}_2$ в качестве нулевого слоя, а $\mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{Z}$ расслаивается на сферические сечения, диффеоморфные M и коллапсирующие к нулевому слою $\mathcal{Z}$ при $t \rightarrow 0$.

Пусть теперь $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_p \subset S$. Группа $\mathbb{Z}_p$ действует на $\mathcal{M}_2$ изометриями. Следовательно, корректно определен орбиформ $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$, являющийся многообразием в точности тогда, когда многообразием является $\mathcal{M}_2$. Легко понять, что $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ является расслоением со слоем $\mathbb{C}$, ассоциированным с главным расслоением $\pi': M \rightarrow \mathcal{Z}$ при помощи действия $e^{i\varphi} \in S: z \rightarrow ze^{ip\varphi}$.

Отметим, что если 3-сасакиево многообразие M регулярно (т.е. слоение на трехмерные 3-сасакиевы слои является регулярным), то все слои π изометричны либо $S^3 = \text{SU}(2)$, либо $\text{SO}(3)$ и орбиформы $\mathcal{O}$, $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{M}_2$ являются гладкими многообразиями. Известно, что это возможно только при M , изометричном S^7 , $\mathbb{RP}^7$ или $N_{1,1} = \text{SU}(3)/T_{1,1}$ (см. [9]). Однако из указанных примеров только пространство Алоффа–Уоллаха $N_{1,1}$ имеет кэлерову базу, поэтому новые метрики на гладком многообразии удастся получить только в этом случае.

2.3. Следующая лемма показывает, при каких условиях на функции A_i, B, C решение системы (2.1) определяет гладкую метрику (1.1) на $\mathcal{M}_2$.

ЛЕММА 2. Пусть $(A_1(t), A_2(t), A_3(t), B(t), C(t))$ – C^∞ -гладкое решение системы (2.1), $t \in [0, \infty)$. Пусть $p = 4$ либо $p = 2$, в зависимости от того,

изометричен общий слой M группе $\mathrm{Sp}(1)$ или $\mathrm{SO}(3)$. Для того чтобы метрика (1.1) продолжалась до гладкой метрики на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) $A_1(0) = 0, |A'_1(0)| = 4$;
- 2) $A_2(0) = -A_3(0) \neq 0, A'_2(0) = A'_3(0)$;
- 3) $B(0) \neq 0, B'(0) = 0$;
- 4) $C(0) \neq 0, C'(0) = 0$;
- 5) функции A_1, A_2, A_3, B, C знакоопределены на промежутке $(0, \infty)$.

Лемма 2 доказана в [6] для случая $B = C$. Доказательство без изменения переносится на общий случай, кроме следующего замечания: в [6] выбор поля ξ^i , вдоль которого происходит “схлопывание” окружности S , для построения $\mathcal{M}_2$ не является важным в силу дополнительных симметрий системы (2.2). Однако несложный анализ системы (2.1) показывает, что в качестве образующего для S нужно взять ξ^1 , т.е. лишь функция A_1 может обращаться в нуль в начальной точке.

§ 3. Построение явных решений на $\mathcal{M}_2$

3.1. В системе (2.1) сделаем подстановку $A_2 = -A_3$. Тогда, сложив второе и третье уравнения, получим $B^2 + C^2 = 2A_2^2$, а отняв от четвертого уравнения пятое, придем к выводу, что $(B^2 - C^2)' = 0$. Таким образом, можно считать, что $B^2 = A_2^2 + \alpha^2$, $C^2 = A_2^2 - \alpha^2$ для некоторой константы $\alpha \geq 0$ и система (2.1) редуцируется к системе

$$A'_1 = -4 + \frac{A_1^2}{A_2^2} + 2\frac{A_1^2 A_2^2}{A_4^4 - \alpha^4}, \quad (A_2^2)' = -A_1.$$

Эта система без труда интегрируется. А именно, введем новую переменную ρ заменой $d\rho = -2A_1 dt$. Сдвигом по ρ можно всегда добиться того, что $A_2^2 = \rho$. Положив $A_1^2 = F$, получим

$$\frac{dF}{d\rho} + FG = 4,$$

где

$$G(\rho) = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho - \alpha^2} + \frac{1}{\rho + \alpha^2}.$$

Эта система решается стандартным образом (при помощи интегрирующего множителя). Сделав замену $r^2 = \rho$, получаем

$$F = \frac{r^8 - 2\alpha^4 r^4 + \beta}{r^2(r^4 - \alpha^4)},$$

где β – константа интегрирования. Итак, метрика (1.1) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{g} = & \frac{r^4(r^2 - \alpha^2)(r^2 + \alpha^2)}{r^8 - 2\alpha^4 r^4 + \beta} dr^2 + \frac{r^8 - 2\alpha^4 r^4 + \beta}{r^2(r^2 - \alpha^2)(r^2 + \alpha^2)} \eta_1^2 + r^2(\eta_2^2 + \eta_3^2) \\ & + (r^2 + \alpha^2)(\eta_4^2 + \eta_5^2) + (r^2 - \alpha^2)(\eta_6^2 + \eta_7^2). \end{aligned}$$

Для того чтобы получить регулярную метрику на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$, надо, чтобы полином $r^8 - 2\alpha^4 r^4 + \beta$ имел корни, причем его наибольший корень r_0 был больше, чем α . В этом случае метрика определена при $r \geq r_0$. Очевидно, что, переходя к метрике, гомотетичной исходной, можно нормировать старший корень r_0 условием $r_0 = 1$. Значит, как легко посчитать, $0 \leq \alpha < 1$, $\beta = 2\alpha^4 - 1$. Итак, метрика (1.1) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{g}_\alpha = & \frac{r^4(r^2 - \alpha^2)(r^2 + \alpha^2)}{r^8 - 2\alpha^4(r^4 - 1) - 1} dr^2 + \frac{r^8 - 2\alpha^4(r^4 - 1) - 1}{r^2(r^2 - \alpha^2)(r^2 + \alpha^2)} \eta_1^2 + r^2(\eta_2^2 + \eta_3^2) \\ & + (r^2 + \alpha^2)(\eta_4^2 + \eta_5^2) + (r^2 - \alpha^2)(\eta_6^2 + \eta_7^2), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $0 \leq \alpha < 1$, $r \geq 1$. Непосредственная проверка условий леммы 2 показывает, что (3.1) при $r \geq 1$ представляет собой семейство гладких метрик на $\mathcal{M}/\mathbb{Z}_p$ при $0 \leq \alpha < 1$, причем $\bar{g}_0$ совпадает с метрикой Калаби с группой голономии $SU(4)$, построенной в [1].

Из леммы 1 следует, что группа голономии $\text{Hol}(\bar{g}_\alpha)$ метрики (3.1) содержится в $\text{Spin}(7)$. Рассмотрим следующую 2-форму:

$$\bar{\Omega}_1 = -e^0 \wedge e^1 + e^2 \wedge e^3 + e^4 \wedge e^5 - e^6 \wedge e^7.$$

Очевидно, что эта форма согласована с метрикой (1.1). Непосредственным вычислением проверяется, что она замкнута в точности при $A_2 = -A_3$, т.е. является кэлеровой формой метрики (3.1). Итак, $\text{Hol}(\bar{g}_\alpha) \subset SU(4)$.

3.2. Далее мы рассмотрим подробнее случай, когда метрики $\bar{g}_\alpha$ определены на гладком многообразии, т.е. когда $M = N_{1,1}$. Сначала введем обозначения для следующих подгрупп $SU(3)$:

$$\begin{aligned} S_{1,1} &= \{\text{diag}(z, z, \bar{z}^2) \mid z \in S^1 \subset \mathbb{C}\}, \quad T = \{\text{diag}(z_1, z_2, \bar{z}_1 \bar{z}_2) \mid z_1, z_2 \in S^1 \subset \mathbb{C}\}, \\ K_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} \det(\bar{A}) & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in U(2) \right\}, \quad K_3 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det(\bar{A}) \end{pmatrix} \mid A \in U(2) \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим трехмерное комплексное пространство $\mathbb{C}^3$, а в нем – единичную сферу $S^5 \subset \mathbb{C}^3$. Пусть единичная окружность S^1 действует на $\mathbb{C}^3$ и связанных с ним пространствах диагональным образом. Класс эквивалентности, определяемый подобным действием, будем обозначать квадратными скобками: $[u, v]$, $[u]$ и т.д.

Пусть

$$\tilde{E} = \{(u_1, u_2) \mid |u_1| = 1, \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{C}} = 0\} \subset S^5 \times \mathbb{C}^3.$$

Рассмотрим диагональное действие окружности S^1 на пространстве $\tilde{E}$ и проекцию $\tilde{\pi}_1: (u_1, u_2) \mapsto u_1$ из $\tilde{E}$ на S^5 , являющуюся расслоением со слоем $\mathbb{C}^2$. Пространством сферического подрасслоения в $\tilde{\pi}_1$ является

$$\tilde{E}^1 = \{(u_1, u_2) \in \tilde{E} \mid |u_1| = |u_2| = 1, \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{C}} = 0\},$$

диффеоморфное группе $SU(3)$. Расслоение $\tilde{\pi}_1$ индуцирует (при помощи действия S^1) векторное расслоение $\pi_1: E = \tilde{E}/S^1 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ со слоем $\mathbb{C}^2$ и сферическим подрасслоением $E^1 = \tilde{E}^1/S^1 = SU(3)/S_{1,1} = N_{1,1} \rightarrow \mathbb{C}P^2 = SU(3)/K_1$.

Нетрудно понять, что π_1 можно отождествить с кокасательным расслоением $T^*\mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$.

Аналогичным образом рассмотрим пространство

$$\tilde{H} = \{(u_1, u_2, [u_3]) \mid |u_1| = |u_3| = 1, \langle u_i, u_j \rangle_{\mathbb{C}} = 0, i, j = 1, 2, 3\} \subset S^5 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}P^2$$

и проекцию $\tilde{\pi}_2: (u_1, u_2, [u_3]) \mapsto (u_1, [u_3])$ пространства $\tilde{H}$ на пространство

$$\tilde{F} = \{(u_1, [u_3]) \mid |u_1| = |u_3| = 1, \langle u_1, u_3 \rangle_{\mathbb{C}} = 0\}$$

со слоем $\mathbb{C}$. Пространство сферического подрасслоения в $\tilde{\pi}_2$ совпадает с

$$\tilde{H}^1 = \{(u_1, u_2, [u_3]) \mid \langle u_i, u_j \rangle_{\mathbb{C}} = 0, |u_i| = 1, i, j = 1, 2, 3\}$$

и очевидным образом отождествляется с $SU(3) = \tilde{E}^1$. Расслоение $\tilde{\pi}_2$ индуцирует (при помощи все того же действия S^1) расслоение $\pi_2: H = \tilde{H}/S^1 \rightarrow F = \tilde{F}/S^1$ со слоем $\mathbb{C}$, сферическое расслоение которого совпадает с отображением $E^1 = \tilde{E}^1 = N_{1,1} \rightarrow SU(3)/T$. Базой расслоения π_2 является комплексное многообразие флагов $F = SU(3)/T$, которое можно представить следующим образом:

$$F = \{([u_1], [u_3]) \mid u_i \in \mathbb{C}^3, |u_i| = 1, \langle u_1, u_3 \rangle_{\mathbb{C}} = 0, i = 1, 3\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мы будем называть комплексное линейное расслоение $\pi_2: H \rightarrow F$ *каноническим расслоением над многообразием F комплексных флагов в $\mathbb{C}^3$* .

Таким образом, каноническое расслоение над F и кокасательное расслоение к $\mathbb{C}P^2$ имеют общее пространство сферического подрасслоения – пространство $N_{1,1}$, которое расслаивается двумя различными способами. Известно, что на пространстве $M = N_{1,1}$ имеется структура 3-сасакиева многообразия, твисторное расслоение которого совпадает с расслоением $\pi_2: N_{1,1} \rightarrow F = \mathcal{X}$, а 3-сасакиево расслоение – с проекцией $\pi'_2: N_{1,1} \rightarrow SU(3)/K_3 = \mathbb{C}P_2 = \mathcal{O}$ со слоем $SO(3)$ (см. [9]). Очевидно, что в этом случае пространство $\mathcal{M}_2$ совпадает с рассмотренным выше пространством H расслоения π_2 над комплексным многообразием флагов F . При $0 \leq \alpha < 1$ построенная нами метрика (3.1) является гладкой метрикой на $H/\mathbb{Z}_2$ – пространстве комплексного линейного расслоения $\pi_2 \otimes \pi_2$. При $\alpha = 1$ метрика (3.1) редуцируется к метрике на $E = T^*\mathbb{C}P^2$, совпадающей с метрикой Калаби (см. [1]).

3.3. Доказательство теоремы 1. Здесь мы завершаем доказательство и приводим более полную формулировку теоремы 1 из введения.

ТЕОРЕМА 3. При $M = N_{1,1}$ римановы метрики $\bar{g}_\alpha$, явно построенные в (3.1), являются попарно негомотетичными гладкими полными метриками, обладающими следующими свойствами:

- 1) при $0 \leq \alpha < 1$ метрика $\bar{g}_\alpha$ является гладкой метрикой на пространстве $H/\mathbb{Z}_2$ тензорного квадрата канонического расслоения $\pi_2: H \rightarrow F$ над многообразием F комплексных флагов в $\mathbb{C}^3$ и имеет группу голономии $SU(4)$, метрика $\bar{g}_0$ совпадает с метрикой Калаби (см. [1]);

- 2) метрика $\bar{g}_1$ имеет группу голономии $\mathrm{Sp}(2) \subset \mathrm{SU}(4)$ и совпадает с гиперкэлеровой метрикой Калаби (см. [1]) на $T^*\mathbb{C}P^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы увидеть гиперкэлеровость $\bar{g}_1$, достаточно рассмотреть дополнительную пару кэлеровых форм, образующих вместе с $\bar{\Omega}_1$ гиперкэлерову структуру:

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_2 &= e^0 \wedge e^2 + e^1 \wedge e^3 - e^4 \wedge e^6 + e^7 \wedge e^5 = e^0 \wedge e^2 + e^1 \wedge e^3 - \frac{BC}{2}\omega_2, \\ \bar{\Omega}_3 &- e^0 \wedge e^3 + e^1 \wedge e^2 - e^4 \wedge e^7 + e^5 \wedge e^6 = -e^0 \wedge e^3 + e^1 \wedge e^2 - \frac{BC}{2}\omega_3.\end{aligned}$$

Непосредственное вычисление показывает, что формы $\bar{\Omega}_2, \bar{\Omega}_3$ замкнуты в точности при $\alpha = 1$, что дает редукцию группы голономии к $\mathrm{Sp}(2) \subset \mathrm{SU}(4)$ для метрики $\bar{g}_1$.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что $\bar{g}_\alpha$ не является гиперкэлеровой при $0 \leq \alpha < 1$. Действительно, если

$$\mathrm{Hol}(\bar{g}_\alpha) = \mathrm{Hol}(\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_2) \subset \mathrm{Sp}(2), \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

то таким же свойством обладает предельная метрика: $\mathrm{Hol}(\bar{M}/\mathbb{Z}_2) \subset \mathrm{Sp}(2)$. Однако ясно, что при факторизации конуса $\bar{M}$ по $\mathbb{Z}_2$ образующий группы $\mathbb{Z}_2$ добавляется к группе голономии $\bar{M}$. Этот образующий отвечает преобразованию $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2: (q_1, q_2) \mapsto (q'_1, q'_2)$, где $q_l = u_l + v_l j$ и $q'_l = -u_l + v_l j$, $u_l, v_l \in \mathbb{C}$, $l = 1, 2$. Ясно, что указанное преобразование, хотя и лежит в $\mathrm{SU}(4)$, но не попадает в $\mathrm{Sp}(2)$. Следовательно, $\mathrm{Hol}(\bar{M}/\mathbb{Z}_2)$ не содержится в $\mathrm{Sp}(2)$ и $\mathrm{Hol}(\bar{g}_\alpha) = \mathrm{SU}(4)$. Теорема доказана.

§ 4. Анализ общей задачи существования решений на $\mathcal{M}_2$

4.1. Напомним, что метрика (1.1) называется *локально конической*, если функции (A_i, B, C) линейны по t . Если к тому же среди функций (A_i, B, C) нет постоянных, то метрика (1.1) называется *конической*. Если существует (локально) коническая метрика, определяемая функциями $(\tilde{A}_i, \tilde{B}, \tilde{C})$, такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| 1 - \frac{A_i(t)}{\tilde{A}_i(t)} \right| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left| 1 - \frac{B(t)}{\tilde{B}(t)} \right| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left| 1 - \frac{C(t)}{\tilde{C}(t)} \right| = 0,$$

то метрика (1.1) называется *асимптотически (локально) конической* (сокращенно АК- или АЛК-метрика).

Основным содержанием настоящего параграфа является доказательство теоремы 2.

Основная идея доказательства заключается в том, чтобы, используя однородность правой части системы (2.1), перейти к динамической системе на сфере $S^4 \subset \mathbb{R}^5$. Рассмотрим вектор $R(t) = (A_1(t), A_2(t), A_3(t), B(t), C(t)) \in \mathbb{R}^5$ и отображение $V: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$, определяемое правой частью системы (2.1) (строго говоря, отображение V определено лишь частично, а именно, при $A_i, B, C \neq 0$).

Таким образом, система (2.1) записывается в следующем виде:

$$\frac{dR}{dt} = V(R).$$

Теперь рассмотрим замену $R(t) = f(t)S(t)$, где $f(t) = |R(t)|$ и $S(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_5(t)) \in S^4 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \mid \sum_{i=1}^5 \alpha_i^2 = 1\}$. Поскольку $V(fR) = V(R)$, исходная система распадается на тангенциальную и радиальную части,

$$\frac{dS}{du} = V(S) - \langle V(S), S \rangle S = W(S), \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{f} \frac{df}{du} = \langle V(S), S \rangle, \quad dt = f du. \quad (4.2)$$

Таким образом, чтобы решить систему (2.1), достаточно решить автономную систему (4.1) на S^4 , после чего решение (2.1) находится простым интегрированием уравнений (4.2).

Дальнейшее изложение доказательства теоремы 2 построено следующим образом. Сначала находятся все стационарные и условно стационарные точки системы (4.1) (леммы 4 и 5), они определяют асимптотику соответствующих метрик (лемма 6). Далее выясняется, каким начальным точкам S_0 отвечают условия леммы 2, необходимые для гладкости метрики; доказывается, что из каждой такой точки выходит ровно одна траектория системы (4.1) (лемма 7). После этого остается выяснить, куда сходятся эти траектории. Для этого определяются инвариантные области Π и Γ системы (4.1) и устанавливаются полезные для дальнейшего доказательства дифференциальные соотношения вдоль траекторий системы (лемма 8); эти соотношения показывают монотонность специально подобранных функций вдоль траекторий, что позволяет точно определить их асимптотику (предложение 1).

4.2. Симметрии, стационарные и условно стационарные точки системы 4.1. Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 3. Система (4.1) допускает дискретную группу симметрий $G = D_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, порожденную следующими преобразованиями:

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) &\mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_4), \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) &\mapsto (\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, \alpha_5, -\alpha_4), \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) &\mapsto (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5), \\ (\alpha_1(u), \dots, \alpha_5(u)) &\mapsto (-\alpha_1(-u), \dots, -\alpha_5(-u)), \end{aligned}$$

где D_4 – группа диэдра.

Напомним, что точка S называется *стационарной* для (4.1), если $W(S) = 0$. Очевидно, что векторное поле W определено ровно в тех точках $S \in S^4$, где определено векторное поле V . Точку $S \in S^4$, в которой W не определено, назовем *условно стационарной*, если существует вещественно аналитическая кривая $\gamma(u): (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^4$ на сфере такая, что $\gamma(0) = S$ и $\lim_{u \rightarrow 0} W(\gamma(u)) = 0$.

ЛЕММА 4. Все стационарные точки системы (4.1) получаются из точек

$$\left(\frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} \right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

действием группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим выражение $\langle V(S), S \rangle$ из формулы (4.1) через T . Мы ищем стационарные решения уравнения $W(S) = 0$, т.е. такие $S = (\alpha_1, \dots, \alpha_5)$, что никакая α_i не равна нулю.

Сначала рассмотрим случай $\alpha_4 = \pm\alpha_5$. Заметим, что система (2.1) инвариантна относительно замены $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \rightarrow (\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, \alpha_4, -\alpha_5)$, поэтому достаточно рассмотреть подсистему $\alpha_4 = \alpha_5$, которая совпадает с (2.2). Отметим, что этот случай рассмотрен в [6], однако в [6] соответствующее рассуждение опущено ради сокращения текста, и мы здесь приводим полное доказательство. Нетрудно увидеть также, что (2.2) инвариантна относительно перестановок переменных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Пусть $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Приравнявая к нулю величину $\alpha_2 W_1 - \alpha_1 W_2$, мы получаем соотношение

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\alpha_4^2}.$$

Заметим, что если все величины $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ попарно не равны, то мы получим также соотношение

$$\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\alpha_4^2}$$

и, рассмотрев разность последних двух уравнений, приходим к противоречию: $\alpha_1 = \alpha_3$.

Итак, в силу симметрий системы считаем, что $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и $\alpha_2 = \alpha_3$. Тогда из предпоследнего уравнения получаем $\alpha_2^2 = \alpha_4^2$, а из уравнения $W_2 = 0$ следует, что $T = \alpha_1/\alpha_2^2$. Подставляя все полученные соотношения в уравнение $W_4 = 0$, приходим к уравнению $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Вместе с уравнением $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 = 1$ найденные нами соотношения дают стационарную точку

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

с точностью до симметрий леммы 3.

Остался случай $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$: здесь (2.2) вырождается в соотношение $\alpha_4 = \sqrt{5}\alpha_1$, которое вместе с уравнениями $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 = 1$ и $\alpha_4 = \alpha_5$ немедленно дает стационарную точку

$$\left(\frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} \right)$$

с точностью до симметрий леммы 3.

Вернемся к общему случаю. Выражая T из уравнения $W_1(S) = 0$, получаем

$$T = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \alpha_3} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3} - \frac{2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{\alpha_4^2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_5^2}.$$

Так как $0 = W_4\alpha_5 - W_5\alpha_4 = V_4\alpha_5 - V_5\alpha_4$, то мы приходим к следующему уравнению:

$$\frac{(\alpha_4^2 - \alpha_5^2)}{\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5} [\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_4\alpha_5(\alpha_2 + \alpha_3)] = 0.$$

Как объяснено выше, мы можем считать, что $\alpha_4 \neq \pm\alpha_5$. Поэтому, подставив выражение

$$\alpha_1 = -\frac{\alpha_4\alpha_5(\alpha_2 + \alpha_3)}{\alpha_2\alpha_3}$$

в уравнение $V_2\alpha_3 - V_3\alpha_2 = 0$, получим

$$\frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(4\alpha_2\alpha_3 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2)}{\alpha_4\alpha_5} = 0.$$

Будем рассматривать два случая: 1) $\alpha_2 - \alpha_3 = 0$ и 2) $4\alpha_2\alpha_3 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 = 0$.

1) Уравнение $W_4 = 0$ в этом случае принимает следующий вид:

$$\frac{\alpha_2^2(2\alpha_2^2 - 3\alpha_5^2) + \alpha_4^2(2\alpha_5^2 - 3\alpha_2^2)}{\alpha_5\alpha_2^3} = 0.$$

Положим для удобства $\alpha_5 = 1$. Если будет найдено нетривиальное решение, его достаточно будет нормировать, но далее уравнения перестают быть однородными. Подставляя

$$\alpha_4^2 = \frac{\alpha_2^2(3 - 2\alpha_2^2)}{2 - 3\alpha_2^2}$$

в $W_2 = 0$, получаем биквадратное уравнение $4\alpha_2^4 - 6\alpha_2^2 + 5 = 0$, не имеющее вещественных корней.

2) Подставив

$$\alpha_2 = -\frac{\alpha_4^2 + \alpha_5^2}{4\alpha_3}$$

в уравнение $W_2 = 0$, получим в числителе биквадратное по α_3 выражение

$$2\alpha_4^6\alpha_5^2 + 4\alpha_4^4\alpha_5^4 + 2\alpha_4^2\alpha_5^6 + 32\alpha_3^4\alpha_4^2\alpha_5^2 - 19\alpha_3^2\alpha_4^4\alpha_5^2 - 19\alpha_3^2\alpha_4^2\alpha_5^4 - \alpha_3^2\alpha_4^6 - \alpha_3^2\alpha_5^6,$$

которое с необходимостью должно быть равно нулю. Выразив из этого уравнения α_3 и подставив затем в уравнение $W_4 = 0$, после некоторых вычислений получим уравнение на α_4 и α_5 :

$$(3\alpha_4^4 - 2\alpha_4^2\alpha_5^2 + 3\alpha_5^4)(\alpha_4^2 + \alpha_5^2)^4 \times \left[\alpha_4^4 + 18\alpha_4^2\alpha_5^2 + \alpha_5^4 + (\alpha_4^2 + \alpha_5^2)\sqrt{\alpha_4^4 + 34\alpha_4^2\alpha_5^2 + \alpha_5^4} \right] = 0,$$

которое также вещественных корней не имеет. Лемма 4 доказана.

Следующая лемма показывает, что у системы (4.1) по сравнению с аналогичной системой для уравнений (2.2) существенно новых условно стационарных точек также нет.

ЛЕММА 5. Все условно стационарные точки системы (4.1) получаются из точки

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

действием группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in S^4$ – условно стационарная точка системы (4.1), т.е. существует кривая

$$\gamma(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u), \alpha_4(u), \alpha_5(u)), \quad u \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad S = \gamma(0),$$

с указанными выше свойствами. Отметим, что u – гладкий параметр, не совпадающий, вообще говоря, с переменной дифференцирования системы (4.1).

Отметим сразу, что можно считать, что $\alpha_4(0) \neq \alpha_5(0)$ (хотя формально система (2.1) может содержать новые по отношению к системе (2.2) условно стационарные точки при $\alpha_4 = \alpha_5$, однако нетрудно увидеть, что соответствующие рассуждения из [6] такой случай исключают). Поэтому, учитывая группу симметрий G , можно заключить, что особенности поля W могут возникнуть только при $\alpha_1(0) = 0$, $\alpha_2(0) = 0$, $\alpha_3(0) = 0$ или $\alpha_5(0) = 0$.

1) Рассмотрим сначала случай, когда все четыре соотношения выполнены: $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_3(0) = \alpha_5(0) = 0$, $\alpha_4(0) = 1$ (случай $\alpha_4(0) = -1$ сводится к данному симметрией из группы G). Положим тогда

$$\alpha_i = c_i u^{k_i} (1 + o(1)), \quad u \rightarrow 0,$$

где $c_i \neq 0$, $k_i \geq 1$, $i = 1, 2, 3, 5$. Рассмотрим следующую функцию:

$$\begin{aligned} \alpha_5 W_4 - \alpha_4 W_5 &= \frac{\alpha_4^2 - \alpha_5^2}{\alpha_4 \alpha_5} \alpha_1 + (\alpha_4^2 - \alpha_5^2) \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} \right) \\ &= \frac{c_1}{c_5} u^{k_1 - k_5} (1 + o(1)) + \frac{1}{c_2} u^{-k_2} (1 + o(1)) + \frac{1}{c_3} u^{-k_3} (1 + o(1)) = o(1). \end{aligned}$$

Очевидно, что при $k_2 \neq k_3$ порядки членов наибольшего роста в последних слагаемых различны, поэтому хотя бы один из них не может компенсироваться первым слагаемым, что приводит к противоречию. Итак, считаем, что $k_2 = k_3$. Значит, имеет место либо случай 1, а): $k_1 \geq k_5$ и тогда $c_2 = -c_3$, либо случай 1, б): все три слагаемых имеют одинаковый наибольший порядок роста к бесконечности. В последнем случае $k_1 - k_5 = -k_2 = -k_3$, откуда $k_5 = k_1 + k_2$ и из условия взаимной компенсации трех старших членов имеем

$$\frac{c_1}{c_5} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = 0. \quad (4.3)$$

В случае 1, б) рассматриваем функцию

$$\begin{aligned} \alpha_2 W_1 - \alpha_1 W_2 &= 2 \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3} - 2 \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3} - 2\alpha_2 + \alpha_1^2 \alpha_2 \frac{\alpha_4^2 + \alpha_5^2}{\alpha_4^2 \alpha_5^2} + \alpha_1 \frac{\alpha_4^2 + \alpha_5^2 - 2\alpha_2^2}{\alpha_4 \alpha_5} \\ &= -\frac{2c_1^2}{c_3} u^{2k_1 - k_2} (1 + o(1)) + \frac{c_1^2 c_2}{c_5^2} u^{2k_1 + k_2 - 2k_5} (1 + o(1)) + \frac{c_1}{c_5} u^{k_1 - k_5} (1 + o(1)) \\ &= -\frac{2c_1^2}{c_3} u^{2k_1 - k_2} (1 + o(1)) + \frac{c_1^2 c_2}{c_5^2} u^{-k_2} (1 + o(1)) + \frac{c_1}{c_5} u^{-k_2} (1 + o(1)) = o(1). \end{aligned}$$

Поскольку первое слагаемое имеет порядок старшего члена заведомо больший, чем во втором и третьем слагаемом, то для выполнения равенства необходимо выполнение соотношения:

$$\frac{c_1^2 c_2}{c_5^2} + \frac{c_1}{c_5} = 0,$$

откуда, учитывая (4.3), получаем, что $1/c_3 = 0$, т.е. противоречие.

В случае 1, а) (т.е. когда $k_2 = k_3$, $k_1 \geq k_5$ и $c_2 = -c_3$) рассмотрим W_1 и W_2 (мы перенесли в $o(1)$ ту часть, которая заведомо не содержит в нашей ситуации члены наибольшего роста):

$$W_1 = \frac{c_1^2}{c_2^2} u^{2k_1-2k_2} (1 + o(1)) = o(1), \quad W_2 = -\frac{c_1}{c_2} u^{k_1-k_2} - \frac{1}{c_5} u^{-k_5} = o(1).$$

Из первого соотношения следует, что $k_1 \geq k_2 + 1$. Тогда во втором соотношении получаем противоречие.

Итак, четыре переменные одновременно не могут обращаться в нуль при $u = 0$.

2) Теперь рассмотрим случаи, когда вырождаются ровно три координаты. Пусть сначала имеет место случай 2, а): $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_3(0) = 0$, $\alpha_4(0) = a_4 \neq 0$, $\alpha_5(0) = a_5 \neq 0$. Тогда

$$\alpha_5 W_4 - \alpha_4 W_5 = (a_4^2 - a_5^2) \left(\frac{1}{c_2} u^{-k_2} (1 + o(1)) + \frac{1}{c_3} u^{-k_3} (1 + o(1)) \right) = o(1).$$

Значит, с необходимостью $k_2 = k_3$ и $c_2 = -c_3$. Снова рассмотрим функции W_1 и W_2 :

$$W_1 = -4(1 + o(1)) + \frac{c_1^2}{c_2^2} u^{2k_1-2k_2} (1 + o(1)) = o(1),$$

$$W_2 = -\frac{a_4^2 + a_5^2}{a_4 a_5} (1 + o(1)) - \frac{c_1}{c_2} u^{k_1-k_2} (1 + o(1)) = o(1).$$

Из первого соотношения следует, что $c_1^2/c_2^2 = 4$, а из второго тогда следует, что $a_4 = a_5$, но этот случай мы не рассматриваем. Таким образом, случай а) невозможен.

Рассмотрим случай 2, б): $\alpha_1(0) = a_1 \neq 0$, $\alpha_2(0) = \alpha_3(0) = \alpha_5(0) = 0$, $\alpha_4(0) = a_4 \neq 0$. Тогда

$$\alpha_5 W_4 - \alpha_4 W_5 = \frac{a_4 a_1}{c_5} u^{-k_5} (1 + o(1)) + \frac{a_4}{c_2} u^{-k_2} (1 + o(1)) + \frac{a_4}{c_3} u^{-k_3} (1 + o(1)) = o(1).$$

Следовательно, $k_2 = k_3 = k_5 = k$ и

$$\frac{a_1}{c_5} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = 0.$$

Далее,

$$W_4 = \frac{a_4}{c_5} \left(\frac{c_5 a_1^3}{c_2 c_3} - \frac{a_1^3}{c_5} - \frac{a_4^3}{2c_3} - \frac{a_4^3}{2c_2} + \frac{a_4}{2c_3} + \frac{a_4}{2c_2} \right) u^{-2k} (1 + o(1)) + O(1) = o(1),$$

$$W_5 = \left(\frac{c_5 a_1^3}{c_2 c_3} - \frac{a_1}{c_5} - \frac{a_1^3}{c_5} - \frac{a_4^3}{2c_3} - \frac{a_4^3}{2c_2} - \frac{a_4}{2c_3} - \frac{a_4}{2c_2} \right) u^{-k} (1 + o(1)) = o(1).$$

Значит, соответствующие коэффициенты при u^{-2k} и u^{-k} обращаются в нуль. Взяв их разность (после масштабирования первого из коэффициентов), мы получаем, что

$$\frac{a_4}{c_3} + \frac{a_4}{c_2} + \frac{a_1}{c_5} = 0.$$

Последнее равенство вместе с предыдущим равенством аналогичного вида позволяет заключить, что $a_4 = 1$, откуда $a_1 = 0$, что противоречит нашим допущениям.

Рассмотрим случай 2, в): $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_5 = 0$, $\alpha_3(0) = a_3 \neq 0$, $\alpha_4(0) = a_4 \neq 0$. Тогда

$$\alpha_5 W_4 - \alpha_4 W_5 = \frac{a_4 c_1}{c_5} u^{k_1 - k_5} (1 + o(1)) + \frac{a_4^2}{c_2} u^{-k_2} (1 + o(1)) = o(1),$$

откуда получаем, что $k_1 - k_5 = -k_2$ и $c_1 c_2 + a_4 c_5 = 0$. Следовательно,

$$W_5 = \frac{a_4(1 - a_4^2)}{2c_2} u^{-k_2} (1 + o(1)) + O(1) = o(1),$$

т.е. $a_4 = 1$, что противоречит рассматриваемому случаю.

С учетом симметрий из группы G случай 2) мы разобрали полностью: условно стационарных точек в этом случае нет.

3) Пусть имеется ровно две обращающиеся в нуль при $u = 0$ координаты. Рассмотрим все (по модулю группы G) возникающие случаи.

Пусть имеет место случай 3, а): $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = 0$, $\alpha_3(0) = a_3 \neq 0$, $\alpha_4(0) = a_4 \neq 0$, $\alpha_5(0) = a_5 \neq 0$. Тогда

$$W_4 = \frac{a_3^3 a_4}{c_1 c_2} u^{-k_1 - k_2} (1 + o(1)) = o(1),$$

что является противоречием.

Рассмотрим случай 3, б): $\alpha_1(0) = \alpha_5(0) = 0$, $\alpha_2(0) = a_2 \neq 0$, $\alpha_3(0) = a_3 \neq 0$, $\alpha_4(0) = a_4 \neq 0$. Тогда

$$\alpha_5 W_4 - \alpha_4 W_5 = \frac{a_4 c_1}{c_5} u^{k_1 - k_2} (1 + o(1)) = o(1),$$

откуда $k_1 \geq k_5$. Предположим, что $k_1 > k_5$. Тогда

$$W_4 = \left(\frac{a_3^3 a_4}{a_3 c_1} + \frac{a_3^3 a_4}{a_2 c_1} - \frac{2a_2 a_3 a_4}{c_1} \right) u^{-k_1} (1 + o(1)) = o(1),$$

откуда следует соотношение $a_2^2 = a_3^2$. Если $a_2 = a_3$, то

$$W_4 = \frac{a_4}{c_5 a_2} \left(-\frac{2a_2^2}{a_4} + a_4 + 4a_4 a_2^2 - 4\frac{a_2^4}{a_4} - a_4^3 \right) u^{-k_5} (1 + o(1)) = o(1),$$

$$W_3 = \frac{1}{c_5} \left(-a_4 + \frac{2a_2^2}{a_4} + 4a_2^2 a_4 - \frac{4a_2^4}{a_4} - a_4^3 \right) u^{-k_5} (1 + o(1)) = o(1).$$

Выражения в скобках должны обращаться в нуль, поэтому отняв одно выражение от другого, получим $a_4^2 = 2a_2^2$. Не ограничивая общности, получаем $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда мы приходим к следующему противоречию:

$$W_5 = -2\sqrt{2} + o(1) = o(1).$$

Если же $a_3 = -a_2$, то снова получаем противоречие:

$$W_1 = -4 + o(1) = o(1).$$

Пусть теперь $k_1 = k_5$. Тогда

$$\alpha_5 W_4 - \alpha_4 W_5 = a_4 \left(\frac{a_4}{a_2} + \frac{a_4}{a_3} + \frac{c_1}{c_5} \right) (1 + o(1)) = o(1).$$

Отсюда выразим c_1 через остальные параметры и получим

$$\begin{aligned} \alpha_2 \alpha_3 W_1 - \alpha_1 \alpha_3 W_2 &= \left(\frac{a_2 a_4^2}{a_3} + 4a_2^2 + a_4^2 \right) (1 + o(1)) = o(1), \\ \alpha_2 \alpha_3 W_1 - \alpha_1 \alpha_2 W_3 &= \left(\frac{a_3 a_4^2}{a_2} + 4a_3^2 + a_4^2 \right) (1 + o(1)) = o(1). \end{aligned}$$

Из последних двух уравнений с необходимостью следует, что

$$(a_2^2 - a_3^2) \left[4 + \frac{a_4^2}{a_2 a_3} \right] = 0.$$

Первый множитель не может равняться нулю, ибо в противном случае

$$\text{или } \frac{-a_2 a_4^2}{a_2} + 4a_2^2 + a_4^2 = 4a_4^2 = 0, \quad \text{или } \frac{a_4}{a_2} + \frac{a_4}{a_3} + \frac{c_1}{c_5} = \frac{c_1}{c_5} = 0.$$

Второй множитель не может равняться нулю, потому что тогда

$$\frac{-4a_3 a_2 a_3}{a_2} + 4a_3^2 - 4a_2 a_3 = 0.$$

Рассмотрим случай 3, в): $\alpha_2(0) = \alpha_3(0) = 0$, $\alpha_1(0) = a_1 \neq 0$, $\alpha_4(0) = a_4 \neq 0$, $\alpha_5(0) = a_5 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_5 W_4 - \alpha_4 W_5 &= (a_4^2 - a_5^2) \left(\frac{a_1}{a_4 a_5} (1 + o(1)) + \frac{1}{c_2 u^{k_2}} (1 + o(1)) + \frac{1}{c_3 u^{k_3}} (1 + o(1)) \right) \\ &= o(1). \end{aligned}$$

Последнее соотношение противоречиво, поскольку $k_2, k_3 \geq 1$, а остальные параметры не обращаются в нуль.

Рассмотрим случай 3, г): $\alpha_2(0) = \alpha_5(0) = 0$, $\alpha_1(0) = a_1 \neq 0$, $\alpha_3(0) = a_3 \neq 0$, $\alpha_4(0) = a_4 \neq 0$. Тогда

$$\alpha_2 W_3 - \alpha_3 W_2 = \frac{a_3 a_4}{c_5} u^{-k_5} (1 + o(1)) = o(1).$$

Получаем противоречие.

4) Осталось разобрать случай, когда каждая координата в отдельности принимает нулевое значение.

Пусть имеет место случай 4, а): $\alpha_1(0) = 0$, $\alpha_i(0) = a_i \neq 0$, $i = 2, \dots, 5$. Тогда

$$\alpha_5 W_4 - \alpha_4 W_5 = (a_4^2 - a_5^2) \frac{a_2 + a_3}{a_2 a_3} (1 + o(1)),$$

откуда следует, что $a_2 = -a_3$. Тогда

$$W_1 = -4 + o(1),$$

что приводит к противоречию.

Рассмотрим случай 4, б): $\alpha_2(0) = 0$, остальные $\alpha_i(0) = a_i \neq 0$. Тогда

$$\alpha_5 W_4 - \alpha_4 W_5 = \frac{a_4^2 - a_5^2}{c_2} u^{-k_2} (1 + o(1)).$$

Получаем противоречие.

Рассмотрим случай 4, в): $\alpha_5(0) = 0$, остальные $\alpha_i(0) = a_i \neq 0$. В этом случае мы тоже приходим к противоречию:

$$\alpha_5 W_4 - \alpha_4 W_5 = \frac{a_1 a_4}{c_4} u^{-k_5} (1 + o(1)).$$

Лемма 5 доказана.

4.3. Поведение траекторий вблизи начальной точки. Следующая лемма доказана в [6].

ЛЕММА 6. *Стационарным решениям системы (4.1) отвечают локально конические метрики на $\overline{M}$, а траекториям системы (4.1), асимптотически стремящимся к (условно) стационарным решениям, отвечают асимптотически (локально) конические метрики на $\overline{M}$.*

Положим

$$J = \{0, -\alpha_2, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5\} \in S^4 \mid \alpha_2 > 0, \alpha_4 \geq \alpha_5 > 0\}.$$

В силу леммы 2 для построения регулярной метрики на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ необходимо найти траекторию системы (4.1), выходящую из точки вида $(0, -\lambda, \lambda, \mu, \nu)$, где $2\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$. Очевидно, симметрии леммы 3 позволяют ограничиться случаем, когда начальная точка $S_0 = (0, -\lambda, \lambda, \mu, \nu)$ лежит в области J , представляющей собой геодезический треугольник на двумерной сфере $\{\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 = 0\}$.

ЛЕММА 7. *Существует единственная гладкая траектория системы (4.1), выходящая из рассмотренной выше точки $S_0 = (0, -\lambda, \lambda, \mu, \nu)$, в область $\alpha_1 < 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим открытый шар $U \subset \mathbb{R}^2$ малого радиуса $\varepsilon < 1 - \mu^2 - \nu^2$ с координатами $x = \alpha_1$ и $y = \alpha_2 + \alpha_3$. Тогда в окрестности $J \times U$

области J определены локальные координаты $x, y, z = \alpha_4 > 0, w = \alpha_5 > 0$ на S^4 ,

$$S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \left(x, \frac{1}{2} \left(y - \sqrt{2} \sqrt{1 - z^2 - x^2 - w^2 - \frac{y^2}{2}} \right), \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left(y + \sqrt{2} \sqrt{1 - z^2 - x^2 - w^2 - \frac{y^2}{2}} \right), z, w \right).$$

Тогда векторное поле $V(S)$ в новых координатах выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} V_1(S) &= -4 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{x^2}{w^2} + 2 \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 1}, \\ V_2(S) &= \frac{-\sqrt{2 - 2x^2 - 2z^2 - 2w^2 - y^2}(-2zwy + 2xz^2 + 2xw^2 - x - x^3)}{xzw(y + \sqrt{2 - 2z^2 - 2x^2 - 2w^2 - y^2})} \\ &\quad + \frac{2zwx + y^3 - y + x^2y}{zw(y + \sqrt{2 - 2z^2 - 2x^2 - 2w^2 - y^2})}, \\ V_3(S) &= \frac{\sqrt{2 - 2x^2 - 2z^2 - 2w^2 - y^2}(-2zwy + 2xz^2 + 2xw^2 - x - x^3)}{xzw(y - \sqrt{2 - 2z^2 - 2x^2 - 2w^2 - y^2})} \\ &\quad + \frac{2zwx + y^3 - y + x^2y}{zw(y - \sqrt{2 - 2z^2 - 2x^2 - 2w^2 - y^2})}, \\ V_4(S) &= -\frac{x}{z} - \frac{y}{w} - \frac{y(w^2 - z^2)}{w(x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 1)}, \\ V_5(S) &= -\frac{x}{w} - \frac{y}{z} - \frac{y(z^2 - w^2)}{z(x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Касательное к S^4 поле W в этих координатах имеет компоненты

$$W_x = W_1, \quad W_y = W_2 + W_3, \quad W_z = W_4, \quad W_w = W_5,$$

где W_i определяются из (4.1).

На $J \times U$ рассмотрим систему

$$\frac{d}{dv} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xW_x \\ xW_y \\ xW_z \\ xW_w \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

где $du = xdv$. Траектории новой системы (4.4) совпадают, очевидно, с траекториями системы (4.1). Так как $z, w > 0$, то поле xW является гладким и его стационарными точками на $J \times U$ будут точки вида $x = y = 0$, т.е. точки области J . Теперь рассмотрим линеаризацию системы (4.4) в окрестности точки S_0 :

$$\frac{dx}{dv} = -4x, \quad \frac{dy}{dv} = -\frac{2(2\mu^2 + 2\nu^2 - 1)}{\mu\nu}x + 4y, \quad \frac{dz}{dv} = 0, \quad \frac{dw}{dv} = 0.$$

Линеаризованная система является вырожденной с собственными значениями $-4, 4, 0, 0$ и собственными векторами

$$e_1 = \left(8, \frac{2(2\mu^2 + 2\nu^2 - 1)}{\mu\nu}, 0, 0 \right),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1, 0), \quad e_4 = (0, 0, 0, 1)$$

соответственно.

Касательное пространство к J порождается векторами e_3 и e_4 . Вычисления показывают, что $\langle (0, 0, a, b), \frac{xW}{|xW|} \rangle \rightarrow 0$, если $(x, y, z, w) \rightarrow S_0$. Это означает, что траектории системы (4.2) входят в область J под прямым углом. Это позволяет рассматривать поведение системы в плоскостях (x, y) и (z, w) отдельно. Рассмотрим в плоскости (x, y) параболы

$$F_1(x, y) = -\frac{2(2\mu^2 + 2\nu^2 - 1)}{\mu\nu}x + 8y - \alpha x^2 = 0,$$

$$F_2(x, y) = -\frac{2(2\mu^2 + 2\nu^2 - 1)}{\mu\nu}x + 8y + \alpha x^2 = 0$$

и прямую $x = -\delta$, где $\alpha, \delta > 0$. Они образуют ограниченную область $\Gamma \subset U$. В точках первой параболы выполнено

$$\begin{aligned} \langle \nabla F_1, (xW_x, xW_y) \rangle &= \frac{d}{dv} \left(-\frac{2(2\mu^2 + 2\nu^2 - 1)}{\mu\nu}x + 8y - \alpha x^2 \right) \\ &= 12\alpha x^2 + O(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Последнее выражение обращается в нуль только в точках из J . Очевидно, что если взять параметр α достаточно большим, то угол между внешней нормалью ∇F_1 и (xW_x, xW_y) будет острым, т.е. проекции траекторий на (x, y) пересекают первую параболу и выходят наружу области Γ . Следовательно, и сами траектории выходят наружу области $\Gamma \times J$. Аналогично, при достаточно большом α угол между внутренней нормалью ∇F_2 и (xW_x, xW_y) будет тупым, и траектории опять выходят наружу, пересекая второй цилиндр $\{F_2 = 0\} \times J$. Параболы пересекаются в точке $(0, 0)$ и проекции траекторий пересекают параболы, выходя наружу. Следовательно, должна существовать траектория, проекция которой входит в точку $(0, 0)$ при достаточно малом δ . А так как траектории входят в J под прямым углом, то существует траектория системы, входящая в точку S_0 при достаточно больших α и достаточно малых δ . Проекция ее касательного вектора в точке $(x, y) = (0, 0)$ будет, очевидно, совпадать с касательным вектором к параболам $(8, \frac{2(2\mu^2 + 2\nu^2 - 1)}{\mu\nu})$, а сам вектор будет совпадать с e_1 .

Порядок сходимости x к нулю равен e^{-4v} . Тогда относительно параметра u траектория системы (4.1) войдет в точку S_0 за конечное время u_0 , поскольку асимптотически вблизи точки S_0 выполнено $-4u = c_1 e^{-4v} + c_2$. Заметим, что в области $x < 0$ параметры u и v обратно пропорциональны друг другу, так как $c_1 < 0$. Мы получили, что для любой точки $S_0 \in J$ существует единственная траектория, выходящая из S_0 за конечное время и входящая в область $\alpha_1 = x < 0$ с касательным вектором в точке S_0 , равным $-e_1$. Лемма 7 доказана.

Мы показали, что для любой точки S_0 существует траектория системы (4.1), выходящая из этой точки. Следовательно, по лемме 2 существует регулярная в окрестности орбифолда $\mathcal{O}$ метрика на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$.

4.4. Выясним поведение траекторий системы на бесконечности. Напомним, что мы ищем асимптотически локально конические метрики.

ЛЕММА 8. *Если $S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ – решение системы (4.1), то имеют место следующие соотношения:*

- 1) $\frac{d}{du} \ln\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = 2\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} + 2\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_4^2 + \alpha_5^2}{2\alpha_4\alpha_5}\alpha_1\right)\left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_4\alpha_5}\right);$
- 2) $\frac{d}{du} \ln\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right) = 2(\alpha_2 - \alpha_3)\left(\frac{1}{\alpha_4\alpha_5} + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\left(\frac{\alpha_4^2 + \alpha_5^2}{2\alpha_4\alpha_5}\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3\right)\right);$
- 3) $\frac{d}{du} \ln\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_5}\right) = \frac{(\alpha_4 - \alpha_5)^2}{\alpha_4\alpha_5}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_4\alpha_5} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_2\alpha_3}\right);$
- 4) $\frac{d}{du} \ln(\alpha_5^2) = -2\alpha_1(1 + \alpha_1^2)$ при $\alpha_5 = 0$;
- 5) $\frac{d}{du}\alpha_1 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)^2}{\alpha_2\alpha_3}(1 - (\alpha_2 + \alpha_3)^2)$ при $\alpha_1 = 0$;
- 6) $\frac{d}{du}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{(\alpha_4 - \alpha_5)^2}{\alpha_4\alpha_5}\left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_4\alpha_5} + 1\right)$ при $\alpha_1 = \alpha_2$;
- 7) $\frac{d}{du}(\alpha_2 + \alpha_3) = \frac{2}{\alpha_4\alpha_5}(2\alpha_2^2 - \alpha_4^2 - \alpha_5^2)$ при $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$;
- 8) $\frac{d}{du}(2\alpha_2^2 - \alpha_4^2 - \alpha_5^2) = (\alpha_2 + \alpha_3)\left(\frac{4}{\alpha_1\alpha_3}(\alpha_2\alpha_3 + (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2)) - 2\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\frac{(\alpha_4^2 - \alpha_5^2)^2}{\alpha_4\alpha_5(\alpha_4^2 + \alpha_5^2)} + 2\frac{\alpha_4^2 + \alpha_5^2}{\alpha_4\alpha_5}\right)$ при $2\alpha_2^2 = \alpha_4^2 + \alpha_5^2$;
- 9) $\frac{d}{du} \ln(\alpha_4 - \alpha_5) \sim \frac{2}{\alpha_3}$ при $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_4 - \alpha_5 \rightarrow 0$, $\alpha_3 \rightarrow 0$,
- 10) $\frac{d}{du} \ln\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_4^2 + \alpha_5^2}{2\alpha_4\alpha_5}\alpha_1\right) = -\left(\frac{\alpha_4^2 - \alpha_5^2}{\alpha_4^2 + \alpha_5^2}\right)^2 \frac{1}{\alpha_3\alpha_4\alpha_5}((\alpha_4^2 + \alpha_5^2)(\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_2(\alpha_4^2 + \alpha_5^2 + 2\alpha_2\alpha_3))$ при $\alpha_2 = \frac{\alpha_4^2 + \alpha_5^2}{2\alpha_4\alpha_5}\alpha_1$.

Лемма 8 доказывается прямым вычислением. Приведем, однако, некоторые соображения, существенно упрощающие вычисления. Пусть

$$F(S) = F(\alpha_1, \dots, \alpha_5) = \frac{P_1(S)}{P_2(S)}$$

– некоторая однородная рациональная функция нулевой степени. Очевидно, что функция

$$\frac{d}{dt} \ln F(R) = \frac{1}{F(R)} \left\langle \frac{\partial F(R)}{\partial R}, \frac{dR}{dt} \right\rangle = \frac{1}{F(R)} \left\langle \frac{\partial F(R)}{\partial R}, V(R) \right\rangle$$

является однородной рациональной функцией от R степени -1 , поэтому

$$\frac{d}{du} \ln F(S) = f \frac{d}{dt} \ln F(fS) = f \frac{d}{dt} \ln F(R) = \frac{d}{dt} \ln F(S)$$

(здесь и далее используются обозначения из (4.1) и (4.2)). Таким образом, для вычисления $\frac{d}{du} \ln F(S)$ достаточно вычислить $\frac{d}{dt} \ln F(S)$, т.е. в ходе вычислений в пп. 1)–3) леммы 8 мы пользуемся вполне обозримой системой уравнений (2.1) вместо чрезвычайно громоздкой системы (4.1).

Предположим теперь, что $F(S)$ является рациональной функцией степени $k > 0$ и мы вычисляем производную этой функции в точке, где $F(S) = 0$ (именно такая ситуация имеет место в пп. 4)–10) леммы 8). Очевидно, что

$$\frac{d}{dt} F(R) = \left\langle \frac{\partial F(R)}{\partial R}, \frac{dR}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial F(R)}{\partial R}, V(R) \right\rangle$$

– однородная рациональная функция от R степени $k - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} F(S) &= f \frac{d}{dt} (F(fS) f^{-k}) = f^{1-k} \frac{d}{dt} F(R) - k F(R) f^{-k-1} \frac{df}{du} \\ &= \frac{d}{dt} F(S) - k F(R) f^{-k} \langle V(S), S \rangle = \frac{d}{dt} F(S) - k F(S) \langle V(S), S \rangle = \frac{d}{dt} F(S). \end{aligned}$$

Таким образом, как и выше, при вычислении производной функции $F(S)$ мы пользуемся соотношениями (2.1) вместо необозримых (4.1).

4.5. Поведение траекторий на бесконечности. Следующее предложение является основополагающим для доказательства теоремы 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Траектория системы (4.1), определенная начальной точкой $S_0 = (0, -\lambda, \lambda, \mu, \nu)$, $\lambda > 0$, $\mu \geq \nu > 0$, $2\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, обладает одной из следующих асимптотик, в зависимости от параметра μ :*

1) *если $\lambda = \frac{1}{2}$, то $S(u)$ стремится при $u \rightarrow \infty$ к стационарной точке $S_\infty = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$; траектория $S(u)$ отвечает решению $\bar{g}_\alpha$ семейства (3.1) при $\alpha = \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$;*

2) *если $\lambda < \frac{1}{2}$ и $\mu = \nu$, то $S(u)$ стремится при $u \rightarrow \infty$ к условно стационарной точке $S'_\infty = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$;*

3) *если $\lambda < \frac{1}{2}$ и $\mu > \nu$, то $S(u)$ стремится при $u \rightarrow u_1 < \infty$ к точке $S_1 = (0, 0, 0, 1, 0)$;*

4) *если $\lambda > \frac{1}{2}$, то $S(u)$ стремится при $u \rightarrow u_2 < \infty$ к точке $S_2 = (0, 0, 1, 0, 0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим области Π и Γ в S^4 , определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \Pi &= \{ \alpha_1 \leq 0, \alpha_2 \leq \alpha_1, \alpha_3 \geq 0, \alpha_4 \geq \alpha_5 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 \leq 0, 2\alpha_2^2 \leq \alpha_4^2 + \alpha_5^2 \}, \\ \Gamma &= \{ \alpha_1 \leq 0, \alpha_2 \leq \alpha_1, \alpha_4 \geq \alpha_5 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 \geq 0, 2\alpha_2^2 \geq \alpha_4^2 + \alpha_5^2 \}. \end{aligned}$$

Границы областей Π и Γ составлены из следующих подмножеств S^4 (будем их в дальнейшем именовать “стенками”):

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \{ \alpha_1 = 0, \alpha_2 \leq \alpha_1, \alpha_3 \geq 0, \alpha_4 \geq \alpha_5 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 \leq 0, 2\alpha_2^2 \leq \alpha_4^2 + \alpha_5^2 \}, \\ \Pi_2 &= \{ \alpha_1 \leq 0, \alpha_2 = \alpha_1, \alpha_3 \geq 0, \alpha_4 \geq \alpha_5 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 \leq 0, 2\alpha_2^2 \leq \alpha_4^2 + \alpha_5^2 \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_3 &= \{\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 \leq \alpha_1, \alpha_3 = 0, \alpha_4 \geq \alpha_5 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 \leq 0, 2\alpha_2^2 \leq \alpha_4^2 + \alpha_5^2\}, \\
\Pi_4 &= \{\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 \leq \alpha_1, \alpha_3 \geq 0, \alpha_4 = \alpha_5 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 \leq 0, 2\alpha_2^2 \leq \alpha_4^2 + \alpha_5^2\}, \\
\Pi_5 &= \{\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 \leq \alpha_1, \alpha_3 \geq 0, \alpha_4 \geq \alpha_5 = 0, \alpha_2 + \alpha_3 \leq 0, 2\alpha_2^2 \leq \alpha_4^2 + \alpha_5^2\}, \\
\Pi_6 &= \{\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 \leq \alpha_1, \alpha_3 \geq 0, \alpha_4 \geq \alpha_5 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 = 0, 2\alpha_2^2 \leq \alpha_4^2 + \alpha_5^2\}, \\
\Pi_7 &= \{\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 \leq \alpha_1, \alpha_3 \geq 0, \alpha_4 \geq \alpha_5 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 \leq 0, 2\alpha_2^2 = \alpha_4^2 + \alpha_5^2\}, \\
\Gamma_1 &= \{\alpha_1 = 0, \alpha_2 \leq \alpha_1, \alpha_4 \geq \alpha_5 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 \geq 0, 2\alpha_2^2 \geq \alpha_4^2 + \alpha_5^2\}, \\
\Gamma_2 &= \{\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 = \alpha_1, \alpha_4 \geq \alpha_5 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 \geq 0, 2\alpha_2^2 \geq \alpha_4^2 + \alpha_5^2\}, \\
\Gamma_3 &= \{\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 \leq \alpha_1, \alpha_4 = \alpha_5 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 \geq 0, 2\alpha_2^2 \geq \alpha_4^2 + \alpha_5^2\}, \\
\Gamma_4 &= \{\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 \leq \alpha_1, \alpha_4 \geq \alpha_5 = 0, \alpha_2 + \alpha_3 \geq 0, 2\alpha_2^2 \geq \alpha_4^2 + \alpha_5^2\}, \\
\Gamma_5 &= \{\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 \leq \alpha_1, \alpha_4 \geq \alpha_5 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 = 0, 2\alpha_2^2 \geq \alpha_4^2 + \alpha_5^2\}, \\
\Gamma_6 &= \{\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 \leq \alpha_1, \alpha_4 \geq \alpha_5 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 \geq 0, 2\alpha_2^2 = \alpha_4^2 + \alpha_5^2\}.
\end{aligned}$$

Кроме того, рассечем область Π стенкой

$$\Pi_8 = \left\{ \alpha_1 \leq 0, \alpha_2 = \frac{\alpha_4^2 + \alpha_5^2}{2\alpha_4\alpha_5} \alpha_1, \alpha_3 \geq 0, \alpha_4 \geq \alpha_5 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 \leq 0, 2\alpha_2^2 \leq \alpha_4^2 + \alpha_5^2 \right\}$$

на две следующие подобласти:

$$\Pi' = \Pi \cap \left\{ \alpha_2 \leq \frac{\alpha_4^2 + \alpha_5^2}{2\alpha_4\alpha_5} \alpha_1 \right\}, \quad \Pi'' = \Pi \cap \left\{ \frac{\alpha_4^2 + \alpha_5^2}{2\alpha_4\alpha_5} \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \right\}.$$

В соответствии с леммой 7 траектория $S(u)$ выходит из точки

$$S_0 = (0, -\lambda, \lambda, \mu, \nu), \quad \lambda > 0, \quad \mu \geq \nu > 0, \quad 2\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

касательно к вектору $e_1 = (-8, -\frac{2(2\mu^2+2\nu^2-1)}{\mu\nu}, 0, 0)$, записанному в координатах $(\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$. Если $\mu = \nu$, то система (2.1) редуцируется к системе (2.2), исследованной в [6], и утверждения 2) и 4) при $\mu = \nu$ следуют из результатов [6]. Поэтому считаем, что $\mu > \nu$. Если $\lambda < \frac{1}{2}$, то $\mu^2 + \nu^2 > \frac{1}{2}$. Далее, $\alpha_2 + \alpha_3 < 0$ для координат вектора e_1 , поэтому траектория $S(u)$ входит в начальный момент внутрь области $\Pi' \subset \Pi$. Аналогично, если $\lambda > \frac{1}{2}$, то $\mu^2 + \nu^2 < \frac{1}{2}$ и кривая при u , близких к u_0 , входит внутрь области Γ . Наконец, если $\lambda = \frac{1}{2}$, то $\mu^2 + \nu^2 = \frac{1}{2}$, и такому условию удовлетворяет семейство решений, которые явным образом задаются в (3.1). При этом траектории решений (3.1) заполняют пересечение областей Π и Γ . Исследуем детально поведение траекторий внутри областей Π и Γ , причем в каждой из этих областей надо рассмотреть две принципиально различные ситуации: либо траектория достигает границы области за конечное время, либо при всех u остается внутри области.

Оставшуюся часть доказательства предложения 1 мы разбиваем на леммы 9–12.

ЛЕММА 9. Пусть $\lambda < \frac{1}{2}$, т.е. траектория $S(u)$ в начальный момент входит в область Π' . Тогда $S(u)$ пересекает границу области Π при некотором $u = u_1 < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. что $S(u)$ остается в области Π при всех u . В области Π имеются одна стационарная точка

$$S_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

и одна условно стационарная точка

$$S_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Обе они лежат в $\Pi_2 \cap \Pi_4 \subset \partial\Pi$. Пусть $S(u) \rightarrow S_2$ при $u \rightarrow \infty$. Введем в окрестности точки S_2 координаты $x = \alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}$, $y = \alpha_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}$, $z = \alpha_3 - \frac{1}{\sqrt{5}}$, $w = \alpha_4 - \alpha_5$ и рассмотрим линеаризацию системы (4.1) в ее окрестности:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \frac{2}{\sqrt{5}}(-21x - y + 3z), & \frac{dy}{du} &= \frac{2}{\sqrt{5}}(-x - 21y + 3z), \\ \frac{dz}{du} &= \frac{2}{\sqrt{5}}(-9x - 9y + 7z), & \frac{dw}{du} &= -\frac{10}{\sqrt{5}}w. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что система (4.5) имеет следующие собственные числа: $-8\sqrt{5}$, $-8\sqrt{5}$, $-2\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}$. Собственные векторы, отвечающие отрицательным собственным числам, порождают гиперплоскость $x + y - 3z = 0$. Следовательно, существует гиперповерхность, касательная к гиперплоскости $x + y - 3z = 0$ и состоящая из траекторий системы (4.1), входящих экспоненциально в S_2 , причем никакие другие траектории системы (4.1) в точку S_2 не входят. Ясно, что эта гиперповерхность содержит пересечение $\Pi \cap \Gamma$, состоящее из траекторий семейства решений (3.1). Непосредственное вычисление показывает, что эта гиперплоскость в окрестности точки S_2 трансверсальна остальным стенкам областей Π и Γ и не пересекается с самими областями. Таким образом, никакая траектория системы (4.1) не может стремиться к S_1 , кроме траекторий, отвечающих семейству (3.1).

Пусть теперь $S(u) \rightarrow S_3$ при $u \rightarrow \infty$, т.е., в частности, $\alpha_3 \rightarrow 0$ и $\alpha_4 - \alpha_5 \rightarrow 0$. Из п. 9) леммы 8 следует, что $\ln(\alpha_4 - \alpha_5)$ возрастает при $u \rightarrow \infty$. Получаем противоречие. Итак, точки S_2 и S_3 не являются предельными для $S(u)$.

Заметим, что из п. 10) леммы 8 следует, что траектория либо остается целиком в области Π' , либо, пересекая стенку Π' , переходит в область Π'' и после этого не может попасть обратно. Рассмотрим отдельно оба случая.

Предположим, сначала, что $S(u) \in \Pi'$ при всех u . Соотношение п. 1) леммы 8 показывает, что функция $F_1 = \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ убывает вдоль траектории $S(u)$ в области Π' . Следовательно, $S(u)$ при $u \rightarrow \infty$ стремится к минимальному уровню функции F_1 на Π' , т.е. к $\Pi_2 \cap \Pi' = \Pi_2 \cap \Pi_4 \cap \Pi'$. Соотношение п. 2) леммы 8 показывает, что функция $F_2 = \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$ возрастает вдоль траекторий в окрестности $\Pi_2 \cap \Pi_4$. Поэтому $S(u)$ стремится к максимальному уровню F_2 на $\Pi_2 \cap \Pi_4$, т.е. $\alpha_3 \rightarrow 0$. Но тогда из п. 9) леммы 8 следует, что $\alpha_4 - \alpha_5$ возрастает, что противоречит стремлению к стенке Π_4 . Итак, полученное противоречие показывает, что траектория переходит в область Π'' .

Нетрудно увидеть из п. 2) леммы 8, что функция F_2 возрастает вдоль траекторий в области Π'' . Это значит, что $S(u)$ стремится к максимальному уровню функции F_2 , т.е. $\alpha_3 \rightarrow 0$. Далее, в окрестности $\{\alpha_3 = 0\}$ функция F_1 убывает

вдоль траекторий, поэтому $\alpha_1 - \alpha_2 \rightarrow 0$. Рассуждение, аналогичное доказательству предыдущей леммы (в части исследования окрестности стенки Π_3), показывает, что траектория либо сходится к условно стационарной точке S_2 , (что невозможно, как показано выше), либо к точке $(0, 0, 0, 1, 0)$.

Итак, мы показали, что траектория $S(u)$ “достигает” точки $(0, 0, 0, 1, 0)$ за бесконечное время. Однако нетрудно заметить, что величина α_5^2 является гладкой функцией в окрестности точки $(0, 0, 0, 1, 0)$, поэтому можно взять в качестве нового гладкого параметра кривой $S(u)$ величину α_5^2 . Таким образом, точка $(0, 0, 0, 1, 0)$ может достигаться только при конечном α_5^2 , а значит, и только при конечном значении u . Лемма 9 доказана.

ЛЕММА 10. Пусть $\lambda < \frac{1}{2}$, траектория $S(u)$ в начальный момент входит в Π' и пересекает в первый раз границу области Π в точке $S_1 = S(u_1)$, $u_1 < \infty$. Тогда $S_1 = (0, 0, 0, 1, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как $\Pi_4 \setminus (\Pi_1 \cup \Pi_3 \cup \Pi_5)$ содержится в подпространстве, инвариантном относительно системы (4.1), то стенка Π_4 достижима за конечное время разве только в точках пересечения Π_4 со стенками Π_1, Π_3, Π_5 соответственно.

Пусть $S_1 = (0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in \Pi_1$. Если $\alpha_3 > 0$, то $\alpha_2 < 0$ и $\alpha_2 \neq \alpha_3$. Значит, $(\alpha_2 + \alpha_3)^2 < \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \leq 1$ и соотношение п. 5) леммы 8 показывает, что координата α_1 убывает в окрестности стенки Π_1 , т.е. стенка Π_1 недостижима изнутри области Π за конечное время. Пусть $\alpha_3 = 0$ и $\alpha_2 \neq 0$. Тогда опять мы получаем убывание координаты α_1 , кроме, может быть, того случая, когда $\alpha_2 = -1$, т.е. $S_1 = (0, -1, 0, 0, 0)$. Однако и в этом случае соотношение п. 5) леммы 8 показывает, что в окрестности точки S_1 при $u < u_1$ производная координаты α_1 будет равна $-2\frac{1+\alpha_2}{\alpha_3} < 0$, т.е. α_1 убывает. Получаем противоречие. Итак, остается только возможность $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ и $S_1 = (0, 0, 0, \alpha_4, \alpha_5)$. Предположим, что в этом случае $\alpha_4 \geq \alpha_5 > 0$. Пусть $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ – касательный вектор к траектории $S(u)$ в точке S_1 . Положим

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow u_1} \frac{\alpha_2(u)}{\alpha_1(u)} = h, \quad \overline{\lim}_{u \rightarrow u_1} \frac{\alpha_3(u)}{\alpha_1(u)} = f.$$

Посчитав пределы $W(S(u))$ при $u \rightarrow u_1$, получим

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{h}{f} + \frac{f}{h} - 2 - \frac{1}{fh} - \frac{(\alpha_4^2 - \alpha_5^2)^2}{2\alpha_4\alpha_5} \left(\frac{f}{h} + \frac{h}{f} \right), \\ x_2 &= \frac{1}{f} - \frac{h^2}{f} + f - \frac{\alpha_4^2 + \alpha_5^2}{\alpha_4\alpha_5} - \frac{(\alpha_4^2 - \alpha_5^2)^2}{2\alpha_4\alpha_5} \left(1 + \frac{h}{f} \right), \\ x_3 &= \frac{1}{h} - \frac{f^2}{h} + h - \frac{\alpha_4^2 + \alpha_5^2}{\alpha_4\alpha_5} - \frac{(\alpha_4^2 - \alpha_5^2)^2}{2\alpha_4\alpha_5} \left(1 + \frac{f}{h} \right). \end{aligned}$$

Далее, учитывая, что $x_2/x_1 = h$, $x_3/x_1 = f$, получаем

$$h = f = 2 \frac{\alpha_4\alpha_5}{\alpha_4^2 + \alpha_5^2}.$$

Но это означает, что координаты x_1, x_2, x_3 вектора X имеют одинаковый знак, т.е. траектория входит в точку S_1 не из области Π , что является противоречием.

Следовательно, стенка Π_1 за конечное время достижима только при $\alpha_5 = 0$, т.е. $S_1 = (0, 0, 0, 1, 0)$.

Предположим теперь, что $S_1 \in \Pi_5$. Соотношение п. 4) леммы 8 влечет возрастание функции α_5^2 в окрестности $\Pi_5 \setminus \Pi_1$. Значит, $S_1 \in \Pi_5 \cap \Pi_1$ и, учитывая вышеописанное поведение траектории вблизи Π_1 , получаем, что $S_1 = (0, 0, 0, 1, 0)$.

Предположим, что $S_1 \in \Pi_3$. На основе проведенных выше рассуждений мы можем полагать, что $\alpha_5 \neq 0$ и $\alpha_1 \neq 0$, поэтому компонента W_3 является гладкой в окрестности Π_3 . Выберем α_3 в качестве гладкого параметра в окрестности $u = u_1$. Если $\alpha_1 \neq \alpha_2$ или $\alpha_4 \neq \alpha_5$, то тангенциальная составляющая (по отношению к Π_3) поля W в окрестности S_1 имеет порядок $1/\alpha_3$ и, следовательно, траектория не может подойти к Π_3 за конечное время. Итак, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_4 = \alpha_5$ и $S_1 = (\alpha, \alpha, 0, \sqrt{\frac{1-2\alpha^2}{2}}, \sqrt{\frac{1-2\alpha^2}{2}})$. Пусть $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ – касательный вектор к траектории $S(u)$ в точке S_1 . Очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow -0} W(S_1 + \varepsilon X) = \lim_{u \rightarrow u_1} W(S(u)) = X.$$

Непосредственно видно, что $\lim_{u \rightarrow u_1} W_3(S(u)) = 0$, поэтому $x_3 = 0$. Следовательно, $X = 0$. Значит, S_1 – условно стационарная точка и она не достижима за конечное время.

Пусть $S_1 \in \Pi_2$. Учитывая вышесказанное, можно считать, что $S_1 \notin \Pi_1 \cup \Pi_3 \cup \Pi_5$ и, следовательно, $S_1 \notin \Pi_4$ и $\alpha_4 > \alpha_5 > 0$. Тогда соотношение 6) леммы 8 показывает, что функция $\alpha_1 - \alpha_2$ возрастает вблизи Π_2 и, значит, Π_2 не достижима за конечное время.

Наконец, соотношения 7) и 8) леммы 8 показывают, что в точках стенок $\Pi_6 \setminus \Pi_7$ и $\Pi_7 \setminus \Pi_6$ вектор W направлен внутрь области, поэтому Π_6 , Π_7 могут быть достижимы за конечное время только в точках $\Pi_6 \cap \Pi_7$. С другой стороны, пересечение $\Pi_6 \cap \Pi_7$ состоит из траекторий, отвечающих семейству решений (3.1), поэтому также не может быть достигнуто траекториями $S(u)$ при $u = u_1$.

Итак, из всего вышесказанного можно сделать вывод, что в условиях леммы возможен только случай $S_1 = (0, 0, 0, 1, 0)$. Лемма 10 доказана.

ЛЕММА 11. *Предположим, что $\lambda > \frac{1}{2}$, т.е. траектория из начальной точки входит в область Γ . Тогда $S(u)$ пересекает границу области Γ при $u = u_1 < \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. что $S(u)$ остается в области Γ при всех u . Во-первых, по лемме 4 внутри области Γ нет стационарных точек. Во-вторых, как отмечалось выше, функция F_3 убывает вдоль траекторий системы (4.1) в области Γ . Следовательно, траектория $S(u)$ стремится при $u \rightarrow \infty$ к множеству точек, на которых F_3 принимает минимальное значение в Γ , т.е. к Γ_3 . Далее, заметим, что при $\alpha_4 = \alpha_5$ система (4.1) редуцируется к системе, исследованной в [6] для тех же краевых условий. При этом область Γ_3 , рассмотренная нами полностью, соответствует области Γ , рассмотренной при доказательстве леммы 13 в [6]. Функции, возрастающие или убывающие вдоль траекторий, использованные для доказательства в [6], определены во всей нашей области Γ и являются соответственно возрастающими или убывающими

в некоторой окрестности Γ_3 . Следовательно, из рассуждений из [6] следует, что траектория $S(u)$ может сходиться либо к стационарной точке S_2 , либо к точке $(0, 0, 1, 0, 0)$, причем к последней точке сходимостъ возможна только за конечное время. Поскольку линеаризация (4.5) системы (4.1) в окрестности S_2 , проведенная в первой части доказательства леммы 9, показывает, что $S(u)$ не может сходиться к S_2 , то мы пришли к противоречию. Лемма 11 доказана.

ЛЕММА 12. *Предположим, что $\lambda > \frac{1}{2}$, траектория из начальной точки входит в область Γ и пересекает впервые границу области Γ в точке $S_1 = S(u_1)$, $u_1 < \infty$. Тогда $S_1 = (0, 0, 1, 0, 0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\Gamma_3 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_4)$ содержится в подпространстве, инвариантном относительно системы (4.1), то стенка Γ_3 достижима за конечное время разве только в точках пересечения Γ_3 со стенками Γ_1 , Γ_4 соответственно.

Определим функцию $F_3 = \ln \frac{\alpha_4}{\alpha_5}$ на S^4 . Формула 3) леммы 9 показывает, что функция F_3 убывает вдоль траекторий системы (4.1) в области Γ .

Пусть $S_1 = (0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in \Gamma_1$. Если $\alpha_2 < 0$, то $\alpha_3 > 0$ и $\alpha_2 \neq \alpha_3$. Следовательно, координата α_1 убывает в окрестности Γ_1 . Получаем противоречие. Если $\alpha_2 = 0$ и $\alpha_3 \neq 0$, то координата α_1 не убывает только в случае $\alpha_3 = 1$, т.е. $S_1 = (0, 0, 1, 0, 0)$. Предположим, наконец, что $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, т.е. $S_1 = (0, 0, 0, \alpha_4, \alpha_5)$. Дословно повторяя рассуждение из доказательства леммы 10, в предположении, что $\alpha_5 > 0$, мы приходим к противоречию. Значит, остается случай $\alpha_5 = 0$, т.е. $S_1 = (0, 0, 0, 1, 0)$. Однако это означает бесконечный рост функции F_3 вдоль траектории, что противоречит ее убыванию внутри области Γ .

Предположим, что $S_1 \in \Gamma_4$. Соотношение 4) леммы 8 означает, что α_5^2 возрастает вдоль траектории в окрестности $\Gamma_4 \setminus \Gamma_1$, что приводит к противоречию (невозможность подхода к Γ_1 нами уже получена).

Наконец, дословно повторяя доказательство леммы 10, можно показать, что невозможны и случаи $S_1 \in \Gamma_2$, $S_1 \in \Gamma_5$, $S_1 \in \Gamma_6$.

Предположим, что $S(u)$ остается в области Γ при всех u . Во-первых, по лемме 4 внутри области Γ нет стационарных точек. Во-вторых, как отмечалось выше, функция F_3 убывает вдоль траекторий системы (4.1) в области Γ . Следовательно, траектория $S(u)$ стремится при $u \rightarrow \infty$ к множеству точек, на которых F_3 принимает минимальное значение в Γ , т.е. к Γ_3 . Далее, заметим, что при $\alpha_4 = \alpha_5$ система (4.1) редуцируется к системе, исследованной в [6] для тех же краевых условий. При этом область Γ_3 , рассмотренная нами полностью, соответствует области Γ , рассмотренной при доказательстве леммы 13 в [6]. Функции, возрастающие или убывающие вдоль траекторий, использованные для доказательства в [6], определены во всей нашей области Γ и являются соответственно возрастающими или убывающими в некоторой окрестности Γ_3 . Следовательно, из рассуждений [6] следует, что траектория $S(u)$ может сходиться либо к стационарной точке S_2 , либо к точке $(0, 0, 1, 0, 0)$, причем к последней точке сходимостъ возможна только за конечное время. Поскольку линеаризация системы (4.1) в окрестности S_2 , проведенная в первой части доказательства леммы, показывает, что $S(u)$ не может сходиться к S_2 , то мы

доказали, что в рассматриваемом случае траектория $S(u)$ стремится к точке $(0, 0, 1, 0, 0)$ за конечное время. Лемма 12 доказана.

Леммы 9–12 завершают доказательство предложения 1.

Очевидно, что из предложения 1 следует теорема 2. Действительно, траектории из п. 1) предложения 1 отвечают метрикам семейства 1) из теоремы 2, траектории из п. 2) – метрикам семейства 2) из теоремы 2, а траектории из пп. 3) и 4) предложения 1 сходятся к особым точкам за конечное время, т.е. отвечают неполным метрикам на $\mathcal{M}_2$. То, что метрики семейства 2) из теоремы 2 имеют группу голономии $\text{Spin}(7)$, доказано в [6]. Теорема 2 доказана.

Список литературы

- [1] E. Calabi, “Métriques kählériennes et fibrés holomorphes”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **12**:2 (1979), 269–294.
- [2] D. D. Joyce, *Compact manifolds with special holonomy*, Oxford Math. Monogr., Oxford Univ. Press, Oxford, 2000.
- [3] D. N. Page, C. N. Pope, “Inhomogeneous Einstein metrics on complex line bundles”, *Classical Quantum Gravity*, **4**:2 (1987), 213–225.
- [4] M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü, C. N. Pope, “Hyper-Kähler Calabi metrics, L^2 harmonic forms, resolved M2-branes, and $\text{AdS}_4/\text{CFT}_3$ correspondence”, *Nuclear Phys. B*, **617**:1–3 (2001), 151–197.
- [5] H. Kanno, Yu. Yasui, “On $\text{Spin}(7)$ holonomy metric based on $\text{SU}(3)/\text{U}(1)$. II”, *J. Geom. Phys.*, **43**:4 (2002), 310–326.
- [6] Я. В. Базайкин, “О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии $\text{Spin}(7)$ ”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:1 (2007), 11–32; англ. пер.: Ya. V. Bazaikin, “On the new examples of complete noncompact $\text{Spin}(7)$ -holonomy metrics”, *Siberian Math. J.*, **48**:1 (2007), 8–25.
- [7] Я. В. Базайкин, Е. Г. Малькович, “Метрики с группой голономии G_2 , связанные с 3-сасакиевым многообразием”, *Сиб. матем. журн.*, **49**:1 (2008), 3–7; англ. пер.: Ya. V. Bazaikin, E. G. Malkovich, “ G_2 -holonomy metrics connected with a 3-Sasakian manifold”, *Siberian Math. J.*, **49**:1 (2008), 1–4.
- [8] Я. В. Базайкин, “Некомпактные римановы пространства с группой голономии $\text{Spin}(7)$ и 3-сасакиевы многообразия”, *Геометрия, топология и математическая физика. I*, Тр. МИАН, **263**, МАИК, М., 2008, 6–17; англ. пер.: Ya. V. Bazaikin, “Noncompact Riemannian spaces with the holonomy group $\text{Spin}(7)$ and 3-Sasakian manifolds”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **263**:1 (2008), 2–12.
- [9] Ch. Boyer, K. Galicki, “3-Sasakian manifolds”, *Surveys in differential geometry: essays on Einstein manifolds*, Surv. Differ. Geom., **6**, Int. Press, Boston, MA., 1999, 123–184.
- [10] A. Gray, “Weak holonomy groups”, *Math. Z.*, **123**:4 (1971), 290–300.

Я. В. Базайкин (Ya. V. Bazaikin)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: bazaikin@math.nsc.ru

Поступила в редакцию
20.11.2009 и 11.06.2010

Е. Г. Малькович (E. G. Malkovich)
Новосибирский государственный университет
E-mail: malkovicheugen@ngs.ru