Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Бесов, Интегральные оценки дифференцируемых функций на нерегулярных областях, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 12, 69–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7658>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 06:03:00

УДК 517.518.23

О. В. Бесов

Интегральные оценки дифференцируемых функций на нерегулярных областях

На нерегулярных областях евклидова пространства построены интегральные представления функций и их производных через некоторый заданный набор производных. Приведены теоремы вложения пространства типа пространства Соболева в пространство Лебега и даны оценки норм производных.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: пространства Соболева, интегральные представления функций, теоремы вложения.

Известная теорема вложения Соболева $W_p^s(G) \subset L_q(G)$, характеризующаяся неравенством

$$\|f\|_{L_q(G)} \leq C \|f\|_{W_p^s(G)} = C \left(\sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f\|_{L_p(G)} + \|f\|_{L_p(G)} \right), \quad (1)$$

$$s \in \mathbb{N}, \quad 1 < p < q < \infty,$$

установлена им в 1938 г. для области $G \subset \mathbb{R}^n$ с условием конуса при ограничении

$$s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0 \quad (2)$$

(см. [1]). Соотношение (2), определяющее максимально возможное значение q в этой теореме, является и необходимым условием вложения. Результат Соболева затем был перенесен на области более общего вида: области классов $J_{(n-1)/n}$, $I_{p,1/p-1/n}$ (В. Мазья, 1960 г., 1975 г.; см. [2]), области с условием Джона (John domain; Ю. Решетняк, 1980 г., 1983 г.; см. [3], [4]), области с условием гибкого конуса (О. Бесов, 1983 г.; см. [5]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [6]). При $\sigma \geq 1$ область $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *областью с условием гибкого σ -конуса*, если при некоторых $T > 0$, $0 < \kappa_0 \leq 1$ для любого $x \in G$ существует кусочно гладкий путь

$$\gamma = \gamma_x: [0, T] \rightarrow G, \quad \gamma(0) = x, \quad |\gamma'| \leq 1 \text{ почти всюду,}$$

такой, что

$$\text{dist}(\gamma(t), \mathbb{R}^n \setminus G) \geq \kappa_0 t^\sigma \text{ при } 0 < t \leq T.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00443, № 10-01-91331), Программы РАН “Современные проблемы теоретической математики”, Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3810.2008.1), Программы АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант № 2.1.1/1662).

В случае $\sigma = 1$ такую область называют также *областью с условием гибкого конуса*. Области, не удовлетворяющие условию гибкого конуса, будем называть *нерегулярными*.

Для нерегулярной области (которая в окрестности некоторой точки границы может, в частности, иметь вид внешнего пика) вложение (1) может оказаться неверным ни при каких соотношениях параметров или быть верным при некоторых более сильных, чем (2), условиях, связывающих n , s , p , q и зависящих от геометрических свойств области G . Мазья выделил классы областей I_α (1960 г.), $J_{p,\alpha}$ (1975 г.), для которых установил соответственно при $p = 1$ и при $p > 1$ теорему вложения Соболева (см. (1)) для $s = 1$ с максимально возможным q . Классы I_α , $J_{p,\alpha}$ определяются в терминах изопериметрических или емкостных неравенств.

В [6] показано, в частности, что для области с условием гибкого σ -конуса вложение (1) справедливо при следующем соотношении параметров:

$$s - \frac{\sigma(n-1)+1}{p} + \frac{n}{q} \geq 0. \quad (3)$$

Этот результат при $s = 1$ принадлежит Т. Килпелайнену и Я. Малы (см. [7]). Д. Лабутиным в [8] установлено, что условие (3) является также и необходимым для данного вложения.

В [6], [7] содержатся и весовые обобщения неравенства (1) для области с условием гибкого σ -конуса.

Мы не останавливаемся здесь на результатах Лабутина, Мазья–Поборчого, Трушина, установивших теорему вложения Соболева с максимально возможным показателем q для различных специальных случаев областей с условием гибкого σ -конуса, в которых она оказалась справедливой при отличных от (3) ограничениях на параметры.

В настоящей работе приведены новые интегральные представления функции f через некоторый набор ее производных $D^\alpha f$ одного или различных порядков и из них получены поточечные оценки функции через интегралы, содержащие соответствующие производные.

Установленные интегральные оценки можно применить для получения теорем вложения пространств Соболева (обобщенных в отношении набора производных) на нерегулярных областях. При этом параметры интегрального представления должны быть подчинены геометрическим свойствам области G . Схему рассуждений можно найти в [6]. В качестве примера ниже приведены две теоремы вложения, базирующиеся на оценках полученных интегральных операторов.

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство, $1 \leq m \leq n$, $i_0 = 0$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m = n$, $n_j = i_j - i_{j-1}$, $\chi_j: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$,

$$\chi_j(i) = \begin{cases} 1 & \text{при } i_{j-1} + 1 \leq i \leq i_j, \\ 0 & \text{при } 1 \leq i \leq i_{j-1} \text{ и } i_j + 1 \leq i \leq i_m = n. \end{cases}$$

При $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ положим $\alpha^j := \chi_j \alpha = (0, \dots, 0, \alpha_{i_{j-1}+1}, \dots, \alpha_{i_j}, 0, \dots, 0)$, так что $\alpha = \sum_{j=1}^m \alpha^j$. При $x \in \mathbb{R}^n$ положим $x = (x^1, \dots, x^m)$, где $x^j = (x_{i_{j-1}+1}, \dots, x_{i_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$.

Везде далее область $G \subset \mathbb{R}^n$, $G_\delta = \{x \in G : \text{dist}(x, \partial G) > \delta\}$ при достаточно малом $\delta \in (0, 1)$,

$$\rho(x) = \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G), \quad \rho_1(x) = \min\{\rho(x), 1\}, \quad B(x, R) = \{y : |y - x| < R\},$$

χ – характеристическая функция шара или интервала $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^k$, весовые функции $v, w : G \rightarrow (0, \infty)$, $u : G_\delta \rightarrow (0, \infty)$, функции u, v, w локально суммируемы. Для измеримого по Лебегу множества $E \subset G \subset \mathbb{R}^n$ при $1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_{p,E} = \|f|L_p(E)\|, \quad \|f|L_{p,v}(E)\| = \|fv^{1/p}|L_p(E)\|.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – область с условием гибкого σ -конуса, $\sigma \geq 1$, и пусть

$$s, m \in \mathbb{N}, \quad 1 < p < q < \infty, \quad 1 \leq r \leq q, \quad s - |\beta| - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0, \quad 1 \leq m \leq n,$$

$$v(x) = \rho_1(x)^a, \quad w(x) = \rho_1(x)^b, \quad b \geq 0,$$

$$a \geq 1 - n - (s - 1)(m - 1)p, \quad (4)$$

$$s - |\beta| - (s - 1)(m - 1)(\sigma - 1) - \frac{\sigma(n - 1) + 1 + \sigma a}{p} + \frac{n + b}{q} \geq 0. \quad (5)$$

Тогда существует постоянная $C > 0$, при которой справедлива оценка

$$\|D^\beta f|L_{q,w}(G)\| \leq C \left[\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=\alpha^j, |\alpha|=s} \|D^\alpha f|L_{p,v}(G)\| + \|f|L_r(G_\delta)\| \right]. \quad (6)$$

Условие (5) во всяком случае при $a = b = 0$ нельзя ослабить. Это можно показать с помощью примера, аналогичного примеру Лабутина, приведенного в [8] для случая $m = 1$.¹

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $(m - 1)(\sigma - 1) > 1$ из формулы (5) видно, что при фиксированных p, a, b увеличение гладкости s приводит к уменьшению максимально возможного q в (1). В этом же случае, как заметил Трушин, при достаточно больших s неравенство (1) невозможно ни при каком $q > p$.

Вывод интегрального представления будем проводить для анизотропного по гладкости случая, т.е. для случая, когда порядки производных по различным группам переменных не обязательно совпадают. На его основе можно распространить теорему вложения на анизотропные по гладкости пространства Соболева. Возможно и обобщение полученных результатов на нерегулярные области более общего вида в плане работы Трушина [9].

¹В условиях следствия 4.2 из [6] имеется неточность. Условие $s - \frac{n+a}{p} + \frac{n+b}{q} \geq 0$ следует заменить условием $a \geq 1 - n$. После этого его формулировка совпадает с формулировкой приведенной здесь теоремы 1 для случая $m = 1$.

Пусть $s = (s_1, s_2, \dots, s_m) \in \mathbb{N}^m$ и функция $f \in L(G, \text{loc})$ имеет на G обобщенные по Соболеву производные $\{D^\alpha f : \alpha = \alpha^j, |\alpha| = s_j, j = 1, 2, \dots, m\}$. Построим интегральное представление производной $D^\beta f$ через заданный набор производных. Рассмотрим путь

$$\Gamma(t, x) = (\Gamma_1(t, x), \dots, \Gamma_n(t, x)), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $\Gamma(0, x) = x$, функции $t \rightarrow \Gamma_i(t, x)$ непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$, $|\frac{\partial \Gamma}{\partial t}| \leq 1$.

Вывод интегрального представления функции $D^\beta f$ в точке x основан на построении усреднения $(D^\beta f)_t$ функции $D^\beta f$ по некоторой окрестности точки $\Gamma(t, x)$ такого, что $(D^\beta f)_t(x) \rightarrow D^\beta f(x)$ при $t \rightarrow 0$ для п.в. $x \in G$ и $\frac{\partial}{\partial t}(D^\beta f)_t$ выражается через интегралы, содержащие заданные производные функции f . Тогда само интегральное представление получается применением формулы Ньютона–Лейбница, непосредственным следствием которой является поточечная оценка

$$|D^\beta f(x)| \leq \int_0^T \left| \frac{\partial}{\partial t}(D^\beta f)_t(x) \right| dt + |(D^\beta f)_T(x)|. \quad (7)$$

Мы предложим конструкцию ядер усреднения сначала в случае $m = 1$ отдельно для $n = 1$ и для $n \geq 2$. Ядро усреднения в общем случае $1 \leq m \leq n$ построим в виде произведения этих ядер.

Пусть $n = 1$, $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\mu(u) = 0$ при $u \leq 0$, $\mu(u) = 1$ при $u \geq 1$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Положим

$$\omega(u, \tau) := \frac{\partial^k}{\partial u^k} \left(\frac{u^{k-1}}{(k-1)!} \mu(u - \tau) \right), \quad (8)$$

так что $\int \omega(u, \tau) du = \mu(1) = 1$. Пусть $r: (0, T) \rightarrow (0, \infty)$ – непрерывная и кусочно непрерывно дифференцируемая функция, неубывающая в некоторой правой полукрестности нуля, $r(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Пусть

$$f_t(x) = \int K_1(v, r(t), w(t)) f(x + v) dv, \quad (9)$$

где w – непрерывная и кусочно гладкая функция,

$$\begin{aligned} K_1(v, r(t), w(t)) &:= \frac{1}{r(t)} \omega\left(\frac{v}{r(t)}, \frac{w(t)}{r(t)}\right) \\ &= \frac{1}{r(t)} r(t)^k \frac{\partial^k}{\partial v^k} \left[\frac{v^{k-1}}{(k-1)! r(t)^{k-1}} \mu\left(\frac{v - w(t)}{r(t)}\right) \right] \\ &= \frac{\partial^k}{\partial v^k} \left[\frac{v^{k-1}}{(k-1)!} \mu\left(\frac{v - w(t)}{r(t)}\right) \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$|K_1(v, r(t), w(t))| \leq \frac{C}{r(t)} \left(\left| \frac{w(t)}{r(t)} \right|^{k-1} + 1 \right) \chi \left(\frac{v - w(t)}{r(t)} \right), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K_1(v, r(t), w(t)) &= \frac{\partial^k}{\partial v^k} \left[\frac{v^{k-1}}{(k-1)!} \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\frac{v - w(t)}{r(t)} \right) \right] \\ &= \frac{\partial^k}{\partial v^k} \left\{ \frac{v^{k-1}}{(k-1)!} \mu' \left(\frac{v - w(t)}{r(t)} \right) \left[-\frac{r'(t)}{r(t)^2} (v - w(t)) - \frac{w'(t)}{r(t)} \right] \right\} \\ &= \frac{\partial^k}{\partial v^k} \left\{ r(t)^{k-2} \frac{v^{k-1}}{r(t)^{k-1} (k-1)!} \mu' \left(\frac{v - w(t)}{r(t)} \right) \left[-r'(t) \frac{v - w(t)}{r(t)} - w'(t) \right] \right\} \\ &= \frac{\partial^k}{\partial v^k} \left\{ r(t)^{k-2} K \left(\frac{v}{r(t)}, \frac{w(t)}{r(t)}, r'(t), w'(t) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$K(u, \tau, a, b) = -\frac{u^{k-1}}{(k-1)!} [a(u - \tau) + b] \mu'(u - \tau),$$

так что

$$\begin{aligned} K(\cdot, \tau, a, b) &\in C_0^\infty([-1 + \tau, 1 + \tau]), \\ |K(u, \tau, a, b)| &\leq C \chi(u - \tau) (1 + |\tau|)^{k-1} (|a| + |b|). \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть теперь $n \geq 2$, $m = 1$, $s \in \mathbb{N}$. Будем считать, что функция f определена и имеет нужные производные там, где это требуется для проведения выкладок. Воспользуемся усреднением функции f в виде интеграла от специальной линейной комбинации ее значений из [10], [11]:

$$f_t(x) = \int \sum_{\nu=1}^s \sum_{k=0}^{s-1} a_\nu c_k(r_1(t)) f(x + \nu r(t)v + (\Gamma(t, x) - x)(1 + kr_1(t))) \eta(v) dv, \quad (13)$$

где $r: [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ – непрерывная и кусочно гладкая функция, $r(t) > 0$ при $t > 0$, $r(0) = 0$, $|r'(t)| \leq c$ для п.в. t , $|r(t)| \leq \frac{1}{2} \text{dist}(\Gamma(t, x), \partial G)$, $|\Gamma(t, x) - x| = O(r(t))$ при $t \rightarrow 0$, $r_1(t) = \frac{1}{4s} \frac{r(t)}{t}$, $\eta \in C_0^\infty(B(0, \frac{1}{4s}))$, $a_j = (-1)^{j-1} \binom{s}{j}$,

$$\sum_{k=0}^{s-1} c_k(t) = 1, \quad \sum_{k=0}^{s-1} c_k(t)(1 + kt)^l = 0, \quad l = 1, \dots, s-1.$$

Отсюда получаем, что $|c_k(t)| \leq ct^{-s+1}$, $|c'_k(t)| \leq Ct^{-s}$.

Усреднение $f_t(x)$ построено по точкам y таким, что

$$|y - \Gamma(t, x)| \leq \frac{r(t)}{4} \left(1 + \frac{|\Gamma(t, x) - x|}{t} \right).$$

Будем считать, что $|\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, x)| \leq 1$ п.в. Тогда усреднение $f_t(x)$ определено, так как $\Gamma(t, x) + B(0, \frac{r(t)}{2}) \subset G$.

В [10], [11] показано, что

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f_t(x) \right| \leq C \int t^{s-1} |(f - P_{s-1})(y)| r(t)^{-s-n} \chi \left(\frac{y - \Gamma(t, x)}{r(t)} \right) dy,$$

где P_{s-1} – произвольный многочлен степени $s-1$ (коэффициенты которого могут зависеть от f, x, Γ, t), C не зависит от f, x, Γ, t . Для каждого $y \in B(\Gamma(t, x), r(t))$ выразим $(f - P_{s-1})(y)$ (при надлежащем выборе многочлена P_{s-1}) через интегралы по $y \in B(\Gamma(t, x), r(t))$ от линейных функций относительно производных $D^\alpha f$, $|\alpha| = s$. Для этого применим проекционное разложение Соболева (см., например, [12]) на шаре $B(\Gamma(t, x), r(t))$ при выборе в качестве P_{s-1} проекционного многочлена. Тогда имеем

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f_t(x) \right| \leq C \sum_{|\alpha|=s} t^{s-1} r(t)^{-n} \int_{|y-\Gamma(t,x)| < r(t)} |D^\alpha f(y)| dy. \quad (14)$$

Вывод последней оценки можно найти, например, в [12].

Рассмотрим усреднение вида (13) для $D^\beta f$, $\beta \in \mathbb{N}^n$. С помощью замены переменных перепишем $(D^\beta f)_t$ в виде

$$\begin{aligned} (D^\beta f)_t(x) &= \int K_n(y, r(t), \Gamma(t, x) - x) D^\beta f(x + y) dy \\ &= (-1)^{|\beta|} \int K_n^{(\beta)}(y, r(t), \Gamma(t, x) - x) f(x + y) dy, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} K_n(\cdot, r(t), \Gamma(t, x) - x) &\in C_0^\infty(B(\Gamma(t, x) - x, r(t))), \\ K_n^{(\beta)}(y, r(t), \Gamma(t, x) - x) &= D_y^\beta K_n(y, r(t), \Gamma(t, x) - x), \\ |K_n^{(\beta)}(y, r(t), \Gamma(t, x) - x)| &\leq C \chi\left(\frac{y - \Gamma(t, x) + x}{r(t)}\right) r(t)^{-s+1-n} t^{s-|\beta|-1}, \\ \int K_n(y, r(t), \Gamma(t, x) - x) dy &= 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Оценки (14), (16), полученные для усреднения вида (13) при $n \geq 2$, верны и в случае $n = 1$ для усреднения вида (9), как это следует из (10)–(12).

Пусть теперь $1 \leq m \leq n$, $s = (s_1, \dots, s_m)$, $f, D^\beta f \in L(G, \text{loc})$, $x \in G$, $t > 0$. Рассмотрим следующее усреднение производной $D^\beta f$ в точке x :

$$\begin{aligned} (D^\beta) f_t(x) &= \int \prod_{j=1}^m K_{n_j}(y^j, r_j(t), \Gamma^j(t, x) - x^j) D^\beta f(x + y) dy \\ &= (-1)^{|\beta|} \int \prod_{j=1}^m K_{n_j}^{(\beta)}(y^j, r_j(t), \Gamma^j(t, x) - x^j) f(x + y) dy, \end{aligned}$$

где $\Gamma^j(t, x) = (\Gamma_{i_{j-1}+1}(t, x), \dots, \Gamma_{i_j}(t, x))$, K_{n_j} взято при $n_j \geq 2$ из (15) с $s = s_j - |\beta^j|$, а при $n_j = 1$ из (9) с $k = s_j - |\beta^j|$.

Дифференцируя по t и учитывая (10)–(12), (14)–(16), получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t} (D^\beta f)_t(x) \right| &\leq C \sum_{i=1}^m \int \prod_{j=1}^m \left(\chi\left(\frac{y^j - \Gamma^j(t, x)}{r_j(t)}\right) r_j(t)^{-s_j+1-n_j} t^{s_j-|\beta^j|-1} \right) r_i(t)^{s_i-1} \\ &\quad \times \sum_{\alpha=\alpha^i, |\alpha|=s_i} |D^\alpha f(y)| dy. \end{aligned} \quad (17)$$

В случае $r_1(t) = \dots = r_m(t) = r(t)$ имеем

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} (D^\beta f)_t(x) \right| \leq C \sum_{i=1}^m r(t)^{-\sum_{j=1}^m s_j + m + s_i - 1} t^{\sum_{j=1}^m s_j - |\beta| - m} r(t)^{-n} \times \int \prod_{j=1}^m \chi \left(\frac{y^j - \Gamma^j(t, x)}{r(t)} \right) \sum_{\alpha = \alpha^i, |\alpha| = s_i} |D^\alpha f(y)| dy. \quad (18)$$

Если же при этом $s_1 = \dots = s_m = s$, то

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} (D^\beta f)_t(x) \right| \leq C r(t)^{-(s-1)(m-1)} t^{(s-1)m - |\beta|} r(t)^{-n} \times \int \prod_{j=1}^m \chi \left(\frac{y^j - \Gamma^j(t, x)}{r(t)} \right) \sum_{i=1}^m \sum_{\alpha = \alpha^i, |\alpha| = s} |D^\alpha f(y)| dy. \quad (19)$$

Без ограничения общности будем считать, что на некотором открытом подмножестве множества G с нулевой мерой дополнения пути $\Gamma(t, x)$ и функции $r_i(t) = r_i(t, x)$ локально не зависят от x . Подставляя оценку (17), или (18), или (19) в (7), получаем требуемую оценку функции через интегралы, содержащие ее производные.

Перейдем к приложению полученных интегральных оценок к теоремам вложения. Доказательства, в которых лишь значения некоторых параметров отличаются от приведенных в [6], будут при этом опущены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [6]). Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $\delta \in (0, \frac{1}{3})$, $R_0 > 0$, $C_0 \geq 1$ и каждой точке $x \in G$ поставлен в соответствие кусочно гладкий путь $\gamma = \gamma_x: [0, t_x] \rightarrow G$ и непрерывная кусочно гладкая функция $r_\gamma: [0, t_x] \rightarrow (0, \infty)$ со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \gamma(0) = x, \quad \gamma \subset B(x, R_0), \quad \rho(\gamma(t_x)) \geq \delta, \quad |\gamma'| \leq 1 \text{ п.в.}, \\ 0 < r_\gamma(t) < \delta \rho_1(\gamma(t)), \quad r_\gamma(t_x) \geq \delta^2, \\ |r'_\gamma(t)| = \left| \frac{\partial}{\partial t} r_\gamma(t) \right| \leq C_0 \text{ для п.в. } t \in (0, t_x], \end{aligned}$$

$$\delta r_\gamma(t') \leq r_\gamma(t'') \text{ при } B(\gamma(t'), \delta r_\gamma(t')) \cap B(\gamma(t''), \delta r_\gamma(t'')) \neq \emptyset, \quad t', t'' \in (0, t_x].$$

Тогда будем писать $(G, \gamma, r) \in \mathcal{G}(\delta, R_0, C_0)$.

Отметим, что в качестве $r_\gamma(t)$ можно взять, например, функцию, эквивалентную $\rho_1(\gamma(t))$ (см. [6]). Область с условием гибкого σ -конуса удовлетворяет, очевидно, определению 2.

Считая, что $(G, \gamma, r_\gamma) \in \mathcal{G}(\delta, R_0, C_0)$, приведем некоторую поточечную оценку функции f , исходя из оценок (7), (19) при

$$\begin{aligned} \Gamma(t, x) &= \begin{cases} x & \text{при } 0 < t < r_\gamma(0), \\ \gamma_x(t - r_\gamma(0)) & \text{при } r_\gamma(0) < t < t_x + r_\gamma(0), \end{cases} \\ r(t) &= \begin{cases} t & \text{при } 0 < t < r_\gamma(0), \\ r_\gamma(t - r_\gamma(0)) & \text{при } r_\gamma(0) \leq t \leq t_x + r_\gamma(0). \end{cases} \end{aligned}$$

Имеем

$$|D^\beta f(x)| \leq CA_1 g(x) + CA_2 g(x) + CA_3 f(x),$$

где $g(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=\alpha^j, |\alpha|=s} |D^\alpha f(x)|$,

$$\begin{aligned} A_1 g(x) &= \int_0^{3r_\gamma(0)} t^{s-1-|\beta|-n} \int_{|y-x|<t} g(y) dy dt, \\ A_2 g(x) &= \int_{r_\gamma(0)<t<t_x} t^{(s-1)m-|\beta|r_\gamma(t)-(s-1)(m-1)-n} \int_{|y-\gamma(t)|<r_\gamma(t)} g(y) dy dt, \\ A_3 f(x) &= \int_{|y-\gamma(t_x)|<r_\gamma(t_x)} |f(y)| dy. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1 сводится к доказательству ограниченности операторов A_1 , A_2 , A_3 при определенных соотношениях, связывающих геометрические свойства области G и весовые функции. Операторы A_3 и A_1 совпадают с одноименными операторами в [6]. Оператор A_2 совпадает при $m = 1$ с одноименным оператором в [6]. Мы воспользуемся установленной в [6] ограниченностью оператора A_3 и методами и результатами из [6] оценки операторов A_1 , A_2 .

Будем считать выполненным следующее простое условие, связывающее веса w и u :

$$\sup_{z \in \mathbb{Z}^n} \left(\int_{G_\delta \cap Q(z, 1/2 + R_0 + \delta)} u(x)^{-r'/r} dx \right)^{1/r} \left(\int_{G \cap Q(z, 1/2)} w(x) dx \right)^{1/q} < \infty, \quad (20)$$

где $Q(z, R) = z + [-R, R]^n$.

ЛЕММА 1 (см. [6]). Пусть выполнено условие (20) и $1 \leq r \leq q < \infty$. Тогда оператор $A_3: L_{r,u}(G_\delta) \rightarrow L_{q,w}(G)$ ограничен.

Введем функцию

$$\begin{aligned} V_{p,R}(x, t) &= r_\gamma(t)^{-n/p'} \|v^{-1/p} |L_{p'}(B(\gamma(t), r_\gamma(t)) \setminus B(x, R))\| \\ &= r_\gamma(t)^{-n/p'} (|B(\gamma(t), r_\gamma(t)) \setminus B(x, R)|_{v^{-p'/p}})^{1/p'} \\ &= C_1 \left(\frac{|B(\gamma(t), r_\gamma(t)) \setminus B(x, R)|_{v^{-p'/p}}}{|B(\gamma(t), r_\gamma(t))|_1} \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

Если вес v обладает следующим свойством: при некоторых $c_1, c_2, \delta > 0$

$$c_1 v(x) \leq v(y) \leq c_2 v(x) \quad \text{при } x \in G, |y - x| \leq \delta \rho_1(x), \quad (21)$$

то

$$V_{p,R}(x, t) \leq cv(\gamma(t))^{-1/p}.$$

Заметим, что без ограничения общности мы считаем пути γ , которыми наделена область G , “правильными”. Это означает, что выполняется следующее условие: при некотором $\epsilon_0 \in (0, 1]$

$$\sup_{\gamma} \sup_{y \in G} \int_0^{t_x} \frac{1}{r_\gamma(t)} \chi\left(\frac{y - \gamma(t)}{\epsilon_0 r_\gamma(t)}\right) dt < \infty$$

(см. [7], [6]).

При выполнении неравенства

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x \in G : |Ag| > \lambda\}|_w^{1/q} \leq \|g\|_{L_{p,v}(G)}$$

с некоторым $C > 0$ для всех функций $g \in L_{p,v}(G)$ оператор A будем называть *слабо* $(L_{p,v}(G), L_{q,w}(G))$ -ограниченным, а само неравенство – *слабой* $(L_{p,v}(G), L_{q,w}(G))$ -оценкой. Если оператор $A: L_{p,v}(G) \rightarrow L_{q,w}(G)$ ограничен, то он и слабо $(L_{p,v}(G), L_{q,w}(G))$ -ограничен.

Введем при $a \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ следующие обозначения: $a_-^{(\epsilon)} = a_-$, $a_+^{(\epsilon)} = a_+$ при $a \neq 0$; $0_-^{(\epsilon)} = -\epsilon$, $0_+^{(\epsilon)} = \epsilon$.

Запишем операторы A_i в виде

$$A_i f(x) = \int_G k_i(x, y) f(y) dy, \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

Воспользуемся результатами работ [13]–[15], содержащих весовые оценки слабого и сильного типов для операторов вида

$$Kf(x) = \int_G k(x, y) f(y) dy, \quad x \in G, \quad (23)$$

где $k: G \times G \rightarrow \mathbb{R}^1$ – измеримая неотрицательная функция. Положим

$$k(x, y, R) = \left[1 - \chi\left(\frac{x-y}{R}\right) \right] k(x, y).$$

При $1 \leq p < q < \infty$ и весовых функциях v, w рассмотрим следующую характеристику ядра k (см. [13]–[15]):

$$\|kv^{-1/p}\|_{p,q,w} = \sup_{x \in G} \sup_{R > 0} \|k(x, \cdot, R) v(\cdot)^{-1/p}\|_{L_{p'}(G)} |G \cap B(x, R)|_w^{1/q}. \quad (24)$$

ТЕОРЕМА А (см. [15]). Пусть $1 \leq p < q < \infty$, $v, w: G \rightarrow (0, \infty)$ – весовые функции, K – оператор из (23) с ядром k . Тогда

$$|Kf(x)| \leq 8 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)^{-p/q} \|kv^{-1/p}\|_{p,q,w} \|fv^{1/p}\|_{L_p(G)}^{1-p/q} M_w(|f|^p v)(x)^{1/q},$$

где

$$M_w f(x) = \sup_{R > 0} |G \cap B(x, R)|_w^{-1} \int_{G \cap B(x, R)} |f(y)| dy.$$

СЛЕДСТВИЕ 1 (см. [13]–[15]). В условиях теоремы А

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda^q |\{x \in G : |Kf(x)| > \lambda\}|_w \leq 8^q \theta_n^q \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)^{-p} \|kv^{-1/p}\|_{p,q,w}^q \|fv^{1/p}\|_{L_p(G)}^q, \quad (25)$$

где θ_n – некоторая постоянная, зависящая лишь от размерности n .

Теорема A установлена в [15] на основании рассуждений из [13], [14], приводящих к утверждению следствия для $G = \mathbb{R}^n$.

Установим оценки для ядер k_i из (22) операторов A_i .

В [6] показано, что при произвольном $\varepsilon \in (0, n/p' + n/q]$ верна оценка

$$\begin{aligned} & \|k_1(x, \cdot, R)v(\cdot)^{-1/p}|L_{p'}(G)\| \\ & \leq C_{s,\varepsilon} r_\gamma(0)^{(s-n)_+^{(\varepsilon)}} \left(\int_{B(x, r_\gamma(0)) \setminus B(x, R)} |y-x|^{(s-n)_-^{(\varepsilon)} p'} v(y)^{-p'/p} dy \right)^{1/p'}. \end{aligned} \quad (26)$$

Оценка (26) упрощается в случае, когда вес v удовлетворяет условию (21).

При выполнении (21) из (26) следует, что

$$\begin{aligned} & \|k_1(x, \cdot, R)v(\cdot)^{-1/p}|L_{p'}(G)\| \\ & \leq C_{s,\varepsilon} v(x)^{-1/p} r_\gamma(0)^{(s-n)_+^{(\varepsilon)}} \left(\int_{R < |z| \leq r_\gamma(0)} |z|^{(s-n)_-^{(\varepsilon)} p'} dz \right)^{1/p'}, \end{aligned}$$

откуда при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \|k_1(x, \cdot, R)v(\cdot)^{-1/p}|L_{p'}(G)\| \\ & \leq C_{s,\varepsilon} \chi \left(\frac{R}{r_\gamma(0)} \right) v(x)^{-1/p} \left(\frac{r_\gamma(0)}{R} \right)^{(s-n/p)_+^{(\varepsilon)}} R^{s-n/p}. \end{aligned} \quad (27)$$

Для ядра k_2 при $1 \leq p < \infty$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|k_2(x, \cdot, R)v(\cdot)^{-1/p}|L_{p'}(G)\| \\ & \leq C_0^{1/p} \|(\cdot + r_\gamma(0))^{s-1} r_\gamma(\cdot)^{(1-n)/p} V_{p,R}(x, \cdot) |L_{p'}((0, t_x])\|, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} V_{p,R}(x, t) &= r_\gamma(t)^{-n/p'} \|v^{-1/p}|L_{p'}(B(\gamma(t), r_\gamma(t)) \setminus B(x, R))\| \\ &= r_\gamma(t)^{-n/p'} (|B(\gamma(t), r_\gamma(t)) \setminus B(x, R)|_{v^{-p'/p}})^{1/p'} \\ &= C_1 \left(\frac{|B(\gamma(t), r_\gamma(t)) \setminus B(x, R)|_{v^{-p'/p}}}{|B(\gamma(t), r_\gamma(t))|_1} \right)^{1/p'}. \end{aligned} \quad (28)$$

Правая часть (28) при $p' = \infty$ понимается как предел при $p' \rightarrow \infty$.

При выполнении условия (21) из (28) имеем

$$\begin{aligned} & \|k_2(x, \cdot, R)v(\cdot)^{-1/p}|L_{p'}(G)\| \\ & \leq C_1 \left\| \chi \left(\frac{R}{|\gamma(\cdot) - \gamma(0)| + r_\gamma(\cdot)} \right) \right. \\ & \quad \times (\cdot + r_\gamma(0))^{s-1} r_\gamma(\cdot)^{(1-n)/p} v(\gamma(\cdot))^{-1/p} |L_{p'}((0, t_x])\|. \end{aligned} \quad (29)$$

ЛЕММА 2. Пусть $(G, \gamma, r) \in \mathcal{G}(\delta, R_0, C_0)$ и

$$1 \leq p < q < \infty, \quad s \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq m \leq n.$$

Тогда

1) если $s - |\beta| - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0$ и при некотором $\epsilon > 0$ выполнено условие

$$\sup_{x \in G} \sup_{R > 0} \rho_1(x)^{(s-|\beta|-n)_+^{(\epsilon)}} \left(\int_{B(x, \delta \rho_1(x)) \setminus B(x, R)} |y - x|^{(s-|\beta|-n)_-^{(\epsilon)} p'} v(y)^{-p'/p} dy \right)^{1/p'} \\ \times |B(x, R)|_w^{1/q} < \infty,$$

то для оператора A_1 справедлива слабая $(L_{p,v}(G), L_{q,w}(G))$ -оценка;

2) если

$$\sup_{x \in G} \sup_{R > 0} \left[\int_{r_\gamma(0) < t < t_x} t^{(s-1)mp' - |\beta|p'} r_\gamma(t)^{[-(s-1)(m-1) + (1-n)/p]p'} \right. \\ \left. \times V_{p,R}(\gamma, r_\gamma(t), t)^{p'} dt \right]^{1/p'} |B(x, R)|_w^{1/q} < \infty$$

или при выполнении условия (21) выполнено условие

$$\sup_{x \in G} \sup_{R > 0} \left\{ \int_0^{t_x} \chi \left(\frac{R}{|\gamma(t) - \gamma(0)| + r_\gamma(t)} \right) (t + r_\gamma(0))^{(s-1)mp' - |\beta|p'} \right. \\ \left. \times r_\gamma(t)^{[-(s-1)(m-1) + (1-n)/p]p'} v(\gamma(t))^{-p'/p} dt \right\}^{1/p'} |B(x, R)|_w^{1/q} < \infty,$$

то для оператора A_2 справедлива слабая $(L_{p,v}(G), L_{q,w}(G))$ -оценка.

Доказательство этой леммы проводится как и в [6]: слабые оценки устанавливаются с помощью теоремы A.

ТЕОРЕМА 2. Пусть при $1 \leq p \leq \tilde{q} < q$ выполнены условия леммы 2 (включая условия утверждений 1) и 2)) и

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |G \cap B(x, 1)|_w < \infty. \quad (30)$$

Тогда существует постоянная $C > 0$, при которой имеет место неравенство

$$\|D^\beta f|_{L_{\tilde{q},w}(G)}\| \leq C \left[\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=\alpha^j, |\alpha|=s} \|D^\alpha f|_{L_{p,v}(G)}\| + \|f|_{L_{r,u}(G_\delta)}\| \right].$$

Доказательство этой теоремы проводится так же, как и в [6].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $s = 1$, $\beta = 0$ теорема 2 верна при $\tilde{q} = q$ и без требования (30) (см. [6]).

Следствием леммы 2 является

ЛЕММА 3. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – область с условием гибкого σ -конуса, $\sigma \geq 1$,

$$s, m \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq p < q < \infty, \quad 1 \leq m \leq n, \\ v(x) = \rho_1(x)^a, \quad w(x) = \rho_1(x)^b, \quad b \geq 0.$$

Тогда

1) если

$$s - |\beta| - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0, \quad s - |\beta| - \frac{n+a}{p} + \frac{n+b}{q} \geq 0, \quad (31)$$

то оператор A_1 слабо $(L_{p,v}(G), L_{q,w}(G))$ -ограничен;

2) если выполнены условия (4), (5), то оператор A_2 слабо $(L_{p,v}(G), L_{q,w}(G))$ -ограничен.

ЛЕММА 4. Пусть выполнены условия леммы 3 и $p > 1$. Тогда операторы $A_1, A_2: L_{p,v}G \rightarrow L_{q,w}(G)$ ограничены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если хотя бы одно из неравенств (31) строгое, то ограниченность A_1 вытекает из слабой оценки леммы 3 с помощью интерполяционной теоремы Марцинкевича (см., например, [16]). Если же каждое из неравенств (31) является равенством, то $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$. Заметим, что $A_1(v^{1/p}g)(x)$ остается эквивалентным, если под знаком интеграла $v(y)$ заменить на $v(x)$. Отсюда следует, что достаточно рассмотреть лишь случай $a = b = 0$, в котором ограниченность A_1 устанавливается с помощью интерполяционной теоремы Марцинкевича или неравенства Харди–Литтлвуда.

2) Заметим, что хотя бы одно из неравенств (4), (5) является строгим. В самом деле, если предположить, что неравенство (4) обращается в равенство, то, подставляя a , выраженное из (4), в левую часть (5), получим

$$\begin{aligned} s - |\beta| - (s-1)(m-1)(\sigma-1) - \frac{\sigma(n-1)+1}{p} + \frac{\sigma(n-1)}{p} \\ + \sigma(s-1)(m-1) + \frac{n+b}{q} \\ = s - |\beta| + (s-1)(m-1) - \frac{1}{p} + \frac{n+b}{q} \geq s - |\beta| - \frac{1}{p} + \frac{n}{q}. \end{aligned}$$

Но эта величина положительна в силу условий теоремы 1.

Если неравенство (4) строгое, то ограниченность оператора A_2 следует из леммы 3 с помощью интерполяционной теоремы Марцинкевича. Если неравенство (4) является равенством, то ограниченность оператора A_2 установлена при доказательстве теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из первого из условий (31) и условия (5) следует, что выполняется и второе из условий (31). Теперь утверждение теоремы следует из лемм 4 и 1.

Заметим, что утверждение теоремы 1 сохранится, если в правой его части $\|f|L_r(G_\delta)\|$ заменить на $\|f|L_{r,u}(G_\delta)\|$ при выполнении условия (20) с $w(x) = \rho_1(x)^b$.

Покажем теперь, что условие (5) в случае $a = b = 0$, $m = n$ является необходимым условием справедливости оценки (6). Для случая $a = b = 0$, $m = 1$, $\beta = 0$ это сделано Лабутиним в [8]. Как и в [8], рассмотрим специальную область G с условием гибкого σ -конуса (“трибную поляну”): $G = \bigcup_{j=0}^{\infty} G^j$. Здесь $G^0 = (-1, 1)^{n-1} \times (-1, 0) = \{x : -1 < x_i < 1 \text{ при } i = 1, \dots, n-1; -1 < x_n < 0\}$.

Задав последовательности $\{r_j\}$, $\{\tau_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $0 < r_j < 1$, $0 < \tau_j < 1$, $r_j \downarrow 0$, $\tau_j \downarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, в качестве G^j при $j \in G$ возьмем область

$$G^j = \tau_j e_1 + ((-r_j, r_j)^{(n-1)} \times (r_j, 2r_j)) \cup (-r_j^\sigma, r_j^\sigma) \times (-1, 2r_j).$$

Специализируем последовательности $\{r_j\}$, $\{\tau_j\}$ таким образом, чтобы $\overline{G^j} \cap \overline{G^{j+1}} = \emptyset$ при $j \in \mathbb{N}$. На построенной области рассмотрим следующую последовательность функций f_j , $j \in \mathbb{N}$:

$$f_j = 0 \text{ на } G^0 \text{ и на } G \setminus G^j, \\ f_j(x) = (x_1 - \tau_j)^{s-1} \prod_{i=2}^{n-1} x_i^{s-1} \eta\left(\frac{x_n}{r_j}\right) \text{ при } x \in G^j,$$

где $\eta \in C_0^\infty$, $\eta(t) = 0$ при $t \leq 0$, $\eta(t) = 1$ при $t \geq 1$.

Легко убедиться в том, что при $j \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=1}^n \|D_i^s f_j\|_{L_p(G)} = \|D_n^s f_j\|_{L_p(G)} \sim r_j^{-s+\sigma(s-1)(n-1)+(\sigma(n-1)+1)/p}, \\ \|D^\beta f_j\|_{L_q(G)} \sim r_j^{(s-1)(n-1)-|\beta|+n/q}.$$

Устремляя $j \rightarrow \infty$, получаем, что (5) является необходимым условием вложения теоремы 1 при $a = b = 0$, $m = n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условие (5) является необходимым и в случае весовых пространств Соболева. Это показано на примере той же области G (“грибной поляны”) Б.В. Трушиным в [17] при $m = 1$, $a \geq 1 - n$ и недавно – студентом МФТИ А.Ю. Головки при $1 \leq m \leq n$, $a > -1$.

Список литературы

- [1] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988; англ. пер.: S. L. Sobolev, *Some applications of functional analysis in mathematical physics*, Transl. Math. Monogr., **90**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [2] В. Г. Мазья, *Пространства Соболева*, Изд-во ЛГУ, Л., 1985; англ. пер.: V. G. Maz'ya, *Sobolev spaces*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [3] Ю. Г. Решетняк, “Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей”, *Сиб. матем. журн.*, **21:6** (1980), 108–116; англ. пер.: Yu. G. Reshetnyak, “Integral representations of differentiable functions in domains with nonsmooth boundary”, *Siberian Math. J.*, **21:6** (1981), 833–839.
- [4] В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения*, Наука, М., 1983.
- [5] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975; англ. пер.: O. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikol'skii, *Integral representations of functions and imbedding theorems*. v. I, II, Winston, Washington, DC; Wiley, New York–Toronto, ON–London, 1979.

- [6] О. В. Бесов, “Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей”, *Матем. сб.*, **192**:3 (2001), 3–26; англ. пер.: O. V. Besov, “Sobolev’s embedding theorem for a domain with irregular boundary”, *Sb. Math.*, **192**:3 (2001), 323–346.
- [7] T. Kilpeläinen, J. Malý, “Sobolev inequalities on sets with irregular boundaries”, *Z. Anal. Anwendungen*, **19**:2 (2000), 369–380.
- [8] Д. А. Лабутин, “Неулучшаемость неравенств Соболева для класса нерегулярных областей”, *Функциональные пространства, гармонический анализ, дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **232**, Наука, М., 2001, 218–222; англ. пер.: D. A. Labutin, “Sharpness of Sobolev inequalities for a class of irregular domains”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **232**:1 (2001), 211–215.
- [9] Б. В. Трушин, “Теоремы вложения Соболева для некоторого класса анизотропных нерегулярных областей”, *Теория функций и нелинейные уравнения в частных производных*, Тр. МИАН, **260**, Наука, М., 2008, 297–319; англ. пер.: B. V. Trushin, “Sobolev embedding theorems for a class of anisotropic irregular domains”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **260**:1 (2008), 287–309.
- [10] О. В. Бесов, “Пространства функций дробной гладкости на нерегулярной области”, *Матем. заметки*, **74**:2 (2003), 163–183; англ. пер.: O. V. Besov, “Spaces of functions of fractional smoothness on an irregular domain”, *Math. Notes*, **74**:2 (2003), 157–176.
- [11] О. В. Бесов, “Пространства функций типа Лизоркина–Трибеля на нерегулярной области”, *Теория функций и нелинейные уравнения в частных производных*, Тр. МИАН, **260**, Наука, М., 2008, 32–43; англ. пер.: O. V. Besov, “Function spaces of Lizorkin–Triebel type on an irregular domain”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **260**:1 (2008), 25–36.
- [12] О. В. Бесов, “Пространства функций дробной гладкости на нерегулярной области”, *Теория функций и дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **269**, Наука, М., 2010, 31–51; англ. пер.: O. V. Besov, “Spaces of functions of fractional smoothness on an irregular domain”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **269**:1 (2010), 25–45.
- [13] В. М. Кокилашвили, М. А. Габидзашвили, “О весовых неравенствах для анизотропных потенциалов и целых функций”, *Докл. АН СССР*, **282**:6 (1985), 1304–1306; англ. пер.: V. M. Kokilashvili, M. A. Gabidzashvili, “On weighted inequalities for anisotropic potentials and maximal functions”, *Soviet Math. Dokl.*, **31**:3 (1985), 583–585.
- [14] М. А. Габидзашвили, “Весовые неравенства для анизотропных потенциалов”, *Тр. Тбилисского матем. института*, **82** (1986), 25–36.
- [15] О. В. Бесов, “Вложения пространств дифференцируемых функций переменной гладкости”, *Теория функций и дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **214**, Наука, М., 1997, 25–58; англ. пер.: O. V. Besov, “Embeddings of spaces of differentiable functions of variable smoothness”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **214**:3 (1996), 19–53.
- [16] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
- [17] Б. В. Трушин, “О неулучшаемости весовых теорем вложения Соболева для анизотропно нерегулярных областей”, *Современные проблемы фундаментальной и прикладной математики*, Сб. научн. трудов, Изд-во МФТИ, М., 2009, 166–190.

О. В. Бесов (O. V. Besov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: besov@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

25.11.2009 и 22.04.2010