Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Мерков, Инварианты Васильева классифицируют плоские кривые и наборы кривых без тройных пересечений, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 9, 31–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm766>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 18:07:33

УДК 515.1

А. Б. Мерков

Инварианты Васильева классифицируют плоские кривые и наборы кривых без тройных пересечений

Набор ориентированных замкнутых кривых на плоскости или любой другой двумерной поверхности, никакие три из которых не пересекаются в одной точке, называется орнаментом. Аналогично, набор ориентированных замкнутых кривых, не имеющих никаких тройных точек или их вырождений, называется каракулем (doodle). Гомотопические инварианты орнаментов и каракулей являются естественными аналогами соответственно гомотопических и изотопических инвариантов зацеплений. К каракулям применимы теория Васильева инвариантов конечного порядка, построенная для орнаментов, а также конструкции конкретных семейств таких инвариантов. Доказывается, что эти инварианты конечного порядка классифицируют каракули. Аналогичные инварианты для связных ориентированных замкнутых иммерсированных плоских кривых классифицируют их с точностью до изотопии объемлющей плоскости.

Библиография: 15 названий.

§ 1. Введение

Орнаменты были определены В. А. Васильевым в [1], [2]. *Орнаментом* называется конечный набор замкнутых кривых на плоскости или другой поверхности, никакие три из которых не проходят через одну и ту же точку. Гомотопическая классификация орнаментов аналогична гомотопической классификации зацеплений. Общий способ вычисления когомологий пространства орнаментов описан в работе [2]. Вычисления очень сложны даже для 0-когомологий, т.е. для группы инвариантов. Явных конструкций инвариантов было известно еще меньше, чем вычислено образующих группы когомологий.

Каракули были определены Р. Фенном и П. Тейлором [3] как конечные наборы замкнутых кривых на двумерной сфере, плоскости или другом многообразии, не имеющих самопересечений и тройных пересечений. Позже М. Хованов [4] определил каракули как конечные наборы замкнутых кривых, не имеющих тройных пересечений или самопересечений (но с разрешенными (само-)пересечениями общего положения). В этой работе используется второе определение.

Работой [5] В. И. Арнольд открыл большую серию работ по изотопической классификации гладких замкнутых плоских кривых общего положения, являющейся

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00660), фонда INTAS (грант № 00-0259) и NWO-РФФИ (грант № 047-008-005).

аналогом изотопической классификации узлов. Плоская кривая общего положения может иметь конечное число трансверсальных самопересечений, а другие особенности запрещены. Эта теория развивалась иначе, чем классификация орнаментов: общие гомологические вычисления не проводились, зато были детально изучены (и обобщены на случай лежандровых фронтов) многие конкретные инварианты.

Ниже все орнаменты, каракули и кривые предполагаются ориентированными.

Вопрос, классифицируют ли инварианты Васильева объекты какого-либо типа, интересен для разных геометрических объектов. Положительный ответ на него был получен Д. Бар-Натаном [6] для кос и струнных зацеплений и А.Б. Мерковым [7] для их плоских аналогов. Отрицательный ответ был получен Б. Меллоном [8] для гомотопической классификации зацеплений. Во многих других случаях, например, для узлов и орнаментов, вопрос остается открытым.

В этой работе семейство инвариантов Васильева для орнаментов, построенное в работе [7] и обобщающее диаграммные инварианты Виро–Поляка (см. [9], [10]), модифицировано для каракулей. Исходного семейства инвариантов недостаточно для классификации орнаментов, но модифицированное классифицирует каракули и, после небольшого изменения, плоские кривые.

В §2 кратко упоминается общая теория орнаментов и каракулей. В §3 описано семейство инвариантов Васильева для каракулей. В §4 доказано, что эти инварианты различают любые неэквивалентные каракули. В §5 то же самое продвигается для классификации кривых.

§ 2. Инварианты Васильева для орнаментов и каракулей

Понятия “инвариант конечного порядка”, “инвариант конечного типа” и “инвариант Васильева” тождественны. Первое название было введено В.А. Васильевым, но большинством авторов используются остальные два.

2.1. Гомологическая теория. Далее следует неформальный обзор теории инвариантов Васильева для орнаментов и каракулей. Подробнее теория орнаментов изложена в [2] и [11], а общая теория инвариантов Васильева – в [12] или [13]. Ниже пересказываются основные конструкции теории орнаментов и подчеркиваются специфические для каракулей детали там, где они отличаются от соответствующих деталей теории орнаментов.

Все инварианты орнаментов, каракулей и т.п. по двойственности Александра выражаются через замкнутые гомологии *дискриминанта*, т.е. замыкания множества наборов кривых с запрещенными тройными точками. *Инварианты конечного порядка* – это те из них, которые можно выразить в терминах конечного числа стратов естественной стратификации дискриминанта, индуцированной классификацией особых точек. Поскольку дискриминант является пространством с особенностями, удобнее изучать его *разрешение*, являющееся топологическим пространством, гомотопически (следовательно, и гомологически) эквивалентным дискриминанту. Хотя эти пространства и бесконечномерны, разработанная в [2] техника конечномерных аппроксимаций позволяет работать с ними как с пространствами некоторой большой, но конечной размерности. Имеется естественная фильтрация пространства разрешения, для которой выписываются гомологическая спектраль-

ная последовательность и двойственная ей когомологическая спектральная последовательность $E_r^{p,q}$, $r \geq 1$, $p \leq 0$, $p + q \geq 0$. Существует алгоритм, вычисляющий эту спектральную последовательность. Для любого n группа $\bigoplus_{p=0}^n E_{\infty}^{-p,p}$ является градуированной группой, присоединенной к группе *инвариантов порядка n* . Интересен вопрос, сходится ли эта спектральная последовательность к когомологиям пространства орнаментов. В теории узлов этот вопрос открыт. Для струнных зацеплений Д. Бар-Натан в работе [6] дал положительный ответ.

Другой проблемой является явное описание всех инвариантов конечного порядка. Пока даже группы $E_1^{-p,p}$ не посчитаны в общем случае. Не доказана и гипотеза, что $E_1^{-p,p} = E_{\infty}^{-p,p}$ (аналогичный факт для узлов доказан М. Концевичем в работе [14]).

2.2. Элементарная теория. Гомологическое определение порядка инварианта неудобно для вычисления порядка явно построенного инварианта. К счастью, в работе [2] показано, что его можно переформулировать в элементарных терминах. Для этого потребуются следующие определения и обозначения.

2.2.1. *Орнаменты, каракули, квазиорнаменты и квазикаракули.* Через C_k обозначим дизъюнктивное объединение $c_1 \sqcup \dots \sqcup c_k$ k окружностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [2]. О) *Орнамент* (или *k -орнамент*) – это C^{∞} -гладкое отображение $C_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что никакая точка $\mathbb{R}^2$ не имеет в своем прообразе три точки с разных окружностей. Два орнамента *эквивалентны*, если соответствующие отображения $C_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ можно соединить гомотопией $C_k \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ такой, что для любого $t \in [0, 1]$ соответствующее отображение $C_k \times t$ – орнамент. Орнамент *тривиален*, если он эквивалентен вложению C_k в $\mathbb{R}^2$.

Д) *Каракуль* (или *k -каракуль*) – это C^{∞} -гладкое отображение $C_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что никакая точка $\mathbb{R}^2$ не имеет

- 1) ни трех прообразов;
- 2) ни двух прообразов с нулевой первой производной в одном из них;
- 3) ни прообраза с нулевыми первыми двумя производными.

Два каракуля *эквивалентны*, если соответствующие отображения $C_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ можно соединить гомотопией $C_k \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ такой, что для любого $t \in [0, 1]$ соответствующее отображение $C_k \times t$ – каракуль. Каракуль *тривиален*, если он эквивалентен вложению C_k в $\mathbb{R}^2$.

Разница между каракулями и орнаментами заключается в том, что для каракулей точки тройного пересечения менее чем трех компонент и вырождения таких пересечений запрещены, а для орнаментов – разрешены.

Орнаменты и каракули образуют два разных плотных открытых подмножества одного и того же пространства C^{∞} -гладких отображений $C_k \rightarrow \mathbb{R}^2$. Точки этого пространства будем называть *квазиорнаментами* или *квазикаракулями*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [2]. *Орнамент* или *каракуль регулярен*, если он является иммерсией C_k и все кратные точки образа C_k в $\mathbb{R}^2$ являются двойными точками трансверсального пересечения. *Квазикаракуль регулярен*, если он является иммерсией C_k и в каждой кратной точке образа локальные компоненты прообраза

Рис. 1. Допустимые локальные перестройки орнаментов. Верхний индекс показывает количество участвующих компонент, нижний индекс показывает число участвующих точек пересечения или его скачок. Перестройки $O_{\pm*}^*$ для каракулей разрешены, но перестройки O_3^* – запрещены

Рис. 2. Запрещенные локальные перестройки орнаментов и каракулей

попарно трансверсальны. *Регулярный квазиорнамент* – это такой регулярный квазикаракуль, что прообраз каждой кратной точки либо состоит из двух точек, либо содержит точки с не менее чем трех окружностей c_l ¹.

Регулярные орнаменты (каракули) образуют плотное открытое множество в пространстве квазиорнаментов (квазикаракулей). На пути общего положения в пространстве орнаментов (каракулей) почти все орнаменты (каракули) регулярны. В конечном числе особых моментов происходит одна из локальных перестроек, показанных на рис. 1. Остальные перестройки общего положения, а именно, изображенные на рис. 2, запрещены. Ниже рассматриваются только регулярные (квази-)орнаменты (каракули).

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогично можно определить орнаменты, каракули и т.п. на любом двумерном многообразии, например, на сфере $\mathbb{S}^2$, вместо плоскости $\mathbb{R}^2$. Хотя гомологическая теория проще всего для плоскости, некоторые элементарные теоремы более естественны для орнаментов и каракулей на сфере.

2.2.2. Примеры инвариантов орнаментов и каракулей. Зафиксируем ориентацию плоскости $\mathbb{R}^2$. Напомним, что *индексом точки* $x \in \mathbb{R}^2$ относительно замкнутой ориентированной кривой $c: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, не содержащей x , называется число вращения вектора $c(t) - x$, где t пробегает окружность $\mathbb{S}^1$. Через $\text{ind}_l(x) = \text{ind}_{\varphi(c_l)}(x)$ обозначим индекс точки x относительно l -й компоненты c_l регулярного

¹Последнее условие не было сформулировано в [2] явно.

k -квазиорнамента φ , если $x \notin \varphi(c_l)$, и среднее арифметическое значений индекса по связным компонентам пересечения $\mathbb{R}^2 \setminus \varphi(c_l)$ с малой окрестностью x , если $x \in \varphi(c_l)^2$. Очевидно, что индекс $\text{ind}_l(x)$ полуцелый, если x – регулярная точка $\varphi(c_l)$, и целый, если x – точка самопересечения $\varphi(c_l)$. Через $\text{Ind}(x, \varphi)$ обозначим k -мерный вектор $(\text{ind}_1(x), \dots, \text{ind}_k(x))$.

Пусть x – точка трансверсального пересечения i -й компоненты c_i с j -й компонентой c_j , положим $\sigma_{ij}(x)$ равным 1, если ориентация касательного репера $(t_x(c_i), t_x(c_j))$ совпадает с ориентацией плоскости $\mathbb{R}^2$, и равным -1 , если не совпадает.

Каждому регулярному k -орнаменту φ и паре чисел i и j таких, что $1 \leq i < j \leq k$, сопоставим следующую целочисленнозначную функцию $I_{ij}(b_1, \dots, b_k)$ от полуцелых переменных:

$$I_{ij}(b_1, \dots, b_k)(\varphi) = \sum_{\substack{x \in \varphi(c_i) \cap \varphi(c_j) \\ \text{ind}_l(x) = b_l, 1 \leq l \leq k}} \sigma_{ij}(x).$$

ТЕОРЕМА 1 [2; теорема 3]. Для любых $1 \leq i < j \leq k$ и $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{Z}/2$ функция $I_{ij}(b_1, \dots, b_k)$ является инвариантом орнаментов.

На самом деле функция $I_{ij}(b_1, \dots, b_k)$ нетривиальна, только если b_i и b_j не целые, а все остальные b_l целые.

Для любых k целых неотрицательных показателей $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ можно определить следующую функцию $M_{ij}(\beta)$ на k -орнаментах:

$$\begin{aligned} M_{ij}(\beta) &= \sum_{b_1, \dots, b_k \in \mathbb{Z}/2} b_1^{\beta_1} \dots b_k^{\beta_k} I_{ij}(b_1, \dots, b_k) \\ &= \sum_{x \in \varphi(c_i) \cap \varphi(c_j)} \sigma_{ij}(x) \text{ind}_1(x)^{\beta_1} \dots \text{ind}_k(x)^{\beta_k} \\ &= \sum_{x \in \varphi(c_i) \cap \varphi(c_j)} \sigma_{ij}(x) \text{Ind}(x)^\beta, \end{aligned}$$

где $1 \leq i < j \leq k$. Очевидно, что функции $M_{ij}(\beta)$ являются инвариантами. Эти инварианты типа моментов индекса являются простейшими инвариантами конечного порядка (см. теорему 2 ниже).

Простейший из этих простейших инвариантов – индекс Кронекера ориентированных гиперповерхностей, совпадающий с $M_{12}(0, 0, 1)$ для трех кривых на плоскости (описан, например, в [3]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Каждый инвариант орнаментов очевидным образом является и инвариантом каракулей.

2.2.3. Особые точки и способы вырождения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [2]. О) Точка $x \in \mathbb{R}^2$ является *особой точкой сложности* j регулярного квазиорнамента $\varphi: C_k \rightarrow \mathbb{R}^2$, если $\varphi^{-1}(x)$ состоит из $j + 1$ точки, по

²В работе [2] В. А. Васильев определил индекс немного иначе, чтобы все построенные инварианты были целочисленными функциями целочисленных переменных.

крайней мере три из которых принадлежат разным компонентам C_k . *Сложностью* $\text{compl}(\varphi)$ регулярного квазиорнамента φ называется сумма сложностей всех его особых точек.

Д) Точка $x \in \mathbb{R}^2$ является *особой точкой сложности* j регулярного квазикаракуля $\varphi: C_k \rightarrow \mathbb{R}^2$, если $\varphi^{-1}(x)$ состоит из $j + 1$ точки. *Сложностью* $\text{compl}(\varphi)$ регулярного квазикаракуля φ называется сумма сложностей всех его особых точек.

Разница между определениями сложности регулярных квазиорнаментов и квазикаракулей состоит в отсутствии условия “*по крайней мере три из которых принадлежат разным компонентам C_k* ” для квазикаракулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [2]. О) Пусть φ – регулярный квазиорнамент с m особыми точками $x^1, \dots, x^m$. *Способ вырождения* φ – это порядок пометки всех точек их прообразов, удовлетворяющий следующим условиям. На каждом шагу помечаются либо какие-то три точки $\varphi^{-1}(x^l)$, принадлежащие трем разным компонентам C_k (если ни одна точка $\varphi^{-1}(x^l)$ еще не помечена), либо одна точка $\varphi^{-1}(x^l)$ (если не менее трех точек $\varphi^{-1}(x^l)$ уже помечены).

Д) Пусть φ – регулярный квазиорнамент с m особыми точками $x^1, \dots, x^m$. *Способ вырождения* φ – это порядок пометки всех точек их прообразов, удовлетворяющий следующим условиям. На каждом шагу помечаются либо какие-то три точки $\varphi^{-1}(x^l)$ (если ни одна точка $\varphi^{-1}(x^l)$ еще не помечена), либо одна точка $\varphi^{-1}(x^l)$ (если не менее трех точек $\varphi^{-1}(x^l)$ уже помечены).

Снова разница в определении способов вырождения регулярных квазиорнаментов и квазикаракулей состоит в отсутствии условия “*принадлежащие трем разным компонентам C_k* ” для квазикаракулей.

2.2.4. *Характеристические числа.* *Характеристические числа*, сопоставляемые инвариантами регулярным квазиорнаментам (квазикаракулям) и способам их вырождения, определяются индукцией по их сложности.

Характеристическое число, сопоставляемое орнаменту (единственный способ вырождения которого пуст), – это значение инварианта на орнаменте. Последний шаг способа вырождения k -квазиорнамента может быть либо пометкой тройки точек на разных компонентах c_i, c_j и c_l , $i < j < l$, либо пометкой одной точки на c_l . Рассмотрим локальное трансверсальное возмущение l -й компоненты k -квазиорнамента φ в малой окрестности одной из помеченных точек, т.е. сдвиг небольшого кусочка образа $\varphi(c_l)$ возле точки пересечения x , трансверсально касательной к $\varphi(c_l)$ в x . Возмущенные квазиорнаменты имеют меньшую сложность, чем исходный, и принадлежат двум разным классам эквивалентности. Один из классов можно назвать “положительным”, а другой – “отрицательным”. А именно, если x – точка тройного пересечения $\varphi(c_i), \varphi(c_j)$ и $\varphi(c_l)$, то “положительные” k -квазиорнаменты – это квазиорнаменты с большим значением $\sigma_{ij}(x) \text{ind}_l(x)$, а если x – точка более сложного пересечения, то “положительные” k -квазиорнаменты – это квазиорнаменты с большим значением $\text{ind}_l(x)$. Характеристическое число исходного k -квазиорнамента и способа его вырождения определяется как разность характеристических чисел “положительных” и “отрицательных” k -квазиорнаментов при способах вырождения, полученных из исходного способа удалением последнего шага.

Для квазикаракулей определение сохраняется, но с двумя дополнениями: нужно определить, какие из картинок, участвующих в перестройках O_3^1 и O_3^2 (рис. 1), считать положительными, а какие – отрицательными. Если x – точка самопересечения j -й компоненты и через нее проходит l -я компонента (перестройка O_3^2), то положительными считаются квазикаракули с большим значением $\text{ind}_l(x)$. Для перестроек O_3^1 проход вдоль компоненты в ее положительном направлении индуцирует циклический порядок ребер маленького “исчезающего” треугольника. Обход треугольника в этом порядке индуцирует направление каждого ребра, которое может совпадать или не совпадать с его естественным направлением (как части ориентированной кривой). *Положительными* называются квазикаракули с четным числом ребер, для которых эти два направления совпадают (см. [5]).

2.2.5. Инварианты конечного порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [2]. Инвариант орнаментов (каракулей) является *инвариантом порядка i* , если все характеристические числа, сопоставляемые им любому регулярному квазиорнаменту (квазикаракулю) сложности больше i , равны 0.

ТЕОРЕМА 2 [2; теорема 4]. *Функция $M_{i,j}(\beta)$ является инвариантом порядка $|\beta| + 1$, где $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_k$.*

§3. Новые инварианты Васильева для каракулей

Строящиеся ниже инварианты каракулей являются модификацией инвариантов орнаментов, построенных в [7]. Они “обобщают” как инварианты орнаментов из теоремы 2, так и инварианты узлов и кривых, построенные в работах [9], [10].

3.1. Стрелочные диаграммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Стрелочная диаграмма* или *ориентированная диаграмма Гаусса длины n* – это C_k (k окружностей) с n стрелками, соединяющими n пар различных точек C_k . Диаграмма является *невыврожденной*, если все $2n$ точек различны. Две диаграммы *изоморфны*, если одну можно перевести в другую диффеоморфизмом $C_k \rightarrow C_k$, сохраняющим каждую окружность C_k , ее ориентацию и направления стрелок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Стрелочная диаграмма $\text{ADiag}(\varphi)$ регулярного (квази-)каракуля $\varphi: C_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ – это диаграмма, в которой из $x_i \in C_k$ в $x_j \in C_k$ идет стрелка тогда и только тогда, когда $\varphi(x_i) = \varphi(x_j)$ и касательное отображение φ_* переводит пару положительных касательных векторов $(t(x_i), t(x_j))$ в положительный касательный репер.

Определение 7 применимо к (квази-)каракулям на любой ориентированной поверхности. Стрелочная диаграмма регулярного каракуля очевидным образом невырождена. Диаграмма регулярного квазикаракуля вырождена, но у любых двух ее стрелок совпадает не более чем один конец. Далее мы будем понимать под “стрелочной диаграммой” класс изоморфных диаграмм и опускать условие невырожденности при рассмотрении диаграмм каракулей. Это не приведет к недоразумениям. Диаграммы можно также рассматривать как одномерные клеточные комплексы с ориентированными одномерными клетками и k выделенными и пронумерованными непересекающимися ориентированными циклами.

Рис. 3. Нетривиальный 1-каракуль и его стрелочная диаграмма

ПРИМЕР. На рис. 3 изображен 1-каракуль и его стрелочная диаграмма.

Определим эквивалентность стрелочных диаграмм таким образом, чтобы гарантировать эквивалентность диаграмм эквивалентных каракулей. Такая эквивалентность определяется следующими *допустимыми перестройками*, изображенными на рис. 4 и соответствующими допустимым локальным перестройкам каракулей, изображенным на рис. 1.

- A_{-1}^1 : Удаление стрелки, начало и конец которой лежат на одной и той же окружности и являются соседями (т.е. не разделены концами других стрелок).
- A_{+1}^1 : Перестройка, обратная к A_{-1}^1 .
- A_{-2}^1 : Удаление пары стрелок, начала и концы которых лежат на одной и той же окружности и начало каждой соседствует с концом другой.
- A_{+2}^1 : Перестройка, обратная к A_{-2}^1 .
- A_{-2}^2 : Удаление пары стрелок, соединяющих две окружности, если начало каждой соседствует с концом другой.
- A_{+2}^2 : Перестройка, обратная к A_{-2}^2 .

Как и на рис. 1, верхний индекс перестройки обозначает число участвующих в ней окружностей, а нижний показывает изменение числа стрелок. Очевидно, что класс эквивалентности стрелочных диаграмм является инвариантом каракулей.

Рис. 4. Допустимые перестройки стрелочных диаграмм каракулей. Не изменяющиеся стрелки и окружности не показаны. Ориентации окружностей произвольны

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (Принцип максимума). *Для любой последовательности допустимых перестроек стрелочных диаграмм существует последовательность перестроек с теми же концами такая, что длина каждой промежуточной диаграммы не превосходит максимума длин конечных диаграмм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нежелательный локальный максимум длины может находиться между перестройками M и N типов A_{+*}^* и A_{-*}^* соответственно. Легко видеть, что если ни одна из стрелок, родившихся при перестройке M , не умирает при перестройке N , то M и N можно переставить; в противном случае M и N можно либо удалить из последовательности перестроек, либо заменить на одну перестройку. В любом случае количество пар “рождение раньше смерти” уменьшается. Если последовательность состояла из m перестроек, то за число таких шагов, меньшее или равное $(m/2)^2$, она преобразуется в последовательность из не более чем m перестроек без локальных максимумов длины внутри нее.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Среди стрелочных диаграмм, эквивалентных диаграмме какого-либо каракуля, существует единственная диаграмма минимальной длины. Последовательность перестроек, превращающая диаграмму каракуля в такую минимальную диаграмму, не содержит перестроек типов A_{+*}^* . Существует алгоритм, порождающий минимальную диаграмму, эквивалентную данной. В частности, существует алгоритм проверки эквивалентности двух диаграмм.*

Таким образом, легко проверить эквивалентность диаграмм каракулей (но не самих каракулей).

ПРИМЕР. Диаграмма на рис. 3 минимальна, а значит, каракуль нетривиален.

ЗАМЕЧАНИЕ. Каракуль на плоскости $\mathbb{R}^2$ нельзя восстановить по его стрелочной диаграмме, если на ней не отмечен внешний контур. Несвязный каракуль вообще говоря нельзя восстановить по его диаграмме даже на сфере $\mathbb{S}^2$ (см. рис. 5).

Рис. 5. Неэквивалентные 7-каракули с одинаковыми стрелочными диаграммами. Трехкомпонентный подкаракуль сдвинут как единое целое внутри четырехкомпонентного

3.2. Хордовые диаграммы. Диаграммы более популярной разновидности – *хордовые диаграммы* или *диаграммы Гаусса* вообще (см., например, [10]) и хордовые диаграммы регулярных (квази-)каракулей в частности – можно рассматривать как соответствующие стрелочные диаграммы, направление стрелок которых забыто. Подобно допустимым перестройкам $A_{\pm*}^*$ стрелочных диаграмм допустимые перестройки $C_{\pm*}^*$ хордовых диаграмм определены на рис. 6. Все результаты п. 3.1, а именно предложение 1, следствие 1, пример и замечание, справедливы и для хордовых диаграмм. Подробное доказательство предложения 1 для хордовых диаграмм орнаментов приведено в работе [7].

Рис. 6. Допустимые перестройки хордовых диаграмм каракулей. Не изменяющиеся хорды и окружности не показаны. Ориентации окружностей произвольны

Следует отметить, что эквивалентность хордовых диаграмм каракулей слабее, чем эквивалентность их стрелочных диаграмм, а минимальность – наоборот, сильнее, так что стрелочная диаграмма каракуля может быть минимальной, а его хордовая диаграмма – не минимальной (см. далее пример на рис. 7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Каракуль φ называется *C-минимальным*, если его хордовая диаграмма $\text{CDiag}(\varphi)$ минимальна. Стрелочная диаграмма X называется *C-минимальной*, если хордовая диаграмма $\text{CDiag}(X)$, полученная из нее забыванием направлений стрелок, минимальна.

3.3. Инварианты конечного порядка, порожденные стрелочными диаграммами. Поскольку общая конструкция инвариантов, которую мы собираемся дать в теореме 6, достаточно громоздка, в теоремах 3–5 будут постепенно описаны ее частные случаи.

Далее используются следующие обозначения. Стрелочная диаграмма X обозначается $\{x^1, \dots, x^n\}$, где $x^l = [x_{i^l}^l, x_{j^l}^l]$, $l = 1, \dots, n$, – все ее стрелки, $x_{i^l}^l \in c_{i^l}$ и $x_{j^l}^l \in c_{j^l}$ – начало и конец l -й стрелки, $1 \leq i^l, j^l \leq k$. Длина диаграммы X обозначается через $L(X) = n$.

Стрелочные диаграммы можно считать одномерными клеточными комплексами. Рассмотрим непрерывные отображения невырожденной диаграммы X в стрелочную диаграмму Y , ограничения которых на каждую окружность c_i являются отображениями на c_i , гомотопными тождественным и монотонными (возможно, не строго монотонными, если диаграмма Y вырождена), и ограничения на каждую стрелку X являются гомеоморфизмами на какую-то стрелку Y . Назовем класс таких отображений (с точностью до гомотопии) *представлением* стрелочной диаграммы X в стрелочной диаграмме Y .

Для представления $\mu: X \rightarrow Y$ положим $\sigma_\mu(x^l)$ равным 1, если направление стрелки $\mu(x^l)$, индуцированное направлением x^l , совпадает с ее направлением в Y ,

и равным -1 в противном случае. Через $\sigma(\mu)$ обозначим произведение

$$\sigma(\mu) = \prod_{l=1}^{L(X)} \sigma_{\mu}(x^l), \quad (1)$$

а через $\langle X, Y \rangle$ – сумму

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{\mu: X \rightarrow Y} \sigma(\mu) \quad (2)$$

по всем представлениям $\mu: X \rightarrow Y$.

Для регулярного каракуля φ определим $\langle X, \varphi \rangle$ как

$$\langle X, \varphi \rangle = \langle X, \text{ADiag } \varphi \rangle = \sum_{\mu: X \rightarrow \text{ADiag } \varphi} \prod_{l=1}^{L(X)} \sigma_{\mu}(x^l). \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Практически та же конструкция использована в работе [10] для инвариантов плоских кривых. Единственная разница состоит в том, что вместо стрелочной диаграммы X рассматривалась хордовая диаграмма с дополнительной неособой точкой (*базовой точкой*), отмеченной на каждой окружности. Представление должно переводить базовую точку в базовую, а направления хордам приписывались в соответствии с порядком появления их концов на окружности при обходе ее в положительном направлении, начиная с базовой точки. При таком подходе для некоторых, но не для всех, диаграмм X выражение, задаваемое формулой (3) или некоторая линейная комбинация таких выражений, не зависит от выбора базовой точки.

ТЕОРЕМА 3. *Если X – C -минимальная стрелочная диаграмма, то $\langle X, \cdot \rangle$ является инвариантом каракулей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно проверить, что допустимые локальные перестройки каракулей не меняют значение $\langle X, \cdot \rangle$. Для этого достаточно убедиться, что перестройки типов $A_{\pm}^*$ (три пары типов, порождающих эквивалентность диаграмм) не изменяют $\langle X, \cdot \rangle$. Это элементарно. Подробности см. в доказательстве теоремы 5.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку функция $\langle X, \varphi \rangle$ зависит только от $\text{ADiag}(\varphi)$, она не может различить каракули с одинаковыми стрелочными диаграммами, в частности, каракули на плоскости $\mathbb{R}^2$, которые становятся эквивалентными на сфере $\mathbb{S}^2$ после очевидного вложения $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{S}^2$.

Этот класс инвариантов легко обобщить. Пусть X – стрелочная диаграмма длины n , а F – функция от $k \times n$ полуцелых переменных. Для любого регулярного каракуля φ определим $\langle (X, F), \varphi \rangle$ как сумму

$$\langle (X, F), \varphi \rangle = \sum_{\mu: X \rightarrow \text{ADiag}(\varphi)} \sigma(\mu) F(\text{Ind}(\varphi(\mu(x^1))), \varphi, \dots, \text{Ind}(\varphi(\mu(x^n))), \varphi) \quad (4)$$

по всем представлениям $\mu: X \rightarrow \text{ADiag}(\varphi)$.

ТЕОРЕМА 4. Если X – C -минимальная стрелочная диаграмма длины n , а F – функция от $k \times n$ полуцелых переменных, то $\langle (X, F), \cdot \rangle$ является инвариантом каракулей.

Здесь и далее функция F может принимать значения в любом модуле над $\mathbb{Z}$, достаточно лишь считать ее числовой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 3, достаточно убедиться, что перестройки типов $A_{\pm}^*$ (три пары типов, порождающих эквивалентность диаграмм) не изменяют $\langle (X, F), \cdot \rangle$. Это элементарно. Подробности см. в доказательстве теоремы 5.

ПРИМЕР. Все инварианты вида $M_{ij}(\beta)$ выражаются формулой (4) для стрелочных диаграмм длины 1.

Функция $\text{ind}_*(\cdot)$ от замкнутой кривой и точки на плоскости $\mathbb{R}^2$ (см. пп. 2.2.2) продолжается по линейности на пары, состоящие из 1-цикла и 0-цепи в $\mathbb{R}^2$. Аналогично на сфере $\mathbb{S}^2$ определена функция $\text{ind}_*(\cdot) - \text{ind}_*(\cdot)$ от замкнутой кривой и двух точек, и она продолжается по линейности на пары, состоящие из 1-цикла и 0-границы. Значит, для любой стрелочной диаграммы X , рассматриваемой как одномерный клеточный комплекс, регулярного каракуля φ и представления $\mu: X \rightarrow \text{ADiag}(\varphi)$ определено билинейное отображение $\text{ind} \circ (\varphi_* \circ \mu_* \otimes \varphi_* \circ \mu_*): Z_1(X) \times C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}/2$. Это отображение уже использовалось в формуле (4), где 1-циклы – это окружности стрелочных диаграмм. Чтобы распространить его на произвольные циклы, нужно обобщить определение индекса (см. пп. 2.2.2) на все циклы в образе регулярного каракуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть φ – регулярный каракуль, ξ – замкнутая кусочно-гладкая кривая, $\xi(\mathbb{S}^1) \subset \varphi(C_k)$. Тогда индекс $\text{ind}_\xi(x)$ точки $x \in \mathbb{R}^2$ совпадает с определенным в пп. 2.2.2, если $x \notin \xi(\mathbb{S}^1)$ или x – неособая точка ξ , и равен среднему арифметическому индексов точек четырех прилегающих областей $\mathbb{R}^2 \setminus \varphi(\mathbb{S}^1)$, если x – точка излома ξ .

Это определение согласуется со старым определением, когда ξ является компонентой каракуля φ . В общем случае значение $\text{ind}_\xi(x)$ четверть-целое.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $X = \{x^1, \dots, x^n\}$ – C -минимальная стрелочная диаграмма, а $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ – набор 1-циклов в X . Если функция F от $m \times n$ переменных v_l^i , $i = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, m$, фактически зависит только от тех v_l^i , для которых цикл ξ_l не проходит по стрелке x^i , то сумма

$$\begin{aligned} & \langle (X, \Xi, F), \varphi \rangle \\ &= \sum_{\mu: X \rightarrow \text{ADiag}(\varphi)} \sigma(\mu) F(\text{ind}_{\varphi(\mu(\xi_1))}(\varphi(\mu(x^1))), \dots, \text{ind}_{\varphi(\mu(\xi_m))}(\varphi(\mu(x^n)))) \end{aligned} \quad (5)$$

по всем представлениям $X \rightarrow \text{ADiag}(\varphi)$ является инвариантом каракулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы должны проверить, что допустимые локальные перестройки каракулей не меняют $\langle (X, \Xi, F), \cdot \rangle$. Рассмотрим перестройку типа O_{+2}^* . Все слагаемые формулы (5) остаются неизменными, но может появиться несколько новых слагаемых, в которых представление μ отображает по крайней мере одну

стрелку X в одну из новорожденных стрелок y_1 и y_2 в $\text{ADiag}(\varphi)$, соответствующих новорожденным точкам пересечения z_1 и z_2 . На самом деле, μ не может отображать пару стрелок в обе стрелки y_1 и y_2 , поскольку диаграмма X C -минимальна. С другой стороны, если представление μ_1 отображает стрелку x в y_1 , то существует представление μ_2 , отображающее x в y_2 и совпадающее с μ_1 на остальных стрелках. Направления y_1 и y_2 противоположны и для любого цикла ξ , не проходящего вдоль стрелки x , $\text{ind}_{\varphi(\mu_1(\xi))}(z_1) = \text{ind}_{\varphi(\mu_2(\xi))}(z_2)$, поэтому два новых слагаемых (5) взаимоуничтожаются.

Аналогично, перестройка типа O_{+1}^1 не может добавить новых слагаемых из-за C -минимальности X .

Доказательство теоремы 5 применимо и к следующей теореме, в которой ослаблено требование C -минимальности диаграммы X . Теперь при локальных перестройках каракулей могут появляться новые слагаемые формулы (5), но они равны нулю.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $X = \{x^1, \dots, x^n\}$ – стрелочная диаграмма, $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ – набор 1-циклов в X и F – функция от $t \times n$ переменных v_l^i , $i = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, t$, такая, что

- 1) F зависит только от тех v_l^i , для которых цикл ξ_l не проходит по стрелке x^i ;
- 2) для любого каракуля φ и представления $\mu: X \rightarrow \text{ADiag}(\varphi)$, если $\varphi \circ \mu$ переводит какую-либо стрелку (или две стрелки) в вершину (обе вершины) петли (или соответственно сегмента), исчезающую (исчезающих) при некоторой перестройке O_{-*}^* , то

$$F(\text{ind}_{\varphi(\mu(\xi_1))}(\varphi(\mu(x^1))), \dots, \text{ind}_{\varphi(\mu(\xi_m))}(\varphi(\mu(x^n)))) = 0.$$

Тогда сумма (5) является инвариантом каракулей.

ЗАМЕЧАНИЕ. При изменении направления любой стрелки диаграммы X инварианты (3)–(5) меняют знак. То есть с точностью до знака они определены хордовой диаграммой $\text{CDiag}(X)$.

3.4. Порядок инвариантов.

ТЕОРЕМА 7. Если X – стрелочная диаграмма, Ξ – набор 1-циклов в X и F – многочлен, то $\langle (X, \Xi, F), \cdot \rangle$ в теоремах 5 и 6 является инвариантом порядка $\deg(F) + L(X)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если X – C -минимальная стрелочная диаграмма и F – многочлен, то $\langle (X, F), \cdot \rangle$ является инвариантом порядка $\deg(F) + L(X)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если X – C -минимальная стрелочная диаграмма, то $\langle X, \cdot \rangle$ является инвариантом порядка $L(X)$.

Теорема 7 и ее следствия позволяют перейти от классификации каракулей по их стрелочным диаграммам к классификации инвариантами конечного порядка.

ПРИМЕР. Диаграмма $\text{ADiag}(\varphi)$ 1-каракуля φ , изображенного на рис. 3, минимальна и $\langle \text{ADiag}(\varphi), \cdot \rangle$ является инвариантом порядка 8, отличающим φ от тривиального 1-каракуля ($\langle \text{ADiag}(\varphi), \varphi \rangle = 8$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Доказательство по существу повторяет доказательства леммы 31 и теоремы 7 в [11], так что некоторые технические детали опущены.

Каждое слагаемое суммы (5) можно рассматривать отдельно. Оно не обязано быть настоящим инвариантом каракулей, но является их локальным инвариантом в малой окрестности любого квазикаракуля, и характеристические числа определяются для него так же, как для глобальных инвариантов.

Пусть φ' – регулярный квазикаракуль, а φ – его возмущение (см. пп. 2.2.4). Тогда существует представление $\mu_{\varphi\varphi'}: \text{ADiag}(\varphi) \rightarrow \text{ADiag}(\varphi')$, близкое к тождественному отображению на C_k и сохраняющее направления всех стрелок.

Слагаемое

$$F(\text{ind}_{\varphi(\mu(\xi_1))}(\varphi(\mu(x^1))), \dots, \text{ind}_{\varphi(\mu(\xi_m))}(\varphi(\mu(x^n)))) \quad (6)$$

при μ , близком к представлению $\mu': X \rightarrow \text{ADiag}(\varphi')$, определяет локальный инвариант регулярных каракулей в окрестности φ' . Он равен нулю на каракулях φ , для которых не существует такого представления $\mu: X \rightarrow \text{ADiag}(\varphi)$ (“возмущения μ' ”), что $\mu_{\varphi\varphi'} \circ \mu = \mu'$. Знак $\sigma(\mu)$ опущен, поскольку он одинаков для всех μ , близких к μ' .

Доказательство теоремы проводится индукцией по сложности квазикаракулей. Предположение индукции таково.

Для любого представления $\mu: X \rightarrow \text{ADiag}(\varphi)$ через $n(\mu)$ обозначим число стрелок X , переходящих в простые точки пересечения φ .

Тогда характеристическое число, сопоставленное способу вырождения квазикаракуля φ локальным инвариантом (6), равно сумме

$$\sum_j p_j(\text{ind}_{\nu_j(\xi_1)}(\nu_j(x^1)), \dots, \text{ind}_{\nu_j(\xi_m)}(\nu_j(x^n))), \quad (7)$$

где ν_j обозначает $\varphi_j \circ \mu_j$, каракули φ_j являются возмущениями φ , представления $\mu_j: X \rightarrow \text{ADiag}(\varphi_j)$ являются возмущениями μ , а p_j – многочленами такими, что для каждого слагаемого суммы (7)

$$\deg(p_j) + n(\nu_j) \leq \deg(F) + n - \text{compl}(\varphi), \quad (8)$$

где $n(\nu_j)$ – число стрелок X , переходящих в простые точки пересечения φ_j .

Теперь база индукции ($\text{compl}(\varphi) = 0$, т.е. φ – каракуль) тривиальна: $j = 1$, $p_1 = F$, $\varphi_1 = \varphi$ и $\mu_1 = \mu$. Шаг индукции элементарен и описан ниже. Тогда если $\text{compl}(\varphi) > \deg(F) + n$, то левая сторона неравенства (8) отрицательна, а значит, сумма (7) равна нулю.

При шаге индукции можно рассматривать каждое слагаемое

$$p(\text{ind}_{\nu(\xi_1)}(\nu(x^1)), \dots, \text{ind}_{\nu(\xi_m)}(\nu(x^n)))$$

суммы (7) отдельно. Шаг индукции расщепляется на несколько случаев в зависимости от типа последнего шага вырождения и количества участвующих в нем стрелок.

Пометка тройки точек, т.е. перестройка состоит в прохождении однопараметрического семейства квазикаракулей через положение φ , имеющее дополнительную тройную точку. В зависимости от числа стрелок, отображаемых в малую окрестность тройной точки, возможны следующие подслучаи.

- 0: Характеристическое число равно нулю.
- 1: Каждый из $m \times n$ аргументов $\text{ind}_{\nu(\xi_i)}(\nu(x^i))$ многочлена p либо сохраняется неизменным при переходе от отрицательных к положительным возмущениям, либо изменяется на 1 (если x^i переходит в вершину исчезающего треугольника, а $\nu(\xi_i)$ проходит по его противоположной стороне). Значит, характеристическое число равно значению “дискретной частной производной” многочлена p , являющейся значением многочлена степени $\deg(p) - 1$ на возмущении квазикаракуля.
- 2 или 3: Представление μ и отображение ν определены только для положительных или только для отрицательных возмущений. Тогда характеристическое число равно значению p от сдвинутых аргументов на невозмущенном квазикаракуле, зато $n(\nu)$ уменьшается по крайней мере на 2.

Пометка одной точки, т.е. возмущение является прохождением локальной ветви каракуля через точку многократного пересечения. Нужно проследить за следующими объектами:

- 1) точкой q многократного пересечения;
- 2) движущейся локальной ветвью b ;
- 3) локальными ветвями $b_1, \dots, b_s$, проходящими через q ;
- 4) точками $q_1, \dots, q_s$ пересечений $b_1, \dots, b_s$ с b .

Если ν не переводит ни одну стрелку в $q, q_1, \dots, q_s$, то характеристическое число равно нулю. Если ν переводит в $q, q_1, \dots, q_s$ ровно одну стрелку, то характеристическое число равно разности значений многочлена p в двух точках, некоторые из $m \times n$ координат которых совпадают, а некоторые координаты отличаются на 1. Такая сумма “дискретных частных производных” является значением многочлена степени $\deg(p) - 1$, взятом на возмущении квазикаракуля. Если ν переводит в $q, q_1, \dots, q_s$ более одной стрелки, то оно определено только для положительных или только для отрицательных возмущений. Тогда характеристическое число равно значению p со сдвинутыми аргументами на невозмущенном квазикаракуле, зато $n(\nu)$ уменьшается по крайней мере на 1.

В любом случае условие (8) остается верным.

§ 4. Инварианты конечного порядка классифицируют каракули

Стрелочная диаграмма, рассматриваемая как клеточный комплекс, может быть связной или несвязной. Очевидно, что для любого каракуля φ его диаграмма $\text{ADiag}(\varphi)$ связна тогда и только тогда, когда связан образ $\varphi(C_k)$.

Сначала исследуем случай связных каракулей на сфере $\mathbb{S}^2$. Потом рассмотрим случай связных каракулей на плоскости $\mathbb{R}^2$ и, наконец, общий случай.

4.1. Сильно связные каракули на сфере $\mathbb{S}^2$. Следующая лемма и теорема почти очевидны (подробнее см. в [7]). Они сводят классификацию связных каракулей на сфере $\mathbb{S}^2$ к классификации их диаграмм.

ЛЕММА 1. Пусть φ и ψ – регулярные каракули на сфере $\mathbb{S}^2$ со связными образами $\varphi(C_k)$ и $\psi(C_k)$ и одной и той же стрелочной диаграммой. Тогда отображение $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(C_k) \rightarrow \psi(C_k)$ можно продолжить до диффеоморфизма $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, сохраняющего ориентацию.

ТЕОРЕМА 8. Связный каракуль на сфере $\mathbb{S}^2$ определен своей стрелочной диаграммой с точностью до эквивалентности.

Теперь посмотрим, насколько эквивалентность диаграмм поднимается до эквивалентности каракулей.

ЛЕММА 2. Если φ – связный каракуль на $\mathbb{S}^2$, а стрелочная диаграмма X получена из диаграммы $\text{ADiag}(\varphi)$ перестройкой типа A_{-*}^* , то существует эквивалентный φ каракуль ψ с диаграммой $\text{ADiag}(\psi) = X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждую перестройку типа A_{-*}^* диаграммы $\text{ADiag}(\varphi)$ можно поднять до гомотопии каракуля φ , поскольку две исчезающие дуги (или исчезающая петля) разбивают сферу $\mathbb{S}^2$ на две области, меньшая из которых стягиваема и не содержит точек образа $\varphi(C_k)$. Это стягивание приводит к каракулю с особой точкой (касание или потеря производной), которую легко можно устранить и получить требуемый каракуль ψ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Каракуль называется *сильно связным*, если связан образ любого эквивалентного ему каракуля.

Для краткости будем писать “минимальная диаграмма каракуля” вместо “минимальная диаграмма, эквивалентная диаграмме каракуля”.

ЛЕММА 3. Каракуль φ на сфере $\mathbb{S}^2$ сильно связан, если и только если связна его минимальная диаграмма X . Если каракуль φ сильно связан, то существует эквивалентный ему каракуль ψ с диаграммой $\text{ADiag}(\psi) = X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стрелочную диаграмму каракуля φ или любого эквивалентного φ каракуля можно преобразовать в минимальную диаграмму φ за конечное число перестроек типов A_{-*}^* . Такие перестройки переводят несвязные диаграммы в несвязные, так что если минимальная диаграмма каракуля связна, то все эквивалентные ему каракули и их диаграммы связны. С другой стороны, если каракуль φ сильно связан, то к каждой такой перестройке применима лемма 2 и, значит, его минимальная диаграмма является диаграммой какого-то каракуля ψ , эквивалентного φ , и связна.

Лемма 3 немедленно следует также и из результатов [4; разд. 2]. Лемма 3 позволяет эффективно проверять, является ли каракуль сильно связным.

Для каракулей и кривых на сфере $\mathbb{S}^2$ индекс $\text{ind}_\xi(x)$ не определен, но разность $\text{ind}_\xi(x) - \text{ind}_\xi(y) = \text{ind}_\xi(x) - \text{ind}_\xi(y)$ определена корректно. Справедлив следующий аналог теорем 6 и 7.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $X = \{x^1, \dots, x^n\}$ – стрелочная диаграмма, а $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ – набор 1-циклов в X и F – функция от $m \times \binom{n}{2}$ переменных v_l^{ij} ,

$1 \leq i < j \leq n$, $l = 1, \dots, m$. Если X , Ξ и F удовлетворяют условию теоремы 6, то сумма

$$\langle (X, \Xi, F), \varphi \rangle = \sum_{\mu: X \rightarrow \text{ADiag}(\varphi)} \sigma(\mu) F(\text{ind}_{\varphi(\mu(\xi_1))}(\varphi(\mu(x^2)) - \varphi(\mu(x^1))), \dots, \text{ind}_{\varphi(\mu(\xi_m))}(\varphi(\mu(x^n)) - \varphi(\mu(x^{n-1})))) \quad (9)$$

по всем представлениям $\mu: X \rightarrow \text{ADiag}(\varphi)$ является инвариантом каракулей на $\mathbb{S}^2$. Если F – многочлен, то $\langle (X, \Xi, F), \cdot \rangle$ является инвариантом порядка $\deg(F) + L(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все вычисления в доказательствах теорем 6 и 7 локальны и не зависят от топологии объемлющего ориентированного двумерного многообразия.

Граница каждой компоненты связности дополнения к образу регулярного каракуля состоит из нескольких канонически ориентированных несамопересекающихся кусочно-гладких кривых. Прообраз такой кривой в стрелочной диаграмме каракуля является одномерным циклом. Набор всех таких циклов однозначно определен самой стрелочной диаграммой. Действительно, ориентация такого цикла определяется его регулярной точкой и выбором направления в ней следующим способом. Точка начинает двигаться в выбранном направлении вдоль окружности стрелочной диаграммы; каждый раз проходя через конец или начало стрелки, она перепрыгивает по стрелке на ее начало или конец соответственно и продолжает двигаться по другой (или, возможно, той же) окружности в том же (положительном или отрицательном) направлении как до прыжка, если она прыгала по направлению стрелки, и в противоположном, если прыгала против стрелки. И наоборот, по набору прообразов канонически ориентированных границ компонент дополнения к образу каракуля можно восстановить направления стрелок его диаграммы.

Рис. 7. Граница области может проходить через точку пересечения каракуля один или два раза. Точка пересечения лежит в замыкании трех или четырех областей дополнения к каракулю. В обозначениях точек и циклов опущено $\varphi(\dots)$

В следующей лемме эти рассуждения выражены в терминах индексов.

ЛЕММА 4. Пусть ξ – связный 1-цикл в стрелочной диаграмме $\text{ADiag}(\varphi)$ связного каракуля φ на $\mathbb{S}^2$, не проходящий ни по какой дуге стрелочной диаграммы дважды, а x^1 – одна из стрелок вне ξ . Образ ξ является канонически ориентированной границей компоненты связности дополнения к образу φ ,

если и только если

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}_{\varphi(\xi)}(\varphi(x) - \varphi(x^1)) &= 0 && \text{для любой стрелки } x \notin \xi, \\ \operatorname{ind}_{\varphi(\xi)}(\varphi(x) - \varphi(x^1)) &= \frac{n(\xi, x)}{4} && \text{для любой стрелки } x \in \xi, \end{aligned}$$

где $n(\xi, x)$ обозначает, сколько раз ξ проходит через x , т.е. либо 1, либо 2 (см. рис. 7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образ ξ поворачивает налево при каждом проходе через точки пересечения, а все остальные точки пересечения остаются от него справа.

Цель этого параграфа – выразить уравнения из леммы 4 через полиномиальные функции теоремы 9 и построить инвариант конечного порядка, проверяющий эквивалентность диаграмм двух заданных сильно связанных каракулей, а значит, и эквивалентность самих каракулей. К сожалению, в теореме 9 допустимы только полупелые значения индексов $\operatorname{ind}_*(\cdot - \cdot)$. Описываемый в оставшейся части этого параграфа технический прием позволяет сформулировать замену леммы 4 в терминах полупелых индексов.

Чтобы следить за дальнейшими элементарными техническими подробностями, полезно подсматривать на рис. 7 и иметь в виду следующие общеизвестные факты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. 1) Компоненты дополнения к образу регулярного каракуля φ можно раскрасить в два цвета так, чтобы границы двух компонент одного цвета не имели общих дуг.

2) Если точка движется по каракулю, поворачивая направо или налево при проходе через каждую точку пересечения, то цвет области слева (или справа) от нее остается неизменным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Цвет точки x , не принадлежащей $\varphi(C_k)$, зависит только от $\sum_{l=1}^k \operatorname{ind}_l(x) \pmod{2}$.

Точка пересечения каракуля на сфере S^2 лежит в замыкании либо трех, либо четырех областей дополнения $S^2 \setminus \varphi(C_k)$ (см. рис. 7). Будем называть такие пересечения 3-точками и 4-точками соответственно. 3-точка обязательно является точкой самопересечения, и одна из областей подходит к ней в двух противоположных квадрантах.

Для любой стрелки x диаграммы регулярного каракуля φ через $\xi_1(x), \xi_2(x), \dots$ обозначим прообразы канонически (“против часовой стрелки”) ориентированных границ прилегающих к $\varphi(x)$ областей. Через $\xi(x)$ обозначим прообраз границы объединения этих областей. Если $\varphi(x)$ – 4-точка, будем считать эти области пронумерованными в циклическом порядке против часовой стрелки и обозначим через $\xi_{ij}(x)$ границу объединения i -й и j -й области.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если диаграмма $\operatorname{ADiag}(\varphi)$ связна и минимальна, то для любой ее стрелки x найдется такая ее стрелка $y(x)$, что

$$\operatorname{ind}_{\varphi(\xi(x))}(\varphi(x) - \varphi(y(x))) = 1. \quad (10)$$

Если $\varphi(x)$ – 4-точка, то, кроме того,

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}_{\varphi_{12}(\xi(x))}(\varphi(x) - \varphi(y(x))) &= \operatorname{ind}_{\varphi_{23}(\xi(x))}(\varphi(x) - \varphi(y(x))) \\ &= \operatorname{ind}_{\varphi_{34}(\xi(x))}(\varphi(x) - \varphi(y(x))) = \operatorname{ind}_{\varphi_{41}(\xi(x))}(\varphi(x) - \varphi(y(x))) = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку эйлерова характеристика сферы $\mathbb{S}^2$ равна 2, а связный регулярный каракуль с n пересечениями состоит из $2n$ дуг, его дополнение состоит из $n+2$ областей. Сначала исключим вырожденный случай, когда $\varphi(\xi(x))$ – не кривая. Действительно, поскольку $\operatorname{ADiag}(\varphi)$ минимальна, точка $\varphi(x)$ инцидентна ровно четырем дугам. Все 4 остальные вершины этих дуг могут совпасть, но тогда образ каракуля φ диффеоморфен объединению двух больших кругов на сфере и его диаграмма $\operatorname{ADiag}(\varphi)$ не минимальна. Значит, $\varphi(\xi(x))$ является замкнутой кусочно-гладкой кривой на сфере $\mathbb{S}^2$, возможно проходящей по некоторым дугам и вершинам более чем по одному разу.

Предположим, что цикл $\varphi(\xi(x))$ инцидентен всем $n-1$ точкам пересечения каракуля, за исключением точки $\varphi(x)$. Подсчитаем общее количество дуг и придем к противоречию. У $\varphi(\xi(x))$ не менее $n-1$ дуг. Число областей, не инцидентных $\varphi(x)$, не менее $(n+2) - 4 = n-2$, а граница каждой области состоит из по крайней мере трех дуг в силу минимальности диаграммы $\operatorname{ADiag}(\varphi)$. Поэтому общее число “левых сторон” дуг не меньше чем

$$\begin{aligned} &2 \times 4 \quad (\text{четыре дуги, инцидентные } \varphi(x)) \\ &+ n - 1 \quad (\text{дуги } \varphi(\xi(x))) \\ &+ 3(n - 2) \quad (\text{прочие дуги}) \\ &= 4n + 1 > 2 \times 2n. \end{aligned}$$

Противоречие.

Поэтому найдется стрелка $y(x)$, отличная от x и от всех стрелок, по которым проходит $\xi(x)$. Значит, $\operatorname{ind}_{\varphi(\xi(x))}(\varphi(x) - \varphi(y(x))) = 1$ по определению $\xi(x)$. Равенства (11) также очевидным образом верны.

Пусть теперь $\varphi(x)$ – 3-точка связного минимального каракуля φ . Граница прилегающей к $\varphi(x)$ области Δ , подходящей к $\varphi(x)$ в двух квадрантах, является объединением двух циклов $\varphi(\xi_+(x))$ и $\varphi(\xi_-(x))$: “положительного” и “отрицательного”. Ориентация каждого из них определяется ориентацией компоненты каракуля, проходящей через $\varphi(x)$, и для $\varphi(\xi_+(x))$ совпадает с канонической ориентацией границы области, а для $\varphi(\xi_-(x))$ противоположна ей. Поскольку каракуль φ минимален, существуют отличные от x стрелки $y_+(x)$ в $\xi_+(x)$ и $y_-(x)$ в $\xi_-(x)$. Замыкание области Δ разбивает оставшуюся часть сферы на “положительную” и “отрицательную” области в соответствии со знаком $\operatorname{ind}_{\varphi(\xi_+(x)+\xi_-(x))}(\varphi(x) - \cdot)$. Цикл $\varphi(\xi_+(x))$ образует отрицательно ориентированную границу положительной области, а цикл $\varphi(\xi_-(x))$ – положительно ориентированную границу отрицательной области. В частности, $\varphi(y(x))$ лежит либо в положительной, либо в отрицательной области, и тогда либо

$$\operatorname{ind}_{\varphi(\xi_+(x))}(\varphi(y_-(x)) - \varphi(y(x))) = 1, \quad \operatorname{ind}_{\varphi(\xi_-(x))}(\varphi(y_+(x)) - \varphi(y(x))) = 0, \quad (12)$$

либо

$$\text{ind}_{\varphi(\xi_+(x))}(\varphi(y_-(x)) - \varphi(y(x))) = 0, \quad \text{ind}_{\varphi(\xi_-(x))}(\varphi(y_+(x)) - \varphi(y(x))) = -1 \quad (13)$$

соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть μ – представление связной минимальной диаграммы $\text{ADiag}(\varphi)$ в диаграмме $\text{ADiag}(\psi)$ с тем же числом стрелок. Тогда μ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда для любой стрелки x диаграммы $\text{ADiag}(\varphi)$

$$\text{ind}_{\psi(\mu(\xi_{ij}(x)))}(\psi(\mu(x)) - \psi(\mu(y(x)))) = \text{ind}_{\varphi(\xi_{ij}(x))}(\varphi(x) - \varphi(y(x))),$$

если $\varphi(x)$ – 4-точка, и

$$\text{ind}_{\psi(\mu(\xi_{\pm}(x)))}(\psi(\mu(y_{\mp}(x))) - \psi(\mu(y(x)))) = \text{ind}_{\varphi(\xi_{\pm}(x))}(\varphi(y_{\mp}(x)) - \varphi(y(x))),$$

если $\varphi(x)$ – 3-точка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение “только тогда” немедленно следует из леммы 1. Чтобы доказать утверждение “тогда”, рассмотрим 3-точки и 4-точки раздельно.

4-точка. Возьмем стрелку x диаграммы $\text{ADiag}(\varphi)$ такую, что $\varphi(x)$ – 4-точка, и рассмотрим циклы $\psi(\mu(\xi_1(x))), \dots, \psi(\mu(\xi_4(x)))$. Будучи границами, $\varphi(\xi_i(x))$ являются почти несамопересекающимися (цикл может дважды проходить через какую-либо точку самопересечения, но поскольку при обоих проходах точки он меняет направление, его можно сгладить и избежать пересечения), не проходят через $\varphi(y(x))$ и

$$\text{ind}_{\varphi(\xi_i(x))}(\varphi(x) - \varphi(y(x))) = \frac{1}{4}.$$

Поскольку μ индуцирует биекцию множества пересечений φ на множество пересечений ψ , те же утверждения верны и для $\psi(\mu(\xi_i(x)))$, за исключением того, что

$$\text{ind}_{\psi(\mu(\xi_i(x)))}(\psi(\mu(x)) - \psi(\mu(y(x)))) = \sigma_{\mu}(x) \left(\frac{1}{4} - \delta_i \right),$$

где $\delta_i = 1$, если $\psi(\mu(y(x)))$ принадлежит области $\Delta_i(x)$ дополнения $\mathbb{S}^2 \setminus \psi(\mu(\xi_i(x)))$, подходящей к $\psi(\mu(x))$ с внутреннего угла (большого π), и $\delta_i = 0$ в противном случае.

Но

$$\begin{aligned} 1 &= \text{ind}_{\psi(\mu(\xi(x)))}(\psi(\mu(x)) - \psi(\mu(y(x)))) \\ &= \sum_{i=1}^4 \text{ind}_{\psi(\mu(\xi_i(x)))}(\psi(\mu(x)) - \psi(\mu(y(x)))) \\ &= \sum_{i=1}^4 \sigma_{\mu}(x) \left(\frac{1}{4} - \delta_i \right) = \sigma_{\mu}(x) \left(1 - \sum_{i=1}^4 \delta_i \right). \end{aligned}$$

Значит, либо $\sigma_\mu(x) = 1$ и $\sum_{i=1}^4 \delta_i = 0$, либо $\sigma_\mu(x) = -1$ и $\sum_{i=1}^4 \delta_i = 2$.

В последнем случае $\psi(\mu(y(x)))$ принадлежит пересечению $\Delta_i(x) \cap \Delta_j(x)$ двух областей, для которых $\delta_i = \delta_j = 1$, а $\psi(\mu(x))$ – не принадлежит. Нужно рассмотреть два подслучая.

- 1) Если $i - j = 2 \pmod{4}$, то у циклов $\xi_i(x)$ и $\xi_j(x)$ не может быть общих дуг в силу предложения 2. Поэтому и у циклов $\psi(\mu(\xi_i(x)))$ и $\psi(\mu(\xi_j(x)))$ нет общих дуг и они не могут пересекаться, поскольку каждый из них поворачивает направо или налево в каждой точке пересечения каракуля. Следовательно, внутренности областей $\Delta_i(x)$ и $\Delta_j(x)$ не имеют общих точек и не могут содержать $\psi(\mu(y(x)))$ обе одновременно.
- 2) Если $i - j \neq 2 \pmod{4}$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \text{ind}_{\varphi(\xi_{ij}(x))}(\varphi(x) - \varphi(y(x))) \\ &= \text{ind}_{\psi(\mu(\xi_{ij}(x)))}(\psi(\mu(x)) - \psi(\mu(y(x)))) \\ &= \text{ind}_{\psi(\mu(\xi_i(x)))}(\psi(\mu(x)) - \psi(\mu(y(x)))) \\ &\quad + \text{ind}_{\psi(\mu(\xi_j(x)))}(\psi(\mu(x)) - \psi(\mu(y(x)))) \\ &= \sigma_\mu(x) \left(\frac{1}{4} - \delta_i \right) + \sigma_\mu(x) \left(\frac{1}{4} - \delta_j \right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

В обоих подслучаях получено противоречие, поэтому $\sigma_\mu(x) = 1$.

3-точка. Как и циклы $\varphi(\xi_i(x))$ в предыдущем случае, циклы $\varphi(\xi_+(x))$ и $\varphi(\xi_-(x))$ являются почти несамопересекающимися и почти взаимонепересекающимися, поэтому таковы и циклы $\psi(\mu(\xi_+(x)))$ и $\psi(\mu(\xi_-(x)))$. Последние два цикла разбивают сферу на три области, соответствующие возможным значениям знака индекса $\text{ind}_{\psi(\mu(\xi_+(x)) + \xi_-(x))}(\psi(\mu(x)) - \cdot)$. Циклы $\psi(\mu(\xi_+(x)))$ и $\psi(\mu(\xi_-(x)))$ образуют границы “положительной” и “отрицательной” областей. Условие предложения вместе с формулой (12) или (13) гарантирует, что $\psi(\mu(\xi_+(x)))$ является границей положительной области. Рассматривая небольшую окрестность точки $\psi(\mu(x))$, легко увидеть, что цикл $\psi(\mu(\xi_+(x)))$ является границей положительной области тогда и только тогда, когда $\sigma_\mu(x) = 1$.

Итак, показано, что $\sigma_\mu(x) = 1$ в обоих случаях. Стрелка x была произвольной, поэтому представление μ сохраняет направления всех стрелок диаграммы $\text{ADiag}(\varphi)$ и является изоморфизмом.

ЗАМЕЧАНИЕ. Более аккуратный анализ позволяет ослабить условие предложения 4: отображение $\psi \circ \mu \circ \varphi^{-1}$ должно только сохранять ненулевой индекс $\text{ind}_{\varphi(\xi_\pm)}(\dots)$ для 3-точки x и три индекса $\text{ind}_{\varphi(\xi_{12})}(\dots)$, $\text{ind}_{\varphi(\xi_{23})}(\dots)$ и $\text{ind}_{\varphi(\xi_{34})}(\dots)$ для 4-точки.

Для произвольного представления μ связной минимальной диаграммы $\text{ADiag}(\varphi)$ в диаграмме $\text{ADiag}(\psi)$ с тем же числом n стрелок и произвольных цикла ξ и стрелок x и y в $\text{ADiag}(\varphi)$ имеем

$$|\text{ind}_{\psi(\mu(\xi))}(\psi(\mu(x)) - \psi(\mu(y)))| \leq n + 1,$$

поскольку дополнение к образу каракуля ψ состоит из $n + 2$ областей. Через p_n обозначим многочлен степени $2(n + 1)$ такой, что $p_n(1) = 1$ и $p_n(i) = 0$ для всех

остальных целых i , $|i| \leq n+1$. Аналогично, через q_n обозначим многочлен степени $2(n+1)-1$ такой, что $q_n(\frac{1}{2}) = 1$ и $q_n(i) = 0$ для всех остальных полуцелых i , $|i| < n+1$.

Через $L(\varphi) = L(\text{ADiag}(\varphi))$ обозначим количество точек пересечения каракуля φ . Для каждого представления $\mu: \text{ADiag}(\varphi) \rightarrow \text{ADiag}(\psi)$, где φ – минимальный каракуль и $L(\varphi) = n$, определим целое число $P(\mu, \varphi, \psi)$ как произведение

$$P(\mu, \varphi, \psi) = \prod_{\text{4-точки } x} \prod_{i=1}^3 q_n(\text{ind}_{\psi(\mu(\xi_{i(i+1)}(x)))}(\psi(\mu(x)) - \psi(\mu(y(x)))) \\ \times \prod_{\text{3-точки } x} p_n(\pm \text{ind}_{\psi(\mu(\xi_{\pm}(x)))}(\psi(\mu(y_{\mp}(x))) - \psi(\mu(y(x))))), \quad (14)$$

где знаки в множителе, соответствующем прообразу x 3-точки, выбраны в зависимости от того, выполняются для него равенства (12) или (13). Степень произведения всех многочленов в формуле (14) не превосходит $6n(n+1)$; $P(\mu, \varphi, \psi) = 1$, если μ является изоморфизмом, и $P(\mu, \varphi, \psi) = 0$, если $L(\psi) = L(\varphi)$ и μ не является изоморфизмом.

Через $\langle \varphi, \cdot \rangle$ обозначим функцию на каракулях, определенную частным случаем формулы (9):

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{\mu: \text{ADiag}(\varphi) \rightarrow \text{ADiag}(\psi)} \sigma(\mu) P(\mu, \varphi, \psi). \quad (15)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть φ – связный минимальный каракуль на сфере $\mathbb{S}^2$, d – порядок группы автоморфизмов его диаграммы $\text{ADiag}(\varphi)$. Тогда $\langle \varphi, \varphi \rangle = d$ и $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$ для любого не эквивалентного φ каракуля ψ с $L(\psi) \leq L(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует непосредственно из формулы (15) и предложения 4: μ -е слагаемое суммы (15) равно 1, если μ – изоморфизм, и равно 0 в противном случае. В частности, если $L(\psi) < L(\varphi)$, то в сумме вообще нет слагаемых.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если сильно связанные каракули φ и ψ с числом точек пересечения в каждом меньшем или равным n не эквивалентны на сфере $\mathbb{S}^2$, то их можно различить инвариантом порядка $6n(n+1) + n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ' и ψ' – минимальные каракули, эквивалентные каракулям φ и ψ соответственно. Предположим, что $L(\psi') \leq L(\varphi')$. Тогда $\langle \varphi', \varphi' \rangle = \langle \varphi', \varphi' \rangle > 0$, $\langle \varphi', \psi \rangle = \langle \varphi', \psi' \rangle = 0$, $L(\varphi') \leq n$ и порядок $\langle \varphi', \cdot \rangle$ оценивается через степень многочлена (14) по теореме 9.

4.2. Каракули на плоскости $\mathbb{R}^2$. Теперь мы подправим теорему 8 и леммы 1 и 2, чтобы показать, что инварианты конечного порядка классифицируют каракули на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Напомним, что по стрелочной диаграмме каракуля однозначно определяются компоненты связности границ областей дополнения к образу этого каракуля (см. п. 3.1). Снабдим диаграмму дополнительной информацией о взаимном расположении этих компонент границ. Эта *граничная информация* должна содержать следующую информацию про каждую компоненту каждой границы:

- 1) является ли компонента частью внутренней или внешней границы некоторой области (т.е. ориентирована ли она по часовой стрелке или против нее соответственно);

- 2) если она является частью внутренней границы области, то какая компонента является внешней границей той же области (или что внешней границы нет, т.е. область бесконечна).

ЛЕММА 5. Пусть φ и ψ – регулярные каракули на плоскости $\mathbb{R}^2$ с одинаковой стрелочной диаграммой и граничной информацией. Тогда отображение $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(C_k) \rightarrow \psi(C_k)$ можно продолжить до сохраняющего ориентацию диффеоморфизма $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

ТЕОРЕМА 10. Каракуль на плоскости $\mathbb{R}^2$ определен своей стрелочной диаграммой и граничной информацией с точностью до эквивалентности.

Доказательства леммы 5 и теоремы 10 повторяют доказательства леммы 1 и теоремы 8 с очевидными техническими дополнениями.

4.2.1. Сильно связные каракули на плоскости $\mathbb{R}^2$. Изучим препятствия, мешающие доказать леммы 2 и 3 для сильно связных каракулей на плоскости $\mathbb{R}^2$. Доказательство леммы 2 не проходит, только когда исчезающие при перестройке типа A_{-*}^* дуги (одна или две) ограничивают бесконечную область. Последовательность перестроек от данного сильно связного каракуля к эквивалентному ему каракулю с минимальной диаграммой в доказательстве леммы 3 либо завершается успешно, либо прерывается, когда перестройка типа A_{-*}^* возможна только “через бесконечность”. Полученный каракуль называется *квазиминимальным*; так же называются его стрелочная диаграмма и граничная информация. Граничная информация сильно связного каракуля проста: все компоненты границ являются внешними границами, состоящими из более чем двух дуг, за исключением одной компоненты, состоящей из одной или двух дуг и являющейся внутренней границей бесконечной области.

Дальнейшие рассуждения с небольшими изменениями повторяют рассуждения для связных каракулей на сфере $\mathbb{S}^2$. Вот аналог леммы 4.

ЛЕММА 6. Пусть ξ – связный 1-цикл в стрелочной диаграмме $\text{ADiag}(\varphi)$ связного каракуля φ на плоскости, не проходящий по дугам диаграммы дважды. Образ $\varphi(\xi)$ цикла ξ является канонически ориентированной границей конечной области дополнения к образу каракуля φ , если и только если

$$\begin{aligned} \text{ind}_{\varphi(\xi)}(\varphi(x)) &= \frac{n(\xi, x)}{4} && \text{для любой стрелки } x \in \xi, \\ \text{ind}_{\varphi(\xi)}(\varphi(x)) &= 0 && \text{для любой стрелки } x \notin \xi. \end{aligned}$$

Он является канонически ориентированной границей бесконечной области дополнения к образу каракуля φ , если и только если

$$\begin{aligned} \text{ind}_{\varphi(\xi)}(\varphi(x)) &= \frac{n(\xi, x)}{4} - 1 && \text{для любой стрелки } x \in \xi, \\ \text{ind}_{\varphi(\xi)}(\varphi(x)) &= -1 && \text{для любой стрелки } x \notin \xi. \end{aligned}$$

Напоминаем, что $n(\xi, x)$ – число проходов ξ через x .

Снова потребуется проделать трюк для восстановления граничной информации из полуцелых индексов. Пусть $X_e(\varphi)$ и $X_i(\varphi)$ – множества “внешних” и “внутренних” стрелок диаграммы $\text{ADiag}(\varphi)$, т.е. прообразов точек пересечения, инцидентных или не инцидентных соответственно бесконечной области. Тогда предложение 3 и его доказательство остаются неизменными для квазимиимального каракуля φ и стрелки $x \in X_e(\varphi)$. Для $x \in X_i(\varphi)$ вместо точки $\varphi(y(x))$ можно взять точку “бесконечность”, т.е. опустить соответствующее слагаемое типа $\text{ind}_{\varphi(\xi(x))}(\varphi(y(x)))$. Аналогично на бесконечность заменяется точка $\varphi(y_+(x))$ или $\varphi(y_-(x))$, если она отсутствует. После этих подстановок аналог предложения 4 выглядит в точности как само предложение 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть μ – представление связной квазимиимальной диаграммы $\text{ADiag}(\varphi)$ в диаграмме $\text{ADiag}(\psi)$ с тем же числом стрелок. Тогда μ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда для любой стрелки x в $\text{ADiag}(\varphi)$

$$\text{ind}_{\psi(\mu(\xi_{ij}(x)))}(\psi(\mu(x)) - \psi(\mu(y(x)))) = \text{ind}_{\varphi(\xi_{ij}(x))}(\varphi(x) - \varphi(y(x))),$$

если $\varphi(x)$ – 4-точка, и

$$\text{ind}_{\psi(\mu(\xi_{\pm}(x)))}(\psi(\mu(y_{\mp}(x))) - \psi(\mu(y(x)))) = \text{ind}_{\varphi(\xi_{\pm}(x))}(\varphi(y_{\mp}(x)) - \varphi(y(x))),$$

если $\varphi(x)$ – 3-точка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство совпадает с доказательством предложения 4.

При сохранении еще одного индекса представление μ будет сохранять не только направления стрелок, но еще и граничную информацию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть μ – изоморфизм диаграммы $\text{ADiag}(\varphi)$ связного квазимиимального каракуля и диаграммы $\text{ADiag}(\psi)$ с тем же числом стрелок. Пусть $\xi(\infty)$ – прообраз канонически (по часовой стрелке) ориентированной границы бесконечной области дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus \varphi(C_k)$ и $y(\infty)$ – стрелка $\text{ADiag}(\varphi)$, лежащая вне $\xi(\infty)$. Тогда отображение $\psi \circ \mu \circ \varphi^{-1}$ можно продолжить до эквивалентности каракулей, если и только если

$$\text{ind}_{\psi(\mu(\xi(\infty)))}(\psi(\mu(y(\infty)))) = \text{ind}_{\varphi(\xi(\infty))}(\varphi(y(\infty))) = -1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из леммы 5, поскольку последнее уравнение есть не что иное, как граничная информация, отсутствующая в предложении 6: граница бесконечной области переходит в границу бесконечной области.

Для квазимиимального каракуля φ многочлен $P(\mu, \varphi, \psi)$ можно определить по той же формуле (14), и он будет обладать теми же свойствами. Определим инвариант $\langle \varphi, \cdot \rangle$ для связного квазимиимального каракуля φ на плоскости $\mathbb{R}^2$ аналогично формуле (15):

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{\mu: \text{ADiag}(\varphi) \rightarrow \text{ADiag}(\psi)} \sigma(\mu) P(\mu, \varphi, \psi) p_n(-\text{ind}_{\psi(\mu(\xi(\infty)))}(\psi(\mu(y(\infty))))). \quad (16)$$

Если диаграмма $\text{ADiag}(\varphi)$ не минимальна, последний множитель $p_n(\dots)$ гарантирует, что слагаемые удовлетворяют условию теоремы 6, и сумма является инвариантом. Степень многочлена (16) не превосходит $(6n+2)(n+1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть φ – квазимиимальный (или минимальный) связный каракуль на плоскости $\mathbb{R}^2$, d – порядок группы автоморфизмов диаграммы $\text{ADiag}(\varphi)$, продолжающихся до автоморфизмов каракуля φ (т.е. сохраняющих прообраз границы бесконечной области). Тогда $\langle \varphi, \varphi \rangle = d$ и $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$ для любого другого (т.е. неэквивалентного φ) каракуля ψ с $L(\psi) \leq L(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства многочлена $P(\mu, \varphi, \psi)$ и предложение 7 гарантируют, что слагаемое суммы (16) равно 1, если $\psi \circ \mu \circ \varphi^{-1}$ является эквивалентностью каракулей, и равно 0 в противном случае.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если сильно связанные каракули φ и ψ на плоскости $\mathbb{R}^2$ с числом точек пересечения в каждом из них меньшим или равным n не эквивалентны, то их можно различить инвариантом порядка $(6n+2)(n+1)+n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство совпадает с доказательством следствия 4.

4.2.2. Каракули общего вида на плоскости $\mathbb{R}^2$. Разница между общим случаем и случаем сильно связанных каракулей состоит в более изощренном определении (квази-)минимальных каракулей. Схема доказательства в точности та же.

Снова возьмем каракуль φ с неминимальной стрелочной диаграммой $\text{ADiag} \varphi$ и попробуем применять лемму 2 к допустимым перестройкам типов A_{-*}^* , пока это возможно. Если каракуль несвязен, то его компоненты связности (и 1-циклы) частично упорядочены следующим отношением: $\alpha \prec \beta$, если все точки пересечения α принадлежат конечной области $\mathbb{R}^2 \setminus \beta$. Будем следить за минимальной (относительно этого частичного порядка) компонентой. После успешного подъема перестройки типа A_{-*}^* до соответствующей перестройки типа O_{-*}^* с наблюдаемой компонентой возможен один из следующих случаев:

- 1) компонента распалась на две непересекающиеся кривые;
- 2) компонента распалась на две компоненты, только одна из которых является кривой, не пересекающей остальные кривые;
- 3) компонента распалась на две компоненты, ни одна из которых не является кривой, не пересекающей остальные кривые;
- 4) компонента не распалась.

Компонента связности каракуля, образованная одной кривой, ограничивающей диск в дополнении к каракулю, называется *тривиальной*. Каждую тривиальную компоненту, которая может появиться в первых двух случаях, можно протащить сквозь остальные компоненты каракуля вдаль от них всех.

Этот процесс минимизации останавливается, когда компоненты связности каракуля удовлетворяют следующим условиям:

- 1) каждая дуга или пара дуг, которые могут исчезнуть при перестройке типа A_{-*}^* , либо ограничивает бесконечную область дополнения к содержащей ее компоненте каракуля, либо ограничивает конечную область, содержащую другую нетривиальную компоненту связности каракуля;
- 2) каждая нетривиальная компонента каракуля, состоящая из единственной кривой, ограничивает конечную область, содержащую компоненту, состоящую из многих кривых.

Такой каракуль называется *квазимиимальным*.

Две нетривиальные и состоящие из одной кривой компоненты каракуля называются *эквивалентными*, если они ограничивают одно и то же множество других компонент связности. Какая из этих двух кривых ограничивает какую – несущественно, поскольку одну из них можно протащить через другую, оставляя каракуль эквивалентным.

Следующий очевидный аналог леммы 6 описывает взаимное расположение точек пересечения и 1-циклов с помощью индексов.

ЛЕММА 7. Пусть ξ – связный 1-цикл в стрелочной диаграмме $\text{ADiag}(\varphi)$ каракуля φ , не проходящий по дугам стрелочной диаграммы дважды. Образ ξ является канонически ориентированной внешней границей конечной области β дополнения к образу каракуля φ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \text{ind}_{\varphi(\xi)}(\varphi(x)) &= \frac{n(\xi, x)}{4} && \text{для любой стрелки} && x \in \xi, \\ \text{ind}_{\varphi(\xi)}(\varphi(x)) &= 1 && \text{для любой стрелки} && x \notin \xi \\ &&& \text{в прообразе границы области} && \alpha \subset \beta, \\ \text{ind}_{\varphi(\xi)}(\varphi(x)) &= 0 && \text{для любой другой стрелки} && x. \end{aligned}$$

Он является канонически ориентированной компонентой внутренней границы области (конечной или бесконечной) дополнения к образу каракуля φ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \text{ind}_{\varphi(\xi)}(\varphi(x)) &= \frac{n(\xi, x)}{4} - 1 && \text{для любой стрелки} && x \in \xi, \\ \text{ind}_{\varphi(\xi)}(\varphi(x)) &= -1 && \text{для любой стрелки} && x \notin \xi \\ &&& \text{в прообразе границы области} && \alpha \subset \beta, \\ \text{ind}_{\varphi(\xi)}(\varphi(x)) &= 0 && \text{для любой другой стрелки} && x. \end{aligned}$$

В лемме 7 к условиям леммы 6 добавлены только целочисленные условия. Это означает, что, чтобы закодировать эти условия в инварианты конечного порядка, не понадобятся никакие новые трюки. Нужно только проверить, что хотя квазимиимальный каракуль φ , вообще говоря, не является ни связным, ни минимальным, для любой стрелки x диаграммы $\text{ADiag}(\varphi)$ можно либо найти стрелку $y(x)$ (или стрелки $y_+(x)$ и $y_-(x)$, см. предложение 3 и далее), либо заменить ее на бесконечность. Это просто. Если предложение 3 неприменимо к стрелке x диаграммы связного подкаракуля φ' , то либо одна из областей дополнения к φ' , не примыкающая к $\varphi(x)$, бесконечна и $y(x)$ можно заменить бесконечностью, либо одна из них содержит другую нетривиальную компоненту каракуля φ и можно взять любую стрелку из этой компоненты. Аналогично рассматриваются стрелки $y_+(x)$ и $y_-(x)$.

Пусть квазимиимальный каракуль $\varphi: C_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ состоит из m ($m \leq k$) компонент связности $\varphi^1, \dots, \varphi^m$ с $n^1, \dots, n^m$ точками пересечения, а 1-циклы $\xi^1(\infty), \dots, \xi^m(\infty)$ являются прообразами их канонически ориентированных внешних границ. Для каждой пары подкаракулей $\varphi^i \prec \varphi^j$ через y^{ij} и ξ^{ij} обозначим прообразы точек пересечения φ^i и прообразы внешней границы области дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus \varphi^j$, содержащей φ^i .

Мы собираемся построить аналог формулы (16). Для любой компоненты φ^i , состоящей из нескольких кривых, положим

$$P^i(\mu, \varphi, \psi) = P(\mu|_{\text{ADiag}(\varphi^i)}, \varphi^i, \psi)$$

и

$$Q^i(\mu, \varphi, \psi) = p_{n^i}(-\text{ind}_{\psi(\mu(\xi^i(\infty)))}(\psi(\mu(y^i(\infty))))$$

($P^i(\dots)$ и $Q^i(\dots)$ – это сомножители в формуле (16) для φ^i). Если $\varphi^i \prec \varphi^j$, положим

$$R^{ij}(\mu, \varphi, \psi) = p_{n^j}(\text{ind}_{\psi(\mu(\xi^{ij}))}(\psi(\mu(y^{ij})))).$$

Через S обозначим множество таких пар (i, j) , $1 \leq i, j \leq m$, что $\varphi^i \prec \varphi^j$ и существуют состоящие из нескольких кривых компоненты φ^k такие, что $\varphi^i \prec \varphi^k \prec \varphi^j$. Множество S состоит из не более чем $m - 1$ пар. Действительно, каждая компонента каракуля, состоящая из одной кривой, может встретиться только как второй член пары и только один раз, а в остальных парах каждая компонента, состоящая из нескольких кривых, может встретиться в качестве первого члена пары только один раз, а максимальные относительно частичного порядка $\prec$ компоненты – вообще не могут.

Теперь положим

$$F(\mu, \varphi, \psi) = \prod_{i=1}^m (P^i(\mu, \varphi, \psi) Q^i(\mu, \varphi, \psi)) \times \prod_{(i,j) \in S} R^{ij}(\mu, \varphi, \psi).$$

Функция $F(\mu, \varphi, \psi)$ удовлетворяет условиям теоремы 6. Она является многочленом от индексов вида $\text{ind}_{\psi(\mu(\xi))}(\psi(\mu(x)))$ степени не более чем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (6n^i + 2)(n^i + 1) + 2(m-1)(n+1) &\leq (6n+8)n + 2m + 2(m-1)(n+1) \\ &= 6n(n+1) + 2m(n+2) - 2 \leq 6n(n+1) + 2k(n+2) - 2. \end{aligned}$$

Для квазимиимального каракуля φ на плоскости $\mathbb{R}^2$ определим инвариант $\langle \varphi, \cdot \rangle$ следующим образом:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{\mu: \text{ADiag}(\varphi) \rightarrow \text{ADiag}(\psi)} \sigma(\mu) F(\mu, \varphi, \psi). \quad (17)$$

По теореме 6 эта сумма является инвариантом каракулей. Если каракуль φ связан, эта формула совпадает с формулой (16).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть φ – квазимиимальный каракуль на плоскости $\mathbb{R}^2$, d – порядок группы автоморфизмов его диаграммы $\text{ADiag}(\varphi)$, продолжающихся до автоморфизмов каракуля φ . Тогда $\langle \varphi, \varphi \rangle = d$ и $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$ для любого другого (т.е. неэквивалентного φ) каракуля ψ с $L(\psi) \leq L(\varphi)$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Если k -каракули φ и ψ с числом точек пересечения в каждом меньшем или равном n не эквивалентны на плоскости $\mathbb{R}^2$, то их можно различить инвариантом порядка $6n(n+1) + 2k(n+2) - 2 + n$.

Доказательства предложения 9 и следствия 6 повторяют доказательства предложения 8 и следствия 5 соответственно.

§ 5. Инварианты конечного порядка для плоских кривых

Под *плоской кривой* будем понимать гладкое отображение $\varphi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Образ плоской кривой общего положения имеет конечное число двойных точек, в которых трансверсально пересекаются две локальные ветви кривой, а все остальные точки образа регулярны. Гомотопия общего положения такой кривой является изотопией ее образа везде, кроме конечного числа моментов, в которых у кривой есть касп, точка самокасания или тройная точка. Возле этих моментов происходит локальная перестройка типа $O_{\pm 1}^1$, $O_{\pm 2}^1$ или $O_{\frac{1}{3}}^1$ соответственно (см. рис. 1).

Классификация иммерсий окружности в плоскость без ограничений на их мультиособенности была описана Х. Уитни в работе [15]. Ответ прост: единственным инвариантом иммерсии φ является ее индекс Уитни (число вращения) $\text{ind}(\varphi)$. Изучение гомотопической классификации иммерсий окружности в плоскость без самопересечений и тройных точек было начато В.И. Арнольдом (см. [5]) и до сих пор не закончено. Были построены многочисленные инварианты, большинство которых выразимо через инварианты конечного порядка. Самые известные из них, а именно, инварианты Арнольда J^+ , J^- и St , являются инвариантами порядка 1.³

С другой стороны, прямо применить теорию Васильева и посчитать группы гомологий дискриминанта никто не пытался. Разница между этой ситуацией и ситуацией с орнаментами легко объяснима. Для орнаментов есть только один тип запрещенной особенности и пять типов допустимых перестроек, а для кривых — три (на самом деле четыре, поскольку есть два типа самокасаний — попутные и противоположные) типа запрещенных особенностей и никаких допустимых перестроек. Поэтому строить инварианты кривых легче, а изучать дискриминант — сложнее.

Ниже будет показано, что инварианты Васильева классифицируют плоские кривые. Как и в случае каракулей, используется модификация конструкции инвариантов, определенная М. Поляком в работе [10]. Нужно решить две задачи: определить классификацию особенностей кривых и порядок инвариантов (по крайней мере в объеме § 2) и построить искомые инварианты. Вторая задача — простая, а первая — долгая и трудоемкая.

В соответствии с традицией работы [5] и во избежание лишних хлопот будем рассматривать только иммерсированные кривые. Определенная ниже сложность особенностей, а значит, и порядок инвариантов, достаточно произвольны, зато позволяют с минимальными изменениями применять теорию орнаментов и каракулей.

У особой иммерсированной кривой, лежащей в конечном страте дискриминанта, имеется конечное число особых точек, у каждой из которых конечное число прообразов: 2 для самокасания общего вида и не менее 3 в остальных случаях. Пусть $s(x)$ — число прообразов такой особой точки x , а $t(x)$ — число касатель-

³ Канонического определения порядка инвариантов или, что то же самое, сложности особых точек нет. Некоторые авторы полагают сложность любой особой точки равной 1, как в теории инвариантов Васильева для узлов, в которой достаточно рассматривать только двойные точки трансверсального пересечения. На плоскости такое определение кажется слишком грубым. Более естественно, в духе общей теории инвариантов Васильева определять сложность мультиособенности как коразмерность (с точностью до постоянного множителя) подпространства объектов (узлов, каракулей, кривых, ...), имеющих эту мультиособенность в фиксированном наборе точек прообраза. Тогда сложности каспов, самокасаний и тройных точек равны 2, 3 и 4 (или 1, $\frac{3}{2}$ и 2) соответственно.

ных к кривой в точке x . Тогда сложность $\text{compl}(x)$ точки x положим равной $2s(x) - t(x) - 1$ (т.е. сложность самокасания или тройной точки общего положения равна 2, сложность тройной точки с касанием двух локальных ветвей или четверной точки равна 3 и т.д.), а сложность кривой равной сумме сложностей всех ее особых точек.

Иммерсии со сложными особыми точками можно пошагово превращать в иммерсии с более простыми особыми точками вплоть до иммерсий без особых точек следующей процедурой. Сначала, если в какой-то особой точке какие-то две локальные ветви прообраза касаются, слегка возмутим одну из них, чтобы она по-прежнему проходила через эту точку, но касание исчезло. Затем, когда все касания устранены, если через какую-то особую точку проходит не менее трех локальных ветвей, слегка возмутим одну из них, чтобы она перестала проходить через эту точку. Каждое из вышеописанных возмущений понижает сложность иммерсии на 1.

Рис. 8. Оба изображенных возмущения особой иммерсии с четверной точкой и двумя самокасаниями эквивалентны. Более того, одновременным вращением окружности-прообраза и плоскости-образа на угол π можно перевести одно в другое, сохраняя все страты дискриминанта

Теперь определим способы вырождения и характеристические числа. Обозначим через $Pj^1\varphi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ проективизацию 1-струйного расширения иммерсии φ . Ниже будут использоваться два вида меток, а именно *s-метки* и *t-метки*. Имеется 5 типов шагов вырождения:

- 1) пометка *s*-меткой тройки точек на окружности $\mathbb{S}^1$, отображаемых кривой φ в одну и ту же особую точку, ни один из прообразов которой еще не помечен;
- 2) пометка *s*-меткой, и *t*-меткой пары точек на окружности $\mathbb{S}^1$, отображаемых кривой φ в одну и ту же особую точку, ни один из прообразов которой еще не помечен;
- 3) пометка *s*-меткой точки на окружности $\mathbb{S}^1$, отображаемой кривой φ в точку, какие-то прообразы которой уже помечены;
- 4) пометка *t*-метками пары точек на окружности $\mathbb{S}^1$, уже помеченных *s*-метками и отображаемых $Pj^1\varphi$ в одну и ту же точку, ни один из прообразов которой еще не помечен *t*-меткой;

- 5) пометка t -меткой точки на окружности $\mathbb{S}^1$, уже помеченной s -меткой и отображаемой $Pj^1\varphi$ в точку, какие-то прообразы которой уже помечены t -метками.

Чтобы определить характеристические числа, как это было сделано в пп. 2.2.4 для каракулей, нужно рассмотреть соответствующие 5 типов локальных возмущений особых иммерсий и решить, какие возмущения считать положительными, а какие – отрицательными. Для шагов вырождения типов 1) и 3) это определено в пп. 2.2.4; для шагов типа 2) определено в [5]. Для шагов типа 5) это легко сделать (назовем *положительными* те возмущения, при которых касательный вектор к помечаемой точке поворачивается в положительном направлении), но для шагов типа 4) это, вообще говоря, невозможно (см. рис. 8). Этот рисунок показывает, что соответствующий страт дискриминанта не коориентируем в предыдущем страте. Чтобы обойти это препятствие, достаточно выбрать любую локальную коориентацию (например, пронумеровав прообразы особой точки) и добавить этот выбор к определению шага вырождения. Подробности мы опустим, поскольку определение порядка инварианта совпадает с определением 5 и учитывает только равенство или неравенство характеристических чисел нулю, а не их знаки, т.е. не зависит от конкретного выбора коориентаций.

Строгим представлением μ стрелочной диаграммы X в стрелочной диаграмме Y назовем диффеоморфизм их окружностей, переводящий стрелки диаграммы X в стрелки диаграммы Y , сохраняющий ориентации окружностей и направления стрелок и определенный с точностью до гомотопии (ср. с определением представления в п. 3.3, где направления стрелок можно менять). Для данной стрелочной диаграммы X с $n = L(X)$ стрелками $\{x^1, \dots, x^n\}$, набора $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ 1-циклов в ней, функции F от $m \times n$ переменных и любой регулярной кривой φ определим $\langle (X, \Xi, F), \varphi \rangle$ как сумму

$$\begin{aligned} & \langle (X, \Xi, F), \varphi \rangle \\ &= \sum_{\mu: X \rightarrow \text{ADiag}(\varphi)} F(\text{ind}_{\varphi(\mu(\xi_1))}(\varphi(\mu(x^1))), \dots, \text{ind}_{\varphi(\mu(\xi_m))}(\varphi(\mu(x^n)))) \end{aligned} \quad (18)$$

по всем строгим представлениям $X \rightarrow \text{ADiag}(\varphi)$ (ср. с формулой (5): опущены знаки $\sigma(\mu)$). Заметим, что никаких ограничений типа C -минимальности диаграммы X нет, поскольку для кривых не разрешены никакие топологические перестройки.

ТЕОРЕМА 11. *Функция $\langle (X, \Xi, F), \cdot \rangle$ является инвариантом плоских кривых. Если функция F – многочлен, то $\langle (X, \Xi, F), \cdot \rangle$ является инвариантом порядка меньшего или равного $\deg(F) + L(X)$.*

Доказательство повторяет доказательство теоремы 7. Довольно странное определение сложности особой иммерсии было специально подобрано так, чтобы сохранить оценку порядка в этой теореме.

Кривую можно рассматривать как сильно связный 1-каракуль. Как и в § 4, прообразы границ областей дополнения к кривой в ее стрелочной диаграмме определены однозначно. Границы всех этих областей связны. Единственная граничная

информация для кривой (ср. с пп. 4.2.1), отсутствующая в ее стрелочной диаграмме, — это какая из границ является границей бесконечной области. Мы восстановим эту граничную информацию по значениям инвариантов конечного порядка на кривой. Граничная информация выражается в лемме 6 через индексы. На самом деле, только одного из уравнений этой леммы уже достаточно, чтобы различить кривые.

Пусть φ — кривая общего положения с $n = L(\psi)$ точками самопересечения, ξ_∞ — прообраз в диаграмме $\text{ADiag}(\varphi)$ канонически ориентированной границы бесконечной области $\mathbb{R}^2 \setminus \varphi(S^1)$, а x_∞ — стрелка в ξ_∞ . Для любого цикла ξ в диаграмме $\text{ADiag}(\varphi)$, не проходящего ни по одной дуге дважды, и любой стрелки x $\text{ind}_{\varphi(\xi)}(\varphi(x)) \in \mathbb{Z}/4$ и $|\text{ind}_{\varphi(\xi)}(\varphi(x))| < n + 1$. Через p_φ обозначим многочлен степени $2n + 1$ такой, что $p_\varphi(\text{ind}_{\varphi(\xi_\infty)}(\varphi(x_\infty))) = 1$ и $p_\varphi(t) = 0$ для любого другого числа t вида $\text{ind}_{\varphi(\xi_\infty)}(\varphi(x_\infty)) + i$, где i — целое, и $|i| < n + 1$. Определим инвариант кривых $\langle \varphi, \cdot \rangle$ следующим частным случаем формулы (18):

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{\mu: \text{ADiag}(\varphi) \rightarrow \text{ADiag}(\psi)} p_\varphi(\text{ind}_{\psi(\mu(\xi_\infty))}(\psi(\mu(x_\infty)))).$$

По теореме 11 $\langle \varphi, \cdot \rangle$ является инвариантом порядка $3n + 1$.

ТЕОРЕМА 12. *Инварианты конечного порядка $\langle \varphi, \cdot \rangle$ и индекс Уитни классифицируют плоские кривые. Две неэквивалентные кривые с числом точек самопересечения меньшим или равным n можно различить инвариантом порядка $3n + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство совпадает с доказательствами предложения 5 и следствия 4. Индекс Уитни нужен только для того, чтобы различить две неэквивалентные кривые без самопересечений (ориентированные по и против часовой стрелки).

Список литературы

1. Vassiliev V. A. Complexes of connected graphs // The Gel'fand's mathematical seminars 1990–92 / ed. L. Corwin at all. Basel: Birkhäuser, 1993. P. 223–235.
2. Vassiliev V. A. Invariants of ornaments // Singularities and bifurcations / ed. V. I. Arnold. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. P. 225–261. (Adv. Soviet Math. V. 21.)
3. Fenn R., P. Taylor P. Introducing doodles // Topology of low-dimensional manifolds / ed. R. Fenn. New York: Springer-Verlag, 1977. P. 37–43. (Lecture Notes in Math. V. 722.)
4. Khovanov M. Doodle groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. V. 349. №6. P. 2297–2315.
5. Arnold V. I. Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications // Singularities and bifurcations / ed. V. I. Arnold. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. P. 33–91. (Adv. Soviet Math. V. 21.)
6. Bar-Natan D. Vassiliev homotopy string link invariants // J. Knot Theory Ramifications. 1995. V. 4. №1. P. 13–32.
7. Merkov A. B. Vassiliev invariants classify flat braids // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1999. V. 190. P. 83–102.
8. Mellor B. Finite type link homotopy invariants // J. Knot Theory Ramifications. 1999. V. 8. №6. P. 773–787.
9. Polyak M., Viro O. Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants // Int. Math. Res. Notices. 1994. №11. P. 445–453.
10. Polyak M. Invariants of plane curves via Gauss diagrams // Preprint MPI/116-94. Bonn: Max-Planck-Institut, 1994.

11. *Merkov A. B.* Finite-order invariants of ornaments // J. Math. Sci. (New York). 1998. V. 90. № 4. P. 2215–2273.
12. *Vassiliev V. A.* Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications (revised edition). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. (Transl. Math. Monog. V. 98.)
13. *Васильев В. А.* Топология дополнений к дискриминантам. М.: Фазис, 1997.
14. *Kontsevich M.* Vassiliev's knot invariants // I. M. Gelfand seminar. Part 2: Papers of the Gelfand seminar in functional analysis held at Moscow University, Russia, September 1993 / ed. S. Gelfand et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. P. 137–150. (Adv. Soviet Math. V. 16 (2).)
15. *Whitney H.* On regular closed curves in the plane // Compositio Math. 1937. V. 4. P. 276–284.

Институт системного анализа РАН,
г. Москва
E-mail: merx@ium.ips.ras.ru

Поступила в редакцию
26.12.2002